

สมการเชิงอนุพันธ์

Differential Equations

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

เล่มที่ 3

สมการเชิงอนุพันธ์

เล่มที่ 3

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) เล่มที่ 3

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : มิถุนายน พ.ศ. 2565

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ 978-616-593-294-3

คำนำ

หนังสือ สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) เล่มที่ 3 เป็นหนังสือใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา สมการเชิงอนุพันธ์ เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย

การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 เช่น การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง ปัญหา วงจรไฟฟ้า การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ลอยตัวบนของเหลว การเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนาฬิกา สมการเส้นลวดสลิงที่แขวน ระหว่างจุด 2 จุด ปัญหาการหมุนตัวของวัตถุ การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร เช่น สมการโคชี – ออยเลอร์ สมการเลอจองด์ ผลเฉลยในรูปแบบ อนุกรมเทย์เลอร์ การหาผลเฉลยในรูปของอนุกรมกำลัง การหาผลเฉลยโดยวิธีของโพรเบนิอุส

ฟังก์ชันที่นิยามจากผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ฟังก์ชันแกมมา ฟังก์ชันบีตา ฟังก์ชันเบสเซล ฟังก์ชันเลอจองด์

หนังสือ สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) เล่มที่ 3 ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา สมการเชิง อนุพันธ์ ซึ่งสอนให้กับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์ และ คณะวิศวกรรมศาสตร์ นอกจากนั้นหนังสือเล่มนี้สามารถใช้ ประกอบการเรียนการสอนวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ในสถาบันการศึกษาอื่น ๆ ได้

คณะผู้เรียบเรียงหวังว่าหนังสือสมการเชิงอนุพันธ์ เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับนิสิต นักศึกษาและอาจารย์ผู้สอนในทุกสถาบันที่ต้องศึกษาวิชาสมการเชิงอนุพันธ์

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ สมการเชิงอนุพันธ์ เล่มที่ 3

หน้า

บทที่ 7 การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2 1 - 243

7.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง	2
7.2 ปัญหาวงจรไฟฟ้า	114
7.3 การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ลอยตัวบนของเหลว	152
7.4 การเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนาฬิกา	167
7.5 สมการเส้นลวดสลึงที่แขวนระหว่างจุด 2 จุด	188
7.6 ปัญหาการหมุนตัวของวัตถุ	202
7.7 การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์	222

บทที่ 8 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

8.1 สมการโคชี – ออยเลอร์ (Cauchy – Euler equation)	244
8.2 สมการเลอจองด์ (Legendre equation)	264
8.3 ผลเฉลยในรูปแบบอนุกรมเทย์เลอร์	279
8.4 การหาผลเฉลยในรูปของอนุกรมกำลัง	326
8.5 การหาผลเฉลยโดยวิธีของโฟรเบเนียส	522

บทที่ 9 ฟังก์ชันที่นิยามจากผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ 774 - 929

9.1 ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function)	774
9.2 ฟังก์ชันบีตา (Beta function)	796
9.3 ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function)	807
9.4 ฟังก์ชันเลอจองด์ (Legendre function)	862

สารบัญ สมการเชิงอนุพันธ์ เล่มที่ 2

หน้า

บทที่ 5 ผลการแปลงลาปลาซ

1 – 267

5.1 ผลการแปลงลาปลาซ	1
5.2 สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ	20
5.3 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน	91
5.4 การหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นด้วยผลการแปลงลาปลาซ	167
5.5 ฟังก์ชันเฮวีไซด์ และฟังก์ชันไดเรกเดลตา	227

บทที่ 6 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์

268 – 1101

6.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์	268
6.2 การแปรตัวพารามิเตอร์ (Variation of Parameters)	374
6.3 การหาผลเฉลยในรูปแบบฟังก์ชันยกกำลังเมทริกซ์	446
6.4 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	585
6.5 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีกำจัดตัวแปร	659
6.6 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ	753
6.7 การประยุกต์ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์	845

สารบัญ สมการเชิงอนุพันธ์ เล่มที่ 1

หน้า

บทที่ 1 สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

1 – 54

1.1 สมการแยกตัวแปรได้	3
1.2 สมการเอกพันธ์	7
1.3 สมการแม่นตรง	13
1.4 สมการเชิงเส้น	27
1.5 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์	40

บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n

55 – 112

2.1 ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์	56
2.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์	76
2.3 ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์	99
2.4 ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์	106

บทที่ 3 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

113 – 162

3.1 สมการช่วย (auxiliary equation)	113
3.2 การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจากสมการช่วย	120
3.3 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและต่างกันทุกตัว	126
3.4 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนจริงและมีภาวะรากซ้ำกัน	136
3.5 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อน	147
3.6 รากของสมการช่วยเป็นจำนวนเชิงซ้อนและมีภาวะรากซ้ำ	154

บทที่ 4 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

163 – 358

4.1 การหาผลเฉลยโดยวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์	164
4.2 การหาผลเฉลยโดยใช้ตัวดำเนินการผกผัน	186
4.3 การหา $\frac{1}{P(D)} f(x)$ เมื่อ $f(x)$ มีรูปแบบเฉพาะ	208
4.4 การประยุกต์ของตัวดำเนินการ $\frac{1}{D}$ ช่วยในการอินทิเกรต	295
4.5 การหาผลเฉลยเฉพาะด้วยวิธีการแปรตัวพารามิเตอร์	314

บทที่ 7

การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่ 2

ในบทที่ 7 จะเป็นการนำประโยชน์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับที่สองมาช่วยอธิบายในเหตุการณ์และการแก้ปัญหาทางวิศวกรรม เช่น

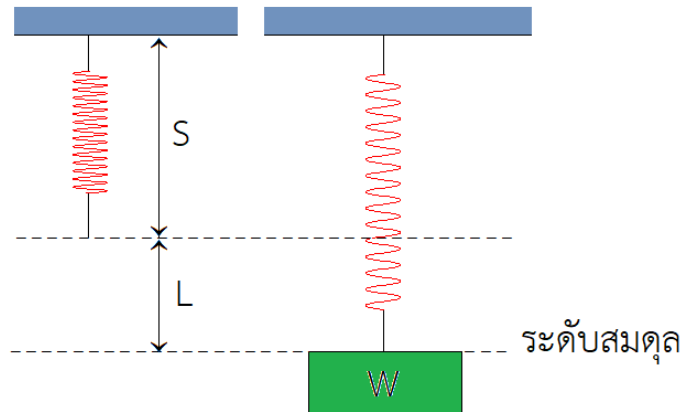
- การเคลื่อนที่ขึ้นและลงของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายของลวดสปริง
- ปัญหาวงจรไฟฟ้าที่ประกอบด้วย ตัวเก็บประจุ ตัวต้านทาน ขดลวดเหนี่ยวนำ
- การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ลอยตัวบนของเหลวเช่น น้ำ น้ำมัน
- การเคลื่อนที่ของลูกตุ้มนาฬิกา
- สมการเส้นลวดสลิงที่แขวนระหว่างจุดสองจุดเช่น สายไฟฟ้าแรงสูง สะพานแขวน
- ปัญหาการหมุนตัวของวัตถุ
- การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เช่น วิถีกระสุนปืนใหญ่ การเคลื่อนที่ของจรวด

7.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง

ลวดสปริงเส้นหนึ่งยาว S ฟุต ผูกปลายด้านบนยึดติดแน่นกับเพดาน

เมื่อปลายด้านล่างผูกติดกับวัตถุหนัก W ปอนด์ ลวดสปริงจะยืดลงมา L ฟุต

แล้วหยุดระดับที่วัตถุหยุดนิ่งเรียกว่า **ระดับสมดุล**



ขณะนี้หากเราดึงหรือผลักวัตถุขึ้นลงในแนวดิ่งก็จะทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปจากระดับสมดุลในลักษณะขึ้นหรือลง

ในหัวข้อนี้เราสนใจลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุว่าเคลื่อนที่เป็นอย่างไร

ก่อนอื่นมาพิจารณาว่าขณะที่วัตถุหยุดนิ่งมีแรงกระทำกับวัตถุ 2 แรงคือ

1. แรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ F_1
2. แรงดึงกลับของลวดสปริง F_2

การหาแรงดึงกลับของลวดสปริงทำได้ดังนี้ จากกฎของฮุค (Hooke's law)

“ เมื่อออกแรงดึงหรือกดลวดสปริงทางแนวยาว ขนาดของแรงดึงกลับ F เป็นสัดส่วนกับความยาว s ที่เปลี่ยนไป ”

เพราะฉะนั้น ถ้า F เป็นแรงดึงกลับ และ s เป็นความยาวที่เปลี่ยนไป แล้ว F แปรผันตรงกับ s

ดังนั้นมีค่าคงตัว k ที่ทำให้ $F = ks$

เพราะฉะนั้นที่ระดับสมดุลแรงจากน้ำหนักของวัตถุ = แรงดึงกลับของลวดสปริง

$$F_1 = F_2$$

$$W = Lk$$

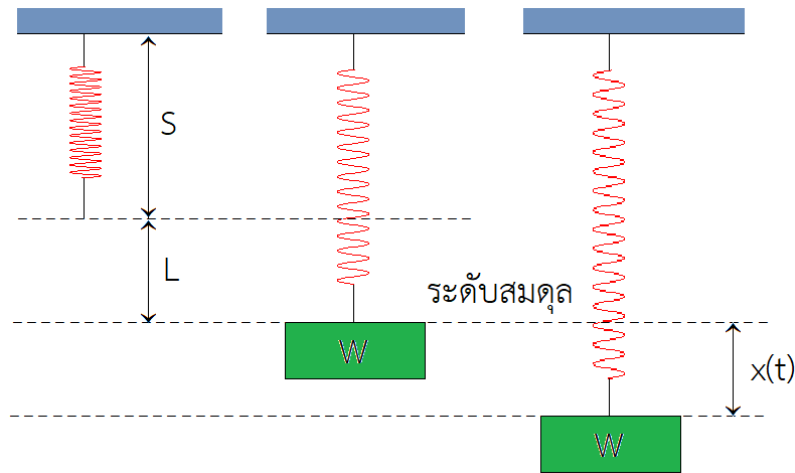
ดังนั้น $k = \frac{W}{L}$ ปอนด์ต่อฟุต เราเรียกค่าคงตัว k ว่า **ค่าคงตัวของลวดสปริง**

ตัวอย่างเช่น ผูกวัตถุหนัก 30 ปอนด์ที่ปลายของลวดสปริง ทำให้ลวดสปริงยาวลงมา 2 ฟุต

จะได้ค่าคงตัวของลวดสปริงนี้มีค่าเท่ากับ $k = \frac{W}{L} = \frac{30}{2} = 15$ ปอนด์ต่อฟุต

ต่อไปเราจะหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ (เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ในแนวดิ่งเท่านั้น)

เมื่อเราทำการดึงวัตถุลงมาแล้วปล่อยด้วยความเร็ว หรือดันขึ้นไปแล้วปล่อยด้วยความเร็วต้น



การหาสมการของการเคลื่อนที่ทำได้ดังนี้

ลวดสปริงยาว S ฟุต

ลวดสปริงมีค่าคงตัวของลวดสปริง k ปอนด์ต่อฟุต

น้ำหนักของวัตถุเท่ากับ W ปอนด์

เมื่อผูกวัตถุกับลวดสปริง ลวดสปริงยาวลงมา L ฟุตแล้วหยุดที่ระดับสมดุล

เมื่อ $t > 0$

ให้ $x = x(t)$ เป็นระยะที่วัตถุห่างจากระดับสมดุล

โดยมีข้อตกลงเกี่ยวกับเครื่องหมายของ x ดังนี้

ที่ระดับสมดุล $x = 0$

ถ้าวัตถุอยู่เหนือระดับสมดุล ให้ x มีค่าเป็นลบ, $x < 0$

ถ้าวัตถุอยู่ต่ำกว่าระดับสมดุล ให้ x มีค่าเป็นบวก, $x > 0$

เมื่อ $x = x(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ จะได้ $\frac{dx}{dt}$ เป็นความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

เพราะฉะนั้น ขณะวัตถุเคลื่อนที่ลงจะได้ว่า $\frac{dx}{dt} > 0$

ขณะวัตถุเคลื่อนที่ขึ้นจะได้ว่า $\frac{dx}{dt} < 0$

และ ขณะที่วัตถุเปลี่ยนทิศทางของการเคลื่อนที่จะได้ว่า $\frac{dx}{dt} = 0$

ขณะที่วัตถุเคลื่อนที่มีแรงที่กระทำกับวัตถุดังนี้คือ

1. แรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ F_1
2. แรงดึงกลับหรือแรงผลักลงมาของลวดสปริง F_2
3. แรงแดมป์ ซึ่งหมายถึงแรงที่ต้านทานการเคลื่อนที่ซึ่งอาจเกิดจากสภาพแวดล้อม เช่น การเคลื่อนที่ในอากาศจะมีการต้านทานการเคลื่อนที่น้อยกว่าการเคลื่อนที่ในของเหลว และทิศทางของแรงแดมป์จะตรงข้ามกับการเคลื่อนที่เสมอ การหาค่าแรงแดมป์ทำได้ดังนี้ ขนาดของแรงแดมป์แปรผันตรงกับขนาดของความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุขณะนั้น

ให้ F_3 เป็นแรงแดมป์

ดังนั้น F_3 แปรผันตรงกับ $\frac{dx}{dt}$

เนื่องจากแรงแดมป์มีทิศทางสวนทางกับการเคลื่อนที่เสมอ

ดังนั้นมีค่าคงตัว c ที่ทำให้ $F_3 = -c \frac{dx}{dt}$ และ $c > 0$

4. แรงภายนอก F_4 เช่นแรงที่เกิดจากสนามแม่เหล็ก แรงที่เกิดจากน้ำหนักแม่เหล็กถาวรมาวางไว้ได้วัตถุขณะเคลื่อนที่หรือการนำแม่เหล็กไฟฟ้ามาวางไว้เหนือวัตถุขณะเคลื่อนที่

ดังนั้นให้ $F_4 = f(t)$ เป็นแรงภายนอกที่มากระทำกับวัตถุ

ผลรวมของแรงทั้งหมดคือแรงที่ทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

จากกฎของนิวตัน (Newton's Law) จะได้ $F = ma$ เมื่อ m เป็นมวลของวัตถุ

เพราะว่า $m = \frac{W}{g}$

$g = 32$ ฟุตต่อวินาที²

และ $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ เป็นความเร่งของการเคลื่อนที่

เพราะฉะนั้น

$$ma = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = W - k(x + 1) - c \frac{dx}{dt} + f(t)$$

$$= mg - kx - kL - c \frac{dx}{dt} + f(t)$$

เพราะว่า $mg = kL$ เพราะฉะนั้น $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} + f(t)$

เพราะฉะนั้น $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ 2 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวซึ่งผลเฉลย $x(t)$ ของสมการเป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

การเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงแดมป์และแรงจากภายนอก

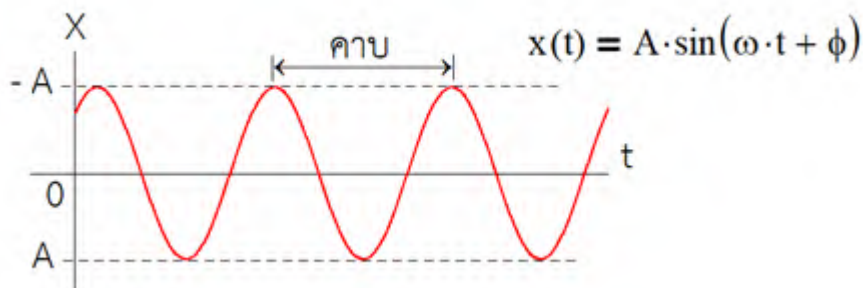
ดังนั้น $F_4 = f(t) = 0$ และ $F_3 = 0$

สมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้คือ $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

ผลเฉลย $x(t) = c_1 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_2 \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi \right)$

เมื่อ $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ และ $\phi = \arctan\left(\frac{c_1}{c_2}\right)$

การเคลื่อนที่นี้เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก



โดยที่ **แอมพลิจูด** (amplitude) ของการเคลื่อนที่หมายถึงระยะไกลสุดจากจุดระดับสมดุลเท่ากับ A ฟุต

คาบ (period) ของการเคลื่อนที่หมายถึงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ไกลสุดทางด้านบวก 2 ครั้ง ติดกัน

คาบมีค่าเท่ากับ $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ วินาทีต่อรอบ

ความถี่ (frequency) ของการเคลื่อนที่เท่ากับ $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ รอบต่อวินาที

หมายเหตุ สำหรับการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกที่แอมพลิจูดเปลี่ยนค่าตามเวลาสมการของการเคลื่อนที่เป็น

$$x(t) = A(t) \sin (\omega t + \phi)$$

หน่วยในมาตราอังกฤษและมาตราเมตริก

สัญลักษณ์	หน่วยอังกฤษ	หน่วยเมตริก
แรง $f(t)$	ปอนด์	นิวตัน
ระยะทาง $x(t)$	ฟุต	เมตร
ความเร็ว $x'(t) = v(t)$	ฟุตต่อวินาที	เมตรต่อวินาที
ความเร่ง $x''(t) = a(t)$	ฟุตต่อวินาที ²	เมตรต่อวินาที ²
มวล m	สลัก = ปอนด์ - วินาที ² ต่อฟุต	กิโลกรัม
ค่าคงตัวลดสปริง k	ปอนด์ต่อฟุต	นิวตันต่อเมตร
ค่าคงตัวแรงแดมป์ c	ปอนด์ต่อ(ฟุตต่อวินาที)	นิวตันต่อ(เมตรต่อวินาที)

ความสัมพันธ์ระหว่างหน่วยอังกฤษและหน่วยเมตริก

มวล 1 สลัก = 14.5939 กิโลกรัม

ระยะทาง 1 ฟุต = 0.304801 เมตร

ปริมาตร 1 แกลลอน = 0.13368 กิโลกรัม

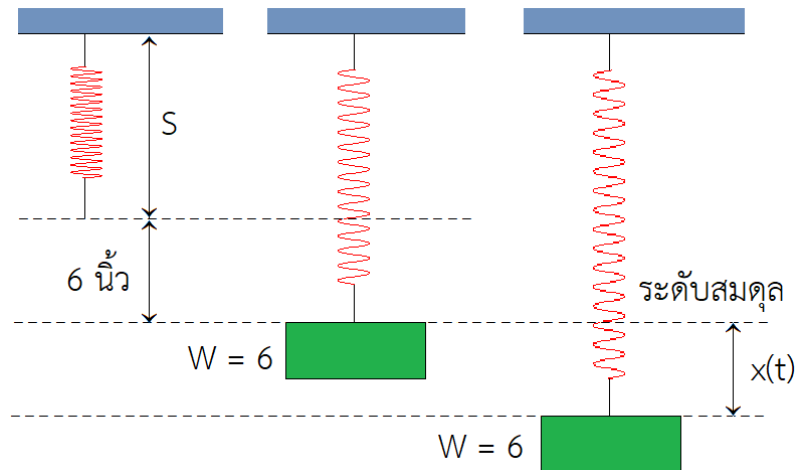
แรง 1 ปอนด์ = 4.44822 นิวตัน

ค่าคงตัวของแรงโน้มถ่วง $g = 32$ ฟุตต่อวินาที² หรือ $g = 9.80665$ เมตรต่อวินาที²

ตัวอย่าง 7.1.1 เมื่อนำวัตถุหนัก 6 ปอนด์ ผูกไว้ที่ปลายล่างของลวดสปริงจะทำให้ลวดสปริงยาวมา 6 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุนี้ลงมาต่ำกว่าระดับสมดุล 4 นิ้ว แล้วปล่อย จงหา

1. สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ
2. แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่
3. ตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของการเคลื่อนที่เมื่อเวลา $\frac{1}{2}$ วินาที หลังจากปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่

วิธีทำ



ค่าคงตัวของลวดสปริง $k = \frac{W}{L} = \frac{6}{0.5} = 12$ ปอนด์ต่อฟุต

มวลของวัตถุ $m = \frac{W}{g} = \frac{6}{32}$

$c = 0$ และ $f(t) = 0$ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ $\frac{6}{32} \frac{d^2x}{dt^2} + 12x = 0$
 $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$

รากของสมการช่วย $r^2 + 64 = 0$ คือ $r = \pm 8i$

เพราะฉะนั้น $x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t$

เพราะว่า $x = \frac{4}{12}$ เมื่อ $t = 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{4}{12} = c_1$ นั่นคือ $c_1 = \frac{1}{3}$

เพราะว่า $\frac{dx}{dt} = 0$ เมื่อ $t = 0$ เพราะฉะนั้น $0 = 8c_2$ นั่นคือ $c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $x(t) = \frac{1}{3} \cos 8t$ หรือ $x(t) = \frac{1}{3} \sin (8t + \frac{\pi}{2})$

แอมพลิจูด = $\frac{1}{3}$ ฟุต

คาบ = $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ วินาทีต่อรอบ

ความถี่ = $\frac{4}{\pi}$ รอบต่อวินาที

เพราะว่า $\frac{dx}{dt} = \frac{8}{3} \cos (8t + \frac{\pi}{2})$ และ $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{64}{3} \sin (8t + \frac{\pi}{2})$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $t = \frac{1}{2}$ วินาที จะได้

$$x(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3} \sin (4 + \frac{\pi}{2}) = -0.217881$$

$$\frac{dx}{dt}(\frac{1}{2}) = \frac{8}{3} \cos (4 + \frac{\pi}{2}) = 2.01814$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}(\frac{1}{2}) = -\frac{64}{3} \sin (4 + \frac{\pi}{2}) = 13.944397$$

เพราะฉะนั้นเมื่อเวลา $\frac{1}{2}$ วินาที วัตถุอยู่ที่ระยะ 0.22 ฟุต เหนือระดับสมดุลและกำลังเคลื่อนที่ลงมาด้วยความเร็ว

2.02 ฟุตต่อวินาที และความเร่ง 14 ฟุตต่อวินาที²



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[80]:= TraditionalForm[DSolve[
  x''[t] + 64 x[t] == 0,
  x[t], t]]
```

Out[80]//TraditionalForm=

$$\{ \{x(t) \rightarrow c_2 \sin(8 t) + c_1 \cos(8 t)\} \}$$

```
In[81]:= TraditionalForm[DSolve[
  {x''[t] + 64 x[t] == 0, x[0] == \frac{4}{12},
  x'[0] == 0},
  x[t], t]]
```

Out[81]//TraditionalForm=

$$\{ \{x(t) \rightarrow \frac{1}{3} \cos(8 t)\} \}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x(t) := \frac{1}{3} \cdot \sin\left(8 \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

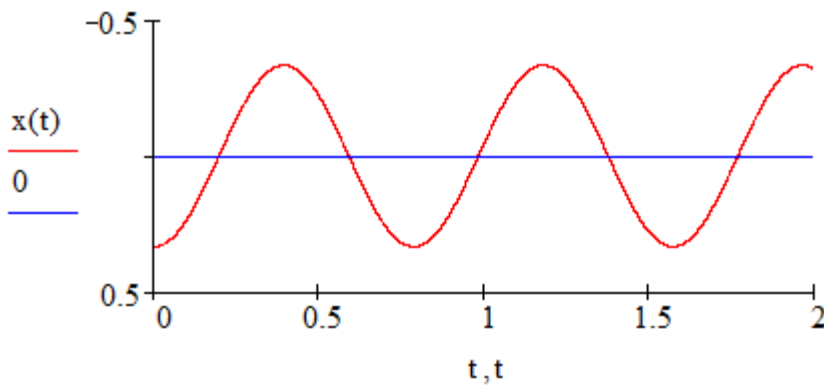
$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

$$v(t) \text{ simplify } \rightarrow \frac{-8}{3} \cdot \sin(8 \cdot t)$$

$$a(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$$a(t) \text{ simplify } \rightarrow \frac{-64}{3} \cdot \cos(8 \cdot t)$$

$$t := 0, 0.0001 \dots 2$$



$$t := 0.5$$

$$x(t) = -0.217881$$

$$v(t) = 2.018140$$

$$a(t) = 13.944397$$

$$t := 0, 0.5 \dots 2$$

$$t =$$

0.000000
0.500000
1.000000
1.500000
2.000000

$$x(t) =$$

0.333333
-0.217881
-0.048500
0.281285
-0.319220

$$v(t) =$$

0.000000
2.018140
-2.638289
1.430861
0.767742

$$a(t) =$$

-21.333333
13.944397
3.104001
-18.002218
20.430069

ตัวอย่าง 7.1.2 จากตัวอย่าง 7.1.1

ถ้าขณะที่ปล่อยให้วัตถุเคลื่อนที่นั้น เราทำการผลักวัตถุลงมาด้วยความเร็ว 2 ฟุตต่อวินาที

จงหาสมการของการเคลื่อนที่ แอมพลิจูด คาบ ความถี่ของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

และลักษณะการเคลื่อนที่เมื่อเวลา $t = 1$

วิธีทำ จากผลเฉลย $x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t$ และ $c_1 = \frac{1}{3}$

เมื่อ $t = 0$, $\frac{dx}{dt} = 2$ จะได้ $2 = 8c_2$ นั่นคือ $c_2 = \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น $x(t) = \frac{1}{3} \cos 8t + \frac{1}{4} \sin 8t$

$$= \frac{5}{12} \sin (8t + \phi)$$

$$\text{เมื่อ } \phi = \arctan \frac{4}{3} = 0.927 \text{ เรเดียน}$$

เพราะฉะนั้น แอมพลิจูด = $\frac{5}{12}$ ฟุต

คาบ = $\frac{\pi}{4}$ วินาทีต่อรอบ

ความถี่ = $\frac{4}{\pi}$ รอบต่อวินาที

เพราะว่า $x(t) = \frac{1}{3} \cos 8t + \frac{1}{4} \sin 8t$

เพราะฉะนั้น $x'(t) = \frac{40}{12} \cos (8t + \phi)$

และ $x''(t) = -\frac{320}{12} \sin (8t + \phi)$

เมื่อ $t = 1$ จะได้ $x(1) = \frac{5}{12} \sin (8 + 0.927) = 0.1988$

$$x'(1) = \frac{40}{12} \cos (8 + 0.927) = -2.9295$$

$$x''(1) = -\frac{320}{12} \sin (8 + 0.927) = 12.7233$$

เพราะฉะนั้นเมื่อเวลา $t = 1$ จะได้

วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง 0.1988 ฟุตใต้ระดับสมดุล กำลังเคลื่อนที่ขึ้นด้วยความเร็ว 2.9295 ฟุตต่อวินาที

และความเร่ง 12.7233 ฟุตต่อวินาที²



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[58]:= TraditionalForm[DSolve[
  x''[t] + 64 x[t] == 0,
  x[t], t]]
```

Out[58]/TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow c_2 \sin(8 t) + c_1 \cos(8 t)\}\}$$

```
In[59]:= TraditionalForm[DSolve[
  {x''[t] + 64 x[t] == 0,
   x[0] == 4/12, x'[0] == 2},
  x[t], t]]
```

Out[59]/TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow \frac{1}{12} (3 \sin(8 t) + 4 \cos(8 t))\}\}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad และ Mathematica

$$x(t) := \frac{1}{3} \cdot \cos(8 \cdot t) + \frac{1}{4} \cdot \sin(8 \cdot t)$$

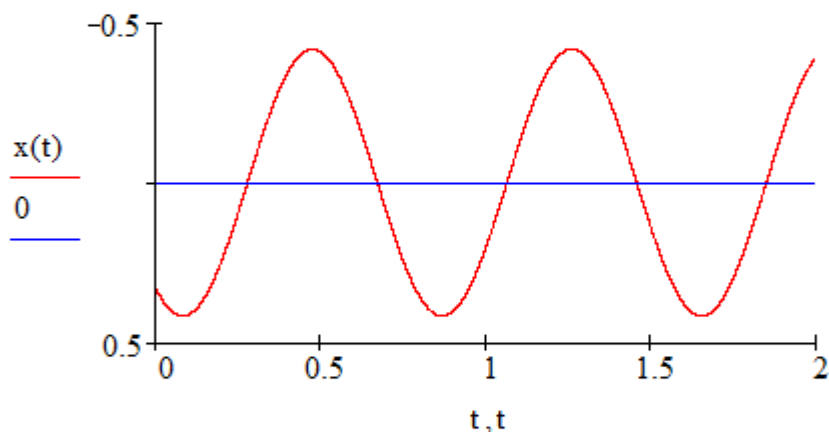
$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

$$v(t) \text{ simplify } \rightarrow \frac{-8}{3} \cdot \sin(8 \cdot t) + 2 \cdot \cos(8 \cdot t)$$

$$a(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$$a(t) \text{ simplify } \rightarrow \frac{-64}{3} \cdot \cos(8 \cdot t) - 16 \cdot \sin(8 \cdot t)$$

$$t := 0, 0.0001 \dots 2$$



$$t := 1$$

$$x(t) = 0.198840$$

$$v(t) = -2.929289$$

$$a(t) = -12.725731$$

$$t := 0, 0.5 \dots 2$$

$$t =$$

$$x(t) =$$

$$v(t) =$$

$$a(t) =$$

0.000000
0.500000
1.000000
1.500000
2.000000

0.333333
-0.407082
0.198840
0.147141
-0.391196

2.000000
0.710853
-2.929289
3.118569
-1.147577

-21.333333
26.053237
-12.725731
-9.417051
25.036522

การเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

เพราะฉะนั้น $F_4 = f(t) = 0$

เพราะฉะนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้คือ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$

รากของสมการช่วยคือ $r = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$

เราพิจารณาลักษณะรากของสมการช่วยเป็น 3 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $c^2 - 4mk < 0$

เพราะฉะนั้นรากสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อน $r = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} i$

ผลเฉลยของสมการคือ

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{ct}{2m}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) \right) \\ &= e^{-\frac{ct}{2m}} A \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t + \phi\right) \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ และ } \phi = \arctan \frac{c_1}{c_2}$$

$A e^{-\frac{ct}{2m}}$ เรียกว่า **ตัวประกอบแรงแดมป์** (damping factor)

ลักษณะของการเคลื่อนที่จะมีแอมพลิจูดเปลี่ยนตามเวลา t

และ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ นั่นคือเมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ วัตถุจะหยุดการเคลื่อนที่

การเคลื่อนที่แบบนี้เรียกว่า **การเคลื่อนที่ในลักษณะสั่นภายในแรงแดมป์** (damped, oscillatory motion)

กรณีที่ 2 $c^2 - 4mk = 0$

เพราะฉะนั้น $r = -\frac{c}{2m}$ เป็นรากซ้ำกัน 2 ของสมการช่วย

$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{ct}{2m}}$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้วัตถุจะไม่เกิดการสั่นแต่จะค่อย ๆ เคลื่อนที่แล้วหยุดนิ่งที่ระดับสมดุล การเคลื่อนที่ในลักษณะนี้เรียกว่า **การเคลื่อนที่ภายใต้ค่าวิกฤตของแรงแดมป์** (critically damped motion)

กรณีที่ 3 $c^2 - 4mk > 0$

เพราะฉะนั้นรากสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อนจริง 2 ค่าคือ

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \text{ และ } r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

เพราะว่า $\sqrt{c^2 - 4mk} < 0$ เพราะฉะนั้น $r_1 < 0$ และ $r_2 < 0$

สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุคือ $x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ ซึ่งลักษณะของการเคลื่อนที่จะไม่มีการสั่นไปมา

เพราะว่า $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = 0$

เพราะฉะนั้นเมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ วัตถุจะหยุดนิ่ง

การเคลื่อนที่ในลักษณะนี้เรียกว่า การเคลื่อนที่ภายใต้แรงแดมป์ที่มากเกินไป (overdamped motion)

ตัวอย่าง 7.1.3 ยึดปลายสปริงด้านหนึ่งกับเพดานห้อง และปลายที่เคลื่อนที่อยู่กับน้ำหนัก 64 ปอนด์ จะทำให้เส้นลวดสปริงยาวออกจากเดิม 16 ฟุต ต่อไปดึงวัตถุลงมาจากระดับสมดุล 6 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่โดยไม่มีแรงภายนอกกระทำ นอกจากแรงแดมป์อันเนื่องมาจากสภาพแวดล้อมมีค่าคงตัวแรงแดมป์ $c = 4$ เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ $W = 32$ ปอนด์

$$\text{ค่าคงตัวของลวดสปริง} = \frac{W}{L} = \frac{64}{16} = 4 \text{ ปอนด์ต่อฟุต}$$

$$\text{สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ} \quad \frac{64}{32} \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$$\text{รากสมการช่วย } r^2 + 2r + 2 = 0 \text{ คือ } r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$$

$$\text{เพราะฉะนั้นผลเฉลย } x(t) = e^{-t} (c_1 \cos t + c_2 \sin t)$$

$$\text{เพราะว่า } x = \frac{1}{2} \text{ เมื่อ } t = 0 \text{ เพราะฉะนั้น } \frac{1}{2} = c_1$$

$$\text{เพราะว่า } \frac{dx}{dt} = 0 \text{ เมื่อ } t = 0 \text{ และ}$$

$$x'(t) = -e^{-t} \left(\frac{1}{2} \cos t + c_2 \sin t \right) + e^{-t} \left(-\frac{1}{2} \cos t + c_2 \cos t \right)$$

$$\text{จะได้ } 0 = -\frac{1}{2} + c_2 \text{ ดังนั้น } c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x(t) = e^{-t} \left(\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin 2\sqrt{3}t \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right)$$

เพราะฉะนั้นการเคลื่อนที่เป็นการเคลื่อนที่ในลักษณะสั่นภายใต้แรงแดมป์โดยมีตัวประกอบแรงแดมป์เท่ากับ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \text{ และคาบของการเคลื่อนที่เท่ากับ } 2\pi \text{ และความถี่เท่ากับ } \frac{1}{2\pi}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[88]:= TraditionalForm[DSolve[
  x''[t] + 2 x'[t] + 2 x[t] == 0,
  x[t], t]]
```

Out[88]/TraditionalForm=

$$\{ \{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-t} \sin(t) + c_2 e^{-t} \cos(t) \} \}$$

```
In[89]:= TraditionalForm[DSolve[
  { x''[t] + 2 x'[t] + 2 x[t] == 0,
    x[0] == 1/2, x'[0] == 0 },
  x[t], t]]
```

Out[89]/TraditionalForm=

$$\{ \{ x(t) \rightarrow \frac{1}{2} e^{-t} (\sin(t) + \cos(t)) \} \}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x(t) := e^{-t} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(t) + \frac{1}{2} \cdot \sin(t) \right)$$

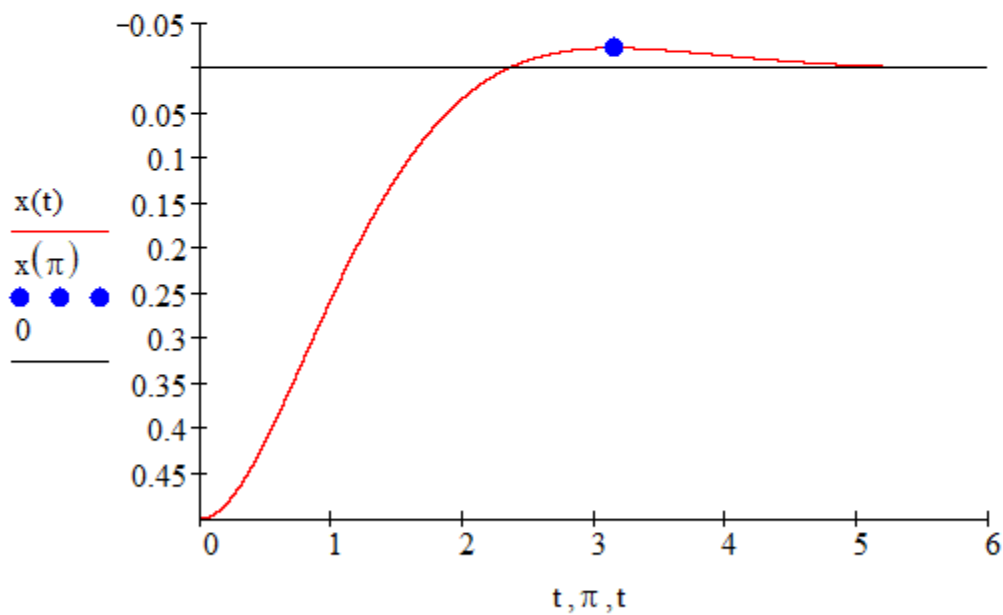
$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

$$v(t) \text{ simplify } \rightarrow -\exp(-t) \cdot \sin(t)$$

$$a(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$$a(t) \text{ simplify } \rightarrow -\exp(-t) \cdot \cos(t) + \exp(-t) \cdot \sin(t)$$

$$t := 0, 0.0001 \dots 10$$



$$t := \pi$$

$$x(t) = -0.021607$$

$$v(t) = 0.000000$$

$$a(t) = 0.043214$$

ตัวอย่าง 7.1.4 จากตัวอย่าง 7.1.3 ถ้าแรงแดมป์เปลี่ยนไปเป็น $c = 4\sqrt{2}$ เท่าของความเร็วขณะเคลื่อนที่ จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ เมื่อค่า $c = 4\sqrt{2}$

$$\text{สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ } 2 \frac{d^2x}{dt^2} + 4\sqrt{2} \frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\sqrt{2} \frac{dx}{dt} + 2x = 0$$

$$\text{เพราะว่าสมการช่วย } r^2 + 2\sqrt{2} r + 2 = 0$$

$$(r + \sqrt{2})^2 = 0$$

เพราะว่าสมการช่วยมีราก $r = -\sqrt{2}$ ภาวะรากซ้ำ 2

$$\text{เพราะฉะนั้น } x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\text{เพราะว่า } x = \frac{1}{2} \text{ เมื่อ } t = 0 \text{ เพราะฉะนั้น } c_1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{เพราะว่า } \frac{dx}{dt} = 0 \text{ เมื่อ } t = 0$$

$$\text{จาก } x(t) = \left(\frac{1}{2} + c_2 t \right) e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\text{จะได้ } x'(t) = -\sqrt{2} e^{-\sqrt{2}t} \left(\frac{1}{2} + c_2 t \right) + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\text{ดังนั้น } 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + c_2 \text{ และ } c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} t \right) e^{-\sqrt{2}t}$$

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sqrt{2} e^{-\sqrt{2}t} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} t \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}t} \\ &= \left(-\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} t \right) e^{-\sqrt{2}t} \end{aligned}$$

สรุปการเคลื่อนที่เป็นในลักษณะการเคลื่อนที่ภายใต้ค่าวิกฤตของแรงแดมป์

$$\text{เพราะว่า } x(t) > 0 \text{ และ } \frac{dx}{dt} = \left(-\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} t \right) e^{-\sqrt{2}t} < 0 \text{ ทุกค่า } t$$

เพราะฉะนั้นวัตถุจะค่อย ๆ เคลื่อนที่จากระยะ $\frac{1}{2}$ พุด ต่ำกว่าระดับสมดุล แล้วค่อย ๆ เคลื่อนที่ขึ้นมาสู่ระดับสมดุล และหยุดนิ่งที่ระดับสมดุลเมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ □

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[72]:= TraditionalForm[DSolve[
  x''[t] + 2 Sqrt[2] x'[t] + 2 x[t] == 0,
  x[t], t]]
```

Out[72]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-\sqrt{2} t} + c_2 e^{-\sqrt{2} t} t \right\} \right\}$$

```
In[73]:= TraditionalForm[DSolve[
  {x''[t] + 2 Sqrt[2] x'[t] + 2 x[t] == 0,
   x[0] == 1/2, x'[0] == 0},
  x[t], t]]
```

Out[73]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2} t} (\sqrt{2} t + 1) \right\} \right\}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x(t) := \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot t \right) \cdot e^{-\sqrt{2} \cdot t}$$

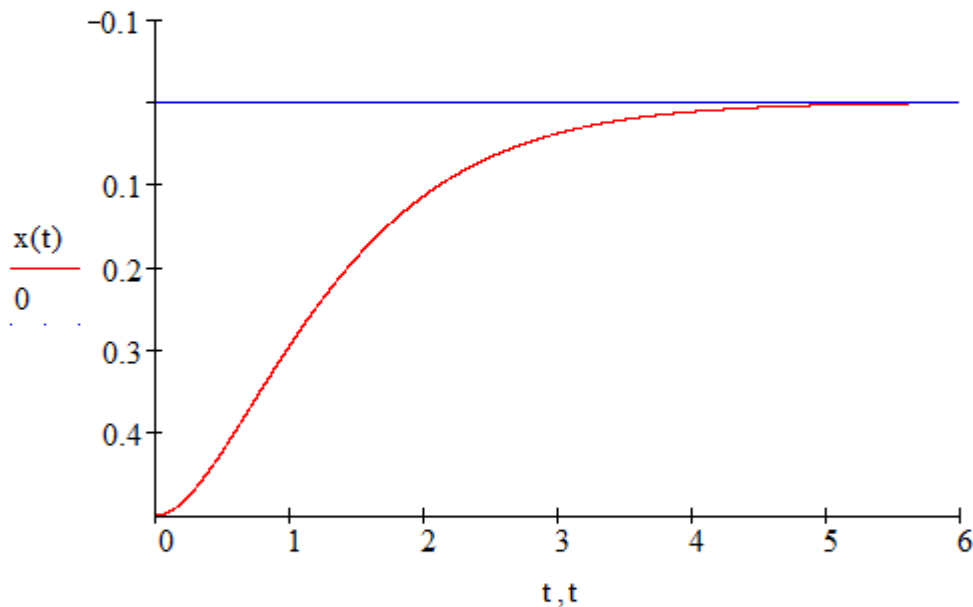
$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

$$v(t) \text{ simplify } \rightarrow -\exp\left(-2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) \cdot t$$

$$a(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$$a(t) \text{ simplify } \rightarrow -\exp\left(-2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) + \exp\left(-2^{\frac{1}{2}} \cdot t\right) \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot t$$

$$t := 0, 0.001 \dots 10$$



$$t := 1$$

$$x(t) = 0.293468$$

$$v(t) = -0.243117$$

$$a(t) = 0.100702$$

$$t := 0, 0.5 \dots 2$$

$$t =$$

0.000000
0.500000
1.000000
1.500000
2.000000

$$x(t) =$$

0.500000
0.420860
0.293468
0.187081
0.113141

$$v(t) =$$

$2.495187 \cdot 10^{-15}$
-0.246534
-0.243117
-0.179810
-0.118211

$$a(t) =$$

-1.000000
-0.144416
0.100702
0.134416
0.108071

ตัวอย่าง 7.1.5 จากตัวอย่าง 7.1.3 ให้ค่าคงตัวแรงแดมป์ $c = 6$ เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่
จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ เพราะว่า $c = 10$

เพราะฉะนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ $2 \frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 4x = 0$

$$\text{สมการช่วย} \quad r^2 + 3r + 2 = 0$$

$$(r + 1)(r + 2) = 0$$

$$r = -1, -2$$

$$\text{ดังนั้นผลเฉลย} \quad x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$$

$$\text{และ} \quad x'(t) = -c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-2t}$$

$$\text{เพราะว่า } x(0) = \frac{1}{2} \text{ และ } x'(0) = 0 \text{ เพราะฉะนั้น } c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \text{ และ } -c_1 - 2c_2 = 0$$

$$\text{ดังนั้น } c_1 = 1 \text{ และ } c_2 = -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $x(t) = e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-2t}$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ภายใต้แรงแดมป์มากเกินไป

$$\text{เพราะว่า} \quad x(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} (2e^t - 1) > 0$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad x'(t) &= -e^{-t} + e^{-2t} \\ &= -e^{-2t}(e^t - 1) < 0 \text{ เมื่อ } t > 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นวัตถุจะเคลื่อนที่จากระยะ $\frac{1}{2}$ ฟุต ใต้ระดับสมดุลและเคลื่อนที่ขึ้นมาสู่ระดับสมดุล และค่อย ๆ หยุดนิ่งได้
ระดับสมดุล □

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[76]:= TraditionalForm[DSolve[
    2 x''[t] + 6 x'[t] + 4 x[t] == 0,
    x[t], t]]
```

```
Out[76]/TraditionalForm=
{{x(t) -> c1 e^{-2 t} + c2 e^{-t}}}
```

```
In[77]:= TraditionalForm[DSolve[
    {2 x''[t] + 6 x'[t] + 4 x[t] == 0,
     x[0] == 1/2, x'[0] == 0},
    x[t], t]]
```

```
Out[77]/TraditionalForm=
{{x(t) -> 1/2 e^{-2 t} (2 e^t - 1)}}
```

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x(t) := e^{-t} - \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot t}$$

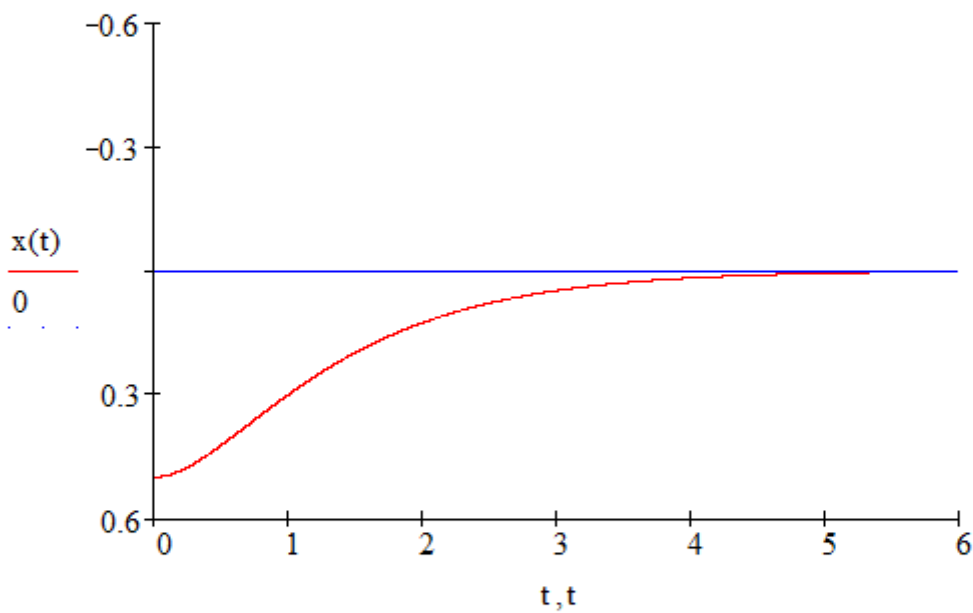
$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

$$v(t) \text{ simplify } \rightarrow -\exp(-t) + \exp(-2 \cdot t)$$

$$a(t) := \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

$$a(t) \text{ simplify } \rightarrow \exp(-t) - 2 \cdot \exp(-2 \cdot t)$$

$$t := 0, 0.001 \dots 10$$



$$t := 1$$

$$x(t) = 0.300212$$

$$v(t) = -0.232544$$

$$a(t) = 0.097209$$

$$t := 0, 0.5 \dots 2$$

$$t =$$

0.000000
0.500000
1.000000
1.500000
2.000000

$$x(t) =$$

0.500000
0.422591
0.300212
0.198237
0.126177

$$v(t) =$$

$-8.210046 \cdot 10^{-15}$
-0.238651
-0.232544
-0.173343
-0.117020

$$a(t) =$$

-1.000000
-0.129228
0.097209
0.123556
0.098704

การเคลื่อนที่ของวัตถุที่มีทั้งแรงแดมป์และแรงภายนอก

สมการของการเคลื่อนที่ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$ มีผลเฉลย $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$

โดยที่ $x_c(t)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$

เราเรียก $x_c(t)$ ว่าเป็น **พจน์ชั่วคราว** (transient term) ของการเคลื่อนที่

และ $x_p(t)$ ที่ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

เราเรียก $x_p(t)$ ว่าเป็น **พจน์สถานะคงตัว** (steady – state term) ของการเคลื่อนที่

เพราะว่า $\lim_{t \rightarrow \infty} x_c(t) = 0$ เพราะฉะนั้นเมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ การเคลื่อนที่ของวัตถุจะเป็นไปตามสมการของการเคลื่อนที่ $x(t) = x_p(t)$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 7.1.6 ยึดปลายสปริงด้านหนึ่งกับคานและปลายที่เคลื่อนที่ติดกับวัตถุหนัก 32 ปอนด์ ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 13 ปอนด์ต่อฟุต มีแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุเท่ากับ $f(t) = 6\sqrt{5} \cos t$ มีค่าคงตัวแรงแดมป์เท่ากับ $c = 2$ เท่าของความเร็วในการเคลื่อนที่ ปล่อยให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุลด้วยความเร็วต้นเท่ากับศูนย์ จงหาสมการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ $\frac{32}{32} \frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 13x = 6\sqrt{5} \cos t$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 13x = 6\sqrt{5} \cos t$$

การหาพจน์ชั่วคราว $x_c(t)$

รากสมการช่วย $r^2 + 6r + 13 = 0$ คือ $r = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = -3 \pm 2i$

เพราะฉะนั้น $x_c(t) = e^{-3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t)$

การหาพจน์สถานะคงตัว $x_p(t)$

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{D^2 + 6D + 13} 6\sqrt{5} \cos t \\ &= (6\sqrt{5}) \frac{1}{D^2 + 6D + 13} \cos t \\ &= (6\sqrt{5}) \frac{1}{-1^2 + 6D + 13} \cos t \\ &= (6\sqrt{5}) \frac{1}{6D + 12} \cos t \\ &= \sqrt{5} \frac{1}{D + 2} \cos t \\ &= \sqrt{5} \frac{D - 2}{D - 2} \frac{1}{D + 2} \cos t \\ &= \sqrt{5} (D - 2) \frac{1}{D^2 - 4} \cos t \\ &= \sqrt{5} (D - 2) \frac{1}{-1^2 - 4} \cos t \\ &= \sqrt{5} (D - 2) \frac{1}{-5} \cos t \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} (D - 2) \cos t \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} (-\sin t - 2 \cos t) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$

$$= e^{-3t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin t - 2 \cos t)$$

จาก $x(0) = 0$ จะได้ $0 = c_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$ เพราะฉะนั้น $c_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= e^{-3t}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2t + c_2 \sin 2t\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin t - 2 \cos t)$$

$$x'(t) = -3e^{-3t}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2t + c_2 \sin 2t\right) + e^{-3t}\left(\frac{4}{\sqrt{5}} \sin 2t + 2c_2 \cos 2t\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\cos t + 2 \sin t)$$

จาก $x'(0) = 0$ จะได้

$$0 = -3\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} + 0\right) + (0 + 2c_2) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-1 + 0)$$

$$0 = \frac{6}{\sqrt{5}} + 2c_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$c_2 = -\frac{7}{2\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } x(t) &= e^{-3t}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2t - \frac{7}{2\sqrt{5}} \sin 2t\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin t - 2 \cos t) \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{5}} e^{-3t}(4 \cos 2t + 7 \sin 2t) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin t - 2 \cos t) \\ &= -\frac{\sqrt{65}}{2\sqrt{5}} e^{-3t}\left(\frac{4}{\sqrt{65}} \cos 2t + \frac{7}{\sqrt{65}} \sin 2t\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin t - 2 \cos t) \\ &= -\frac{\sqrt{13}}{2} e^{-3t} \sin(2t + \phi_1) - \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sin t - 2 \cos t) \text{ เมื่อ } \phi_1 = \arctan \frac{4}{7} \\ &= -\frac{\sqrt{13}}{2} e^{-3t} \sin(2t + \phi_1) + \frac{1}{\sqrt{5}}(2 \cos t + \sin t) \\ &= -\frac{\sqrt{13}}{2} e^{-3t} \sin(2t + \phi_1) + \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{5}} \sin t\right) \\ &= -\frac{\sqrt{13}}{2} e^{-3t} \sin(2t + \phi_1) + \sin(t + \phi_2) \text{ เมื่อ } \phi_2 = \arctan \frac{2}{1} \end{aligned}$$

เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยมีพจน์ชั่วคราว $x_c(t) = -\frac{\sqrt{13}}{2} e^{-3t} \sin(2t + \phi_1)$

และพจน์สถานะคงตัว $x_p(t) = \sin(t + \phi_2)$



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[38]:= TraditionalForm[
  DSolve[x''[t] + 6 x'[t] + 13 x[t] == 0, x[t], t]
]
```

Out[38]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-3t} \sin(2t) + c_2 e^{-3t} \cos(2t) \right\} \right\}$$

```
In[39]:= TraditionalForm[Simplify[
  DSolve[x''[t] + 6 x'[t] + 13 x[t] == 6 Sqrt[5] Cos[t], x[t], t]
]]
```

Out[39]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-3t} \sin(2t) + c_2 e^{-3t} \cos(2t) + \frac{\sin(t)}{\sqrt{5}} + \frac{2 \cos(t)}{\sqrt{5}} \right\} \right\}$$

```
In[40]:= TraditionalForm[Expand[Simplify[
  DSolve[{x''[t] + 6 x'[t] + 13 x[t] == 6 Sqrt[5] Cos[t],
    x[0] == 0, x'[0] == 0},
  x[t], t]
]]]
```

Out[40]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow \frac{\sin(t)}{\sqrt{5}} + \frac{2 \cos(t)}{\sqrt{5}} - \frac{2 e^{-3t} \cos(2t)}{\sqrt{5}} - \frac{7 e^{-3t} \sin(t) \cos(t)}{\sqrt{5}} \right\} \right\}$$

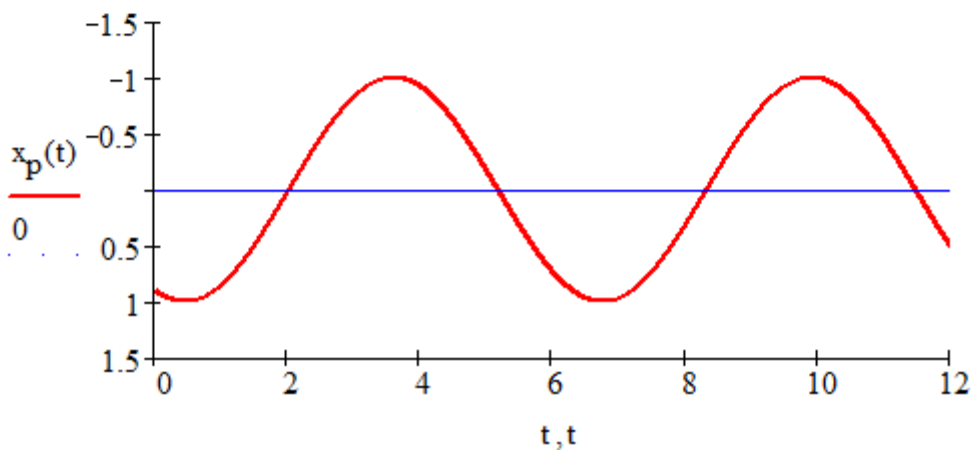
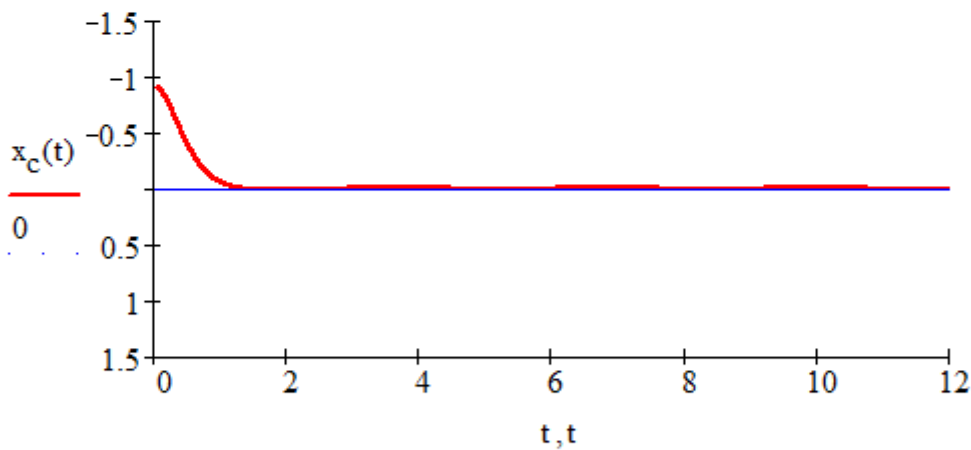
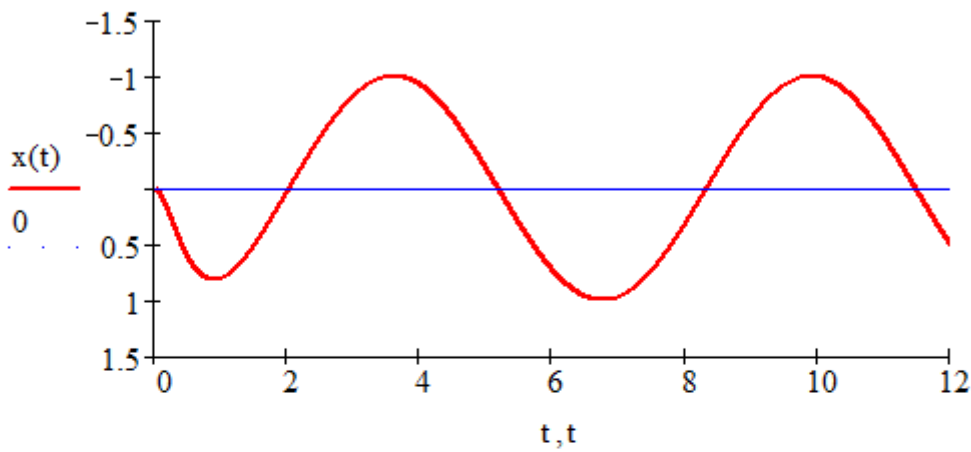
การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x_c(t) := e^{-3 \cdot t} \cdot \left(\frac{-2}{\sqrt{5}} \cdot \cos(2 \cdot t) - \frac{7}{2 \cdot \sqrt{5}} \cdot \sin(2 \cdot t) \right)$$

$$x_p(t) := \frac{\sin(t)}{\sqrt{5}} + \frac{2 \cdot \cos(t)}{\sqrt{5}}$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.0001 \dots 12$$



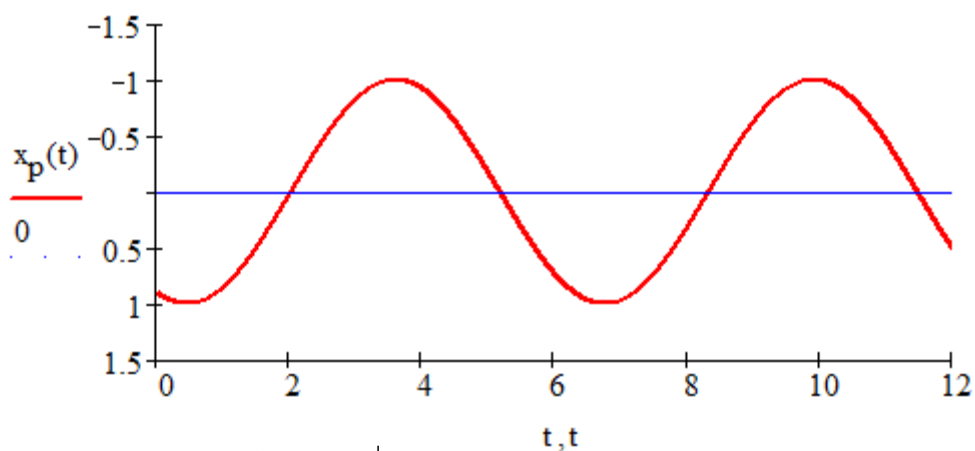
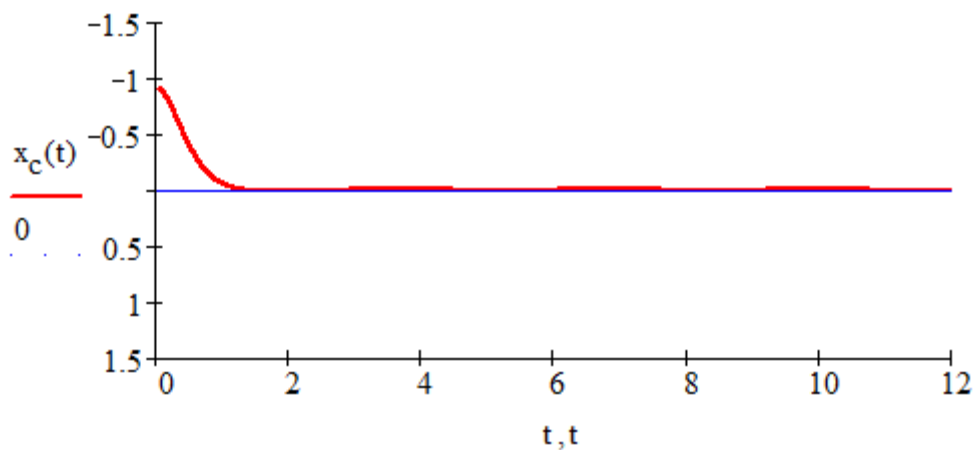
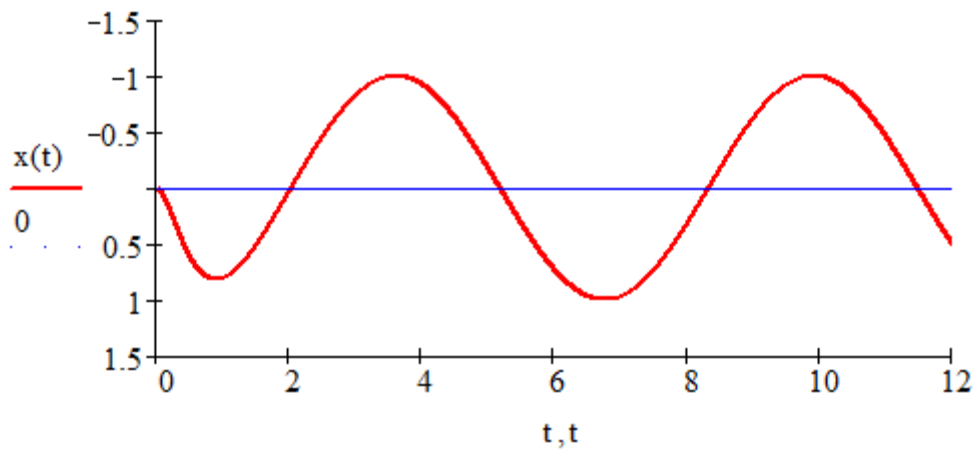
การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x_c(t) := -\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right) \cdot e^{-3 \cdot t} \cdot \left(\sin\left(2 \cdot t + \operatorname{atan}\left(\frac{4}{7}\right)\right)\right)$$

$$x_p(t) := \sin(t + \operatorname{atan}(2))$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.0001 \dots 12$$



จากกราฟของ $x(t)$ จะเห็นได้ว่า เมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ ($t > 4$) กราฟของ $x(t)$ เหมือนกับ $x_p(t)$

ตัวอย่าง 7.1.7 ยึดปลายสปริงด้านหนึ่งกับคานและปลายที่ปล่อยผูกติดกับวัตถุหนัก 32 ปอนด์ ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 25 ปอนด์ต่อฟุต มีแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุเท่ากับ $f(t) = \cos t$ มีค่าคงตัวแรงแดมป์เท่ากับ $c = 8$ เท่าของความเร็วในการเคลื่อนที่ ปล่อยให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุลด้วยความเร็วเริ่มต้นเท่ากับศูนย์ จงหาสมการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ
$$\frac{32}{32} \frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 25x = \cos t$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 25x = \cos t$$

การหาพจน์ชั่วคราว $x_c(t)$

รากของสมการช่วย $r^2 + 8r + 25 = 0$ คือ $r = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(1)(25)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = -4 \pm 3i$

เพราะฉะนั้น $x_c(t) = e^{-4t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t)$

การหาพจน์สถานะคงตัว $x_p(t)$

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{D^2 + 8D + 25} \cos t \\ &= \frac{1}{-1^2 + 8D + 25} \cos t \\ &= \frac{1}{8D + 24} \cos t \\ &= \frac{1}{8} \frac{1}{D + 3} \cos t \\ &= \frac{1}{8} (D - 3) \frac{1}{D - 3} \frac{1}{D + 3} \cos t \\ &= \frac{1}{8} (D - 3) \frac{1}{D^2 - 9} \cos t \\ &= \frac{1}{8} (D - 3) \frac{1}{-1^2 - 9} \cos t \\ &= \frac{1}{8} (D - 3) \frac{1}{-10} \cos t \\ &= -\frac{1}{80} (D - 3) \cos t \\ &= -\frac{1}{80} (-\sin t - 3 \cos t) \\ &= \frac{1}{80} (\sin t + 3 \cos t) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$

$$= e^{-4t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) + \frac{1}{80} (\sin t + 3 \cos t)$$

เพราะว่า $x(0) = 0$

$$(1)(c_1 + c_2(0)) + \frac{1}{80}(0 + 3) = 0$$

เพราะฉะนั้น $c_1 = -\frac{3}{80}$

ดังนั้น $x(t) = e^{-4t}(-\frac{3}{80} \cos 3t + c_2 \sin 3t) + \frac{1}{80}(\sin t + 3 \cos t)$

$$x'(t) = e^{-4t}(\frac{9}{80} \sin 3t + 3c_2 \cos 3t) - 4e^{-4t}(-\frac{3}{80} \cos 3t + c_2 \sin 3t) + \frac{1}{80}(\cos t - 3 \sin t)$$

เพราะว่า $x'(0) = 0$

$$(1)(0 + 3c_2(1) - 4(1)(-\frac{3}{80}(1) + 0) + \frac{1}{80}(1 - 0) = 0$$

$$3c_2 + \frac{12}{80} + \frac{1}{80} = 0$$

เพราะฉะนั้น $c_2 = -\frac{13}{240}$

เพราะฉะนั้น $x(t) = e^{-4t}(-\frac{3}{80} \cos 3t - \frac{13}{240} \sin 3t) + \frac{1}{80}(\sin t + 3 \cos t)$

$$= -\frac{1}{240}e^{-4t}(9 \cos 3t + 13 \sin 3t) + \frac{1}{80}(\sin t + 3 \cos t)$$

$$= -\frac{\sqrt{9^2+13^2}}{240}e^{-4t}(\frac{9}{\sqrt{9^2+13^2}} \cos 3t + \frac{13}{\sqrt{9^2+13^2}} \sin 3t)$$

$$+ \frac{\sqrt{10}}{80}(\frac{1}{\sqrt{10}} \sin t + \frac{3}{\sqrt{10}} \cos t)$$

$$= -\frac{\sqrt{250}}{240}e^{-4t}(\frac{9}{\sqrt{250}} \cos 3t + \frac{13}{\sqrt{250}} \sin 3t)$$

$$+ \frac{\sqrt{10}}{80}(\frac{1}{\sqrt{10}} \sin t + \frac{3}{\sqrt{10}} \cos t)$$

$$= -\frac{\sqrt{10}}{48}e^{-4t} \sin(3t + \phi_1) + \frac{\sqrt{10}}{80} \sin(t + \phi_2)$$

เมื่อ $\phi_1 = \arctan \frac{9}{13}$ และ $\phi_2 = \arctan 3$

เพราะฉะนั้นการเคลื่อนที่ของวัตถุมีพจน์ชั่วคราวเป็น $-\frac{\sqrt{10}}{48}e^{-4t} \sin(3t + \phi_1)$

และเมื่อเวลาผ่านไปนานประมาณ $t > 5$ จะพบว่าพจน์ชั่วคราวจะไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่

และวัตถุจะเคลื่อนที่ภายใต้สมการของพจน์สถานะคงตัวคือ $\frac{\sqrt{10}}{80} \sin(t + \phi_2)$

ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิกที่มีแอมพลิจูด $= \frac{\sqrt{10}}{80}$ ฟุต คาบ $= 2\pi$ วินาทีต่อรอบ

และ ความถี่ $= \frac{1}{2\pi}$ รอบต่อวินาที



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[54]:= TraditionalForm[DSolve[
  x''[t] + 8 * x'[t] + 25 * x[t] == 0,
  x[t], t]]
```

```
Out[54]/TraditionalForm=
{{x(t) -> c1 e^{-4 t} sin(3 t) + c2 e^{-4 t} cos(3 t)}}
```

```
In[55]:= TraditionalForm[FullSimplify[DSolve[
  x''[t] + 8 * x'[t] + 25 * x[t] == Cos[t],
  x[t], t]
]]
```

```
Out[55]/TraditionalForm=
{{x(t) -> e^{-4 t} (c1 sin(3 t) + c2 cos(3 t)) + \frac{1}{80} (sin(t) + 3 cos(t))}}
```

```
In[56]:= TraditionalForm[TrigReduce[DSolve[
  {x''[t] + 8 * x'[t] + 25 * x[t] == Cos[t],
   x[0] == 0, x'[0] == 0},
  x[t], t]
]]
```

```
Out[56]/TraditionalForm=
{{x(t) -> \frac{1}{240} e^{-4 t} (3 e^{4 t} sin(t) - 13 sin(3 t) + 9 e^{4 t} cos(t) - 9 cos(3 t))}}
```

```
In[57]:= TraditionalForm[Expand[TrigReduce[DSolve[
  {x''[t] + 8 * x'[t] + 25 * x[t] == Cos[t],
   x[0] == 0, x'[0] == 0},
  x[t], t]
]]]
```

```
Out[57]/TraditionalForm=
{{x(t) -> \frac{sin(t)}{80} - \frac{13}{240} e^{-4 t} sin(3 t) + \frac{3 cos(t)}{80} - \frac{3}{80} e^{-4 t} cos(3 t)}}
```

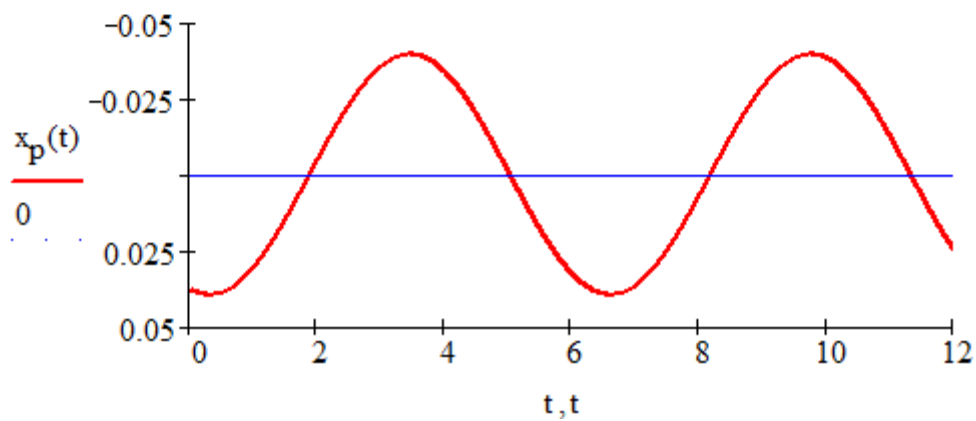
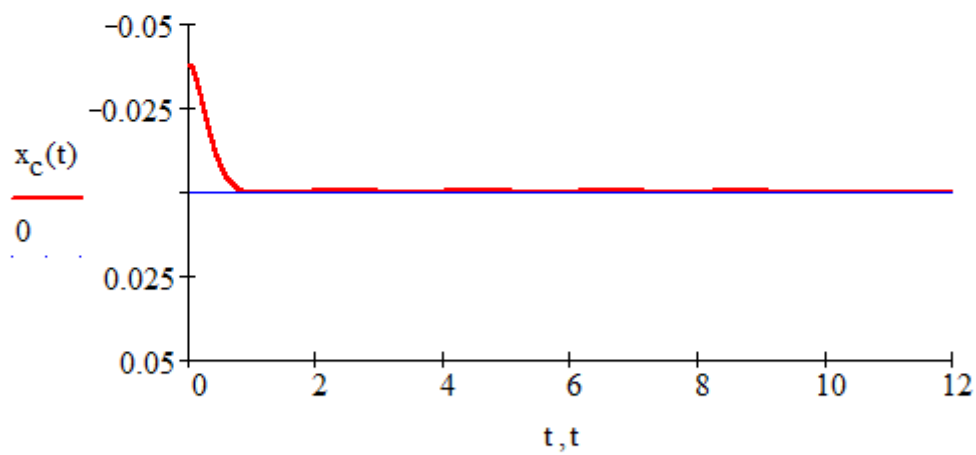
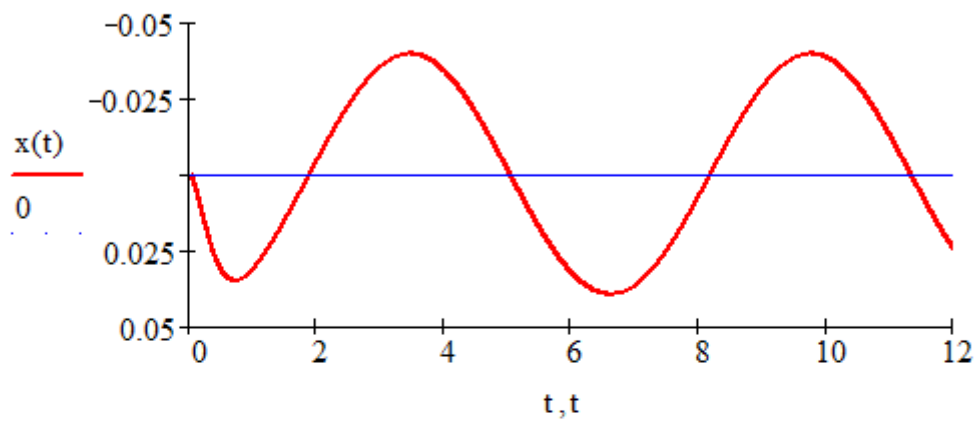
การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x_c(t) := \frac{-1}{240} \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot (9 \cdot \cos(3 \cdot t) + 13 \cdot \sin(3 \cdot t))$$

$$x_p(t) := \frac{3}{240} \cdot \sin(t) + \frac{9}{240} \cdot \cos(t)$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.001 \dots 12$$



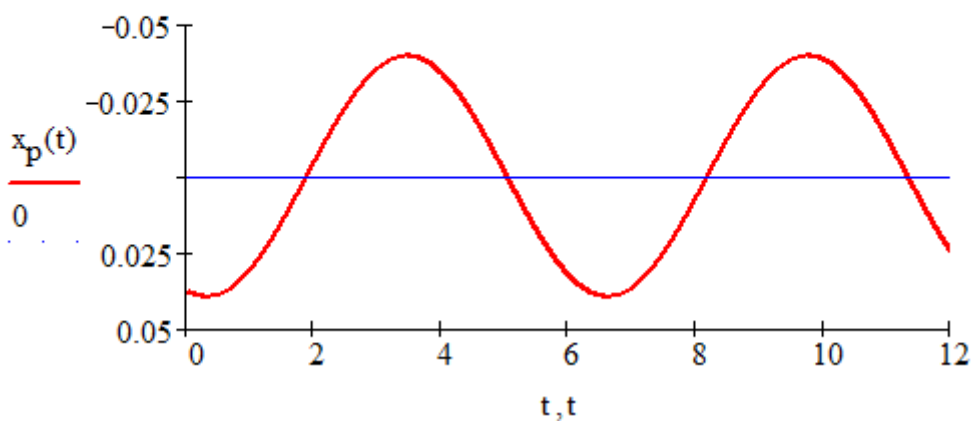
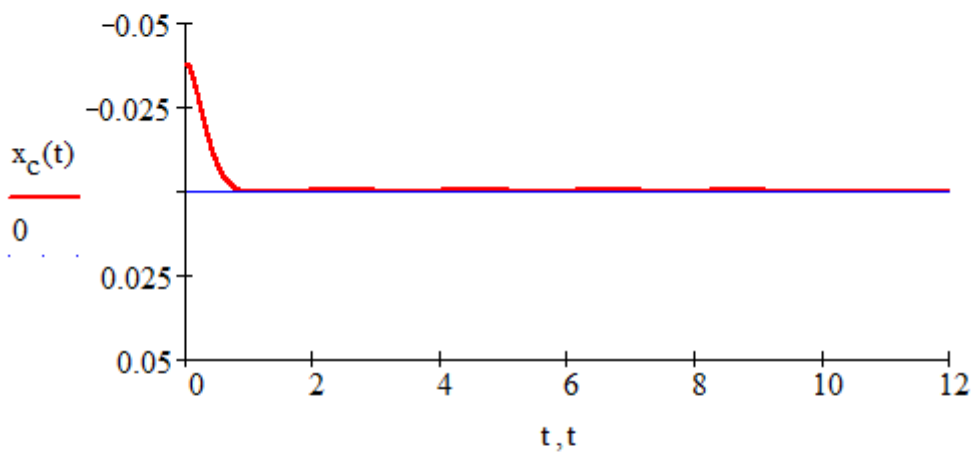
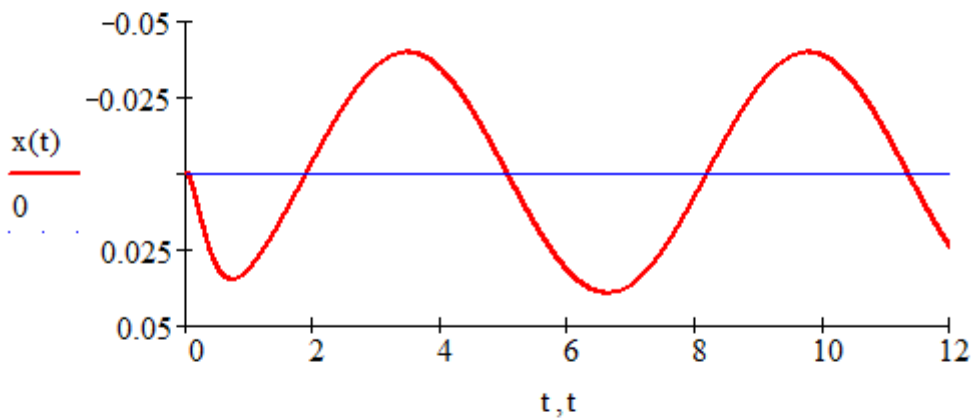
การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad และ Mathematica

$$x_c(t) := -\left(\frac{\sqrt{10}}{48}\right) \cdot e^{-4 \cdot t} \cdot \sin\left(3 \cdot t + \operatorname{atan}\left(\frac{9}{13}\right)\right)$$

$$x_p(t) := \frac{\sqrt{10}}{80} \cdot \sin(t + \operatorname{atan}(3))$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.001 \dots 12$$



การประสานจังหวะ (resonance)

จากการที่สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$ และเมื่อเวลาผ่านไปนานพอสมควร $x_c(t)$ มีค่าน้อยมากจนตัดทิ้งได้ ดังนั้นการเคลื่อนที่ต่อไปของวัตถุเป็นผลมาจากแรงภายนอกเท่านั้น

ในหัวข้อนี้เราสนใจถึงแอมพลิจูดของพจน์สถานะคงตัวที่เป็นผลมาจากแรงภายนอก $f(t) = A_1 \cos \omega t$, $A_1 > 0$

เพื่อความสะดวกในการจัดรูปสมการ ให้ $a = \frac{c}{2m}$ และ $b^2 = \frac{k}{m}$

เพราะฉะนั้น $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = A_1 \cos \omega t$

จัดรูปสมการเป็น $\frac{d^2x}{dt^2} + 2a \frac{dx}{dt} + b^2 x = B_1 \cos \omega t$ เมื่อ $B_1 = \frac{A_1}{m}$

เราสนใจในกรณีที่มีการเคลื่อนที่ที่เกิดการสั่น นั่นคือ $c^2 - 4mk < 0$

$$\frac{c^2}{4m^2} - \frac{4mk}{4m^2} < 0$$

$$a^2 - b^2 < 0$$

$$a^2 < b^2$$

เพราะว่า $a > 0$ และ $b > 0$ เพราะฉะนั้น $a < b$

เพราะฉะนั้น $x_c(t) = Ae^{-at} \sin(\sqrt{b^2 - a^2} t + \phi)$

และ $x_p(t) = \frac{B_1}{\sqrt{(b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}} \sin(\omega t + \theta)$ เมื่อ $\theta = \arctan\left(\frac{b^2 - \omega^2}{2a\omega}\right)$

เพราะฉะนั้นแอมพลิจูดของพจน์สถานะคงตัวเป็นฟังก์ชันของ ω

$$\text{กล่าวคือ } F(\omega) = \frac{B_1}{\sqrt{(b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2}}$$

เพราะว่า $F(0) = \frac{B_1}{b^2} > 0$ และ $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(\omega) = 0$

เพราะฉะนั้นสนใจในการหาค่า ω และ $0 < \omega < \infty$ ที่ทำให้ $F(\omega)$ มีค่าสูงสุด

$$\text{เพราะว่า } F'(\omega) = \frac{2B_1\omega((b^2 - 2a^2) - \omega^2)}{((b^2 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2)^{\frac{3}{2}}}$$

และ $F'(\omega) = 0$ เมื่อ $\omega = 0$ หรือ $\omega = \sqrt{b^2 - 2a^2}$

ถ้า $\omega < \sqrt{b^2 - 2a^2}$ แล้ว $\omega^2 < b^2 - 2a^2$ ดังนั้น $0 < (b^2 - 2a^2) - \omega^2$ และ $F'(\omega) > 0$

ถ้า $\omega > \sqrt{b^2 - 2a^2}$ แล้ว $\omega^2 > b^2 - 2a^2$ ดังนั้น $0 > (b^2 - 2a^2) - \omega^2$ และ $F'(\omega) < 0$

เพราะฉะนั้น $F(\omega)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $\omega = \omega_1 = \sqrt{b^2 - 2a^2}$

$$\text{และ } F(\omega_1) = \frac{B_1}{2a\sqrt{b^2 - a^2}}$$

การเคลื่อนที่ของวัตถุ ถ้ามีแรงภายนอก $f(t) = A_1 \cos \omega t$ กระทำกับวัตถุ แล้ว $\omega = \omega_1 = \sqrt{b^2 - 2a^2}$

เราเรียกว่าแรงภายนอกเกิด **การประสานจังหวะ** (resonance) กับระบบของการเคลื่อนที่

เพราะฉะนั้นแรงภายนอก $f(t) = A_1 \cos \omega t$

$$\text{เกิดการประสานจังหวะเมื่อ } \omega = \omega_1 = \sqrt{b^2 - 2a^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - 2\left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$$

$$\text{แอมพลิจูดหลังการประสานจังหวะ} = F(\omega_1) = \frac{\left(\frac{A_1}{m}\right)}{(2)\left(\frac{c}{2m}\right)\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}} = \frac{2mA_1}{c\sqrt{4mk - c^2}}$$

$$\text{คาบ} = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}} \text{ และ ความถี่} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}{2\pi}$$

$$\text{จากสูตร } x_c(t) = A e^{-at} \sin(\sqrt{b^2 - a^2} t + \phi)$$

$$\text{จะได้ความถี่ของการเคลื่อนที่เมื่อไม่มีแรงภายนอกมากเท่ากับ } \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}}{2\pi}$$

ซึ่งมีค่ามากกว่าความถี่แบบที่มีการประสานจังหวะกับแรงภายนอก

ลักษณะที่น่าสนใจอีกประการหนึ่งคือ **การประสานจังหวะที่ไม่มีแรงแดมป์** (undamped resonance) ซึ่งหาได้ดังนี้

$$\text{เมื่อ } \omega = \omega_1 = b = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

จากสมการ $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = A_1 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{A_1}{m} \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t)$$

จะได้ $x_c(t) = c_1 \cos(\sqrt{\frac{k}{m}} t) + c_2 \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t)$
 $= A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi)$

เมื่อ $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ และ $\phi = \arctan \frac{c_1}{c_2}$

และ $x_p(t) = \frac{A_1}{2m} \sqrt{\frac{k}{m}} t \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t)$

จะเห็นได้ว่า $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi) + \frac{A_1}{2m} \sqrt{\frac{k}{m}} t \sin(\sqrt{\frac{k}{m}} t) = \infty$

สรุปได้ว่าการประสานจังหวะที่ไม่มีแรงแดมป์ระยะทางของวัตถุจากระดับสมดุลจะมากขึ้นไม่สิ้นสุดเมื่อคิดในลักษณะของสภาพจริงคือ ลวดสปริงจะต้องขาดออกจากกัน

ตัวอย่าง 7.1.8 ยึดปลายสปริงด้านหนึ่งกับคานและปลายที่เลื่อนผูกติดกับวัตถุหนัก 8 ปอนด์ ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 3 ปอนด์ต่อฟุต มีแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุเท่ากับ $f(t) = \cos t$ มีค่าคงตัวแรงแดมป์เท่ากับ $c = 8$ เท่าของความเร็วในการเคลื่อนที่ ปล่อยให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่จากตำแหน่งต่ำกว่าระดับสมดุล $\frac{1}{2}$ ฟุต และดันลงมาด้วยความเร็วต้นเท่ากับ 2 ฟุตต่อวินาที

ในขณะที่ปล่อยวัตถุนี้มีแรงภายนอก $f(t) = 4 \cos \omega t$ กระทำต่อระบบการเคลื่อนที่ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้ามีแรงต้านทานการเคลื่อนที่คิดเป็นตัวเลข (เป็นปอนด์) เท่ากับ 1 เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงหาพจน์ชั่วคราวของการเคลื่อนที่และพจน์สถานะคงตัวเมื่อเกิดการประสานจังหวะ
2. ถ้าไม่มีแรงต้านทานการเคลื่อนที่ จงหาค่า ω ที่ทำให้การเคลื่อนที่เป็นแบบการประสานจังหวะที่ไม่มีแรงแดมป์และสมการของการเคลื่อนที่หลังการประสานจังหวะ

วิธีทำ 1. $W = 8$ ปอนด์, $k = 3$ ปอนด์ต่อฟุต, $c = 1$ ดังนั้น $m = \frac{W}{g} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

แรงภายนอกเกิดการประสานจังหวะเมื่อ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} = \sqrt{\frac{3}{(\frac{1}{4})} - \frac{1^2}{2(\frac{1}{4})^2}} = \sqrt{12 - 8} = 2$

$$\text{คือ} \quad \frac{8}{32} \frac{d^2x}{dt^2} + (1) \frac{dx}{dt} + 3x = 4 \cos 2t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 12x = 16 \cos 2t$$

$$\text{พิจารณาสมการ} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + 12x = 0$$

$$\text{รากของสมการช่วย} \quad r^2 + 4r + 12 = 0 \text{ คือ } r = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2} i$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad x_c(t) = e^{-2t} (c_1 \cos 2\sqrt{2} t + c_2 \sin 2\sqrt{2} t)$$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad x_p(t) &= \frac{1}{D^2 + 4D + 12} (16 \cos 2t) \\ &= 16 \frac{1}{D^2 + 4D + 12} \cos 2t \\ &= 16 \frac{1}{-2^2 + 4D + 12} \cos 2t \\ &= 16 \frac{1}{-4 + 4D + 12} \cos 2t \\ &= 16 \frac{1}{4D + 8} \cos 2t \\ &= 4 \frac{1}{D + 2} \cos 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4(D-2) \frac{1}{D-2} \frac{1}{D+2} \cos 2t \\
&= 4(D-2) \frac{1}{D^2-4} \cos 2t \\
&= 4(D-2) \frac{1}{-2^2-4} \cos 2t \\
&= 4(D-2) \frac{1}{-4-4} \cos 2t \\
&= 4(D-2) \frac{1}{-8} \cos 2t \\
&= -\frac{1}{2} (D-2) \cos 2t \\
&= -\frac{1}{2} (-2 \sin 2t - 2 \cos 2t) \\
&= \sin 2t + \cos 2t
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\ddot{x}(t) = x_c(t) + x_p(t)$

$$= e^{-2t} (c_1 \cos 2\sqrt{2} t + c_2 \sin 2\sqrt{2} t) + \sin 2t + \cos 2t$$

เพราะว่า $x(0) = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} = (1)(c_1(1) + c_2(0)) + 0 + 1$

$$\frac{1}{2} = c_1 + 1$$

เพราะฉะนั้น $c_1 = -\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $x(t) = e^{-2t} (-\frac{1}{2} \cos 2\sqrt{2} t + c_2 \sin 2\sqrt{2} t) + \sin 2t + \cos 2t$

$$\begin{aligned}
x'(t) &= e^{-2t} (\frac{1}{2} 2\sqrt{2} \sin 2\sqrt{2} t + c_2 2\sqrt{2} \cos 2\sqrt{2} t) \\
&\quad - 2 e^{-2t} (-\frac{1}{2} \cos 2\sqrt{2} t + c_2 \sin 2\sqrt{2} t) + 2 \cos 2t - 2 \sin 2t \\
&= e^{-2t} (\sqrt{2} \sin 2\sqrt{2} t + c_2 2\sqrt{2} \cos 2\sqrt{2} t) \\
&\quad - 2 e^{-2t} (-\frac{1}{2} \cos 2\sqrt{2} t + c_2 \sin 2\sqrt{2} t) + 2 \cos 2t - 2 \sin 2t
\end{aligned}$$

เพราะว่า $x'(0) = 2$

$$\begin{aligned}
2 &= (1) (\sqrt{2} (0) + c_2 2\sqrt{2} (1)) - 2(1)(-\frac{1}{2}(1) + c_2(0)) + 2(1) - 2(0) \\
2 &= c_2 2\sqrt{2} + 1 + 2 \\
c_2 &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เพราะฉะนั้น } x(t) &= e^{-2t} \left(-\frac{1}{2} \cos 2\sqrt{2} t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin 2\sqrt{2} t \right) + \sin 2t + \cos 2t \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-2t} (\sqrt{2} \cos 2\sqrt{2} t + \sin 2\sqrt{2} t) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2t \right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{-2t} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cos 2\sqrt{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\sqrt{2} t \right) \\
&\quad + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2t + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2t \right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{-2t} \sin(2\sqrt{2} t + \phi_1) + \sqrt{2} \sin(2t + \phi_2)
\end{aligned}$$

เมื่อ $\phi_1 = \arctan(\sqrt{2})$ และ $\phi_2 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{-2t} \sin(2\sqrt{2} t + \phi_1) + \sqrt{2} \sin(2t + \frac{\pi}{4})$$

$$\text{เพราะฉะนั้นพจน์ชั่วคราว } x_c(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} e^{-2t} \sin(2\sqrt{2} t + \phi_1)$$

$$\text{และพจน์สถานะคงตัว } x_p(t) = \sqrt{2} \sin(2t + \frac{\pi}{4})$$

$$\text{เพราะฉะนั้นสมการของการเคลื่อนที่เมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ คือ } x_p(t) = \sqrt{2} \sin(2t + \frac{\pi}{4})$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[89]:= TraditionalForm[DSolve[
  
$$\frac{8}{32} x''[t] + x'[t] + 3 * x[t] == 0,$$

  
$$x[t], t]]$$

```

Out[89]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-2t} \sin(2\sqrt{2}t) + c_2 e^{-2t} \cos(2\sqrt{2}t) \right\} \right\}$$

```
In[90]:= TraditionalForm[Expand[FullSimplify[DSolve[
  
$$\frac{8}{32} x''[t] + x'[t] + 3 * x[t] == 4 * \text{Cos}[2t],$$

  
$$x[t], t]$$

]]]
```

Out[90]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-2t} \sin(2\sqrt{2}t) + c_2 e^{-2t} \cos(2\sqrt{2}t) + \sin(2t) + \cos(2t) \right\} \right\}$$

```
In[91]:= TraditionalForm[Expand[FullSimplify[DSolve[
  
$$\left\{ \frac{8}{32} x''[t] + x'[t] + 3 * x[t] == 4 * \text{Cos}[2t], \right.$$

  
$$x[0] == \frac{1}{2}, x'[0] == 2 \left. \right\},$$

  
$$x[t], t]$$

]]]
```

Out[91]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow \sin(2t) - \frac{e^{-2t} \sin(2\sqrt{2}t)}{2\sqrt{2}} + \cos(2t) - \frac{1}{2} e^{-2t} \cos(2\sqrt{2}t) \right\} \right\}$$

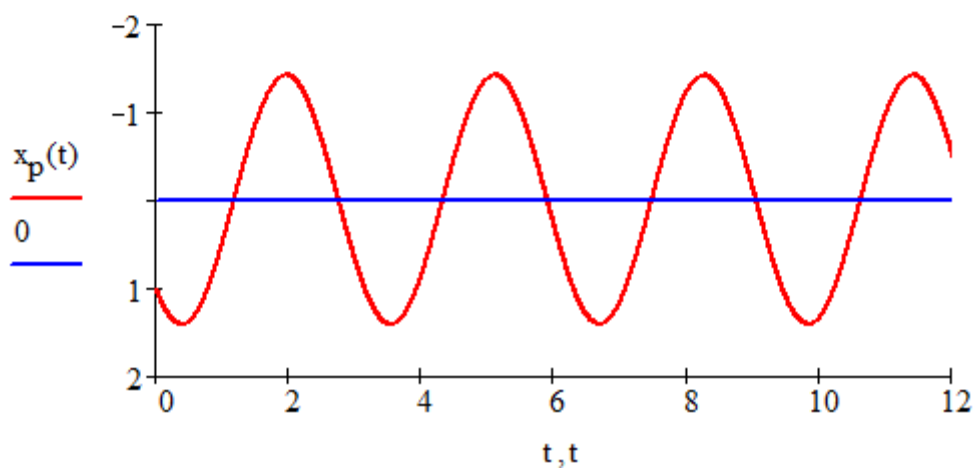
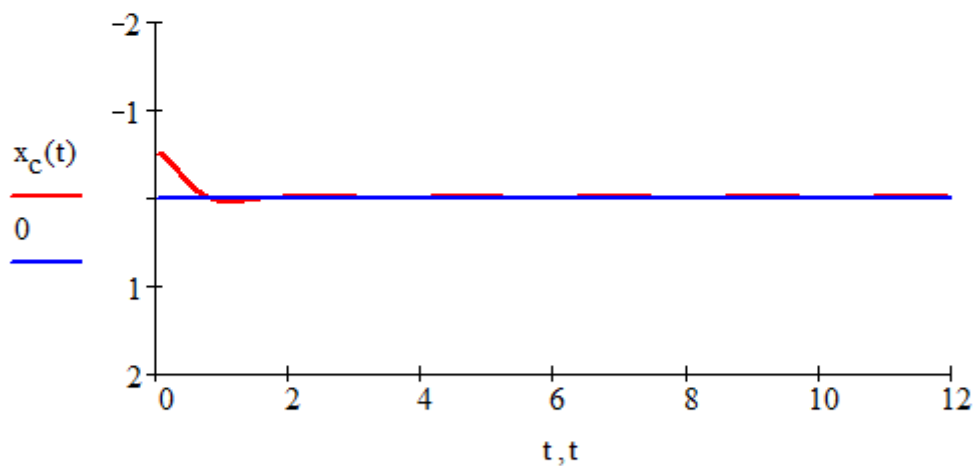
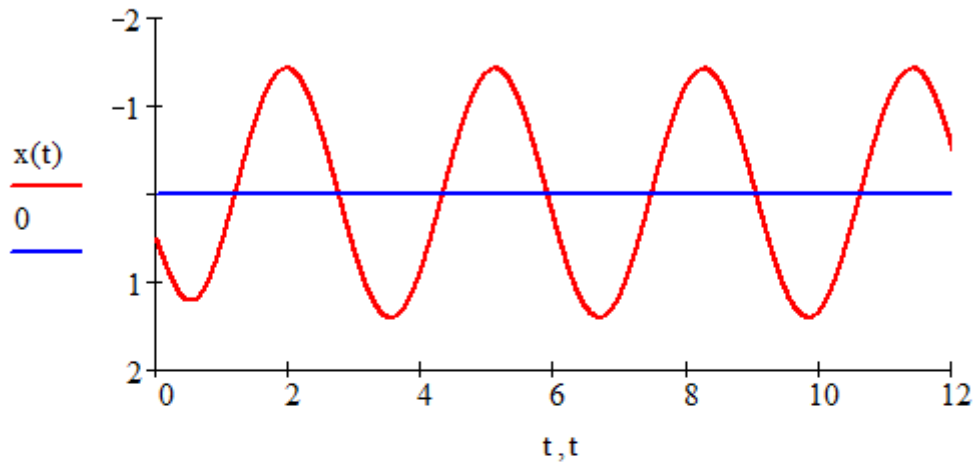
การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x_c(t) := -\left[e^{-2 \cdot t} \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sin(2 \cdot \sqrt{2} \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \sqrt{2} \cdot t) \right) \right]$$

$$x_p(t) := \cos(2 \cdot t) + \sin(2 \cdot t)$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.001 \dots 12$$



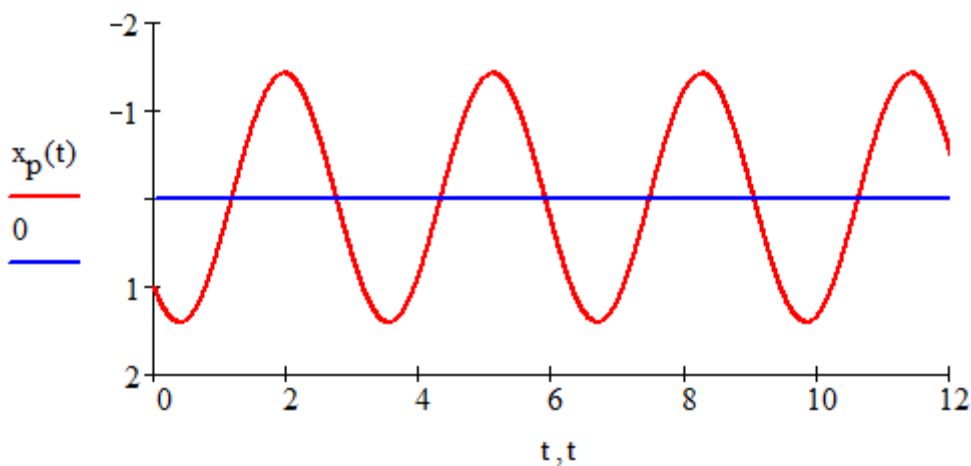
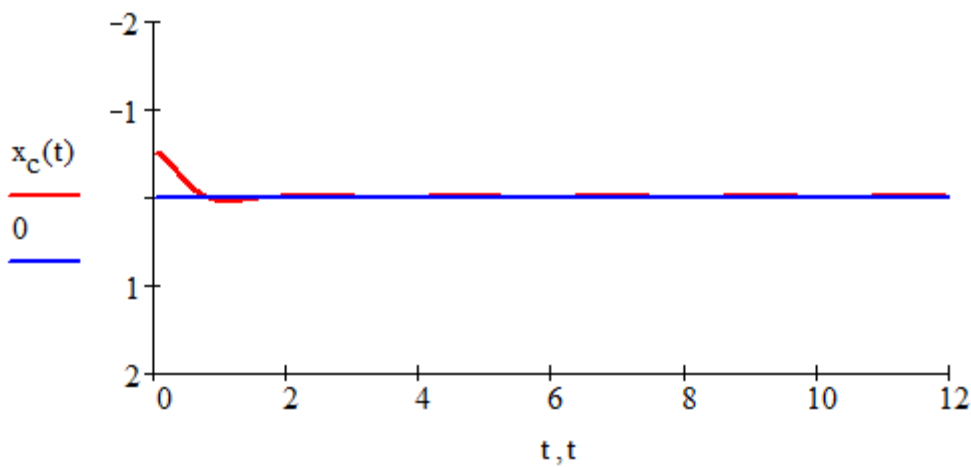
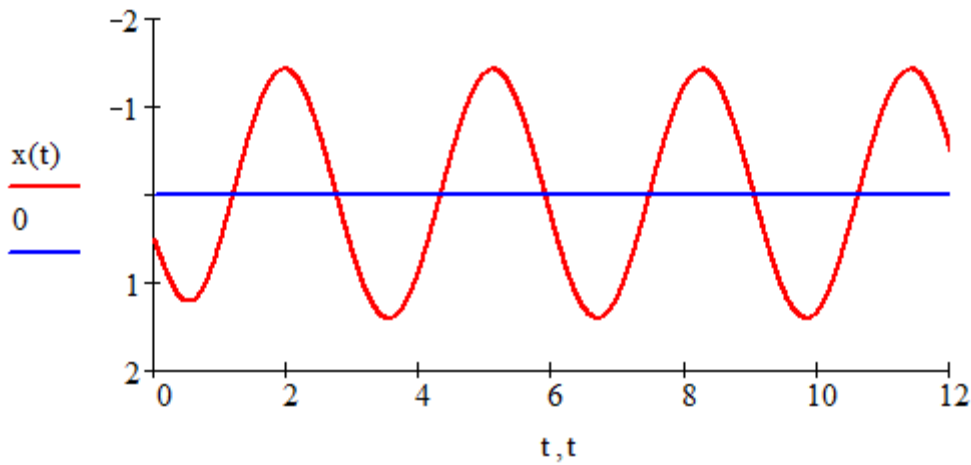
การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x_c(t) := -\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot \sin[(2 \cdot \sqrt{2} \cdot t) + \text{atan}(\sqrt{2})]$$

$$x_p(t) := \sqrt{2} \cdot \sin\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.001 \dots 12$$



2. ในกรณีที่เกิดการประสานจังหวะที่ไม่มีแรงแดมป์ (ความถี่ของแรงภายนอก = $\frac{\omega}{2\pi}$)

การหาความถี่ของการเคลื่อนที่ ($\frac{\omega}{2\pi}$) เมื่อไม่มีแรงแดมป์ หาได้จากสมการ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$

$$\frac{W}{g} \frac{d^2x}{dt^2} + (0) \frac{dx}{dt} + 3x = 0$$

$$\frac{8}{32} \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0$$

$$\frac{1}{4} \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 12x = 0$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^2x}{dt^2} + 12x = 0$

ดังนั้น $x(t) = c_1 \cos(2\sqrt{3}t) + c_2 \sin(2\sqrt{3}t)$

เพราะว่า $x(0) = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} = c_1(1) + c_2(0)$ เพราะฉะนั้น $c_1 = \frac{1}{2}$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{3}t) + c_2 \sin(2\sqrt{3}t)$$

$$x'(t) = -\frac{1}{2} 2\sqrt{3} \sin(2\sqrt{3}t) + 2\sqrt{3} c_2 \cos(2\sqrt{3}t)$$

เพราะว่า $x'(0) = 2$

เพราะฉะนั้น $2 = -\frac{1}{2} 2\sqrt{3} (0) + 2\sqrt{3} c_2(1)$ เพราะฉะนั้น $c_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{3}t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(2\sqrt{3}t)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} \cos(2\sqrt{3}t) + 2 \sin(2\sqrt{3}t))$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cos(2\sqrt{3}t) + \frac{2}{\sqrt{7}} \sin(2\sqrt{3}t) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \sin(2\sqrt{3}t + \phi) \text{ เมื่อ } \phi = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลย $x_c(t) = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \sin(2\sqrt{3}t + \phi)$ ซึ่งมีความถี่เท่ากับ $\frac{2\sqrt{3}}{2\pi}$

หมายเหตุ ω ทำให้เกิดการประสานจังหวะที่ไม่มีแรงแดมป์ เมื่อ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{3}{\frac{1}{4}}} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

การหา $x_p(t)$ ของสมการ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 4 \cos(2\sqrt{3}t)$

เพราะฉะนั้น $\frac{8}{32} \frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 4 \cos(2\sqrt{3}t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 12x = 16 \cos(2\sqrt{3}t)$$

$$x_p(t) = \frac{1}{D^2 + 12} 16 \cos(2\sqrt{3}t)$$

$$= 16 \frac{1}{D^2 + 12} \cos(2\sqrt{3}t)$$

$$= 16 \frac{1}{D^2 + 12} \cos(2\sqrt{3}t)$$

$$= 16 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{D^2 + 12} e^{2\sqrt{3}it}\right)$$

$$= 16 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{D^2 + 12} e^{2\sqrt{3}it}\right)$$

ให้ $P(D) = D^2 + 12$

$$P(r) = r^2 + 12$$

$$P(2\sqrt{3}i) = 0$$

$$P'(r) = 2r$$

$$P'(2\sqrt{3}i) = 4\sqrt{3}i$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{D^2 + 12} e^{2\sqrt{3}it}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{te^{2\sqrt{3}it}}{P'(2\sqrt{3}i)}\right)$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{te^{2\sqrt{3}it}}{4\sqrt{3}i}\right)$$

$$= \frac{t}{4\sqrt{3}} \operatorname{Re}\left(\frac{\cos(2\sqrt{3}t) + i\sin(2\sqrt{3}t)}{i}\right)$$

$$= \frac{t}{4\sqrt{3}} \operatorname{Re}\left(\frac{i\cos(2\sqrt{3}t) - \sin(2\sqrt{3}t)}{-1}\right)$$

$$= \frac{t}{4\sqrt{3}} \sin(2\sqrt{3}t)$$

เพราะฉะนั้น $x_p(t) = \frac{4}{\sqrt{3}} t \sin(2\sqrt{3}t)$

เพราะฉะนั้น $x(t) = x_c(t) + x_p(t) = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \sin(2\sqrt{3}t + \phi) + \frac{4}{\sqrt{3}} t \sin(2\sqrt{3}t)$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[97]:= TraditionalForm[DSolve[
  
$$\frac{8}{32} x''[t] + 3 * x[t] == 0,$$

  
$$x[t], t]]$$

```

Out[97]/TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow c_2 \sin(2 \sqrt{3} t) + c_1 \cos(2 \sqrt{3} t)\}\}$$

```
In[98]:= TraditionalForm[Expand[FullSimplify[DSolve[
  
$$\frac{8}{32} x''[t] + 3 * x[t] == 16 * \text{Cos}[2 \sqrt{3} t],$$

  
$$x[t], t]$$

]]]
```

Out[98]/TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow c_2 \sin(2 \sqrt{3} t) + c_1 \cos(2 \sqrt{3} t) + \frac{16 t \sin(2 \sqrt{3} t)}{\sqrt{3}} + \frac{4}{3} \cos(2 \sqrt{3} t)\}\}$$

```
In[99]:= TraditionalForm[Expand[FullSimplify[DSolve[
  
$$\left\{ \frac{8}{32} x''[t] + 3 * x[t] == 4 * \text{Cos}[2 \sqrt{3} t], \right.$$

  
$$x[0] == \frac{1}{2}, x'[0] == 2\},$$

  
$$x[t], t]$$

]]]
```

Out[99]/TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow \frac{4 t \sin(2 \sqrt{3} t)}{\sqrt{3}} + \frac{\sin(2 \sqrt{3} t)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cos(2 \sqrt{3} t)\}\}$$

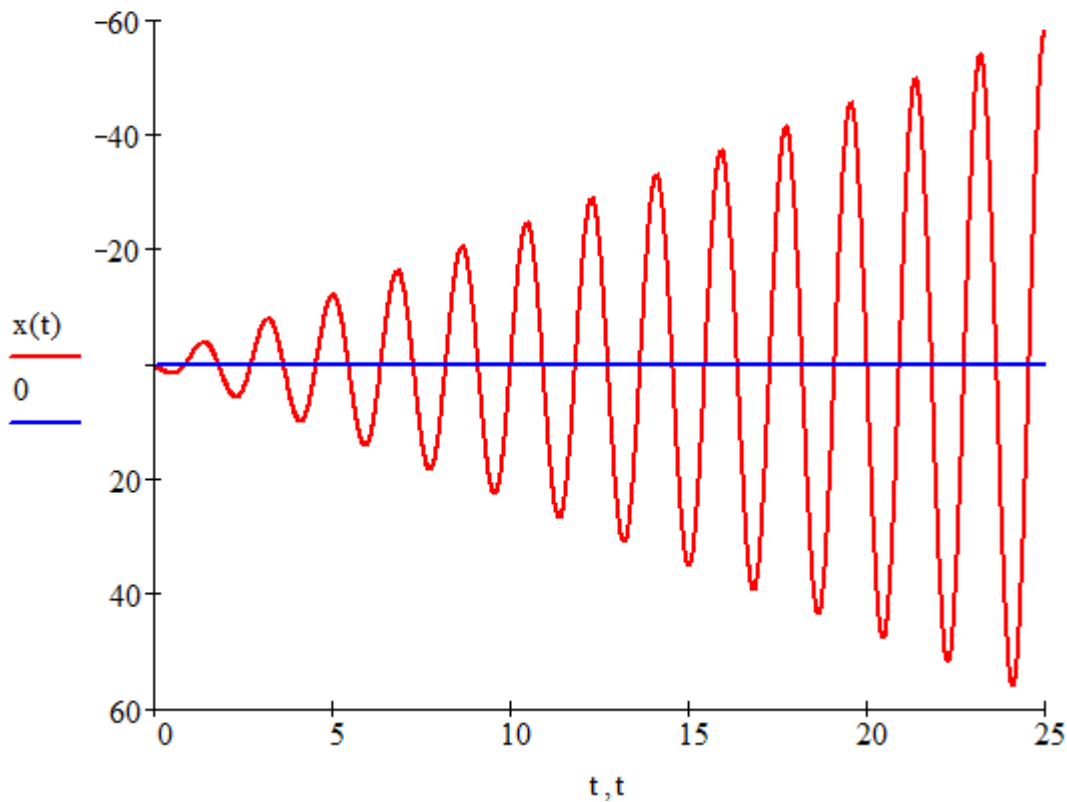
การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x_c(t) := \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot \sqrt{3} \cdot t) + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sin(2 \cdot \sqrt{3} \cdot t)$$

$$x_p(t) := \frac{4 \cdot t \cdot \sin(2 \cdot \sqrt{3} \cdot t)}{\sqrt{3}}$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.01 \dots 25$$



จากลักษณะของการเคลื่อนที่จะเห็นได้ว่าแอมพลิจูดจะมีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

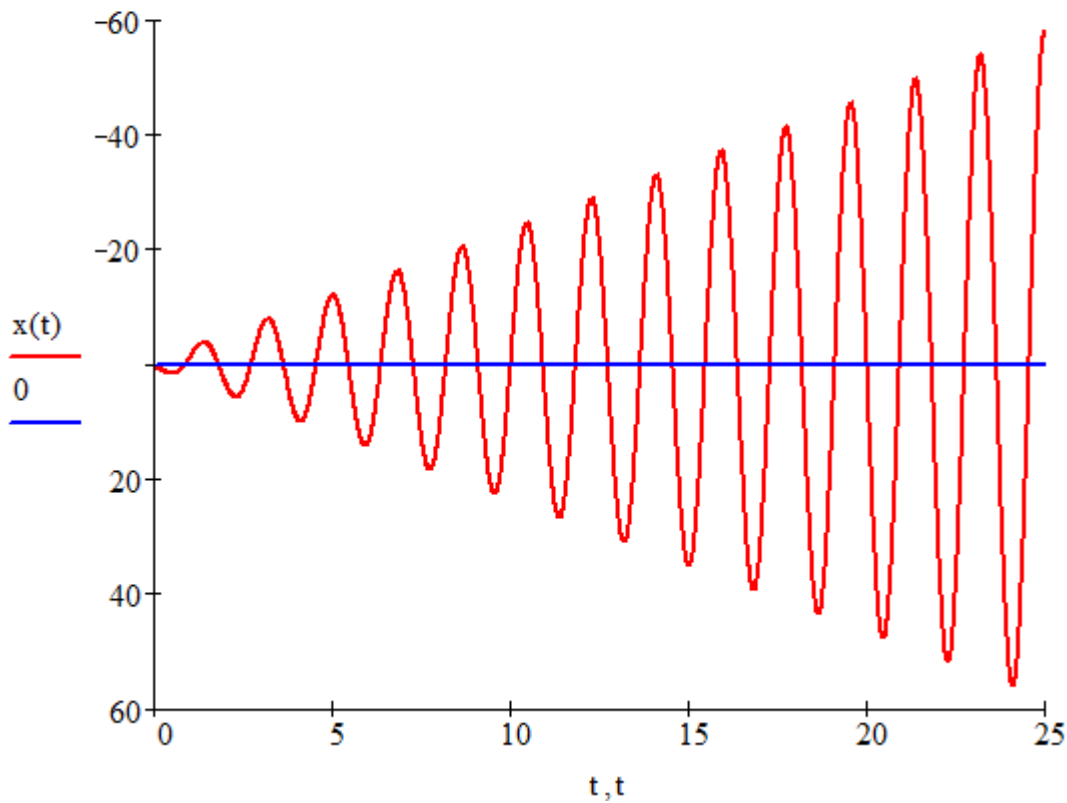
การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x_c(t) := \frac{\sqrt{7}}{2 \cdot \sqrt{3}} \cdot \sin\left(2 \cdot \sqrt{3} \cdot t + \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

$$x_p(t) := \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot t \cdot \sin(2 \cdot \sqrt{3} \cdot t)$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.01 \dots 25$$



จากลักษณะของการเคลื่อนที่จะเห็นได้ว่าแอมพลิจูดจะมีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ $t \rightarrow \infty$

การเคลื่อนที่ในรูปแบบบีต (beat)

จากสมการของการเคลื่อนที่ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

ให้ $f(t) = A \cos(\omega t)$ และ $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

สมมติว่าไม่มีแรงแดมป์

ดังนั้น $c = 0$ จะได้สมการของการเคลื่อนที่ที่เป็น $m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = A \cos(\omega t)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = \frac{A}{m} \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \frac{A}{m} \cos(\omega t)$$

ในกรณีที่ $\omega_0 \neq \omega$ จะได้

$$x_c(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t)$$

และ
$$x_p(t) = \frac{1}{D^2 + \omega_0^2} \left(\frac{A}{m} \cos(\omega t) \right)$$

$$= \frac{A}{m} \frac{1}{D^2 + \omega_0^2} (\cos(\omega t))$$

$$= \frac{A}{m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2} (\cos(\omega t))$$

$$= \frac{A}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos(\omega t))$$

$$= \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

เพราะฉะนั้น $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$

$$= c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

เพราะฉะนั้น $x'(t) = -\omega_0 c_1 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 c_2 \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$

ในกรณีที่เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(0) = 0$ และ $x'(0) = 0$

เพราะว่า $x(0) = 0$

$$0 = c_1(1) + c_2(0) + \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (1)$$

$$0 = c_1 + \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$c_1 = - \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

เพราะฉะนั้น $x(t) = - \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega_0 t) + c_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$

เพราะฉะนั้น $x'(t) = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \omega_0 \sin(\omega_0 t) + \omega_0 c_2 \cos(\omega_0 t) - \frac{\omega A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega t)$

$x'(0) = 0$ จะได้

$$0 = \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \omega_0 (0) + \omega_0 c_2 (1) - \frac{\omega A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (0)$$

$$\omega_0 c_2 = 0$$

เพราะว่า $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq 0$ เพราะฉะนั้น $c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $x_c(t) = - \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega_0 t)$

เพราะฉะนั้นผลเฉลย

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= - \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega_0 t) + \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t)$$

$$= \frac{A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t))$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

ให้ $A - B = \omega t$ และ $A + B = \omega_0 t$

จะได้ $A = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$ และ $B = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$

เพราะฉะนั้น $\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) = \cos(A - B) - \cos(A + B)$

$$= 2 \sin A \sin B$$

$$= 2 \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t\right)$$

เพราะฉะนั้น $x(t) = \frac{2A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t\right)$

ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุจะมีรูปแบบเป็นบีต

ตัวอย่าง 7.1.9 ยึดปลายสปริงด้านหนึ่งกับคานและปลายที่ให้อีกผูกติดกับวัตถุหนัก 32 ปอนด์ ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 25 ปอนด์ต่อฟุต มีแรงภายนอกที่กระทำกับวัตถุเท่ากับ $f(t) = 5 \cos 4t$ การเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงแดมป์ ปล่อยให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุลด้วยความเร็วต้นเท่ากับศูนย์

วิธีทำ สมการของการเคลื่อนที่ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = A \cos(\omega t)$

จากเงื่อนไขที่กำหนดให้จะได้ $W = 32$, $k = 25$, $c = 0$, $\omega = 4$, $A = 5$ และ $m = \frac{W}{g} = \frac{32}{32} = 1$

เพราะฉะนั้น $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5$

สมการของการเคลื่อนที่คือ

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2A}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t\right) \\ &= \frac{2(5)}{(1)(5^2 - 4^2)} \sin\left(\frac{1}{2}(5 + 4)t\right) \sin\left(\frac{1}{2}(5 - 4)t\right) \\ &= \frac{10}{9} \sin\left(\frac{9}{2}t\right) \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \end{aligned}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[111]:= TraditionalForm[DSolve[
  
$$\frac{32}{32} x''[t] + 25 x[t] == 0,$$

  
$$x[t], t]$$

]
```

Out[111]/TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow c_2 \sin(5 t) + c_1 \cos(5 t)\}\}$$

```
In[112]:= TraditionalForm[Expand[FullSimplify[DSolve[
  
$$\frac{32}{32} x''[t] + 25 x[t] == 5 \cos[4 t],$$

  
$$x[t], t]$$

]]]
```

Out[112]/TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow c_2 \sin(5 t) + c_1 \cos(5 t) + \frac{5}{9} \cos(4 t)\}\}$$

```
In[113]:= TraditionalForm[Expand[FullSimplify[DSolve[
  
$$\left\{ \frac{32}{32} x''[t] + 25 x[t] == 5 \cos[4 t], \right.$$

  
$$x[0] == 0, x'[0] == 0 \left. \right\},$$

  
$$x[t], t]$$

]]]
```

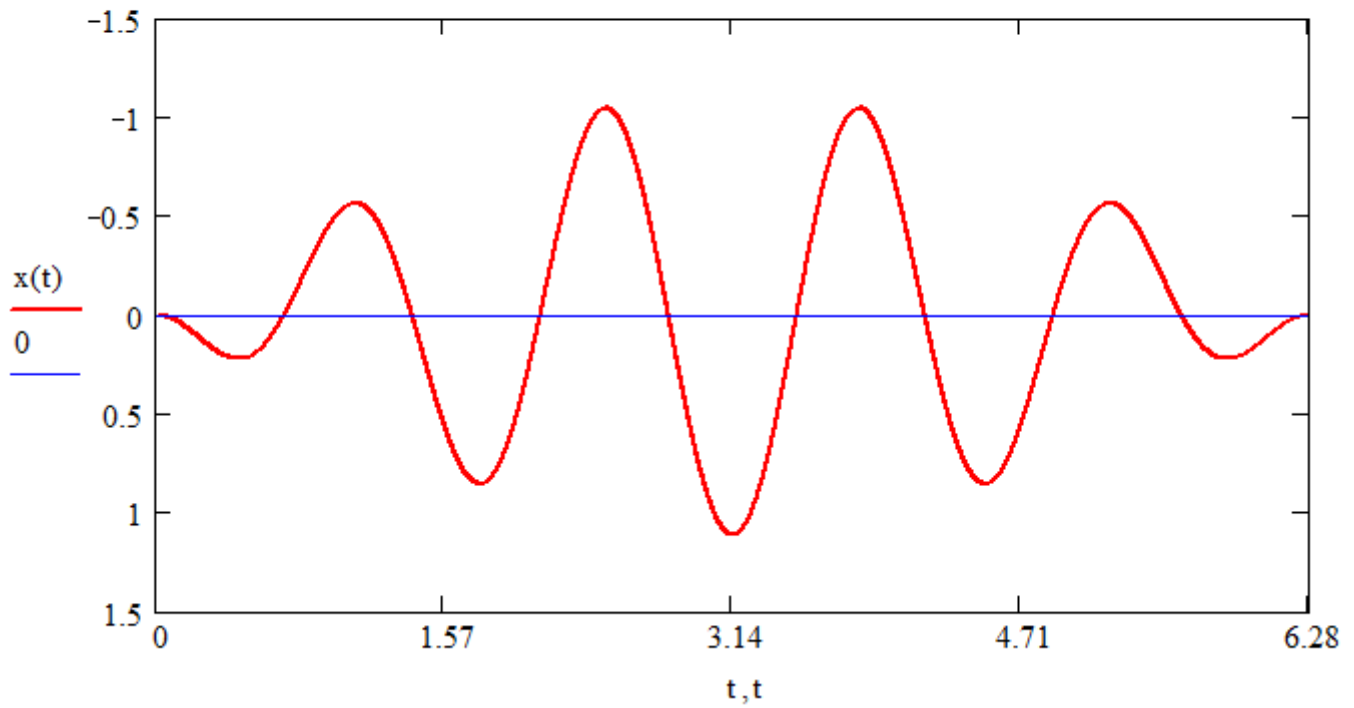
Out[113]/TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow \frac{5}{9} \cos(4 t) - \frac{5}{9} \cos(5 t)\}\}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x(t) := \frac{5}{9} \cdot \cos(4 \cdot t) - \frac{5}{9} \cdot \cos(5 \cdot t)$$

$$t := 0, 0.0005 \dots 2 \cdot \pi$$



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$\omega := 4$$

$$W := 32$$

$$g := 32$$

$$k := 25$$

$$m := \frac{W}{g}$$

$$m = 1.000000$$

$$A := 5$$

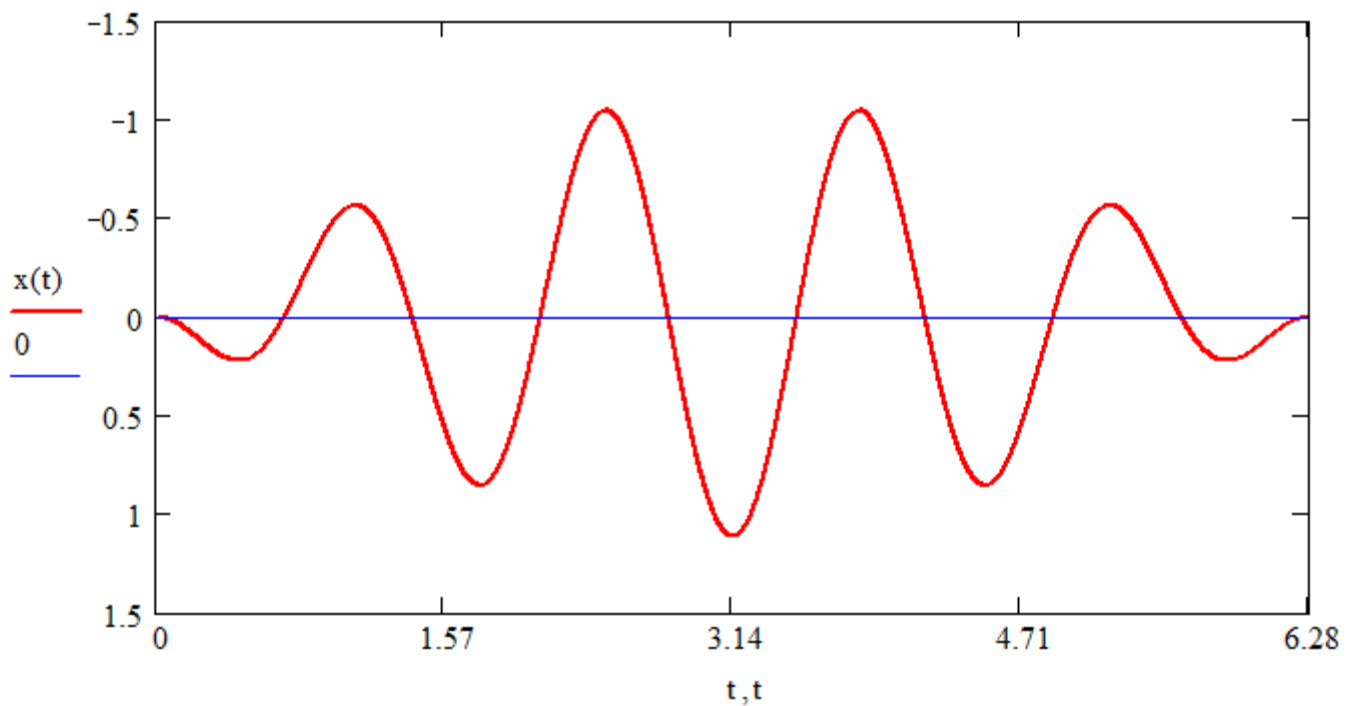
$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = 5.000000$$

$$\frac{2 \cdot A}{m \cdot [(\omega_0)^2 - \omega^2]} = 1.111111 \quad \frac{\omega_0 + \omega}{2} = 4.500000 \quad \frac{(\omega_0 - \omega)}{2} = 0.500000$$

$$x(t) := \frac{2 \cdot A}{m \cdot [(\omega_0)^2 - \omega^2]} \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 + \omega) \cdot t\right] \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 - \omega) \cdot t\right]$$

$$t := 0, 0.0005 \dots 2 \cdot \pi$$



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$\omega := 4$$

$$W := 32$$

$$g := 32$$

$$k := 25$$

$$m := \frac{W}{g}$$

$$m = 1.000000$$

$$A := 5$$

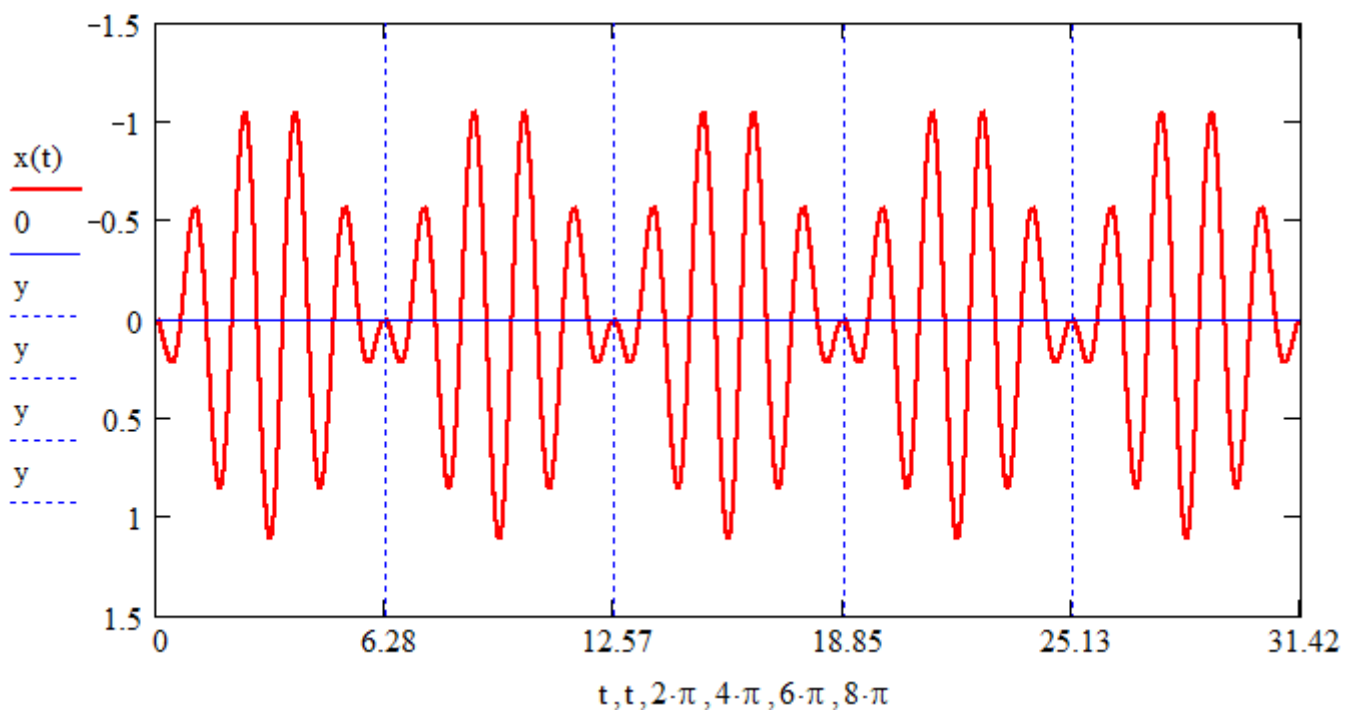
$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = 5.000000$$

$$\frac{2 \cdot A}{m \cdot \left[(\omega_0)^2 - \omega^2 \right]} = 1.111111 \quad \frac{\omega_0 + \omega}{2} = 4.500000 \quad \frac{(\omega_0 - \omega)}{2} = 0.500000$$

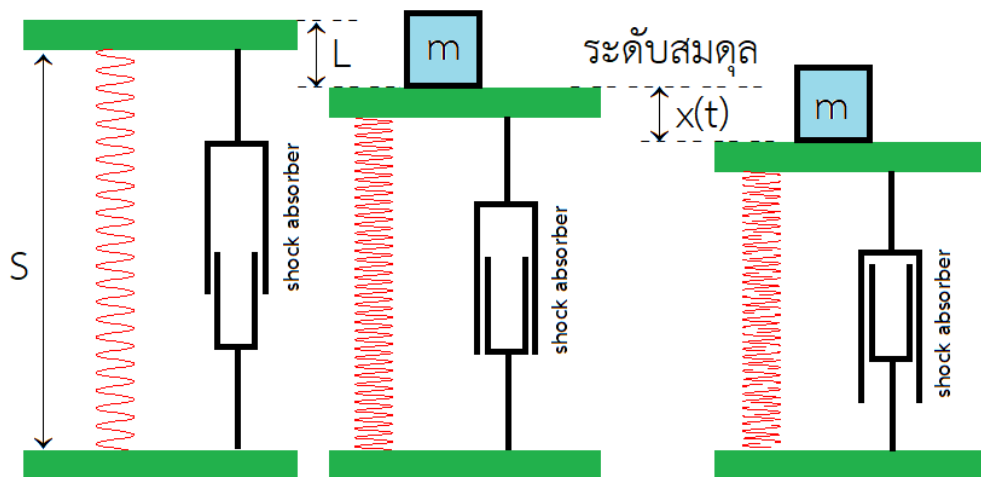
$$x(t) := \frac{2 \cdot A}{m \cdot \left[(\omega_0)^2 - \omega^2 \right]} \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 + \omega) \cdot t\right] \cdot \sin\left[\frac{1}{2} \cdot (\omega_0 - \omega) \cdot t\right]$$

$$t := 0, 0.0005 \dots 10 \cdot \pi$$



กราฟของการเคลื่อนที่ในช่วงเวลา $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$, $[6\pi, 8\pi]$, $[8\pi, 10\pi]$ มีลักษณะเหมือนกัน

ปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ยึดติดกับคอยล์สปริงและช็อกแอบซอร์บเบอร์ (shock absorber)



สปริงยาว S ฟุต ปลายด้านล่างยึดติดกับพื้น ปลายด้านบนยึดติดกับพื้นเรียบตรงขนานกับพื้น
วางก้อนวัตถุที่มีมวล m บนพื้นเรียบทำให้สปริงยุบตัวลงมา L ฟุต และหยุดที่ระดับสมดุล
ให้วัตถุเคลื่อนที่ x ฟุต ตามแนวดิ่งจากระดับสมดุล

เมื่อ $t > 0$

ให้ $x = x(t)$ เป็นระยะที่วัตถุห่างจากระดับสมดุล

โดยมีข้อตกลงเกี่ยวกับเครื่องหมายของ x ดังนี้ ที่ระดับสมดุล $x = 0$

ถ้าวัตถุอยู่เหนือระดับสมดุล ให้ x มีค่าเป็นลบ, $x < 0$

ถ้าวัตถุอยู่ต่ำกว่าระดับสมดุล ให้ x มีค่าเป็นบวก, $x > 0$

เมื่อ $x = x(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ จะได้ $\frac{dx}{dt}$ เป็นความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

เพราะฉะนั้น ขณะวัตถุเคลื่อนที่ลงจะได้ว่า $\frac{dx}{dt} > 0$

ขณะวัตถุเคลื่อนที่ขึ้นจะได้ว่า $\frac{dx}{dt} < 0$

และ ขณะที่วัตถุเปลี่ยนทิศทางการเคลื่อนที่ $\frac{dx}{dt} = 0$

ขณะนี้เราสนใจกรณีมีแรง 4 แรงที่มากกระทำกับวัตถุคือ

1. แรง F_1 เป็นแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ $F_1 = W = mg$

2. แรง F_2 เป็นแรงดันกลับของสปริง $F_2 = -k(L + x)$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวของสปริง

3. แรง F_3 เป็นแรงต้านการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นผลมาจากช็อกแอมบอร์บเบอร์โดยมีแรงต้านการเคลื่อนที่ $= c \frac{dx}{dt}$

เพราะว่าแรงต้านการเคลื่อนที่มีทิศทางสวนทางกับความเร็ว

เพราะฉะนั้นเมื่อให้ค่าคงตัว $c > 0$ จะได้ $F_3 = -c \frac{dx}{dt}$

4. แรงภายนอกที่มากกระทำกับวัตถุ $F_4 = f(t)$

เมื่อ $x(t) =$ ตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลา t ใด ๆ

ให้ $F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

จากกฎของนิวตันจะได้ $F = ma$

เพราะฉะนั้น $ma = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$

$$= mg - k(L + x) - c \frac{dx}{dt} + f(t)$$

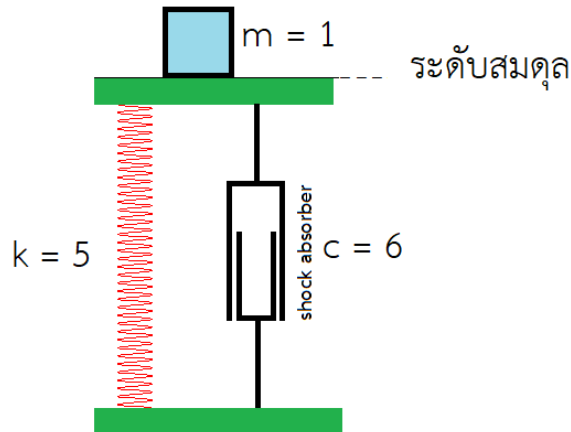
เพราะว่าแรงดันกลับของสปริงเท่ากับแรงจากน้ำหนักของวัตถุ เพราะฉะนั้น $kL = mg$

เพราะฉะนั้น $ma = -kx - c \frac{dx}{dt} + f(t)$

เพราะว่า $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ เพราะฉะนั้น $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของระบบสมการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ยึดติดกับสปริงและช็อกแอมบอร์บเบอร์

ตัวอย่าง 7.1.10 ยึดปลายด้านล่างของสปริงติดกับพื้นและปลายด้านบนยึดติดกับพื้นเรียบตรงขนานกับพื้น วางก้อนวัตถุที่มีมวล 1 สลัก สปริงมีค่าคงตัว $k = 5$ ปอนด์ต่อฟุต ค่าคงตัวแรงแดมป์ของช็อกแอบซอร์บเบอร์ $c = 6$



เมื่อเริ่มต้นการเคลื่อนที่ยกวัตถุให้สูงกว่าระดับสมดุล 4 ฟุต และดันลงมาด้วยความเร็ว 2 ฟุตต่อวินาที จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ ให้ $x(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

การเงื่อนไขที่กำหนดให้จะได้ $m = 1$ สลัก, $c = 6$ และ $k = 5$ ปอนด์ต่อฟุต

$$x(0) = -4 \text{ และ } x'(0) = 2$$

$$\text{จากสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ } m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{d^2x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

$$\text{ผลเฉลยของสมการคือ } x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-5t}$$

$$\text{จากเงื่อนไขเริ่มต้น } x(0) = -4 \text{ และ } x'(0) = 2 \text{ จะได้ } c_1 = -\frac{9}{2} e^{-t} \text{ และ } c_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x(t) = -\frac{9}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-5t}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[122]:= TraditionalForm[DSolve[
  x''[t] + 6 x'[t] + 5 x[t] == 0,
  x[t], t]
]
```

Out[122]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-t} \right\} \right\}$$

```
In[123]:= TraditionalForm[Expand[FullSimplify[DSolve[
  {x''[t] + 6 x'[t] + 5 x[t] == 0,
   x[0] == -4, x'[0] == 2},
  x[t], t]
]]]
```

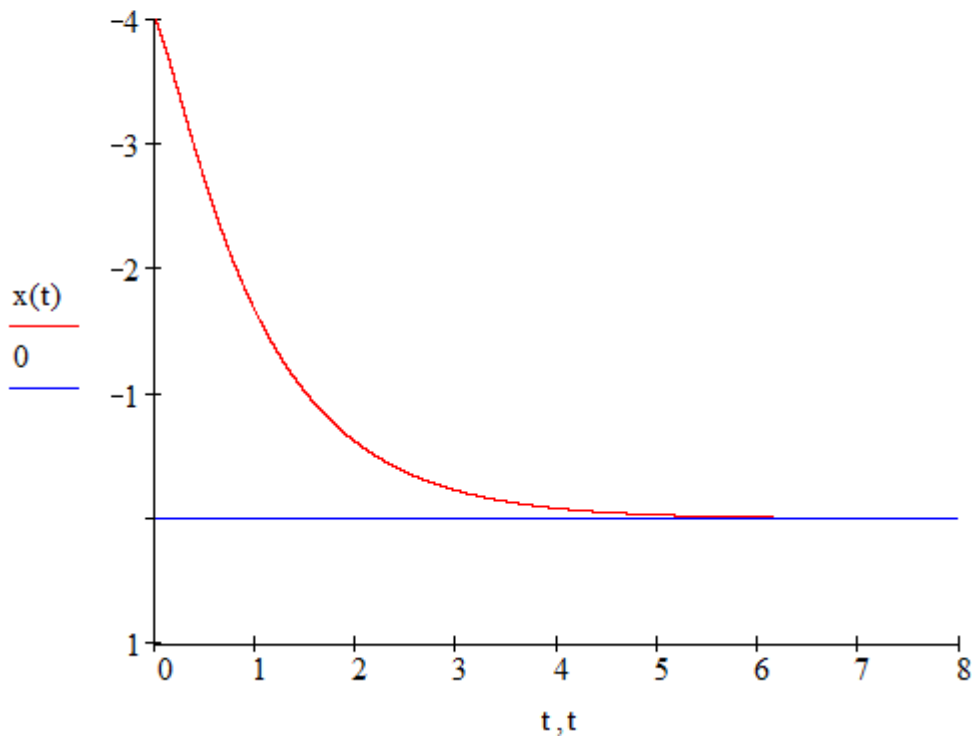
Out[123]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow \frac{e^{-5t}}{2} - \frac{9e^{-t}}{2} \right\} \right\}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

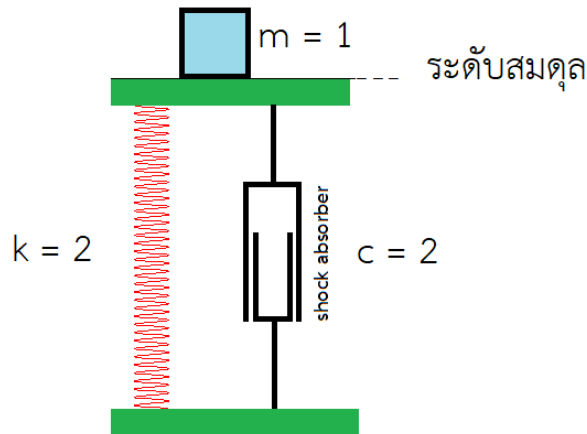
$$x(t) := \frac{-9}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-5 \cdot t}$$

$$t := 0, 0.001 \dots 8$$



ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุจะเคลื่อนที่ขึ้นมาที่ระดับสมดุล แล้วจึงค่อย ๆ มาหยุดนิ่งที่ระดับสมดุล

ตัวอย่าง 7.1.11 ยึดปลายด้านล่างของสปริงติดกับพื้นและปลายด้านบนยึดติดกับพื้นเรียบตรงขนานกับพื้น วางก้อนวัตถุที่มีมวล 1 สลัก สปริงมีค่าคงตัว $k = 2$ ปอนด์ต่อฟุต ค่าคงตัวแรงแดมป์ของช็อกแอบซอร์บเบอร์ $c = 2$



เมื่อเริ่มต้นการเคลื่อนที่ยกวัตถุให้สูงกว่าระดับสมดุล 3 ฟุต และดันลงมาด้วยความเร็ว 2 ฟุตต่อวินาที จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ ให้ $x(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

การเงื่อนไขที่กำหนดให้จะได้ $m = 1$ สลัก, $c = 2$ และ $k = 2$ ปอนด์ต่อฟุต

$$x(0) = -3 \text{ และ } x'(0) = 2$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 2x = 0$

จะได้ผลเฉลย $x(t) = e^{-t}(c_1 \cos t + c_2 \sin t)$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = -3$, $x'(0) = 2$ จะได้ $c_1 = -3$ และ $c_2 = -1$

เพราะฉะนั้น $x(t) = e^{-t}(-3 \cos t - \sin t)$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[129]:= TraditionalForm[DSolve[
  x''[t] + 2 x'[t] + 2 x[t] == 0,
  x[t], t]
]
```

```
Out[129]/TraditionalForm=
{{x(t) → c1 e-t sin(t) + c2 e-t cos(t)}}
```

```
In[130]:= TraditionalForm[%]
```

```
Out[130]/TraditionalForm=
{{x(t) → c1 e-t sin(t) + c2 e-t cos(t)}}
```

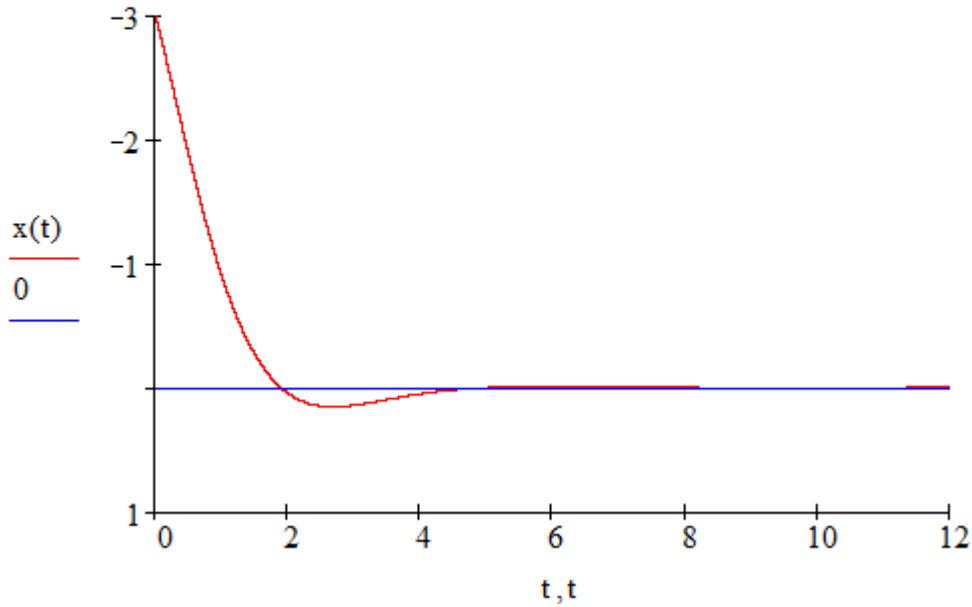
```
In[131]:= TraditionalForm[Expand[DSolve[
  {x''[t] + 2 x'[t] + 2 x[t] == 0,
   x[0] == -3, x'[0] == 2},
  x[t], t]
]]
```

```
Out[131]/TraditionalForm=
{{x(t) → -e-t sin(t) - 3 e-t cos(t)}}
```

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x(t) := -e^{-t} \cdot (3 \cdot \cos(t) + \sin(t))$$

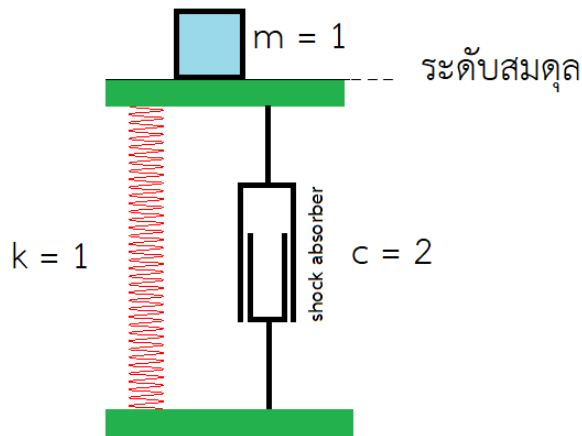
$$t := 0, 0.0001 \dots 12$$



ลักษณะการเคลื่อนที่

วัตถุจะเคลื่อนที่ลงมาผ่านระดับสมดุล แล้วเคลื่อนที่ขึ้นและลงเล็กน้อยสลับกันที่ระดับสมดุล และจะหยุดนิ่งเมื่อเวลาผ่านไปนาน ๆ

ตัวอย่าง 7.1.12 ยึดปลายด้านล่างของสปริงติดกับพื้นและปลายด้านบนยึดติดกับพื้นเรียบตรงขนานกับพื้น วางก้อนวัตถุที่มีมวล 1 สลัก สปริงมีค่าคงตัว $k = 1$ ปอนด์ต่อฟุต ค่าคงตัวแรงแดมป์ของช็อกแอบซอร์บเบอร์ $c = 2$



เมื่อเริ่มต้นการเคลื่อนที่ยกวัตถุให้สูงกว่าระดับสมดุล 4 ฟุต และดันลงมาด้วยความเร็ว 5 ฟุตต่อวินาที จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ ให้ $x(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

การเงื่อนไขที่กำหนดให้จะได้ $m = 1$ สลัก, $c = 2$ และ $k = 1$ ปอนด์ต่อฟุต

$$x(0) = -4 \text{ และ } x'(0) = 5$$

$$\text{จากสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ } m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\text{จาก } x(0) = -4, x'(0) = 5 \text{ จะได้ } c_1 = -4, c_2 = 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x(t) = (-4 + t)e^{-t}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[138]:= TraditionalForm[DSolve[
  x''[t] + 2 x'[t] + x[t] == 0,
  x[t], t]
]
```

```
Out[138]/TraditionalForm=
{{x(t) → c1 e-t + c2 e-t t}}
```

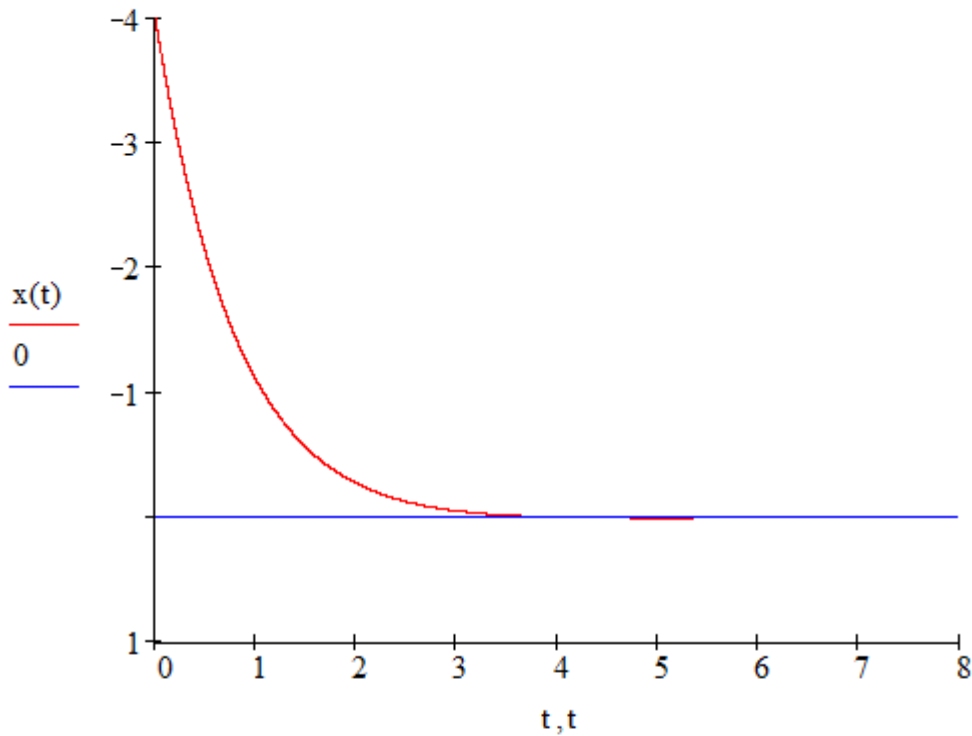
```
In[139]:= TraditionalForm[Expand[DSolve[
  {x''[t] + 2 x'[t] + x[t] == 0,
  x[0] == -4, x'[0] == 5},
  x[t], t]
]]
```

```
Out[139]/TraditionalForm=
{{x(t) → e-t t - 4 e-t}}
```

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x(t) := e^{-t} \cdot (t - 4)$$

$$t := 0, 0.0001 \dots 8$$



$$t := 0 \dots 8$$

$$t =$$

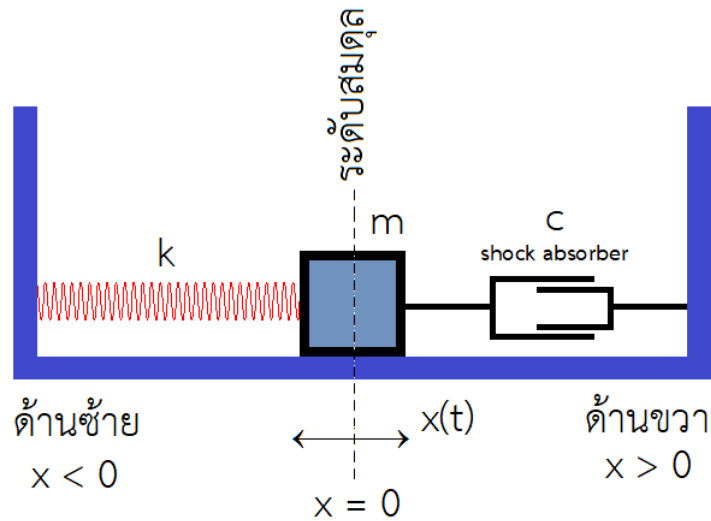
0.000000
1.000000
2.000000
3.000000
4.000000
5.000000
6.000000
7.000000
8.000000

$$x(t) =$$

-4.000000
-1.103638
-0.270671
-0.049787
0.000000
0.006738
0.004958
0.002736
0.001342

ลักษณะการเคลื่อนที่วัตถุจะเคลื่อนที่ลงมาผ่านระดับสมดุลเมื่อ $t = 4$ แล้วจึงเคลื่อนที่ขึ้น และวัตถุจะอยู่ใต้ระดับสมดุลตลอดเวลา $t > 4$ จนกระทั่งหยุดนิ่ง

การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ยึดติดกับสปริงและช็อกแอ็บซอร์บเบอร์ตามแนวนอน



วัตถุมีมวล m วางบนพื้นราบ

สปริงยาว S ฟุต ปลายด้านซ้ายยึดติดกับผนัง ปลายด้านขวายึดติดวัตถุ

ช็อกแอ็บซอร์บเบอร์ปลายด้านขวายึดติดกับผนัง ปลายด้านซ้ายยึดติดวัตถุ

ตำแหน่งที่วัตถุหยุดนิ่งเรียกว่า ระดับสมดุล

ให้วัตถุเคลื่อนที่ x ฟุต ตามแนวระดับ (ซ้าย-ขวา) จากระดับสมดุล

เมื่อ $t > 0$

ให้ $x = x(t)$ เป็นระยะที่วัตถุห่างจากระดับสมดุล

โดยมีข้อตกลงเกี่ยวกับเครื่องหมายของ x ดังนี้ ที่ระดับสมดุล $x = 0$

ถ้าวัตถุอยู่ด้านซ้ายของระดับสมดุล ให้ x มีค่าเป็นลบ, $x < 0$

ถ้าวัตถุอยู่ด้านขวาระดับสมดุล ให้ x มีค่าเป็นบวก, $x > 0$

เมื่อ $x = x(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

จะได้ $\frac{dx}{dt}$ เป็นความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

เพราะฉะนั้น ขณะวัตถุเคลื่อนที่ไปทางด้านขวาจะได้ว่า $\frac{dx}{dt} > 0$

ขณะวัตถุเคลื่อนที่ไปทางด้านซ้ายจะได้ว่า $\frac{dx}{dt} < 0$

และ ขณะที่วัตถุเปลี่ยนทิศทางการเคลื่อนที่ $\frac{dx}{dt} = 0$

วัตถุมีมวล m สลัก ค่าคงตัวสปริง k ปอนด์ต่อฟุต

ค่าคงตัวของแรงแดมป์ (เกิดจากช็อกแอบซอร์บเบอร์) มีค่า $c > 0$

เมื่อวัตถุเคลื่อนที่ออกจากระดับสมดุล x ฟุต จะพบว่ามีแรงกระทำกับวัตถุดังนี้

1. แรง F_1 เป็นแรงดึงกลับของสปริงเท่ากับ $-kx$

2. แรงต้านการเคลื่อนที่ $F_2 = -c \frac{dx}{dt}$

3. แรงภายนอก $F_3 = f(t)$

ให้ $F = F_1 + F_2 + F_3$

จากกฎของนิวตันจะได้ว่า $F = ma$ เมื่อ $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$$\begin{aligned} ma &= F_1 + F_2 + F_3 \\ &= -kx - c \frac{dx}{dt} + f(t) \end{aligned}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

เพราะฉะนั้นสมการเชิงอนุพันธ์แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุคือ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

ตัวอย่าง 7.1.13 วัตถุที่มีมวล $m = \frac{1}{4}$ สลัก วางบนพื้นราบ สปริงมีค่าคงตัว $k = 4$ ปอนด์ต่อฟุต ปลายด้านซ้ายยึดติดกับผนัง ปลายด้านขวายึดติดวัตถุ ช็อกแอบซอร์บเบอร์ปลายด้านขวายึดติดกับผนัง ปลายด้านซ้ายยึดติดวัตถุ ค่าคงตัวแรงแดมป์ของช็อกแอบซอร์บเบอร์ $c = 2$ ขณะเคลื่อนที่มีแรงภายนอก $f(t) = 6 \cos(2\sqrt{2}t)$

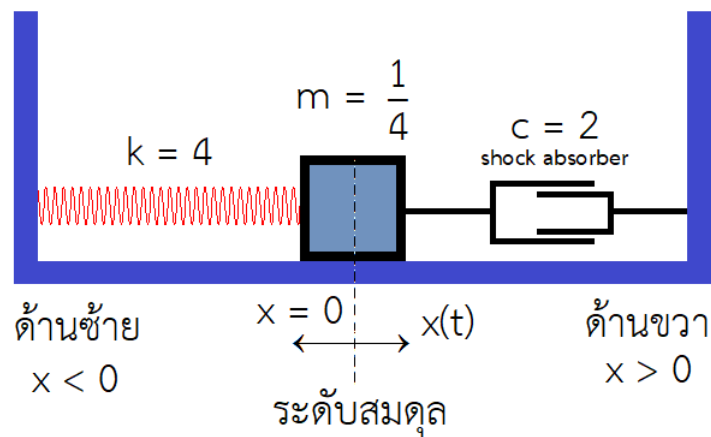
เริ่มต้นเคลื่อนที่โดยเลื่อนวัตถุมาทางด้านขวา $\frac{4}{3}$ ฟุต และเลื่อนวัตถุไปทางด้านขวาด้วยความเร็ว $\frac{2}{3}$ ฟุตต่อวินาที

จงหาสมการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ ให้ $x(t)$ เป็นสมการของการเคลื่อนที่

การเคลื่อนที่ของวัตถุในระบบที่มีค่า $m = \frac{1}{4}$ สลัก $k = 4$ ปอนด์ต่อฟุต และ $c = 2$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = \frac{4}{3}$ และ $x'(0) = \frac{2}{3}$



สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่คือ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 6 \cos(2\sqrt{2}t)$

$$\frac{1}{4} \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 4x = 6 \cos(2\sqrt{2}t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8 \frac{dx}{dt} + 16x = 24 \cos(2\sqrt{2}t)$$

สมการช่วยคือ $r^2 + 8r + 16 = 0,$

$$(r + 4)^2 = 0$$

รากของสมการช่วยคือ $r = -4$ มีภาวะรากซ้ำ 2

เพราะฉะนั้น $x_c(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-4t}$

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{1}{D^2 + 8D + 16} (24 \cos(2\sqrt{2}t)) \\ &= 24 \frac{1}{D^2 + 8D + 16} \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= 24 \frac{1}{-(2\sqrt{2})^2 + 8D + 16} \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= 24 \frac{1}{-8 + 8D + 16} \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= 24 \frac{1}{8D + 8} \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= 3 \frac{1}{D + 1} \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= 3(D - 1) \frac{1}{D - 1} \frac{1}{D + 1} \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= 3(D - 1) \frac{1}{D^2 - 1} \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= 3(D - 1) \frac{1}{-(2\sqrt{2})^2 - 1} \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= 3(D - 1) \frac{1}{-8 - 1} \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= -\frac{1}{3} (D - 1) \cos(2\sqrt{2}t) \\ &= -\frac{1}{3} (-2\sqrt{2} \sin(2\sqrt{2}t) - \cos(2\sqrt{2}t)) \\ &= \frac{1}{3} (2\sqrt{2} \sin(2\sqrt{2}t) + \cos(2\sqrt{2}t)) \end{aligned}$$

จากเงื่อนไข $x(0) = \frac{4}{3}$ และ $x'(0) = \frac{2}{3}$ จะได้สมการของการเคลื่อนที่คือ $x(t) =$

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$$

$$= (c_1 + c_2 t)e^{-4t} + \frac{1}{3} (2\sqrt{2} \sin(2\sqrt{2}t) + \cos(2\sqrt{2}t))$$

เพราะว่า $x(0) = \frac{4}{3}$ และ $x'(0) = \frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้น $\frac{4}{3} = (c_1 + c_2 \cdot 0)(1) + \frac{1}{3} (0 + 1)$

$$\frac{4}{3} = c_1 + \frac{1}{3}$$

$$c_1 = 1$$

$$x(t) = (1 + c_2 t)e^{-4t} + \frac{1}{3} (2\sqrt{2} \sin(2\sqrt{2}t) + \cos(2\sqrt{2}t))$$

$$x'(t) = (0 + c_2)e^{-4t} - 4(1 + c_2 t)e^{-4t} + \frac{1}{3} (8 \cos(2\sqrt{2}t) - 2\sqrt{2} \sin(2\sqrt{2}t))$$

เพราะว่า $x'(0) = \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3} = (0 + c_2)(1) - 4(1 + c_2 \cdot 0)(1) + \frac{1}{3} (8(1) - 0)$$

$$\frac{2}{3} = c_2 - 4 + \frac{8}{3}$$

$$c_2 = 2$$

เพราะฉะนั้น $x(t) = (1 + 2t)e^{-4t} + \frac{1}{3} (2\sqrt{2} \sin(2\sqrt{2}t) + \cos(2\sqrt{2}t))$

$$= (1 + 2t)e^{-4t} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin(2\sqrt{2}t) + \frac{1}{3} \cos(2\sqrt{2}t)$$

$$= (1 + 2t)e^{-4t} + \sin(2\sqrt{2}t + \phi) \quad \text{เมื่อ } \phi = \arctan \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[11]:= TraditionalForm[DSolve[
  
$$\frac{1}{4} x''[t] + 2 x'[t] + 4 x[t] == 0,$$

  
$$x[t], t]]$$

```

Out[11]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-4t} t \right\} \right\}$$

```
In[12]:= TraditionalForm[DSolve[
  
$$\frac{1}{4} x''[t] + 2 x'[t] + 4 x[t] == 6 \cos[2 \sqrt{2} t],$$

  
$$x[t], t]]$$

```

Out[12]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-4t} t + \frac{1}{3} (2 \sqrt{2} \sin(2 \sqrt{2} t) + \cos(2 \sqrt{2} t)) \right\} \right\}$$

```
In[13]:= TraditionalForm[Expand[DSolve[
  
$$\left\{ \frac{1}{4} x''[t] + 2 x'[t] + 4 x[t] == 6 \cos[2 \sqrt{2} t], \right.$$

  
$$x[0] == \frac{4}{3}, x'[0] == \frac{2}{3} \left. \right\},$$

  
$$x[t], t]]]$$

```

Out[13]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow 2 e^{-4t} t + e^{-4t} + \frac{2}{3} \sqrt{2} \sin(2 \sqrt{2} t) + \frac{1}{3} \cos(2 \sqrt{2} t) \right\} \right\}$$

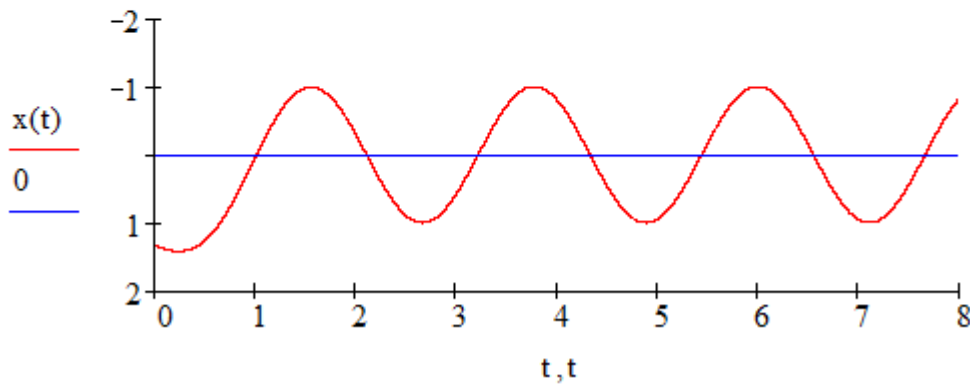
การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x_c(t) := (1 + 2 \cdot t) \cdot e^{-4 \cdot t}$$

$$x_p(t) := \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3} \cdot \sin(2 \cdot \sqrt{2} \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \cos(2 \cdot \sqrt{2} \cdot t)$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.0001 \dots 8$$

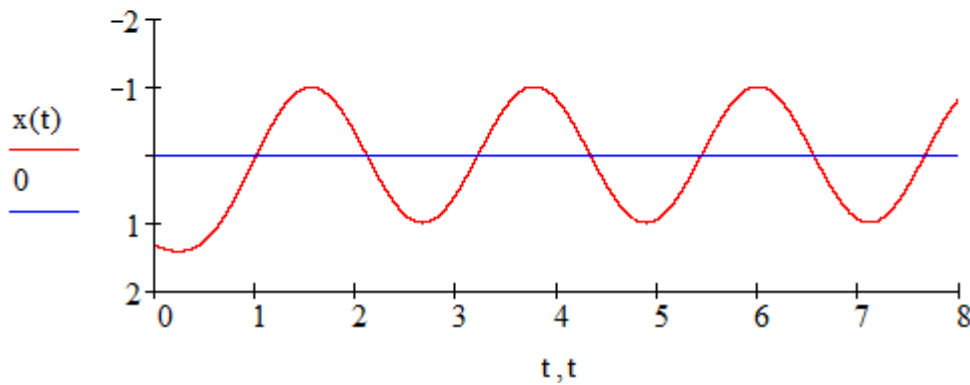


$$x_c(t) := (1 + 2 \cdot t) \cdot e^{-4 \cdot t}$$

$$x_p(t) := \sin\left[2 \cdot \sqrt{2} \cdot t + \operatorname{atan}\left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}\right)\right]$$

$$x(t) := x_c(t) + x_p(t)$$

$$t := 0, 0.0001 \dots 8$$



แบบฝึกหัด 7.1

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = f(t)$

เมื่อกำหนด $m, c, k, f(t)$ และเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0)$ และ $x'(0)$

1.1 $m = 1, c = 2, k = 2, f(t) = 0, x(0) = -3$ และ $x'(0) = 2$

1.2 $m = 1, c = 6, k = 5, f(t) = 6\sqrt{5} \cos(\sqrt{5}t), x(0) = 0$ และ $x'(0) = 0$

1.3 $m = 1, c = 2, k = 1, f(t) = 2 \cos t, x(0) = 0$ และ $x'(0) = 2$

1.4 $m = 1, c = 2, k = 2, f(t) = 2\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t), x(0) = 0$ และ $x'(0) = 0$

1.5 $m = 1, c = 8, k = 16, f(t) = 0, x(0) = 0$ และ $x'(0) = -3$

1.6 $m = 9, c = 6, k = 37, f(t) = 0, x(0) = 1$ และ $x'(0) = 1$

2. กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ $\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 15 \sin t$ เมื่อ $x(0) = 0$ และ $x'(0) = \sqrt{3}$

จงหาสมการของการเคลื่อนที่ $x(t)$

3. ปลายข้างหนึ่งของลวดสปริงยึดติดแน่นกับเพดานในแนวดิ่งตามความยาวของลวดสปริง ปลายล่างผูกติดแน่นด้วยวัตถุหนัก 12 ปอนด์ ทำให้ลวดสปริงยืดออกจนถึงตำแหน่งสมดุลเป็นระยะ 1.5 นิ้ว

ดึงวัตถุต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 2 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้นเป็นศูนย์ จงหา

3.1 สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t)$

3.2 แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่

3.3 เขียนกราฟแสดงตำแหน่งของวัตถุ

4. วัตถุหนัก 4 ปอนด์ แขนงติดแน่นกับปลายข้างหนึ่งของลวดสปริง ส่วนอีกปลายหนึ่งของลวดสปริงยึดติดแน่นในแนวดิ่งกับเพดาน วัตถุนี้ทำให้ลวดสปริงยืดออกจากเดิมเป็นระยะ 6 นิ้ว

จงหาตำแหน่งของวัตถุในรูปฟังก์ชันของเวลา ถ้าปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วต้น 2 ฟุตต่อวินาที

จากระดับสมดุล ในทิศทางลงล่าง เมื่อเวลา $t = 0$ จงหา

4.1 สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t)$

4.2 แอมพลิจูด ความถี่ และคาบของการเคลื่อนที่

4.3 เวลา t ขณะที่วัตถุผ่านระดับสมดุลและกำลังเคลื่อนที่ขึ้น ครั้งที่ 1

4.4 เวลา t ขณะที่วัตถุเปลี่ยนทิศทางการเคลื่อนที่ ครั้งที่ 2

5. นำวัตถุหนัก 4 ปอนด์ ยึดติดกับปลายล่างของสปริงที่มีค่าคงตัว $k = 16$ ปอนด์ต่อฟุต ดึงวัตถุนี้ลงมาต่ำกว่าระดับสมดุล 4 นิ้ว แล้วปล่อยด้วยความเร็วต้นเท่ากับศูนย์ จงหา
- 5.1 สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t)$
 - 5.2 แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่
 - 5.3 ตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของการเคลื่อนที่เมื่อเวลา $\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$ วินาที หลังจากปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่
6. ปลายด้านบนของสปริงยึดติดกับเพดานและปลายด้านล่างของสปริงแขวนน้ำหนัก 24 ปอนด์ทำให้สปริงยืดออก 4 นิ้ว เมื่อเริ่มต้นทำการดันวัตถุให้สูงกว่าระดับสมดุล 4 นิ้ว แล้วปล่อยด้วยความเร็วต้นเท่ากับศูนย์ จงหา
- 6.1 สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t)$
 - 6.2 แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่
 - 6.3 ตำแหน่ง ความเร็ว ความเร่งของการเคลื่อนที่เมื่อเวลา $\frac{\pi}{4\sqrt{6}}$ วินาที หลังจากปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่
7. ปลายด้านบนของสปริงยึดติดกับเพดาน ปลายด้านล่างแขวนวัตถุหนัก 20 ปอนด์ ทำให้สปริงยืดออก 6 นิ้ว ดึงวัตถุนี้ลงมาต่ำกว่าระดับสมดุล 1 นิ้ว แล้วปล่อยด้วยความเร็วต้นเท่ากับศูนย์ จงหา
- 7.1 สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t)$
 - 7.2 แอมพลิจูด ความถี่ และคาบของการเคลื่อนที่
 - 7.3 ตำแหน่งของวัตถุเมื่อเวลา $t = n\frac{\pi}{32}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ วินาที
 - 7.4 ความเร็วและทิศทางของการเคลื่อนที่ขณะเวลา $t = \frac{4\pi}{32}$ และ $t = \frac{6\pi}{32}$ วินาที
 - 7.5 เวลาขณะที่วัตถุผ่านระดับสมดุล ครั้งที่ 2
8. ปลายบนของสปริงยึดติดกับเพดานปลายล่างเมื่อแขวนวัตถุหนัก 64 ปอนด์ลดสปริงยืดออก 0.32 ฟุต ดันวัตถุให้สูงกว่าระดับสมดุล 8 นิ้ว แล้วปล่อยด้วยความเร็ว 5 ฟุตต่อวินาที ทิศทางลงล่าง จงหา
- 8.1 สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t)$
 - 8.2 แอมพลิจูด ความถี่ และคาบของการเคลื่อนที่
 - 8.3 ในช่วงเวลา $[0, \frac{\pi}{2}]$ วัตถุจะเคลื่อนที่ได้กี่รอบ
 - 8.4 ตำแหน่ง ความเร็วและความเร่ง ขณะเวลา $t = \frac{\pi}{10}$ วินาที
 - 8.5 เวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ผ่านระดับสมดุลเป็นครั้งที่ 1 และ 2
 - 8.6 ความเร็วและความเร่งของวัตถุขณะที่ผ่านระดับสมดุลครั้งที่ 1 และ 2
 - 8.7 เวลาที่วัตถุอยู่ต่ำกว่าระดับสมดุล 5 นิ้ว ครั้งที่ 1 และ กำลังเคลื่อนที่ขึ้น
 - 8.8 เวลาที่วัตถุอยู่สูงกว่าระดับสมดุล 5 นิ้ว ครั้งที่ 2 และ กำลังเคลื่อนที่ลง

9. สปริงที่มีค่าคงตัว $k = 2$ ปอนด์ต่อฟุต ปลายด้านบนยึดติดกับเพดาน ปลายด้านล่างแขวนวัตถุหนัก 4 ปอนด์ ในสภาพแวดล้อมที่มีแรงต้านการเคลื่อนที่คิดเป็น 1 เท่าของความเร็ว ถ้าวัตถุถูกดันขึ้นไปเหนือระดับสมดุล 1 ฟุต และถูกปล่อยลงมาด้วยความเร็ว 8 ฟุตต่อวินาที จงหา
- 9.1 สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t)$
 - 9.2 เวลาขณะที่วัตถุผ่านระดับสมดุล
 - 9.3 เวลาขณะที่วัตถุห่างจากระดับสมดุลมากที่สุด
 - 9.4 ตำแหน่งของวัตถุที่อยู่ห่างจากระดับสมดุลมากที่สุด
10. สปริงที่มีค่าคงตัว $k = 16$ นิวตันต่อเมตร ปลายด้านบนของสปริงยึดติดกับเพดาน ปลายด้านล่างผูกวัตถุที่มีมวล 1 กิโลกรัม และวัตถุนั้นจมอยู่ในของเหลวที่มีความต้านทานการเคลื่อนที่คิดเป็น 10 เท่าของความเร็ว จงหา สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t)$ เมื่อกำหนด
- 10.1 ดึงวัตถุลงต่ำกว่าระดับสมดุล 1 เมตร แล้วปล่อยด้วยความเร็วต้น 0 เมตรต่อวินาที
 - 10.2 ดึงวัตถุลงต่ำกว่าระดับสมดุล 1 เมตร แล้วปล่อยด้วยการดันขึ้นด้วยความเร็ว 4 เมตรต่อวินาที
11. ปลายด้านบนของสปริงยึดติดกับเพดาน ปลายด้านล่างแขวนวัตถุหนัก 3.2 ปอนด์ ค่าคงตัวของลวดสปริง $k = 2$ ปอนด์ต่อฟุต สภาพแวดล้อมของการเคลื่อนที่ทำให้เกิดแรงต้านทาน $c = 0.4$ เท่าของ ความเร็วขณะนั้น เมื่อเริ่มต้นเคลื่อนที่วัตถุถูกดันขึ้นเหนือระดับสมดุล 1 ฟุต แล้วปล่อยด้วยความเร็วต้นเป็นศูนย์ จงหา
- 11.1 สมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ
 - 11.2 เวลาที่วัตถุผ่านระดับสมดุลครั้งแรกและกำลังเคลื่อนที่ขึ้น
12. ปลายด้านบนของสปริงยึดติดกับเพดาน เมื่อแขวนก้อนน้ำหนัก 16 ปอนด์ จะทำให้สปริงยืดออก $\frac{8}{3}$ ฟุต ดึงวัตถุให้ต่ำกว่าระดับสมดุล 2 ฟุต แล้วปล่อยด้วยความเร็วต้นเป็นศูนย์ ถ้ามีแรงภายนอก $f(t) = 10 \cos 3t$ มากระทำกับวัตถุและแรงต้านทานการเคลื่อนที่คิดเป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของความเร็วขณะเคลื่อนที่ จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ
13. วัตถุที่มีมวล 1 สลัก ผูกติดกับปลายของลวดสปริงที่แขวนไว้ในแนวตั้งมีผลทำให้สปริงยืดตัว 2 ฟุตเมื่อเวลา $t = 0$ วัตถุอยู่ที่ตำแหน่งสมดุลและดันวัตถุลงมาด้วยความเร็ว 1 ฟุตต่อวินาที ถ้าสภาพแวดล้อมทำให้เกิดแรงต้านทานการเคลื่อนที่คิดเป็น 8 เท่าของความเร็วขณะที่วัตถุเคลื่อนที่ และมีแรงภายนอก $f(t) = 8 \sin 4t$ มากระทำกับวัตถุในแนวการเคลื่อนที่ จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ
14. สปริงมีค่าคงตัว $k = 32$ นิวตันต่อเมตร ปลายด้านบนยึดติดกับเพดาน ปลายด้านล่างแขวนก้อนน้ำหนักที่มีมวล 2 กิโลกรัม เมื่อเวลา $t = 0$ ดึงวัตถุลงต่ำกว่าระดับสมดุล 1 เมตร แล้วปล่อยด้วยความเร็วต้น 0 เมตรต่อวินาที และมีแรงภายนอก $f(t) = 68e^{-2t} \cos 4t$ มากระทำกับวัตถุที่ระดับสมดุล จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เมื่อไม่มีแรงต้านทานการเคลื่อนที่

15. วัตถุที่มีมวล $\frac{1}{2}$ สลัก ผูกติดกับปลายด้านล่างของสปริงที่มีค่าคงตัว $k = 6$ ปอนด์ต่อฟุต ในการเคลื่อนที่ภายใต้แรงต้านการเคลื่อนที่คิดเป็น 2 เท่าของความเร็วขณะเคลื่อนที่ มีแรงภายนอก $f(t) = 40 \sin 2t$ มากระทำ เมื่อเวลา $t = 0$ ดึงวัตถุลงต่ำกว่าระดับสมดุล 6 นิ้ว แล้วปล่อยด้วยความเร็วต้น 0 เมตรต่อวินาที จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ

16. สมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุคือ $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = -5 \sin 2t + 3 \cos 2t$

เมื่อ $x(0) = -1$ และ $x'(0) = 1$

จงหาสมการของการเคลื่อนที่ของวัตถุ $x(t)$

17. ปลายบนของสปริงยึดติดกับคาน ปลายล่างของสปริงยึดติดกับวัตถุที่มีมวล m สลัก สปริงมีค่าคงตัว k ปอนด์ต่อฟุต กำหนดให้คานที่ยึดปลายสปริงด้านบนสั่นในแนวดิ่งโดยมีสมการแสดงตำแหน่งการสั่นในแนวดิ่งเป็น $h(t)$ หน่วยเป็นฟุต กำหนดให้ค่าคงตัวของแรงแดมป์มีค่าเท่ากับ c

จงหาสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ปลายล่างของสปริง

คำตอบแบบฝึกหัด 7.1

```
In[1]:= Exercise 7.1;
```

```
In[2]:= 1.1;
```

```
In[3]:= TraditionalForm[DSolve[
    1 * x''[t] + 2 * x'[t] + 2 * x[t] == 0,
    x[t], t]]
```

Out[3]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-t} \sin(t) + c_2 e^{-t} \cos(t) \right\} \right\}$$

```
In[4]:= TraditionalForm[DSolve[
    {1 * x''[t] + 2 * x'[t] + 2 * x[t] == 0,
     x[0] == -3, x'[0] == 2},
    x[t], t]]
```

Out[4]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow -e^{-t} (\sin(t) + 3 \cos(t)) \right\} \right\}$$

In[5]:= 1.2;

In[6]:= TraditionalForm[DSolve[
 $1 * x''[t] + 6 * x'[t] + 5 * x[t] == 0,$
 $x[t], t]$

Out[6]//TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-t} \right\} \right\}$$

In[7]:= TraditionalForm[DSolve[
 $1 * x''[t] + 6 * x'[t] + 5 * x[t] == 6 * \sqrt{5} * \text{Cos}[\sqrt{5} * t],$
 $x[t], t]$

Out[7]//TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-5t} + c_2 e^{-t} + \sin(\sqrt{5} t) \right\} \right\}$$

In[8]:= TraditionalForm[FullSimplify[DSolve[
 $\{1 * x''[t] + 6 * x'[t] + 5 * x[t] == 6 * \sqrt{5} * \text{Cos}[\sqrt{5} * t],$
 $x[0] == 0, x'[0] == 0\},$
 $x[t], t]$

Out[8]//TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow \sin(\sqrt{5} t) - \frac{1}{4} \sqrt{5} e^{-5t} (e^{4t} - 1) \right\} \right\}$$

In[9]:= 1.3;

In[10]:= TraditionalForm[DSolve[
 $1 * x''[t] + 2 * x'[t] + 1 * x[t] = 0,$
 $x[t], t]$

Out[10]/TraditionalForm=
 $\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} t \right\} \right\}$

In[11]:= TraditionalForm[DSolve[
 $1 * x''[t] + 2 * x'[t] + 1 * x[t] = 2 * \text{Cos}[t],$
 $x[t], t]$

Out[11]/TraditionalForm=
 $\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-t} + c_2 e^{-t} t + \sin(t) \right\} \right\}$

In[12]:= TraditionalForm[FullSimplify[DSolve[
 $\{1 * x''[t] + 2 * x'[t] + 1 * x[t] = 2 * \text{Cos}[t],$
 $x[0] = 0, x'[0] = 2\}, x[t], t]]]$

Out[12]/TraditionalForm=
 $\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow e^{-t} t + \sin(t) \right\} \right\}$

In[13]:= 1.4;

In[14]:= TraditionalForm[DSolve[
 $1 * x''[t] + 2 * x'[t] + 2 * x[t] = 0,$
 $x[t], t]$

Out[14]/TraditionalForm=
 $\{\{x(t) \rightarrow c_1 e^{-t} \sin(t) + c_2 e^{-t} \cos(t)\}\}$

In[15]:= TraditionalForm[FullSimplify[DSolve[
 $1 * x''[t] + 2 * x'[t] + 2 * x[t] = 2 * \sqrt{2} * \cos[\sqrt{2} * t],$
 $x[t], t]]]$

Out[15]/TraditionalForm=
 $\{\{x(t) \rightarrow e^{-t} (c_1 \sin(t) + c_2 \cos(t)) + \sin(\sqrt{2} t)\}\}$

In[16]:= TraditionalForm[FullSimplify[DSolve[
 $\{1 * x''[t] + 2 * x'[t] + 2 * x[t] = 2 * \sqrt{2} * \cos[\sqrt{2} * t],$
 $x[0] = 0, x'[0] = 0\},$
 $x[t], t]]]$

Out[16]/TraditionalForm=
 $\{\{x(t) \rightarrow \sin(\sqrt{2} t) - \sqrt{2} e^{-t} \sin(t)\}\}$

In[17]:= 1.5;

In[18]:= TraditionalForm[DSolve[
1 * x''[t] + 8 * x'[t] + 16 * x[t] == 0, x[t], t]]

Out[18]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-4t} t \right\} \right\}$$

In[19]:= TraditionalForm[FullSimplify[DSolve[
{1 * x''[t] + 8 * x'[t] + 16 * x[t] == 0,
x[0] == 0, x'[0] == -3},
x[t], t]]]

Out[19]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow -3 e^{-4t} t \right\} \right\}$$

In[20]:= 1.6;

In[21]:= TraditionalForm[DSolve[
9 * x''[t] + 6 * x'[t] + 37 * x[t] == 0,
x[t], t]]

Out[21]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow c_1 e^{-t/3} \sin(2t) + c_2 e^{-t/3} \cos(2t) \right\} \right\}$$

In[22]:= TraditionalForm[FullSimplify[DSolve[
{9 * x''[t] + 6 * x'[t] + 37 * x[t] == 0,
x[0] == 1, x'[0] == 1},
x[t], t]]]

Out[22]/TraditionalForm=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow \frac{1}{3} e^{-t/3} (2 \sin(2t) + 3 \cos(2t)) \right\} \right\}$$

In[1]:= 2. ;

In[2]:= **ClearAll**[W, g, L, c, x, t, v, a];

In[3]:= **TraditionalForm**[**DSolve**[
 $x''[t] + 16 x[t] = 0,$
 $x[t], t]$

Out[3]//TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow c_2 \sin(4 t) + c_1 \cos(4 t)\}\}$$

In[4]:= **TraditionalForm**[**FullSimplify**[**DSolve**[
 $x''[t] + 16 x[t] = 15 \sin[t],$
 $x[t], t]$

Out[4]//TraditionalForm=

$$\{\{x(t) \rightarrow c_2 \sin(4 t) + c_1 \cos(4 t) + \sin(t)\}\}$$

In[5]:= **FullSimplify**[**DSolve**[
 $\{x''[t] + 16 x[t] = 15 \sin[t],$
 $x[0] = 0, x'[0] = \sqrt{3}\},$
 $x[t], t]$

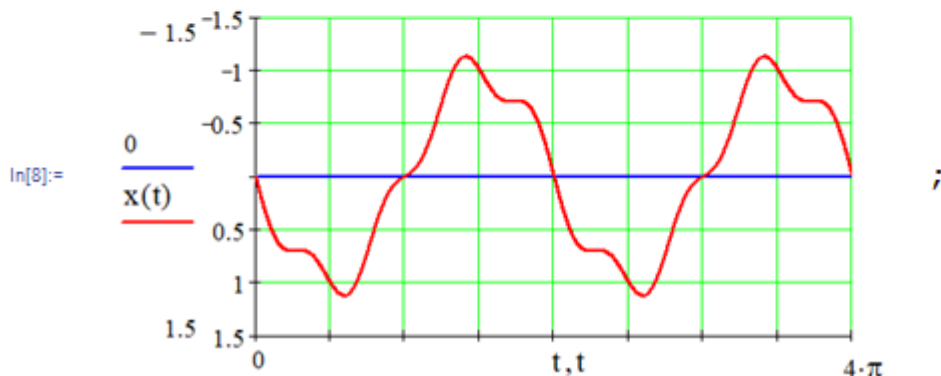
Out[5]= $\{\{x[t] \rightarrow \sin[t] + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{3}) \sin[4 t]\}\}$

In[6]:= $x[t_]:= \sin[t] + \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{3}) \sin[4 t]$

In[7]:= **TraditionalForm**[**Collect**[**Expand**[$x[t]$], { $\sin[4 t]$ }]]

Out[7]//TraditionalForm=

$$\sin(t) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\right) \sin(4 t)$$



In[1]:= 3. ;

In[2]:= **ClearAll**[**W**, **g**, **L**, **c**, **x**, **t**];

In[3]:= **W** = 12; **g** = 32; **L** = $\frac{3}{12}$; **c** = 0;

In[4]:= **m** = **W** / **g**

Out[4]= $\frac{3}{8}$

In[5]:= **k** = **W** / **L**

Out[5]= 96

In[6]:= **m** * $\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}$ + **c** * $\frac{dx}{dt}$ + **k** * **x** == **f** (**t**) ;

In[7]:= **TraditionalForm**[**DSolve**[
 $\frac{3}{8} \mathbf{x}''[\mathbf{t}] + 0 * \mathbf{x}'[\mathbf{t}] + 96 * \mathbf{x}[\mathbf{t}] = 0,$
 $\mathbf{x}[\mathbf{t}], \mathbf{t}]]$

Out[7]/TraditionalForm=

$\{\{x(t) \rightarrow c_2 \sin(16 t) + c_1 \cos(16 t)\}\}$

In[8]:= **DSolve**[$\left\{\frac{3}{8} \mathbf{x}''[\mathbf{t}] + 0 * \mathbf{x}'[\mathbf{t}] + 96 * \mathbf{x}[\mathbf{t}] = 0,$
 $\mathbf{x}[0] = \frac{2}{12}, \mathbf{x}'[0] = 0\right\}, \mathbf{x}[\mathbf{t}], \mathbf{t}]$

Out[8]= $\left\{\left\{x[t] \rightarrow \frac{1}{6} \cos[16 t]\right\}\right\}$

In[9]:= 3.1;

$\mathbf{x}[\mathbf{t_}] := \frac{1}{6} \cos[16 \mathbf{t}]$

In[11]:= 3.2;

In[12]:= $\left\{ \text{period} = \frac{2\pi}{16}, \text{frequency} = \frac{1}{\text{period}}, \text{amplitude} = \frac{1}{6} \right\}$

Out[12]:= $\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{8}{\pi}, \frac{1}{6} \right\}$

In[13]:= 3.3;

