



สมการเชิงอนุพันธ์

Differential Equations

เล่มที่ 2

ดำรงศ ทิพย์โยธา
ณัฐชนา ไตรภพ



สมการเชิงอนุพันธ์

เล่มที่ 2

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

รองศาสตราจารย์ณัฐนาถ ไตรภาพ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) เล่มที่ 2

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : มกราคม พ.ศ. 2565

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-588-804-2

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

หนังสือ สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) เล่มที่ 2 เป็นหนังสือใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา สมการเชิงอนุพันธ์ เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย

ผลการแปลงลาปลาซ สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลงลาปลาซผกผัน การหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไข ค่าเริ่มต้นด้วยผลการแปลงลาปลาซ ฟังก์ชันเฮฟวีไซด์ และฟังก์ชันไดเรกเดลตา ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ การแปรตัว พารามิเตอร์ (Variation of Parameters) การหาผลเฉลยในรูปแบบฟังก์ชันยกกำลังเมทริกซ์ การหาผลเฉลยของ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีกำจัด ตัวแปร การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ การประยุกต์ของระบบสมการเชิง อนุพันธ์

หนังสือ สมการเชิงอนุพันธ์ (Differential Equations) เล่มที่ 2 ใช้ประกอบการเรียนการสอนวิชา สมการเชิง อนุพันธ์ ซึ่งสอนให้กับนิสิตคณะวิทยาศาสตร์ และ คณะวิศวกรรมศาสตร์ นอกจากนั้นหนังสือเล่มนี้สามารถใช้ ประกอบการเรียนการสอนวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ในสถาบันการศึกษาอื่น ๆ ได้

คณะผู้เรียบเรียงหวังว่าหนังสือสมการเชิงอนุพันธ์ เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับนิสิต นักศึกษาและอาจารย์ผู้สอนในทุกสถาบันที่ต้องศึกษาวิชาสมการเชิงอนุพันธ์

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

รองศาสตราจารย์ณัฐธนาถ ไตรภาพ

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มกราคม พ.ศ. 2565

สารบัญ

หน้า

บทที่ 5 ผลการแปลงลาปลาซ 1 – 267

5.1 ผลการแปลงลาปลาซ	1
5.2 สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ	20
5.3 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน	91
5.4 การหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นด้วยผลการแปลงลาปลาซ	167
5.5 ฟังก์ชันเฮฟวีไซด์ และฟังก์ชันไดแรกเดลตา	227

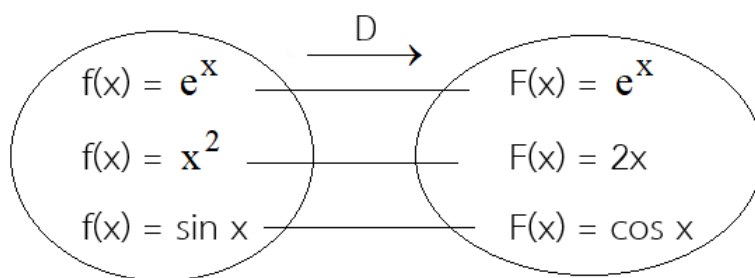
บทที่ 6 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ 268 – 1101

6.1 ระบบสมการเชิงอนุพันธ์	268
6.2 การแปรตัวพารามิเตอร์ (Variation of Parameters)	374
6.3 การหาผลเฉลยในรูปแบบฟังก์ชันยกกำลังเมทริกซ์	446
6.4 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว	585
6.5 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีกำจัดตัวแปร	659
6.6 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซ	753
6.7 การประยุกต์ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์	845

บทที่ 5

ผลการแปลงลาปลาซ

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในบทเรียนที่ผ่านมาได้มีการนำประโยชน์ของตัวดำเนินการ D มาช่วยในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ จากความหมายของ $D(f(x))$ คืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน



จะเห็นว่าตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ D เป็นฟังก์ชันที่ส่ง ฟังก์ชัน ไปเป็น ฟังก์ชัน กล่าวคือ

$$D(f(x) = e^x) \text{ เป็นฟังก์ชัน } F(x) = e^x$$

$$D(f(x) = x^2) \text{ เป็นฟังก์ชัน } F(x) = 2x$$

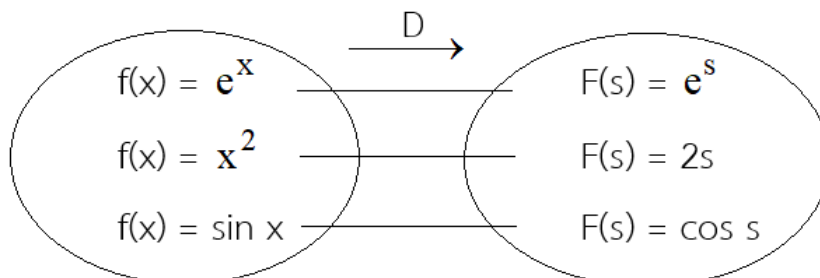
$$D(f(x) = \sin x) \text{ เป็นฟังก์ชัน } F(x) = \cos x$$

ในกรณีที่เรากำหนดใช้ตัวแปร s กับฟังก์ชัน F จะสามารถเขียนได้เป็น

$$D(f(x) = e^x) \text{ เป็นฟังก์ชัน } F(s) = e^s$$

$$D(f(x) = x^2) \text{ เป็นฟังก์ชัน } F(s) = 2s$$

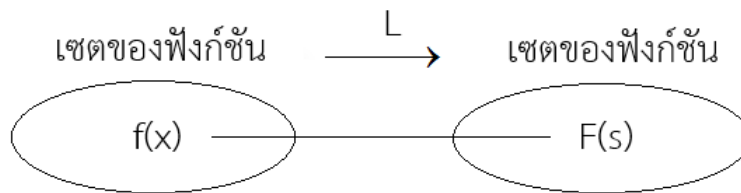
$$D(f(x) = \sin x) \text{ เป็นฟังก์ชัน } F(s) = \cos s$$



ในบทที่ 5 นี้เราจะศึกษาเกี่ยวกับตัวดำเนินการที่ส่ง ฟังก์ชัน ไปเป็น ฟังก์ชัน อีกตัวหนึ่งที่จะนำมาช่วยในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้

5.1 ผลการแปลงลาปลาซ

ผลการแปลงลาปลาซ (Laplace transform) เป็นตัวดำเนินการ ส่ง ฟังก์ชัน ไปเป็น ฟังก์ชัน
ใช้สัญลักษณ์แทนผลการแปลงลาปลาซด้วย L



เพื่อไม่ให้เกิดการสับสนเกี่ยวกับสูตรของฟังก์ชันเราจึงนิยมใช้ตัวแปร x กับฟังก์ชัน f และใช้ตัวแปร s กับฟังก์ชัน F
เพราะฉะนั้น L ส่งฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชัน F นิยมแทนด้วยสัญลักษณ์ $L\{f(x)\}(s) = F(s)$

$$\text{หรือ } L\{f(x)\} = F(s)$$

$$\text{หรือ } L\{f(x)\} = F$$

$$\text{หรือ } L\{f\} = F$$

ก่อนที่จะนิยามความหมายของฟังก์ชัน $F(s)$ ที่ได้จาก $L\{f(x)\}$ ว่ากำหนดอย่างไร

เราต้องมาดูลักษณะของฟังก์ชัน f บางประการที่จะสามารถนิยามผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชัน f ได้

บทนิยาม 5.1.1 ฟังก์ชัน f เป็น **อันดับเอกซ์โพเนนเชียล** (exponential order) ถ้ามีค่าคงตัว $M > 0$, $x_0 > 0$

และ $a > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)| < Me^{ax}$ สำหรับทุก $x \geq x_0$

ฟังก์ชัน f เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียลเขียนแทนด้วย $f(x) = O[e^{ax}]$

ข้อแนะนำ 1. การแสดงว่า $f(x) = O[e^{ax}]$ เราอาจใช้ผลของข้อพิสูจน์ต่อไปนี้

สมมติ $\lim_{x \rightarrow \infty} |e^{-ax} f(x)| = k$, k เป็นค่าคงตัว

เพราะฉะนั้นจะมี $x_0 > 0$, $a > 0$ เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ ถ้า $x \geq x_0$ แล้ว $|e^{-ax} f(x) - k| < 1$

เพราะฉะนั้น $-1 < e^{-ax} f(x) - k < 1$

ผลที่ตามมาคือ $e^{-ax} |f(x)| < 1 + k$ และ $|f(x)| < (1 + k)e^{ax}$

เลือก $M = (1 + k)$

จะได้ว่ามีค่าคงตัว $x_0 > 0$, $a > 0$ และ $M > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)| < Me^{ax}$ สำหรับทุก $x \geq x_0$

เพราะฉะนั้น ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} |f(x)| = \text{ค่าคงตัว}$ แล้ว $f(x) = O[e^{ax}]$

2. การแสดงว่า $f(x)$ ไม่เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล อาจใช้ผลของข้อพิสูจน์ต่อไปนี้

สมมติทุกค่า a จะได้ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} |f(x)| = \infty$

เพราะฉะนั้นทุกค่าคงตัว $M > 0$ จะมี x_M ที่ทำให้ ถ้า $x \geq x_M$ แล้ว $e^{-ax} |f(x)| \geq M$

หรือ $|f(x)| \geq Me^{ax}$

เพราะฉะนั้นไม่มีค่าคงตัว a, M และ x_0 ที่ทำให้ ถ้า $x \geq x_0$ แล้ว $|f(x)| < Me^{ax}$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

สรุป ถ้าทุกค่า a จะได้ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} |f(x)| = \infty$ แล้ว f ไม่เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

ตัวอย่าง 5.1.1 จงแสดงว่า $f(x) = x^n$, n เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

วิธีทำ เพราะค่าทุกค่า $s > 0$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} x^n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^{sx}} = 0$

เพราะฉะนั้น $f(x) = x^n$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่ง $f(x) = O[e^{sx}]$ เมื่อ $s > 0$ □

ตัวอย่าง 5.1.2 จงแสดงว่า $f(x) = \sin x$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

วิธีทำ เพราะค่าทุกค่า $s \geq 0$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} \sin x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{e^{sx}} = 0$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \sin x$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่ง $f(x) = O[e^{sx}]$ เมื่อ $s \geq 0$ □

ตัวอย่าง 5.1.3 จงแสดงว่า $f(x) = e^{4x}$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

วิธีทำ เลือก $M = 2$, $x_0 = 1$ จะได้ $e^{4x} < 2e^{4x}$ ทุกค่า $x \geq x_0$

เพราะฉะนั้น $|f(x)| < 2e^{4x}$ ทุกค่า $x \geq 0$

เพราะฉะนั้น $f(x) = e^{4x}$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่ง $f(x) = O[e^{4x}]$ □

ข้อสังเกต ฟังก์ชัน $f(x) = x^n$, $f(x) = \sin ax$, $f(x) = \cos ax$, $f(x) = e^{ax}$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

ตัวอย่าง 5.1.4 จงแสดงว่า $f(x) = e^{x^2}$ ไม่เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

วิธีทำ เพราะว่า ถ้า $a < 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} e^{x^2} = \infty$

และ ถ้า $a \geq 0$ แล้ว $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-ax} e^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{(x-a)x} = \infty$

เพราะฉะนั้น $f(x) = e^{x^2}$ ไม่เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล □

ทฤษฎีบท 5.1.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และ $f(x) = O[e^{ax}]$

สำหรับบางค่าคงตัว a แล้ว $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ ลู่เข้า เมื่อ $s \geq a$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $f(x) = O[e^{ax}]$

เพราะฉะนั้นมีค่าคงตัว $M \geq 0$ และ $x_0 > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)| < Me^{ax}$ ทุก $x \geq x_0$

สำหรับ $s \geq a$ จะได้ว่า $|e^{-sx} f(x)| = e^{-sx} |f(x)| < e^{-sx} Me^{ax} = e^{-(s-a)x} M$ ทุกค่า $x \geq x_0$

เพราะว่า $\int_{x_0}^\infty Me^{-(s-a)x} dx$ ลู่เข้า เมื่อ $s \geq a$ และ $|e^{-sx} f(x)| < Me^{-(s-a)x}$

เพราะฉะนั้น $\int_{x_0}^\infty e^{-sx} f(x) dx$ ลู่เข้า เมื่อ $s \geq a$

เพราะว่า $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{x_0} e^{-sx} f(x) dx + \int_{x_0}^\infty e^{-sx} f(x) dx$

เพราะฉะนั้น $\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$ ลู่เข้า เมื่อ $s \geq a$ □

บทนิยาม 5.1.2 f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และ $f(x) = O[e^{ax}]$

ให้ $S = \{ s \mid \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \text{ ลู่เข้า} \}$

ให้ $F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx, s \in S$

เราเรียก F ว่า **ผลการแปลงลาปลาซ** (Laplace transform) ของฟังก์ชัน f

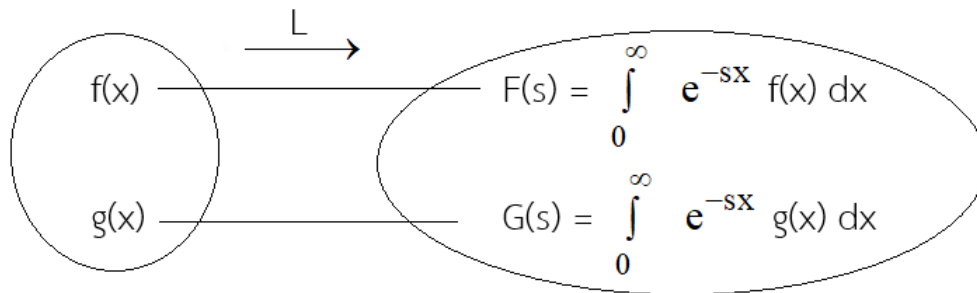
และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $F(s) = L\{f(x)\}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$

ในบางครั้งเพื่อความสะดวกเราเขียนแทน $F(s)$ ด้วย $L\{f\}$ หรือ $L\{f(x)\}(s)$

โดยบทนิยาม 5.1.2 ได้ว่า L เป็นฟังก์ชันที่ส่ง ฟังก์ชัน f ไปเป็น ฟังก์ชัน F

$$\text{กำหนดโดย } F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

พิจารณาแผนภูมิการส่งค่าของผลการแปลงลาปลาซ L



ข้อตกลง สัญลักษณ์ที่ใช้เขียนแทนผลการแปลงลาปลาซของ f อาจเขียนเป็น

1. $L\{f(x)\}(s)$
2. $L\{f(x)\}$ โดยไม่ระบุตัวแปร s
3. $L\{f\}$ โดยไม่ระบุตัวแปร x
4. $F(s) = L\{f\}(s)$

ข้อสังเกต พิจารณาฟังก์ชันในรูป $f(x) = x^n e^{ax} \sin bx$ หรือ $f(x) = x^n e^{ax} \cos bx$ ทุกค่า $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

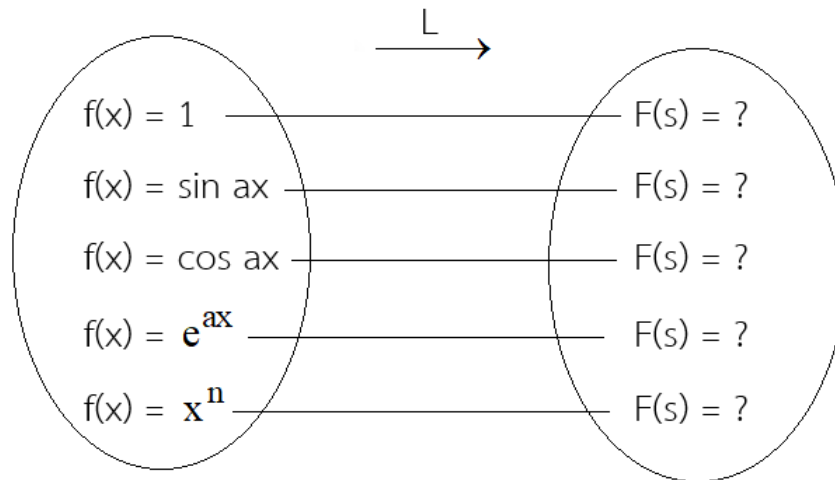
เพราะว่า $x^n = O[e^{cx}]$ เมื่อ $c > 0$ เป็นค่าคงตัว และ $|\sin bx| \leq 1$ และ $|\cos bx| \leq 1$ ทุกค่า x

เพราะฉะนั้น $f(x) = O[e^{(a+c)x}]$

โดยทฤษฎีบท 5.1.1 จะได้ว่า $L\{f(x)\}$ หาค่าได้เสมอ เมื่อ $s \geq a + c$

จากการที่ผลการแปลงลาปลาซเป็นการส่งฟังก์ชัน $f(x)$ ไปเป็นฟังก์ชัน $F(s)$

เราจึงศึกษาต่อไปว่า $L\{f(x)\}$ จะมีสูตรเป็นอย่างไรโดยพิจารณาจากฟังก์ชัน $f(x)$ ต่อไปนี้



การหา $\int e^{-sx} \sin ax \, dx$ และ $\int e^{-sx} \cos ax \, dx$

โดยใช้ตัวดำเนินการ $\frac{1}{D}$ ช่วยในการอินทิเกรต จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} (e^{-sx} e^{aix}) &= e^{-sx} \frac{1}{D-s} e^{aix} \\ &= e^{-sx} \frac{1}{ai-s} e^{aix} \\ &= e^{-sx} \left(\frac{-ai-s}{-ai-s} \right) \left(\frac{1}{ai-s} \right) e^{aix} \\ &= e^{-sx} (-ai-s) \frac{1}{s^2+a^2} e^{aix} \\ &= -\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2} (ai+s) e^{aix} \\ &= -\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2} (ai+s)(\cos ax + i \sin ax) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} (e^{-sx} \cos ax) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{D} (e^{-sx} e^{aix}) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(-\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2} (ai+s)(\cos ax + i \sin ax) \right) \\ &= -\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2} \operatorname{Re}((ai+s)(\cos ax + i \sin ax)) \\ &= -\frac{e^{-sx}}{s^2+a^2} (s \cos ax - a \sin ax) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D} (e^{-sx} \sin ax) &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{D} (e^{-sx} e^{aix}) \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(- \frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} (ai + s)(\cos ax + i \sin ax) \right) \\
&= - \frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} \operatorname{Im}((ai + s)(\cos ax + i \sin ax)) \\
&= - \frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} (a \cos ax + s \sin ax)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\int e^{-sx} \cos ax \, dx = - \frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} (s \cos ax - a \sin ax)$

และ $\int e^{-sx} \sin ax \, dx = - \frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} (a \cos ax + s \sin ax)$

ตัวอย่าง 5.1.5 ให้ $f(x) = 1$ จงหา $L\{f(x)\}$

วิธีทำ $L\{f(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) \, dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \, dx = \frac{1}{s}$ เมื่อ $s > 0$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x) = 1\}(s) = F(s) = \frac{1}{s}$

ซึ่งจะเขียนโดยย่อเป็น $L\{1\}(s) = \frac{1}{s}$ หรือ $L\{1\} = \frac{1}{s}$

□

ตัวอย่าง 5.1.6 จงหา $L\{\sin ax\}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

วิธีทำ $L\{\sin ax\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin ax \, dx$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[- \frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} (a \cos ax + s \sin ax) \right] \\
&= \frac{a}{s^2 + a^2} \text{ เมื่อ } s > 0
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x) = \sin ax\}(s) = F(s)$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin ax \, dx \\
&= \frac{a}{s^2 + a^2} \text{ เมื่อ } s > 0
\end{aligned}$$

ซึ่งจะเขียนโดยย่อเป็น $L\{\sin ax\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ หรือ $L\{\sin ax\} = \frac{a}{s^2 + a^2}$

□

ตัวอย่าง 5.1.7 จงหา $L\{\cos ax\}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } L\{\cos ax\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \cos ax \, dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-sx}}{s^2 + a^2} (s \cos ax - a \sin ax) \right] \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{เมื่อ } s > 0\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x) = \cos ax\}(s) = F(s)$

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\infty} e^{-sx} \cos ax \, dx \\ &= \frac{s}{s^2 + a^2} \quad \text{เมื่อ } s > 0\end{aligned}$$

ซึ่งจะเขียนโดยย่อเป็น $L\{\cos ax\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$ หรือ $L\{\cos ax\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$ □

ตัวอย่าง 5.1.8 ให้ $f(x) = e^{ax}$ จงหา $L\{f(x)\}$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } L\{e^{ax}\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} \, dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{(-s+a)x} \, dx \\ &= \frac{1}{s-a} \quad \text{เมื่อ } s > a\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x) = e^{ax}\}(s) = F(s) = \frac{1}{s-a}$ เมื่อ $s > a$

ซึ่งจะเขียนโดยย่อเป็น $L\{e^{ax}\}(s) = \frac{1}{s-a}$ หรือ $L\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}$ □

ตัวอย่าง 5.1.9 จงแสดงว่า $L\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $L\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } L\{x\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x \, dx \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\frac{xe^{-sx}}{-s} \right]_{x=0}^{x=w} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx}}{-s} \, dx \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\frac{we^{-sw}}{-s} - 0 \right] - \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-sx}}{s^2} \right]_{x=0}^{x=w} \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{we^{-sw}}{-s} - \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-sw}}{s^2} - \frac{1}{s^2} \right] \\ &= 0 + \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\{x^k\}(s) = \frac{k!}{s^{k+1}} \text{ และ } \int_0^{\infty} e^{-sx} x^k \, dx = \frac{k!}{s^{k+1}}$$

$$\begin{aligned} L\{x^{k+1}\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{k+1} \, dx \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{k+1}e^{-sx}}{-s} \right]_{x=0}^{x=w} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-sx}}{-s} (k+1) x^k \, dx \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{k+1}e^{-sx}}{-s} \right]_{x=0}^{x=w} - \frac{k+1}{-s} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^k \, dx \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \left[\frac{w^{k+1}e^{-sw}}{-s} - 0 \right] - \frac{k+1}{-s} \left(\frac{k!}{s^{k+1}} \right) \\ &= 0 + \frac{k+1}{s} \left(\frac{k!}{s^{k+1}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{k+1}{s} \frac{k!}{s^{k+1}}$$

$$= \frac{(k+1)!}{s^{(k+1)+1}}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เราสรุปได้ว่า $L\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ เมื่อ $s > 0$ ทุกจำนวนเต็มบวก n □

สูตรของผลการแปลงลาปลาซ $L\{f(x)\} = F(s)$

$f(x)$	$F(s) = L\{f(x)\}(s)$
1	$\frac{1}{s} ; s > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a} ; s > a$
$\sin ax$	$\frac{a}{s^2 + a^2} ; s > 0$
$\cos ax$	$\frac{s}{s^2 + a^2} ; s > 0$
x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}} ; s > 0$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

แบบที่ 1

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot (1) dx \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(\exp(-s \cdot x) - 1)}{s}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot (x^2) dx \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(s^2 \cdot x^2 \cdot \exp(-s \cdot x) + 2 \cdot s \cdot x \cdot \exp(-s \cdot x) + 2 \cdot \exp(-s \cdot x) - 2)}{s^3}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot (e^{4 \cdot x}) dx \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-[\exp[-x \cdot (s - 4)] - 1]}{(s - 4)}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot (\sin(4 \cdot x)) dx \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(4 \cdot \exp(-s \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot x) + s \cdot \exp(-s \cdot x) \cdot \sin(4 \cdot x) - 4)}{(s^2 + 16)}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot (\cos(4 \cdot x)) dx \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(s \cdot \exp(-s \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot x) - 4 \cdot \exp(-s \cdot x) \cdot \sin(4 \cdot x) - s)}{(s^2 + 16)}$$

แบบที่ 2

$$1 \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{s}$$

$$x^2 \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{2}{s^3}$$

$$e^{4 \cdot x} \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{(s - 4)}$$

$$\sin(4 \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{4}{(s^2 + 16)}$$

$$\cos(4 \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{s}{(s^2 + 16)}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

แบบที่ 1

In[18]:= **Integrate** $[e^{-s \cdot x}, \{x, 0, \infty\}]$

Out[18]= ConditionalExpression $[\frac{1}{s}, \text{Re}[s] > 0]$

In[19]:= **Integrate** $[e^{-s \cdot x} \cdot e^{4x}, \{x, 0, \infty\}]$

Out[19]= ConditionalExpression $[\frac{1}{s - 4 \text{Log}[e]}, \text{Re}[\text{Log}[e]] < 0 \ \&\& \ \text{Re}[s] > 0]$

In[20]:= **Integrate** $[e^{-s \cdot x} \cdot x^2, \{x, 0, \infty\}]$

Out[20]= ConditionalExpression $[\frac{2}{s^3}, \text{Re}[s] > 0]$

In[21]:= **Integrate** $[e^{-s \cdot x} \text{Sin}[4x], \{x, 0, \infty\}]$

Out[21]= ConditionalExpression $[\frac{4}{16 + s^2}, \text{Re}[s] > 0]$

In[22]:= **Integrate** $[e^{-s \cdot x} \text{Cos}[4x], \{x, 0, \infty\}]$

Out[22]= ConditionalExpression $[\frac{s}{16 + s^2}, \text{Re}[s] > 0]$

แบบที่ 2

In[1]:= **LaplaceTransform**[1, x, s]

$$\text{Out[1]} = \frac{1}{s}$$

In[2]:= **LaplaceTransform**[x^2, x, s]

$$\text{Out[2]} = \frac{2}{s^3}$$

In[3]:= **LaplaceTransform**[e^{4*x}, x, s]

$$\text{Out[3]} = \frac{1}{-4 + s}$$

In[5]:= **LaplaceTransform**[Sin[4 x], x, s]

$$\text{Out[5]} = \frac{4}{16 + s^2}$$

In[6]:= **LaplaceTransform**[Cos[4 x], x, s]

$$\text{Out[6]} = \frac{s}{16 + s^2}$$

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

$$1.1 \ f(x) = x^3$$

$$1.2 \ f(x) = \sin 4x$$

$$1.3 \ f(x) = \cos^3 x$$

$$1.4 \ f(x) = e^{3x}$$

2. จงแสดงว่า

2.1 ถ้า $f(x)$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล แล้ว $k f(x)$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

2.2 ถ้า $f(x)$, $g(x)$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียลแล้ว $f(x) + g(x)$ เป็นอันดับเอกซ์โพเนนเชียล

3. จงหาค่าอินทิกรัล

$$3.1 \ \int_0^{\infty} e^{-sx} x^2 dx$$

$$3.2 \ \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin 2x dx$$

$$3.3 \ \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{4x} dx$$

4. จงหาโดเมนของฟังก์ชัน $F(s)$ และสูตรของฟังก์ชัน $F(s)$

$$4.1 \ F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} 4 dx$$

$$4.2 \ F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} 3x dx$$

$$4.3 \ F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} 4e^{2x} dx$$

$$4.4 \ F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} 3 \sin 4x dx$$

เฉลยแบบฝึกหัด 5.1

3.1

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot x^2 dx \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(\exp(-s \cdot x) \cdot s^2 \cdot x^2 + 2 \cdot s \cdot x \cdot \exp(-s \cdot x) + 2 \cdot \exp(-s \cdot x) - 2)}{s^3}$$

$$x^2 \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{2}{s^3}$$

3.2

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot \sin(2 \cdot x) dx \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-(2 \cdot \exp(-s \cdot x) \cdot \cos(2 \cdot x) + s \cdot \exp(-s \cdot x) \cdot \sin(2 \cdot x) - 2)}{(s^2 + 4)}$$

$$\sin(2 \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{2}{(s^2 + 4)}$$

3.3

$$\int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot e^{4 \cdot x} dx \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-[\exp[-x \cdot (s - 4)] - 1]}{(s - 4)}$$

$$e^{4 \cdot x} \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{(s - 4)}$$

4.1

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot (4) \, dx$$

$$F(s) \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} -4 \cdot \frac{(\exp(-s \cdot x) - 1)}{s}$$

$$4 \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{4}{s}$$

4.2

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot (3 \cdot x) \, dx$$

$$F(s) \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} -3 \cdot \frac{(s \cdot x \cdot \exp(-s \cdot x) + \exp(-s \cdot x) - 1)}{s^2}$$

$$3 \cdot x \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{3}{s^2}$$

4.3

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot (4 \cdot e^{2 \cdot x}) \, dx$$

$$F(s) \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} -4 \cdot \frac{[\exp[-x \cdot (s - 2)] - 1]}{(s - 2)}$$

$$4 \cdot e^{2 \cdot x} \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{4}{(s - 2)}$$

4.4

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-s \cdot x} \cdot (3 \cdot \sin(4 \cdot x)) \, dx$$

$$F(s) \text{ simplify } \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} -3 \cdot \frac{(4 \cdot \exp(-s \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot x) + s \cdot \exp(-s \cdot x) \cdot \sin(4 \cdot x) - 4)}{(s^2 + 16)}$$

$$3 \cdot \sin(4 \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{12}{(s^2 + 16)}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[33]:= 3. ;  
3.1 ;
```

```
In[35]:= TraditionalForm[LaplaceTransform[x^2, x, s]]
```

Out[35]//TraditionalForm=

$$\frac{2}{s^3}$$

```
In[36]:= 3.2 ;
```

```
In[37]:= TraditionalForm[LaplaceTransform[Sin[2 x], x, s]]
```

Out[37]//TraditionalForm=

$$\frac{2}{s^2 + 4}$$

```
In[38]:= 3.3 ;
```

```
In[39]:= TraditionalForm[LaplaceTransform[e^{4*x}, x, s]]
```

Out[39]//TraditionalForm=

$$\frac{1}{s - 4}$$

In[40]:= 4.;

In[41]:= 4.1;

In[42]:= TraditionalForm[LaplaceTransform[4, x, s]]

Out[42]//TraditionalForm=

$$\frac{4}{s}$$

In[43]:= 4.2;

In[44]:= TraditionalForm[LaplaceTransform[3 x, x, s]]

Out[44]//TraditionalForm=

$$\frac{3}{s^2}$$

In[45]:= 4.3;

In[46]:= TraditionalForm[LaplaceTransform[4 e^{2x}, x, s]]

Out[46]//TraditionalForm=

$$\frac{4}{s-2}$$

In[47]:= 4.4;

In[48]:= TraditionalForm[LaplaceTransform[3 Sin[4 x], x, s]]

Out[48]//TraditionalForm=

$$\frac{12}{s^2 + 16}$$

In[49]:= 4.1;

In[50]:= TraditionalForm[Integrate[e^{-s*x} 4, {x, 0, ∞}]]

Out[50]//TraditionalForm=

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{4}{s}, \text{Re}(s) > 0\right]$$

In[51]:= 4.2;

In[52]:= TraditionalForm[Integrate[e^{-s*x} * 3 x, {x, 0, ∞}]]

Out[52]//TraditionalForm=

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{3}{s^2}, \text{Re}(s) > 0\right]$$

In[53]:= 4.3;

In[54]:= TraditionalForm[Integrate[e^{-s x} * 4 e^{2 x}, {x, 0, ∞}]]

Out[54]/TraditionalForm=

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{4}{s-2}, \text{Re}(s) > 2\right]$$

In[55]:= 4.4;

In[56]:= TraditionalForm[Integrate[e^{-s x} 3 Sin[4 x], {x, 0, ∞}]]

Out[56]/TraditionalForm=

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{12}{s^2 + 16}, \text{Re}(s) > 0\right]$$

5.2 สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ

ในหัวข้อที่ 5.1 ได้ศึกษาเกี่ยวกับผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเช่น 1 , x^n , e^{ax} , $\sin ax$ และ $\cos ax$

ในหัวข้อ 5.2 นี้จะศึกษาเกี่ยวกับสมบัติของผลการแปลงลาปลาซเพื่อนำไปช่วยในการหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่มีสูตรยากมากขึ้นเช่น $x^n e^{ax}$, $e^{ax} \sin bx$, $e^{ax} \cos bx$, $x^n \sin ax$, ...

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และ $f(x) = O[e^{ax}]$, $g(x) = O[e^{bx}]$

เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

ให้ $L\{f(x)\} = F(s)$ และ $L\{g(x)\} = G(s)$

สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ

$$1. L\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\} = c_1 L\{f(x)\} + c_2 L\{g(x)\}$$

ข้อพิสูจน์ โดยสมบัติของการอินทิเกรตจะได้

$$\begin{aligned} L\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx \\ &= c_1 \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx + c_2 \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) dx \\ &= c_1 L\{f(x)\}(s) + c_2 L\{g(x)\}(s) \end{aligned} \quad \text{เมื่อ } s > \max(a, b)$$

ตัวอย่าง 5.2.1 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = 4x + 3x^2$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } L\{f(x)\}(s) &= L\{4x + 3x^2\}(s) \\ &= 4 L\{x\}(s) + 3 L\{x^2\}(s) \\ &= 4\left(\frac{1}{s^2}\right) + 3\left(\frac{2!}{s^3}\right) \\ &= \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s^3} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = 2e^{4x} - 3 \sin 4x$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } L\{2e^{4x} - 3 \sin 4x\}(s) &= 2 L\{e^{4x}\}(s) - 3 L\{\sin 4x\}(s) \\ &= 2\left(\frac{1}{s-4}\right) - 3\left(\frac{4}{s^2+16}\right) \\ &= \frac{2}{s-4} - \frac{12}{s^2+16} \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.2.3 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = 2x^3 - 5 \cos 3x + 4e^x$

วิธีทำ $L\{f(x)\}(s) = L\{2x^3 - 5 \cos 3x + 4e^x\}(s)$

$$= 2 L\{x^3\}(s) - 5 L\{\cos 3x\}(s) + 4 L\{e^x\}(s)$$

$$= 2\left(\frac{3!}{s^4}\right) - 5\left(\frac{s}{s^2 + 3^2}\right) + 4\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

$$= \frac{12}{s^4} - \frac{5s}{s^2 + 9} + \frac{4}{s-1}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$4 \cdot x + 3 \cdot x^2 \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{4}{s^2} + \frac{6}{s^3}$$

$$2 \cdot e^{4 \cdot x} - 3 \cdot \sin(4 \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{2}{(s-4)} - \frac{12}{(s^2 + 16)}$$

$$2 \cdot x^3 - 5 \cdot \cos(3 \cdot x) + 4 \cdot e^x \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{12}{s^4} - 5 \cdot \frac{s}{(s^2 + 9)} + \frac{4}{(s-1)}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

In[4]:= **LaplaceTransform**[**4 x + 3 x²**, **x**, **s**]

$$\text{Out[4]} = \frac{6}{s^3} + \frac{4}{s^2}$$

In[5]:= **LaplaceTransform**[**2 e^{4 x} - 3 Sin[4 x]**, **x**, **s**]

$$\text{Out[5]} = \frac{2}{-4 + s} - \frac{12}{16 + s^2}$$

In[6]:= **LaplaceTransform**[**2 x³ - 5 Cos[3 x] + 4 e^x**, **x**, **s**]

$$\text{Out[6]} = \frac{4}{-1 + s} + \frac{12}{s^4} - \frac{5 s}{9 + s^2}$$

2. ถ้า $L\{f(x)\}(s) = F(s)$ เมื่อ $s > a$ แล้ว $L\{e^{cx} f(x)\}(s) = F(s - c)$ เมื่อ $s > a + c$

ข้อพิสูจน์ ให้ $L\{f(x)\}(s) = F(s)$ เมื่อ $s > a$

$$\text{เพราะฉะนั้น } F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \text{ เมื่อ } s > a$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } F(s - c) = \int_0^{\infty} e^{-(s-c)x} f(x) dx \text{ เมื่อ } s - c > a$$

$$\text{เพราะว่า } L\{e^{cx} f(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} (e^{cx} f(x)) dx = \int_0^{\infty} e^{-(s-c)x} f(x) dx$$

$$\text{และ } F(s - c) = \int_0^{\infty} e^{-(s-c)x} f(x) dx \text{ เมื่อ } s - c > a$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\{e^{cx} f(x)\}(s) = F(s - c) \text{ เมื่อ } s > a + c$$

□

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ 1. $f(x) = e^{3x} x^2$ 2. $f(x) = e^{4x} \sin x$

วิธีทำ 1. เพราะว่ $F(s) = L\{x^2\}(s) = \frac{2}{s^3}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\{e^{3x} x^2\}(s) = F(s - 3) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

2. เพราะว่ $F(s) = L\{\sin x\}(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } L\{e^{4x} \sin x\}(s) &= F(s - 4) \\ &= \frac{1}{(s-4)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{s^2 - 8s + 17} \end{aligned}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$e^{3 \cdot x} \cdot x^2 \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$e^{4 \cdot x} \cdot \sin(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{[(s-4)^2 + 1]}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

In[13]:= **LaplaceTransform**[$e^{3x} \star x^2$, x , s]

Out[13]= $\frac{2}{(-3 + s)^3}$

In[14]:= **TraditionalForm**[%]

Out[14]//TraditionalForm= $\frac{2}{(s-3)^3}$

In[15]:= **LaplaceTransform**[$e^{4x} \star \text{Sin}[x]$, x , s]

Out[15]= $\frac{1}{1 + (-4 + s)^2}$

In[16]:= **TraditionalForm**[%]

Out[16]//TraditionalForm= $\frac{1}{(s-4)^2 + 1}$

จากสมบัติ $L\{e^{cx} f(x)\}(s) = F(s-c)$ จะทำให้เราได้สูตรผลการแปลงลาปลาซที่สำคัญ

จากสูตร $L\{\sin ax\}(s) =$ จะได้ $L\{e^{cx} \sin ax\}(s) = \frac{1}{(s-c)^2 + a^2}$

จากสูตร $L\{\cos ax\}(s) =$ จะได้ $L\{e^{cx} \cos ax\}(s) = \frac{s-c}{(s-c)^2 + a^2}$

จากสูตร $L\{x^n\}(s) =$ จะได้ $L\{e^{cx} x^n\}(s) = \frac{n!}{(s-c)^{n+1}}$

3. ถ้า $L\{f(x)\}(s) = F(s)$ เมื่อ $s > a$ แล้ว $L\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) = \frac{1}{s} L\{f(x)\}(s)$ เมื่อ $s > \max(a, 0)$

เพราะฉะนั้น $L\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) = \frac{1}{s} F(s)$

ข้อพิสูจน์

ให้ $F(s) = L\{f(x)\}(s)$ เมื่อ $s > a$ และ $k(x) = \int_0^x f(t) dt$

เพราะฉะนั้น $L\{k(x)\}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} k(x) dx$

พิจารณา $\int e^{-sx} k(x) dx$

ให้ $u = k(x)$, $dv = e^{-sx} dx$ จะได้ $du = f(x) dx$, $v = -\frac{1}{s} e^{-sx}$ และ

$$\begin{aligned} \int e^{-sx} k(x) dx &= uv - \int v du \\ &= -\frac{1}{s} e^{-sx} k(x) + \frac{1}{s} \int e^{-sx} f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx} k(x) dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} k(x) \right]_{x=0}^{x=b} + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \\ &= 0 + \frac{1}{s} F(s) \\ &= \frac{1}{s} F(s) \quad \text{เมื่อ } s > \max(a, 0) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) = \frac{1}{s} L\{f(x)\}(s)$ เมื่อ $s > \max(a, 0)$

□

ตัวอย่าง 5.2.5 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $k(x) = \int_0^x e^t dt$

วิธีทำ แบบที่ 1 เพราะว่า $f(x) = e^x$ มีผลการแปลงลาปลาซ $L\{f(x)\}(s) = \frac{1}{s-1}$

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้น } L\{k(x)\}(s) &= L\left\{\int_0^x e^t dt\right\}(s) \\ &= \frac{1}{s} L\{e^x\}(s) \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s-1}\right) \\ &= \frac{1}{s(s-1)}\end{aligned}$$

แบบที่ 2 หา $k(x) = \int_0^x e^t dt = e^x - e^0 = e^x - 1$ ก่อน แล้วจึงหาผลการแปลงลาปลาซ

$$\begin{aligned}L\{k(x)\}(s) &= L\{e^x - 1\}(s) \\ &= L\{e^x\}(s) - L\{1\}(s) \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s(s-1)}\end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $k(x) = \int_0^x e^{2t} \sin 4t dt$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ ให้ } f(x) &= e^{2x} \sin 4x \text{ จะได้ } L\{f(x)\}(s) = L\{e^{2x} \sin 4x\}(s) \\ &= L\{\sin 4x\}(s-2) \\ &= \frac{4}{(s-2)^2 + 4^2} \\ &= \frac{4}{(s-2)^2 + 16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้น } L\{k(x)\}(s) &= L\left\{\int_0^x e^{2t} \sin 4t dt\right\}(s) \\ &= \frac{1}{s} L\{f(x)\}(s) \\ &= \frac{1}{s} \left(\frac{4}{(s-2)^2 + 16}\right) \\ &= \frac{4}{s((s-2)^2 + 16)}\end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบทผลการประสาน ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[0, T]$

และ $f(x) = O[e^{ax}]$ และ $g(x) = O[e^{bx}]$

ถ้า $L\{f(x)\}(s) = F(s)$ และ $L\{g(x)\}(s) = G(s)$ แล้ว $L\left\{\int_0^x f(x-u)g(u) du\right\}(s) = F(s)G(s)$

$$\text{ข้อพิสูจน์ } F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \quad \dots (1)$$

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-su} g(u) du \quad \dots (2)$$

$$\text{คูณ (2) ด้วย } F(s) \text{ จะได้ } F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-su} F(s)g(u) du \quad \dots (3)$$

$$h(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < u \\ f(x-u) & , u < x < \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L\{h(x)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-sw} h(w) dw \\ &= 0 + \int_u^\infty e^{-sw} f(w-u) dw \\ &= \int_u^\infty e^{-sw} f(w-u) d(w-u) \\ &= \int_0^\infty e^{-su} e^{-s(w-u)} f(w-u) d(w-u) \\ &= e^{-su} \int_0^\infty e^{-s(w-u)} f(w-u) d(w-u) \\ &= e^{-su} \int_0^\infty e^{-sv} f(v) d(v) \\ &= e^{-su} L\{f(v)\}(s) \\ &= e^{-su} F(s) \end{aligned}$$

เพราะว่า $e^{-su} F(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $h(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < u \\ f(x-u) & , u < x < \infty \end{cases}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } e^{-su} F(s) = \int_u^\infty e^{-sx} f(x-u) dx$$

แทน e^{-su} $F(s)$ ลงในสมการ (3) จะได้ $F(s)G(s) = \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-sx} f(x-u)g(u) dx du$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } \int_0^\infty \int_u^\infty e^{-sx} f(x-u)g(u) dx du &= \int_0^\infty \int_0^x e^{-sx} f(x-u)g(u) du dx \\ &= \int_0^\infty [e^{-sx} \int_0^x f(x-u)g(u) du] dx \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $F(s)G(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของ $\int_0^x f(x-u)g(u) du$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\left\{\int_0^x f(x-u)g(u) du\right\}(s) = F(s)G(s)$$



ตัวอย่าง 5.2.7 จงหาผลการแปลงลาปลาซ $L\left\{\int_0^x e^u \sin(x-u) du\right\}(s)$

วิธีทำ เลือก $f(x) = \sin x$ จะได้ $F(s) = L\{f(x)\}(s) = L\{\sin x\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

และ $g(x) = e^x$ จะได้ $G(s) = L\{g(x)\}(s) = L\{e^x\}(s) = \frac{1}{s-1}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\left\{\int_0^x e^u \sin(x-u) du\right\}(s) = L\left\{\int_0^x \sin(x-u) e^u du\right\}(s)$$

$$= L\left\{\int_0^x f(x-u)g(u) du\right\}(s)$$

$$= F(s)G(s)$$

$$= \left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s-1}\right)$$

$$= \frac{1}{(s^2+1)(s-1)}$$



หมายเหตุ $L\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$ เป็นกรณีเฉพาะของทฤษฎีบทผลประสาน เมื่อเลือก $g(x) = 1$

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ } L\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) &= L\left\{\int_0^x f(t)g(x-t) dt\right\}(s) \\ &= F(s)G(s) \\ &= F(s)\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{F(s)}{s}\end{aligned}$$

ข้อสังเกต โดยการอินทิเกรตด้วยวิธีเปลี่ยนตัวแปรจะได้ว่า $\int_0^x f(x-u)g(u) du = \int_0^x f(u)g(x-u) du$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\left\{\int_0^x f(u)g(x-u) du\right\}(s) = F(s)G(s)$$

บทนิยาม 5.2.1 เราเรียกอินทิกรัล $\int_0^x f(x-u)g(u) du$ ว่าเป็น **ผลการประสาน** (convolution) ของ f และ g

และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $f * g$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\{f * g\}(s) = F(s)G(s)$$

ตัวอย่าง 5.2.8 ให้ $f(x) = e^x$ และ $g(x) = e^{-4x}$ จงหา $f * g$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ } (f * g)(x) &= \int_0^x f(t)g(x-t) dt \\ &= \int_0^x e^t e^{-4(x-t)} dt \\ &= e^{-4x} \int_0^x e^{5t} dt \\ &= e^{-4x} \left[\frac{e^{5t}}{5} \right]_{t=0}^{t=x} \\ &= e^{-4x} \left(\frac{e^{5x}}{5} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{e^x}{5} - \frac{e^{-4x}}{5}\end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต $f * g = g * f$

ข้อพิสูจน์ จาก $f * g = \int_0^x f(x-u)g(u) du$

แทนค่า $t = x - u$ จะได้ $dt = -du$ และ $u = x - t$

ถ้า $u = 0$ จะได้ $t = x$ และ ถ้า $u = x$ จะได้ $t = 0$

เพราะฉะนั้น $f * g = \int_0^x f(x-u)g(u) du$

$$= \int_x^0 f(t)g(x-t)(-dt)$$

$$= \int_0^x g(x-t)f(t) dt$$

$$= g * f$$



$$4. L\{x^n\}(s) = \frac{n}{s} L\{x^{n-1}\}(s) \text{ เมื่อ } s > 0 \text{ และ } n > 1$$

$$\text{ข้อพิสูจน์ } L\{x^n\}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} x^n dx$$

$$\text{พิจารณา } \int e^{-sx} x^n dx$$

$$\text{แทนค่า } u = x^n, dv = e^{-sx} dx \text{ จะได้ } du = nx^{n-1} dx, v = -\frac{e^{-sx}}{s}$$

$$\begin{aligned} \int e^{-sx} x^n dx &= \frac{-x^n e^{-sx}}{s} + \int nx^{n-1} \frac{e^{-sx}}{s} dx \\ &= \frac{-x^n e^{-sx}}{s} + \frac{n}{s} \int e^{-sx} x^{n-1} dx \end{aligned}$$

$$\text{เพราะว่า } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^n e^{-sx}}{s} = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \int_0^\infty e^{-sx} x^n dx = \frac{n}{s} \int_0^\infty e^{-sx} x^{n-1} dx$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\{x^n\}(s) = \frac{n}{s} L\{x^{n-1}\}(s)$$

ในกรณีที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$\begin{aligned} L\{x^n\}(s) &= \frac{n}{s} L\{x^{n-1}\}(s) \\ &= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} L\{x^{n-2}\}(s) \\ &= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} \frac{n-2}{s} L\{x^{n-3}\}(s) \\ &\vdots \\ &= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} \frac{n-2}{s} \dots \frac{3}{s} L\{x^2\}(s) \\ &= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} \frac{n-2}{s} \dots \frac{3}{s} \frac{2}{s} L\{x\}(s) \\ &= \frac{n}{s} \frac{n-1}{s} \frac{n-2}{s} \dots \frac{3}{s} \frac{2}{s} \frac{1}{s^2} \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}} \end{aligned}$$

□

5. ให้ $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ จะได้ $L\{x^a\}(s) = \frac{a\Gamma(a)}{s^{a+1}}$, $a > -1$ และ $s > 0$

$$\begin{aligned}\text{ข้อพิสูจน์ } L\{x^a\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x^a dx \\ &= \frac{a}{s} L\{x^{a-1}\}(s) \\ &= \frac{a}{s} \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{a-1} dx\end{aligned}$$

$$\text{พิจารณา } \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{a-1} dx$$

$$\text{แทนค่า } sx = t \text{ จะได้ } dx = \frac{dt}{s} \text{ และ } x = \frac{t}{s}$$

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \int_0^{\infty} e^{-sx} x^{a-1} dx &= \int_0^{\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{s}\right)^{a-1} dt \\ &= \frac{1}{s^a} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt \\ &= \frac{1}{s^a} \Gamma(a)\end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\{x^a\}(s) = \frac{a\Gamma(a)}{s^{a+1}}$$

□

หมายเหตุ $\Gamma(x)$ เรียกว่า ฟังก์ชันแกมมา (Gamma function) โดยสมบัติของฟังก์ชันแกมมา จะได้

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$, $x > 0$
3. $\Gamma(n+1) = n!$, $n = 1, 2, 3, \dots$
4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\text{ตัวอย่างเช่น } f(x) = \sqrt{x} \text{ จะได้ } L\{f(x)\}(s) = L\{\sqrt{x}\}(s) = \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

$$f(x) = x\sqrt{x} \text{ จะได้ว่า } L\{f(x)\}(s) = L\{x^{\frac{3}{2}}\}(s) = \frac{\frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}+1}} = \frac{\frac{3}{2}(\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}))}{s^{\frac{5}{2}}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{\frac{5}{2}}}$$

6. ถ้า $F(s) = L\{f(x)\}(s)$, $0 < x < c$ และ $h(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < c \\ f(x-c) & , c \leq x < \infty \end{cases}$

แล้ว $L\{h(x)\}(s) = e^{-cs} F(s)$

ข้อพิสูจน์ $F(s) = L\{f(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$

$$L\{h(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} h(x) dx = \int_c^{\infty} e^{-sx} f(x-c) dx$$

แทนค่า $x - c = t$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } L\{h(x)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-s(t+c)} f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-cs} e^{-st} f(t) dt \\ &= e^{-cs} F(s) \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.2.9 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $h(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 2 \\ (x-2)^2 & , 2 \leq x < \infty \end{cases}$

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = x^2$ ทำให้ $h(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 2 \\ (x-2)^2 & , 2 \leq x < \infty \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } L\{h(x)\}(s) &= e^{-2s} L\{f(x)\}(s) \\ &= e^{-2s} \left(\frac{2}{s^3} \right) \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.2.10 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 4 \\ x^2 + 4x & , 4 \leq x < \infty \end{cases}$

วิธีทำ ให้ $A(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 4 \\ x^2 & , 4 \leq x < \infty \end{cases}$

และ $B(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 4 \\ 4x & , 4 \leq x < \infty \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = A(x) + B(x)$

ให้ $a(x) = (x+4)^2$

จะได้ $A(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 4 \\ a(x-4) & , 4 \leq x < \infty \end{cases}$ และ

$$\begin{aligned}
L\{A(x)\}(s) &= e^{-4s} L\{a(x)\}(s) \\
&= e^{-4s} L\{(x+4)^2\}(s) \\
&= e^{-4s} L\{x^2 + 8x + 16\}(s) \\
&= e^{-4s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s} \right)
\end{aligned}$$

ให้ $b(x) = 4(x+4)$

จะได้ $B(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 4 \\ b(x-4) & , 4 \leq x < \infty \end{cases}$

$$\begin{aligned}
L\{B(x)\}(s) &= e^{-4s} L\{b(x)\}(s) \\
&= e^{-4s} L\{4(x+4)\}(s) \\
&= e^{-4s} L\{4x + 16\}(s) \\
&= e^{-4s} \left(\frac{4}{s^2} + \frac{16}{s} \right)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x)\}(s) = L\{A(x)\}(s) + L\{B(x)\}(s)$

$$\begin{aligned}
&= e^{-4s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{8}{s^2} + \frac{16}{s} \right) + e^{-4s} \left(\frac{4}{s^2} + \frac{16}{s} \right) \\
&= e^{-4s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{12}{s^2} + \frac{32}{s} \right)
\end{aligned}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$\Phi(x-4) \cdot x^2 \left| \begin{array}{l} \text{laplace, x, s} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot \exp(-4 \cdot s) \cdot \frac{(8 \cdot s^2 + 4 \cdot s + 1)}{s^3}$$

$$\Phi(x-4) \cdot 4 \cdot x \left| \begin{array}{l} \text{laplace, x, s} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 4 \cdot \exp(-4 \cdot s) \cdot \frac{(4 \cdot s + 1)}{s^2}$$

$$\Phi(x-4) \cdot (x^2 + 4 \cdot x) \left| \begin{array}{l} \text{laplace, x, s} \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow 2 \cdot \exp(-4 \cdot s) \cdot \frac{(16 \cdot s^2 + 6 \cdot s + 1)}{s^3}$$

ตัวอย่าง 5.2.11 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x^2 & , 0 \leq x < 1 \\ 3x & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$

วิธีทำ โดยการจัดรูปจะได้ $f(x) = x^2 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 3x - x^2 & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$

ให้ $A(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 3x & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$ และ $B(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ x^2 & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = x^2 + A(x) - B(x)$

เลือก $a(x) = 3(x + 1)$ จะได้ $A(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ a(x-1) & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$

และ $L\{A(x)\}(s) = e^{-s} L\{a(x)\}(s)$

$$= e^{-s} L\{3x + 3\}(s)$$

$$= e^{-s} \left(\frac{3}{s^2} + \frac{3}{s} \right)$$

เลือก $b(x) = (x + 1)^2$

จะได้ $B(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ b(x-1) & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $L\{B(x)\}(s) = e^{-s} L\{b(x)\}(s)$

$$= e^{-s} L\{x^2 + 2x + 1\}(s)$$

$$= e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x)\}(s) = L\{x^2 + A(x) - B(x)\}(s)$

$$= L\{x^2\}(s) + L\{A(x)\} - L\{B(x)\}(s)$$

$$= \frac{2}{s^3} + e^{-s} \left(\frac{3}{s^2} + \frac{3}{s} \right) - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

$$= \frac{2}{s^3} + e^{-s} \left(-\frac{2}{s^3} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} \right)$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$A(x) := 3 \cdot x \cdot \Phi(x - 1)$$

$$B(x) := x^2 \cdot \Phi(x - 1)$$

$$f(x) := x^2 + A(x) - B(x)$$

$$A(x) \text{ laplace, } x \rightarrow 3 \cdot \frac{\exp(-s)}{s} + 3 \cdot \frac{\exp(-s)}{s^2}$$

$$B(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{\exp(-s)}{s} + 2 \cdot \frac{\exp(-s)}{s^2} + 2 \cdot \frac{\exp(-s)}{s^3}$$

$$f(x) \left| \begin{array}{l} \text{laplace, } x, s \\ \text{expand} \end{array} \right. \rightarrow \frac{2}{s^3} + \frac{2}{\exp(s) \cdot s} + \frac{1}{\exp(s) \cdot s^2} - \frac{2}{\exp(s) \cdot s^3}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

In[37]:= **LaplaceTransform**[UnitStep[x - 1] 3 x, x, s]

Out[37]=
$$\frac{3 e^{-s} (1 + s)}{s^2}$$

In[38]:= **TraditionalForm**[%]

Out[38]/TraditionalForm=

$$\frac{3 e^{-s} (s + 1)}{s^2}$$

In[39]:= **LaplaceTransform**[UnitStep[x - 1] x², x, s]

Out[39]=
$$\frac{e^{-s} (2 + 2 s + s^2)}{s^3}$$

In[40]:= **TraditionalForm**[%]

Out[40]/TraditionalForm=

$$\frac{e^{-s} (s^2 + 2 s + 2)}{s^3}$$

In[41]:= **LaplaceTransform**[UnitStep[x - 1] * 3 * x - UnitStep[x - 1] x², x, s]

Out[41]=
$$\frac{3 e^{-s} (1 + s)}{s^2} - \frac{e^{-s} (2 + 2 s + s^2)}{s^3}$$

In[42]:= **Simplify**[%]

Out[42]=
$$\frac{e^{-s} (-2 + s + 2 s^2)}{s^3}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

1. การหาค่าของ $\int_0^1 e^{-sx} x^2 dx$

$$\int_0^1 e^{-s \cdot x} \cdot x^2 dx \text{ expand} \rightarrow \frac{-1}{s \cdot \exp(s)} - \frac{2}{s^2 \cdot \exp(s)} - \frac{2}{s^3 \cdot \exp(s)} + \frac{2}{s^3}$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 e^{-sx} x^2 dx = e^{-s} \left(-\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right) + \frac{2}{s^3}$

2. การหาค่าของ $\int_1^\infty e^{-sx} 3x dx$

$$\int_1^\infty e^{-s \cdot x} \cdot (3 \cdot x) dx \text{ expand} \rightarrow \frac{-3}{s^2} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} s \cdot \frac{x}{\exp(s \cdot x)} + \frac{1}{\exp(s \cdot x)} - \frac{1}{\exp(s)} \cdot s - \frac{1}{\exp(s)}$$

เพราะฉะนั้น $\int_1^\infty e^{-sx} 3x dx = e^{-s} \left(\frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x)\}(s) = \int_0^1 e^{-s} x^2 dx + \int_1^\infty e^{-s} 3x dx$

$$= e^{-s} \left(-\frac{1}{s} - \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right) + \frac{2}{s^3} + e^{-s} \left(\frac{3}{s} + \frac{3}{s^2} \right)$$

$$= \frac{2}{s^3} + e^{-s} \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right)$$

7. ถ้า $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s)$ เมื่อ $x > a$ แล้ว $\mathcal{L}\{xf(x)\}(s) = -\frac{d}{ds} F(s)$

$$\begin{aligned}
 \text{ข้อพิสูจน์ } \mathcal{L}\{xf(x)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} x f(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} (x e^{-sx}) f(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} \left(-\frac{d}{ds} e^{-sx}\right) f(x) dx \\
 &= -\frac{d}{ds} \left(\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx\right) \\
 &= -\frac{d}{ds} F(s)
 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 5.2.12 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = x \sin x$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \text{ เพราะว่า } \mathcal{L}\{\sin x\}(s) &= \frac{1}{s^2 + 1} \\
 \text{เพราะฉะนั้น } \mathcal{L}\{x \sin x\}(s) &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{\sin x\}(s) \\
 &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) \\
 &= \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

□

8. ถ้า $F(s) = L\{f(x)\}(s)$ เมื่อ $x > a$ แล้ว $L\{x^n f(x)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \dots$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $L\{x^n f(x)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

$$\text{เพราะว่า } L\{x^1 f(x)\}(s) = -\frac{d}{ds} F(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds} F(s)$$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\{x^k f(x)\}(s) = (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s)$$

$$L\{x^{k+1} f(x)\}(s) = L\{x(x^k f(x))\}(s)$$

$$= -\frac{d}{ds} (L\{x^k f(x)\}(s))$$

$$= -\frac{d}{ds} ((-1)^k \frac{d^k}{ds^k} F(s))$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{d^{k+1}}{ds^{k+1}} F(s)$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\{x^n f(x)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s) \text{ ทุกค่า } n = 1, 2, 3, \dots$$



หมายเหตุ

$$1. L\{x^n f(x)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$= (-1)^n F^{(n)}(s) \text{ ทุกค่า } n = 1, 2, 3, \dots$$

2. โดยการใช้สัญลักษณ์ D แทน $\frac{d}{ds}$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } F(s) = L\{f(x)\}(s) \text{ เมื่อ } x > a \text{ แล้ว } L\{x^n f(x)\}(s) = (-1)^n D^n F(s) \text{ ทุกค่า } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{ให้ } (-1)^n D^n = (-D)^n \text{ จะได้}$$

$$\text{ถ้า } F(s) = L\{f(x)\}(s) \text{ เมื่อ } x > a \text{ แล้ว } L\{x^n f(x)\}(s) = (-D)^n F(s) \text{ ทุกค่า } n = 1, 2, 3, \dots$$

ตัวอย่าง 5.2.13 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = x^2 \sin 3x$

วิธีทำ เพราะว่า $L\{\sin 3x\}(s) = \frac{3}{s^2 + 9}$

เพราะฉะนั้น $L\{x^2 \sin 3x\}(s) = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{3}{s^2 + 9} \right)$

$$= 3 \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s^2 + 9} \right) \right)$$

$$= 3 \frac{d}{ds} \left(\frac{-2s}{(s^2 + 9)^2} \right)$$

$$= -6 \frac{d}{ds} \left(\frac{s}{(s^2 + 9)^2} \right)$$

$$= -6 \left(\frac{(s^2 + 9)^2(1) - s(2(s^2 + 9))(2s)}{(s^2 + 9)^4} \right)$$

$$= -6 \left(\frac{(s^2 + 9) - 4s^2}{(s^2 + 9)^3} \right)$$

$$= \frac{18(s^2 - 3)}{(s^2 + 9)^3}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$x^2 \cdot \sin(3 \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{24}{(s^2 + 9)^3} \cdot s^2 - \frac{6}{(s^2 + 9)^2}$$

$$x^2 \cdot \sin(3 \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{24}{(s^2 + 9)^3} \cdot s^2 - \frac{6}{(s^2 + 9)^2} \text{ simplify } \rightarrow 18 \cdot \frac{(s^2 - 3)}{(s^2 + 9)^3}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

In[46]:= **LaplaceTransform**[$x^2 \sin[3 x]$, x , s]

Out[46]=
$$\frac{18 (-3 + s^2)}{(9 + s^2)^3}$$

In[47]:= **TraditionalForm**[%]

Out[47]/TraditionalForm=

$$\frac{18 (s^2 - 3)}{(s^2 + 9)^3}$$

9. ถ้า $F(s) = L\{f(x)\}(s)$ เมื่อ $x > a$ และ $P(x)$ เป็นพหุนามในพจน์ของ x

แล้ว $L\{P(x)f(x)\}(s) = P(-D)F(s)$ เมื่อ $D = \frac{d}{ds}$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$$\begin{aligned} L\{P(x)f(x)\}(s) &= L\{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)f(x)\}(s) \\ &= a_0L\{f(x)\}(s) + a_1L\{xf(x)\}(s) + a_2L\{x^2f(x)\}(s) + \dots + a_nL\{x^nf(x)\}(s) \\ &= a_0F(s) + a_1(-D)F(s) + a_2(-D)^2F(s) + \dots + a_n(-D)^nF(s) \\ &= (a_0 + a_1(-D) + a_2(-D)^2 + \dots + a_n(-D)^n)F(s) \\ &= P(-D)F(s) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\{P(x)f(x)\}(s) = P(-D)F(s)$ □

ตัวอย่าง 5.2.14 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = (2 + 3x) \cos 4x$

วิธีทำ เพราะว่า $L\{\cos 4x\}(s) = \frac{s}{s^2 + 16}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } L\{(2 + 3x) \cos 4x\}(s) &= (2 + 3(-D))\left(\frac{s}{s^2 + 16}\right) \\ &= 2\left(\frac{s}{s^2 + 16}\right) - 3D\left(\frac{s}{s^2 + 16}\right) \\ &= 2\left(\frac{s}{s^2 + 16}\right) - 3\left(\frac{(s^2 + 16)(1) - s(2s)}{(s^2 + 16)^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{s}{s^2 + 16}\right) - 3\left(\frac{16 - s^2}{(s^2 + 16)^2}\right) \\ &= \frac{2s^3 + 3s^2 + 32s - 48}{(s^2 + 16)^2} \end{aligned} \quad \square$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$(2 + 3 \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow 2 \cdot \frac{s}{(s^2 + 16)} - \frac{3}{(s^2 + 16)} + 6 \cdot \frac{s^2}{(s^2 + 16)^2}$$

$$(2 + 3 \cdot x) \cdot \cos(4 \cdot x) \left| \begin{array}{l} \text{laplace, } x \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{(2 \cdot s^3 + 32 \cdot s + 3 \cdot s^2 - 48)}{(s^2 + 16)^2}$$

$$2 \cdot \left[\frac{s}{(s^2 + 16)} \right] - 3 \cdot \left[\frac{16 - s^2}{(s^2 + 16)^2} \right] \text{ simplify } \rightarrow \frac{(2 \cdot s^3 + 32 \cdot s - 48 + 3 \cdot s^2)}{(s^2 + 16)^2}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

In[59]:= **LaplaceTransform**[(2 + 3 x) Cos[4 x], x, s]

$$\text{Out[59]} = \frac{3(-16 + s^2)}{(16 + s^2)^2} + \frac{2s}{16 + s^2}$$

In[60]:= **Simplify**[%]

$$\text{Out[60]} = \frac{-48 + 32s + 3s^2 + 2s^3}{(16 + s^2)^2}$$

In[61]:= **TraditionalForm**[%]

Out[61]//TraditionalForm=

$$\frac{2s^3 + 3s^2 + 32s - 48}{(s^2 + 16)^2}$$

ตัวอย่าง 5.2.15 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = (2 + x + 3x^2)e^{4x}$

วิธีทำ เพราะว่า $L\{e^{4x}\}(s) = \frac{1}{s-4}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } L\{(2 + x + 3x^2)e^{4x}\}(s) &= (2 + (-D) + 3(-D)^2)\left(\frac{1}{s-4}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{s-4}\right) - D\left(\frac{1}{s-4}\right) + 3D^2\left(\frac{1}{s-4}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{s-4}\right) - \left(\frac{-1}{(s-4)^2}\right) + 3\left(\frac{2}{(s-4)^3}\right) \\ &= \frac{2}{s-4} + \frac{1}{(s-4)^2} + \frac{6}{(s-4)^3} \\ &= \frac{2s^2 - 15s + 34}{(s-4)^3} \end{aligned}$$

□

ข้อสังเกต การหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = (2 + x + 3x^2)e^{4x}$ มีอีกวิธีหนึ่งคือ

$$\text{เพราะว่า } L\{(2 + x + 3x^2)\}(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{6}{s^3}$$

เพราะฉะนั้นโดยใช้สมบัติข้อ 2. จะได้

$$\begin{aligned} L\{(2 + x + 3x^2)e^{4x}\}(s) &= \frac{2}{s-4} + \frac{1}{(s-4)^2} + \frac{6}{(s-4)^3} \\ &= \frac{2s^2 - 15s + 34}{(s-4)^3} \end{aligned}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$(2 + x + 3 \cdot x^2) \cdot (e^{4 \cdot x}) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{2}{(s-4)} + \frac{1}{(s-4)^2} + \frac{6}{(s-4)^3}$$

$$(2 + x + 3 \cdot x^2) \cdot (e^{4 \cdot x}) \left| \begin{array}{l} \text{laplace, } x \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \frac{(2 \cdot s^2 - 15 \cdot s + 34)}{(s-4)^3}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

In[85]:= **LaplaceTransform** [(2 + x + 3 x²) e^{4 x}, x, s]

$$\text{Out[85]} = \frac{6}{(-4 + s)^3} + \frac{1}{(-4 + s)^2} + \frac{2}{-4 + s}$$

In[86]:= **Simplify** [%]

$$\text{Out[86]} = \frac{34 - 15 s + 2 s^2}{(-4 + s)^3}$$

In[87]:= **TraditionalForm** [%]

Out[87]//TraditionalForm=

$$\frac{2 s^2 - 15 s + 34}{(s - 4)^3}$$

10. ถ้า $F(s) = L\{f(x)\}(s)$ และ $f'(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$ แล้ว $L\{f'(x)\}(s) = sF(s) - f(0)$

ข้อพิสูจน์ $L\{f'(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx$

พิจารณา $\int e^{-sx} f'(x) dx$

แทนค่า $u = e^{-sx}$, $dv = f'(x) dx$ จะได้ $du = -s e^{-sx} dx$, $v = f(x)$

เพราะฉะนั้น $\int e^{-sx} f'(x) dx = uv - \int v du$
 $= e^{-sx} f(x) + \int s e^{-sx} f(x) dx$
 $= e^{-sx} f(x) + s \int e^{-sx} f(x) dx$

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v e^{-sx} f'(x) dx = \lim_{v \rightarrow \infty} [e^{-sx} f(x)]_{x=0}^{x=v} + \lim_{v \rightarrow \infty} s \int_0^v e^{-sx} f(x) dx$$

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} f'(x) dx = \lim_{v \rightarrow \infty} [e^{-sv} f(v) - f(0)] + s \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

$$L\{f'(x)\}(s) = \lim_{v \rightarrow \infty} (e^{-sv} f(v) - f(0)) + s F(s)$$

เพราะว่า $f(x) = O[e^{ax}]$ เพราะฉะนั้น $\lim_{v \rightarrow \infty} (e^{-sv} f(v)) = 0$

เพราะฉะนั้น $L\{f'(x)\}(s) = s F(s) - f(0)$



11. ถ้า $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วงๆ บน $[0, \infty)$

$f^{(n)}$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[0, T]$ เมื่อ T เป็นค่าคงตัว และ $f^{(n-1)} = O[e^{ax}]$

แล้วจะมี $L\{F^{(n)}(x)\}(s)$ สำหรับ $s > \max(a, 0)$ และ

$$L\{F^{(n)}(x)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $L\{F^{(n)}(x)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $L\{f'(x)\}(s) = sF(s) - f(0)$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $L\{f^{(k)}(x)\}(s) = s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0)$... (1)

$$L\{f^{(k+1)}(x)\}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f^{(k+1)}(x) dx$$

$$= \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v e^{-sx} f^{(k+1)}(x) dx$$

$$= \lim_{v \rightarrow \infty} [e^{-sx} f^{(k)}(x)]_{x=0}^{x=v} + \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v s e^{-sx} f^{(k)}(x) dx$$

$$= \lim_{v \rightarrow \infty} [e^{-sv} f^{(k)}(v) - f^{(k)}(0)] + s \lim_{v \rightarrow \infty} \int_0^v e^{-sx} f^{(k)}(x) dx$$

$$= [0 - f^{(k)}(0)] + s \int_0^\infty e^{-sx} f^{(k)}(x) dx$$

$$= -f^{(k)}(0) + s L\{f^{(k)}(x)\}(s) \quad (\text{จาก (1)})$$

$$= -f^{(k)}(0) + s(s^k F(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0))$$

$$= s^{k+1} F(s) - s^k f(0) - s^{k-1} f'(0) - \dots - f^{(k-1)}(0) - f^{(k)}(0)$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \dots$

เพราะฉะนั้น $L\{F^{(n)}(x)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \dots$



12. ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันขั้นบันได

บทนิยาม 5.2.2 ให้ $p > 0$ เป็นค่าคงตัว ฟังก์ชัน u_p กำหนดโดย $u_p(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < p \\ 1 & , p \leq x < \infty \end{cases}$

เรียกว่า ฟังก์ชันหนึ่งหน่วยขั้นบันได (unit step function)

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันหนึ่งหน่วยขั้นบันได $u_p(x)$

$$\begin{aligned} L\{u_p(x)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} u_p(x) dx \\ &= \int_0^p e^{-sx} u_p(x) dx + \int_p^{\infty} e^{-sx} u_p(x) dx \\ &= \int_0^p e^{-sx} (0) dx + \int_p^{\infty} e^{-sx} (1) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_p^h e^{-sx} dx \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-sx}}{-s} \right]_{x=p}^{x=h} \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-sh}}{-s} - \frac{e^{-sp}}{-s} \right] \\ &= \frac{e^{-sp}}{s} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\{u_p(x)\}(s) = \frac{e^{-ps}}{s}$ เมื่อ $s > 0$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$\Phi(x - 1) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{\exp(-s)}{s}$$

$$\Phi(x - 2) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{\exp(-2 \cdot s)}{s}$$

$$\Phi(x - 2 \cdot \pi) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{\exp(-2 \cdot \pi \cdot s)}{s}$$

หมายเหตุ โปรแกรม Mathcad ใช้ฟังก์ชัน $\Phi(x - p)$ แทน $u_p(x)$

การเขียนฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง ๆ ในรูปแบบของฟังก์ชันหนึ่งหน่วยขั้นบันได

ตัวอย่าง 5.2.16 ให้ $f(x) = \begin{cases} 4 & , 0 \leq x < 2 \\ 2+3x & , 2 \leq x < \infty \end{cases}$

จงเขียน $f(x)$ ในรูปแบบผลบวกของฟังก์ชันหนึ่งหน่วยขั้นบันได

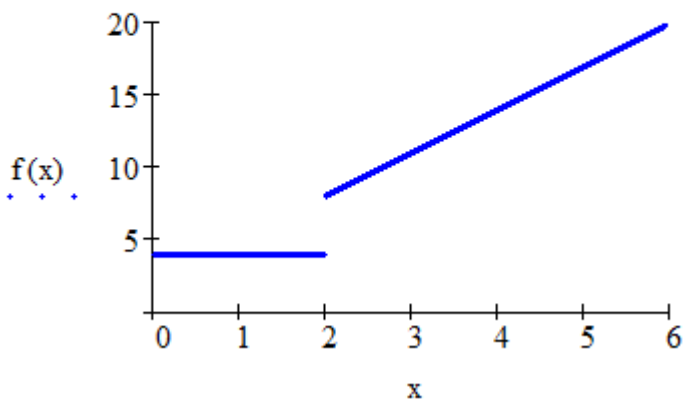
$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ แบบที่ 1 } f(x) &= 4 + \begin{cases} 4-4 & , 0 \leq x < 2 \\ (2+3x)-4 & , 2 \leq x < \infty \end{cases} \\ &= 4 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 2 \\ 3x-2 & , 2 \leq x < \infty \end{cases} \\ &= 4 + (3x-2) \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 2 \\ 1 & , 2 \leq x < \infty \end{cases} \\ &= 4 + (3x-2) u_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แบบที่ 2 } f(x) &= 4 - 4 u_2(x) + (2+3x) u_2(x) \\ &= 4 + (-4+2+3x) u_2(x) \\ &= 4 + (3x-2) u_2(x) \end{aligned}$$

$$\text{กราฟของ } f(x) = \begin{cases} 4 & , 0 \leq x < 2 \\ 2+3x & , 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$x := 0, 0.001 \dots 6$$

$$f(x) := 4 - 4 \cdot \Phi(x-2) + (2+3 \cdot x) \cdot \Phi(x-2)$$



ตัวอย่าง 5.2.17 ให้ $f(x) = \begin{cases} x+4 & , 0 \leq x < 3 \\ x^2+1 & , 3 \leq x < 5 \\ 15 & , 5 \leq x < \infty \end{cases}$

จงเขียน $f(x)$ ในรูปแบบผลบวกของฟังก์ชันหนึ่งหน่วยขั้นบันได

วิธีทำ แบบที่ 1

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} x+4 & , 0 \leq x < 3 \\ x^2+1 & , 3 \leq x < 5 \\ 15 & , 5 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= x+4 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ (x^2+1)-(x+4) & , 3 \leq x < 5 \\ 15-(x+4) & , 5 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= x+4 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ x^2-x-3 & , 3 \leq x < 5 \\ 11-x & , 5 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= x+4 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ x^2-x-3 & , 3 \leq x < 5 \\ x^2-x-3 & , 5 \leq x < \infty \end{cases} + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ 0 & , 3 \leq x < 5 \\ (11-x)-(x^2-x-3) & , 5 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= x+4 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ x^2-x-3 & , 3 \leq x < \infty \end{cases} + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ 0 & , 3 \leq x < 5 \\ -x^2+14 & , 5 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= x+4 + (x^2-x-3) \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ 1 & , 3 \leq x < \infty \end{cases} + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 5 \\ -x^2+14 & , 5 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= x+4 + (x^2-x-3)u_3(x) + (-x^2+14) \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 5 \\ 1 & , 5 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= x+4 + (x^2-x-3)u_3(x) + (-x^2+14)u_5(x)
 \end{aligned}$$

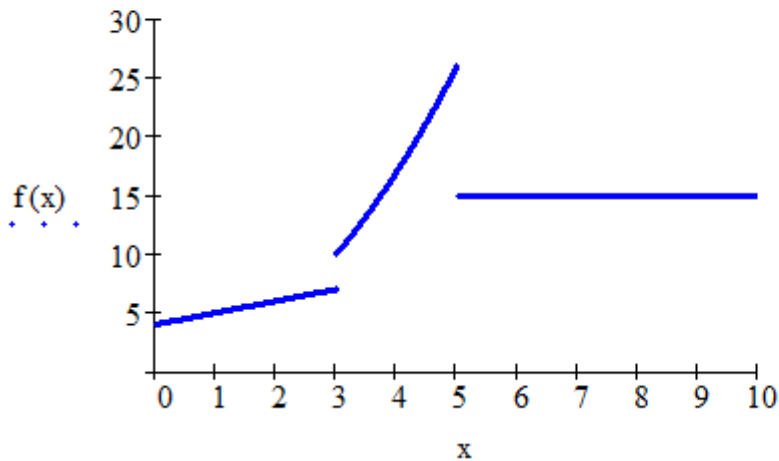
แบบที่ 2

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (x+4) - (x+4)u_3(x) + (x^2+1)u_3(x) - (x^2+1)u_5(x) + 15u_5(x) \\
 &= (x+4) + (-x-4+x^2+1)u_3(x) + (-x^2-1+15)u_5(x) \\
 &= (x+4) + (x^2-x-3)u_3(x) + (14-x^2)u_5(x)
 \end{aligned}$$

กราฟของ $f(x) = \begin{cases} x+4 & , 0 \leq x < 3 \\ x^2+1 & , 3 \leq x < 5 \\ 15 & , 5 \leq x < \infty \end{cases}$

$$x := 0, 0.0001 .. 10$$

$$f(x) := (x+4) - (x+4) \cdot \Phi(x-3) + (x^2+1) \cdot \Phi(x-3) - (x^2+1) \cdot \Phi(x-5) + 15 \cdot \Phi(x-5)$$



แนวคิดในการเขียน $f(x)$ ในรูปแบบของ $u_p(x)$

1. ใช้ p ที่เป็นรอยต่อของช่วงในการพิจารณา $u_p(x)$
2. นำสูตรแต่ละช่วงย่อยคูณกับ $u_p(x)$ แล้วนำมาบวกหรือลบกัน

ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , 0 \leq x < p \\ f_2(x) & , p \leq x < \infty \end{cases}$

จะได้ $f(x) = f_1(x) - f_1(x)u_p(x) + f_2(x)u_p(x)$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & , 0 \leq x < p_1 \\ f_2(x) & , p_1 \leq x < p_2 \\ f_3(x) & , p_2 \leq x < \infty \end{cases}$$

จะได้ $f(x) = f_1(x) - f_1(x)u_{p_1}(x) + f_2(x)u_{p_1}(x) - f_2(x)u_{p_2}(x) + f_3(x)u_{p_2}(x)$

การใช้ฟังก์ชันหนึ่งหน่วยขั้นบันไดช่วยในการหาผลการแปลงลาปลาซ

ตัวอย่าง 5.2.18 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < 4 \\ 2 & , 4 \leq x < \infty \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } f(x) &= 1 - u_4(x) + 2u_4(x) \\ &= 1 + u_4(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\{f(x)\}(s) &= L\{1 + u_4(x)\}(s) \\ &= L\{1\}(s) + L\{u_4(x)\}(s) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{e^{-4s}}{s} \end{aligned}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$\begin{aligned} f(x) &:= 1 + 1 \cdot \Phi(x - 4) + 2 \cdot \Phi(x - 4) \\ f(x) \text{ laplace, } x &\rightarrow \frac{1}{s} + 3 \cdot \frac{\exp(-4 \cdot s)}{s} \end{aligned}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

$$\begin{aligned} \text{In[10]:= } &\text{LaplaceTransform}[1 - 1 * \text{UnitStep}[x - 4] + 2 * \text{UnitStep}[x - 4], x, s] \\ \text{Out[10]= } &\frac{1}{s} + \frac{e^{-4 s}}{s} \\ \text{In[11]:= } &\text{TraditionalForm}[\%] \\ \text{Out[11]/TraditionalForm= } &\frac{e^{-4 s}}{s} + \frac{1}{s} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.2.19 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < 3 \\ x & , 3 \leq x < \infty \end{cases}$

วิธีทำ $f(x) = 1 - u_3(x) + xu_3(x)$

$$\begin{aligned} L\{f(x)\}(s) &= L\{1 - u_3(x) + xu_3(x)\}(s) \\ &= L\{1\}(s) - L\{u_3(x)\}(s) + L\{xu_3(x)\}(s) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \left(-\frac{d}{ds} \frac{e^{-3s}}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} - \left(\frac{d}{ds} \frac{e^{-3s}}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} - \left(\frac{-e^{-3s}}{s^2} + \frac{-3e^{-3s}}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s^2} \end{aligned}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$f(x) := 1 - 1 \cdot \Phi(x - 3) + x \cdot \Phi(x - 3)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{s} + 2 \cdot \frac{\exp(-3 \cdot s)}{s} + \frac{\exp(-3 \cdot s)}{s^2}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

In[7]:= **LaplaceTransform**[1 - 1 * UnitStep[x - 3] + x * UnitStep[x - 3], x, s]

$$\text{Out[7]} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-3s}}{s} + \frac{e^{-3s}(1 + 3s)}{s^2}$$

In[8]:= **Expand**[%]

$$\text{Out[8]} = \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{2e^{-3s}}{s}$$

In[9]:= **TraditionalForm**[%]

Out[9]//TraditionalForm=

$$\frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{2e^{-3s}}{s} + \frac{1}{s}$$

ข้อสังเกต การหาผลการแปลงลาปลาซสามารถทำได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < 3 \\ x & , 3 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= 1 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ x-1 & , 3 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= 1 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ (x-3)+2 & , 3 \leq x < \infty \end{cases} \\
 &= 1 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ g(x-3) & , 3 \leq x < \infty \end{cases} \quad \text{เมื่อ } g(x) = x + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{เพราะฉะนั้น } L\{f(x)\}(s) &= L\left\{1 + \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ g(x-3) & , 3 \leq x < \infty \end{cases}\right\}(s) \\
 &= L\{1\}(s) + L\left\{\begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ g(x-3) & , 3 \leq x < \infty \end{cases}\right\}(s) \\
 &= \frac{1}{s} + e^{-3s} L\{g(x)\}(s) \\
 &= \frac{1}{s} + e^{-3s} L\{x+2\}(s) \\
 &= \frac{1}{s} + e^{-3s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right)
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ ในกรณีที่ใช้ฟังก์ชันนิยามหลายช่วง การใช้ฟังก์ชันหนึ่งหน่วยขั้นบันไดช่วยในการหาผลการแปลงลาปลาซเป็นวิธีที่สะดวกกว่า ตัวอย่างเช่น

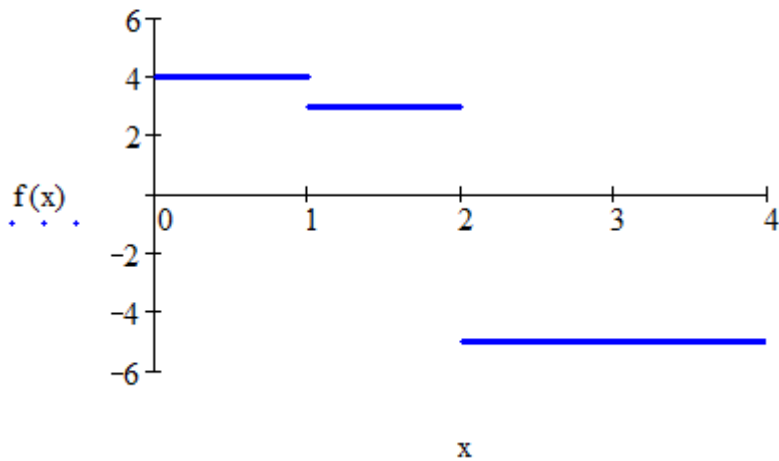
$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} 4 & , 0 \leq x < 1 \\ 3 & , 1 \leq x < 2 \\ -5 & , 2 \leq x < \infty \end{cases} \\
 f(x) &= 4 - 4u_1(x) + 3u_1(x) - 3u_2(x) - 5u_2(x) \\
 &= 4 - u_1(x) - 8u_2(x) \\
 L\{f(x)\}(s) &= L\{4 - u_1(x) - 8u_2(x)\}(s) \\
 &= L\{4\}(s) - L\{u_1(x)\}(s) - 8L\{u_2(x)\}(s) \\
 &= \frac{4}{s} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{8e^{-2s}}{s}
 \end{aligned}$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad และกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$

$$f(x) := 4 - \Phi(x - 1) - 8 \cdot \Phi(x - 2)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{4}{s} - \frac{\exp(-s)}{s} - 8 \cdot \frac{\exp(-2 \cdot s)}{s}$$

$$x := 0, 0.0001 \dots 10$$



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[5]:= LaplaceTransform[4 - 1 * UnitStep[x - 1] - 8 * UnitStep[x - 2], x, s]
```

$$\text{Out[5]} = \frac{4}{s} - \frac{8 e^{-2 s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

```
In[6]:= TraditionalForm[%]
```

Out[6]//TraditionalForm=

$$-\frac{8 e^{-2 s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{4}{s}$$

ทฤษฎีบท 5.2.1 ถ้า $L\{f(x)\}(s) = F(s)$ แล้ว $L\{u_p(x)f(x-p)\}(s) = e^{-ps}F(s)$

$$\begin{aligned}\text{ข้อพิสูจน์ } L\{u_p(x)f(x-p)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} u_p(x)f(x-p) dx \\&= \int_0^p e^{-sx} u_p(x)f(x-p) dx + \int_p^{\infty} e^{-sx} u_p(x)f(x-p) dx \\&= \int_0^p e^{-sx} (0)f(x-p) dx + \int_p^{\infty} e^{-sx} (1)f(x-p) dx \\&= \int_p^{\infty} e^{-sx} f(x-p) dx\end{aligned}$$

แทนค่า $t = x - p$ จะได้ $x = t + p$ และ $dx = dt$

$$\begin{aligned}\int_p^{\infty} e^{-sx} f(x-p) dx &= \int_0^{\infty} e^{-s(t+p)} f(t) dt \\&= e^{-ps} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\&= e^{-ps} L\{f(x)\}(s) \\&= e^{-ps} F(s)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\{u_p(x)f(x-p)\}(s) = e^{-ps}F(s)$ □

ตัวอย่าง 5.2.20 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x < 2\pi \\ \sin x & , 2\pi \leq x < \infty \end{cases}$

วิธีทำ $f(x) = 1 - u_{2\pi}(x) + \sin x u_{2\pi}(x)$

$$= 1 - u_{2\pi}(x) + \sin(x - 2\pi) u_{2\pi}(x)$$

$$L\{f(x)\}(s) = L\{1 - u_{2\pi}(x) + \sin(x - 2\pi) u_{2\pi}(x)\}(s)$$

$$= L\{1\}(s) - L\{u_{2\pi}(x)\}(s) + L\{\sin(x - 2\pi) u_{2\pi}(x)\}(s)$$

$$= L\{1\}(s) - L\{u_{2\pi}(x)\}(s) + e^{-2\pi s} L\{\sin x\}(s)$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

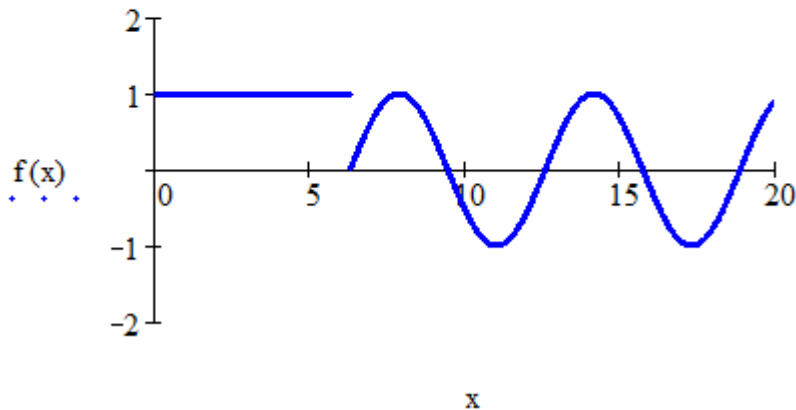
□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad และกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$

$$f(x) := 1 - \Phi(x - 2 \cdot \pi) + \sin(x) \cdot \Phi(x - 2 \cdot \pi)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{s} - \frac{\exp(-2 \cdot \pi \cdot s)}{s} + \frac{\exp(-2 \cdot \pi \cdot s)}{(s^2 + 1)}$$

$$x := 0, 0.01 \dots 20$$



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

In[5]:= **LaplaceTransform**[1 - UnitStep[x - 2 π] + Sin[x] UnitStep[x - 2 π], x, s]

$$\text{Out[5]} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2 \pi s}}{s} + \frac{e^{-2 \pi s}}{1 + s^2}$$

In[6]:= **TraditionalForm**[%]

Out[6]/TraditionalForm=

$$\frac{e^{-2 \pi s}}{s^2 + 1} - \frac{e^{-2 \pi s}}{s} + \frac{1}{s}$$

ตัวอย่าง 5.2.21 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \begin{cases} x+1 & , 0 \leq x < 2 \\ 3 & , 2 \leq x < \infty \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ } f(x) &= (x+1) - (x+1)u_2(x) + 3u_2(x) \\ &= (1+x) - u_2(x)(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L\{f(x)\}(s) &= L\{(1+x) - u_2(x)(x-2)\}(s) \\ &= L\{1\}(s) + L\{x\}(s) - L\{u_2(x)(x-2)\}(s) \\ &= L\{1\}(s) + L\{x\}(s) - e^{-2s}L\{x\}(s) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2s}}{s^2} \end{aligned}$$

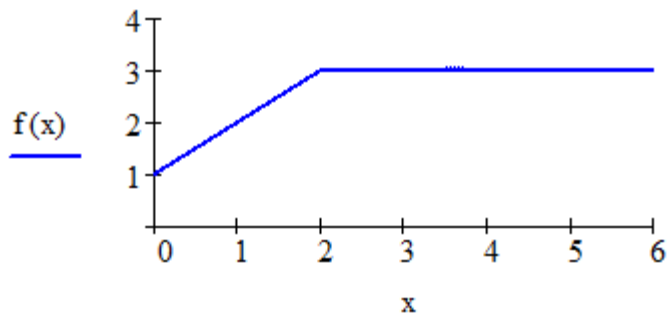
□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad และกราฟของฟังก์ชัน

$$f(x) := (1 + x) - (x - 2) \cdot \Phi(x - 2)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{\exp(-2 \cdot s)}{s^2}$$

$$x := 0, 0.0001 \dots 6$$



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[13]:= LaplaceTransform[1 + x - (x - 2) * UnitStep[x - 2], x, s]
```

$$\text{Out[13]} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{2 e^{-2 s}}{s} - \frac{e^{-2 s} (1 + 2 s)}{s^2}$$

```
In[14]:= Expand[%]
```

$$\text{Out[14]} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-2 s}}{s^2} + \frac{1}{s}$$

```
In[15]:= TraditionalForm[%]
```

Out[15]/TraditionalForm=

$$-\frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}$$

หมายเหตุ $L\{u_p(x)f(x)\}(s) = e^{-ps} L\{f(x+p)\}(s)$

$$\begin{aligned}
 \text{ข้อพิสูจน์ } L\{u_p(x)f(x)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} u_p(x) f(x) dx \\
 &= \int_0^p e^{-sx} u_p(x) f(x) dx + \int_p^{\infty} e^{-sx} u_p(x) f(x) dx \\
 &= \int_0^p e^{-sx} (0) f(x) dx + \int_p^{\infty} e^{-sx} (1) f(x) dx \\
 &= 0 + \int_p^{\infty} e^{-sx} (1) f(x) dx \\
 &= \int_p^{\infty} e^{-sx} f(x) dx
 \end{aligned}$$

แทนค่า $u = x - p$ จะได้ $x = u + p$ และ $du = dx$

$$\begin{aligned}
 \int_p^{\infty} e^{-sx} f(x) dx &= \int_0^{\infty} e^{-s(u+p)} f(u+p) du \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-ps} e^{-su} f(u+p) du \\
 &= e^{-ps} \int_0^{\infty} e^{-su} f(u+p) du \\
 &= e^{-ps} L\{f(x+p)\}(s)
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\{u_p(x)f(x)\}(s) = e^{-ps} L\{f(x+p)\}(s)$

ตัวอย่าง 5.2.22 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , 0 \leq x < 1 \\ 3x & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$

วิธีทำ $f(x) = x^2 - u_1(x) x^2 + u_1(x)(3x)$

$$L\{f(x)\}(s) = L\{x^2 - u_1(x) x^2 + u_1(x)(3x)\}(s)$$

$$= L\{x^2\}(s) - L\{u_1(x) x^2\}(s) + L\{u_1(x)(3x)\}(s)$$

$$= L\{x^2\}(s) - L\{u_1(x) x^2\}(s) + 3 L\{u_1(x)(x)\}(s)$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s} L\{(x+1)^2\}(s) + 3e^{-s} L\{x+1\}(s)$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s} L\{x^2 + 2x + 1\}(s) + 3e^{-s} L\{x+1\}(s)$$

$$= \frac{2}{s^3} - e^{-s} \left(\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) + 3e^{-s} \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} \right)$$

$$= \frac{2}{s^3} + e^{-s} \left(\frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^3} \right)$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$f(x) := x^2 - x^2 \cdot \Phi(x-1) + (3 \cdot x) \cdot \Phi(x-1)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{2}{s^3} + 2 \cdot \frac{\exp(-s)}{s} + \frac{\exp(-s)}{s^2} - 2 \cdot \frac{\exp(-s)}{s^3}$$

ตัวอย่าง 5.2.23 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \begin{cases} 4 & , 0 \leq x < 2\pi \\ \cos x & , 2\pi \leq x < \infty \end{cases}$

วิธีทำ $f(x) = 4 - 4u_{2\pi}(x) + \cos x \cdot u_{2\pi}(x)$

$$\begin{aligned} L\{f(x)\}(s) &= L\{4 - 4u_{2\pi}(x) + \cos x \cdot u_{2\pi}(x)\}(s) \\ &= L\{4\}(s) - 4L\{u_{2\pi}(x)\}(s) + L\{u_{2\pi}(x) \cos x\}(s) \\ &= L\{4\}(s) - 4L\{u_{2\pi}(x)\}(s) + e^{-2\pi s} L\{\cos(x + 2\pi)\}(s) \\ &= \frac{4}{s} - \frac{4e^{-2\pi s}}{s} + e^{-2\pi s} L\{\cos x\}(s) \\ &= \frac{4}{s} - \frac{4e^{-2\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}s}{s^2 + 1} \end{aligned}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$f(x) := 4 - 4 \cdot \Phi(x - 2 \cdot \pi) + \cos(x) \cdot \Phi(x - 2 \cdot \pi)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{4}{s} - 4 \cdot \frac{\exp(-2 \cdot \pi \cdot s)}{s} + \exp(-2 \cdot \pi \cdot s) \cdot \frac{s}{(s^2 + 1)}$$

การหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \begin{cases} x+1 & , 0 \leq x < 1 \\ 3 & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$

$$f(x) := (x + 1) - (x + 1) \cdot \Phi(x - 1) + 3 \cdot \Phi(x - 1)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{\exp(-s)}{s} - \frac{\exp(-s)}{s^2}$$

13. ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันเป็นคาบ

f เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง k ที่ทำให้ $f(x + T) = f(x)$ ทุกค่า $x \in D_f$

ถ้า ค่าคงตัว $T > 0$ ทำให้ $f(x + T) = f(x)$ ทุกค่า $x \in D_f$ แล้ว T เรียกว่า คาบ (period) ของฟังก์ชัน f

ทฤษฎีบท 5.2.2

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วงบน $[0, \infty)$ และ $f(x) = O[e^{ax}]$ และ $f(x + T) = f(x)$

$$\text{แล้ว } L\{f(x)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx$$

$$\text{ข้อพิสูจน์ } L\{f(x)\}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = \int_0^T e^{-sx} f(x) dx + \int_T^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

$$\text{พิจารณาค่าของ } \int_T^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

แทนค่า $x = v + T$ จะได้ $f(x) = f(v + T) = f(v)$ และ $dx = dv$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \int_T^\infty e^{-sx} f(x) dx &= \int_0^\infty e^{-s(v+T)} f(v+T) dv \\ &= e^{-Ts} \int_0^\infty e^{-sv} f(v+T) dv \\ &= e^{-Ts} \int_0^\infty e^{-sv} f(v) dv \quad (f \text{ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบและ } f(v+T) = f(v)) \\ &= e^{-Ts} \int_0^\infty e^{-sv} f(v) dv \\ &= e^{-Ts} \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \\ &= e^{-Ts} L\{f(x)\}(s) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x)\}(s) = \int_0^T e^{-sx} f(x) dx + e^{-Ts} L\{f(x)\}(s)$

$$(1 - e^{-sT})L\{f(x)\}(s) = \int_0^T e^{-sx} f(x) dx$$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx$



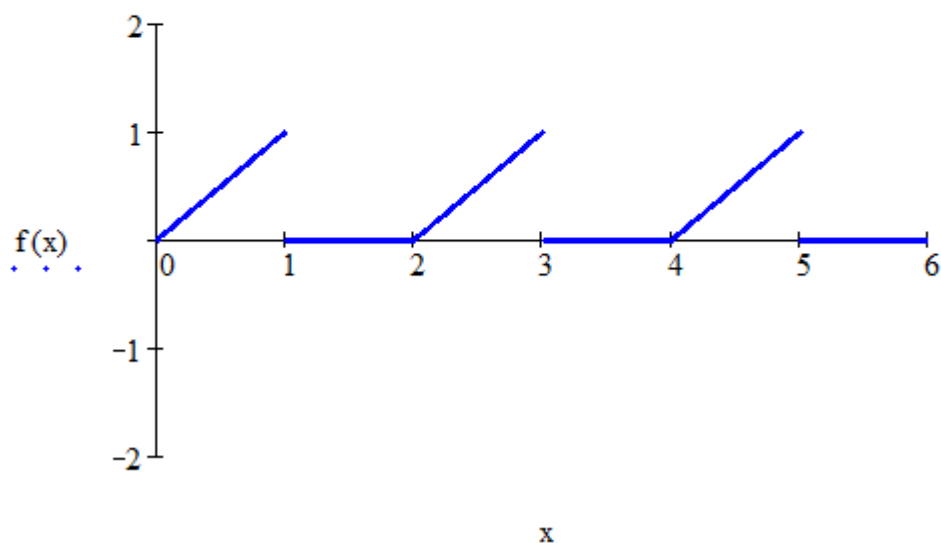
ตัวอย่าง 5.2.24 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1 \\ 0 & , 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ และ $f(x+2) = f(x)$

วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน f

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f(x) := f(\text{mod}(x, 2))$$

$$x := 0, 0.01 \dots 6$$



$$f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1 \\ 0 & , 1 \leq x < 2 \end{cases} \text{ และ } f(x+2) = f(x)$$

$$L\{f(x)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \int_0^2 e^{-sx} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 e^{-sx} f(x) dx &= \int_0^1 e^{-sx} f(x) dx + \int_1^2 e^{-sx} f(x) dx \\ &= \int_0^1 e^{-sx} x dx + \int_1^2 e^{-sx} (0) dx \\ &= \int_0^1 e^{-sx} x dx \end{aligned}$$

พิจารณา $\int x e^{-sx} dx$

แทนค่า $u = x$, $dv = e^{-sx} dx$ จะได้ $du = dx$, $v = -\frac{e^{-sx}}{s}$

$$\begin{aligned} \int x e^{-sx} dx &= x \left(-\frac{e^{-sx}}{s} \right) - \int \left(-\frac{e^{-sx}}{s} \right) dx \\ &= -\frac{x e^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \int_0^1 x e^{-sx} dx &= \left[-\frac{x e^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} \right) - \left(-0 - \frac{1}{s^2} \right) \\ &= \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \int_0^2 e^{-sx} f(x) dx = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } L\{f(x)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} \right)$$

□

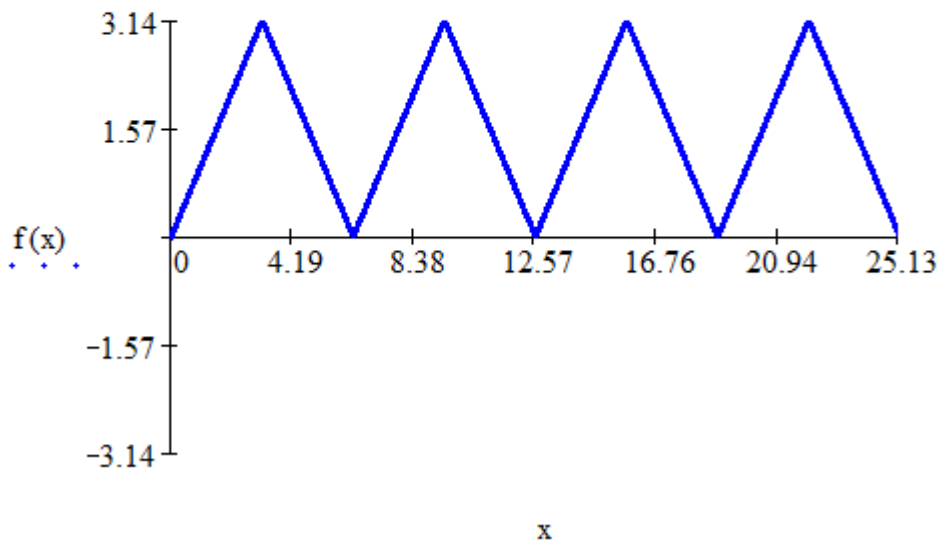
ตัวอย่าง 5.2.25 จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < \pi \\ 2\pi - x & , \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ และ $f(x + 2\pi) = f(x)$

วิธีทำ กราฟของฟังก์ชัน f

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{if } 0 \leq x < \pi \\ 2\pi - x & \text{if } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) := f(\text{mod}(x, 2\pi))$$

$$x := 0, 0.01 \dots 8\pi$$



$$L\{f(x)\}(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-sx} f(x) dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-sx} f(x) dx &= \int_0^{\pi} e^{-sx} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-sx} (2\pi - x) dx \\ &= \int_0^{\pi} e^{-sx} x dx + \int_{\pi}^{2\pi} e^{-sx} (2\pi - x) dx \\ &= \int_0^{\pi} x e^{-sx} dx + 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} e^{-sx} dx - \int_{\pi}^{2\pi} x e^{-sx} dx \end{aligned} \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะว่า } \int x e^{-sx} dx = -\frac{x e^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2} + C$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \int_0^{\pi} x e^{-sx} dx &= \left[-\frac{x e^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2} \right]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= \left(-\frac{\pi e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \right) - \left(-0 - \frac{1}{s^2} \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{\pi e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \quad \dots (2)$$

และ $\int_{\pi}^{2\pi} x e^{-sx} dx = \left[-\frac{x e^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2} \right]_{x=\pi}^{x=2\pi}$

$$= \left(-\frac{2\pi e^{-2\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} \right) - \left(-\frac{\pi e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \right)$$

$$= -\frac{2\pi e^{-2\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} + \frac{\pi e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \quad \dots (3)$$

$$2\pi \int_{\pi}^{2\pi} e^{-sx} dx = 2\pi \left[-\frac{e^{-sx}}{s} \right]_{x=\pi}^{x=2\pi}$$

$$= 2\pi \left(-\frac{e^{-2\pi s}}{s} + \frac{e^{-\pi s}}{s} \right)$$

$$= -\frac{2\pi e^{-2\pi s}}{s} + \frac{2\pi e^{-\pi s}}{s} \quad \dots (4)$$

จาก (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$\int_0^{2\pi} e^{-sx} f(x) dx = \left(-\frac{\pi e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right) + \left(-\frac{2\pi e^{-2\pi s}}{s} + \frac{2\pi e^{-\pi s}}{s} \right)$$

$$- \left(-\frac{2\pi e^{-2\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} + \frac{\pi e^{-\pi s}}{s} + \frac{e^{-\pi s}}{s^2} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{2e^{-\pi s}}{s^2} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2} = \left(\frac{1-e^{-\pi s}}{s} \right)^2$$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-sx} f(x) dx$

$$= \frac{1}{1-e^{-2\pi s}} \left(\frac{1-e^{-\pi s}}{s} \right)^2$$

$$= \frac{1}{s^2} \frac{(1-e^{-\pi s})^2}{1-e^{-2\pi s}}$$

$$= \frac{1}{s^2} \frac{(1-e^{-\pi s})^2}{(1-e^{-\pi s})(1+e^{-\pi s})}$$

$$= \frac{1}{s^2} \left(\frac{1-e^{-\pi s}}{1+e^{-\pi s}} \right)$$

$$= \frac{1}{s^2} \tanh\left(\frac{\pi s}{2}\right)$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$\int e^{-s \cdot x} dx \rightarrow \frac{-1}{s} \cdot \exp(-s \cdot x)$$

$$\int x \cdot e^{-s \cdot x} dx \rightarrow \frac{(-\exp(-s \cdot x) \cdot s \cdot x - \exp(-s \cdot x))}{s^2}$$

$$\int_0^{\pi} x \cdot e^{-s \cdot x} dx \text{ expand} \rightarrow \frac{-\pi}{s \cdot \exp(\pi \cdot s)} - \frac{1}{s^2 \cdot \exp(\pi \cdot s)} + \frac{1}{s^2}$$

$$\int_{\pi}^{2 \cdot \pi} e^{-s \cdot x} dx \text{ expand} \rightarrow \frac{-1}{s \cdot \exp(\pi \cdot s)^2} + \frac{1}{s \cdot \exp(\pi \cdot s)}$$

$$\int_{\pi}^{2 \cdot \pi} x \cdot e^{-s \cdot x} dx \text{ expand} \rightarrow \frac{-2}{s \cdot \exp(\pi \cdot s)^2} \cdot \pi - \frac{1}{s^2 \cdot \exp(\pi \cdot s)^2} + \frac{\pi}{s \cdot \exp(\pi \cdot s)} + \frac{1}{s^2 \cdot \exp(\pi \cdot s)}$$

$$\frac{\left(\int_0^{\pi} x \cdot e^{-s \cdot x} dx \right) + (2 \cdot \pi) \cdot \left(\int_{\pi}^{2 \cdot \pi} e^{-s \cdot x} dx \right) - \left(\int_{\pi}^{2 \cdot \pi} x \cdot e^{-s \cdot x} dx \right)}{\left(\int_0^{\pi} x \cdot e^{-s \cdot x} dx \right) + (2 \cdot \pi) \cdot \left(\int_{\pi}^{2 \cdot \pi} e^{-s \cdot x} dx \right) - \left(\int_{\pi}^{2 \cdot \pi} x \cdot e^{-s \cdot x} dx \right)} \text{ simplify} \rightarrow \frac{(-2 \cdot \exp(-\pi \cdot s) + 1 + \exp(-2 \cdot \pi \cdot s))}{s^2}$$

$$\frac{\left(\int_0^{\pi} x \cdot e^{-s \cdot x} dx \right) + (2 \cdot \pi) \cdot \left(\int_{\pi}^{2 \cdot \pi} e^{-s \cdot x} dx \right) - \left(\int_{\pi}^{2 \cdot \pi} x \cdot e^{-s \cdot x} dx \right)}{(1 - e^{-2 \cdot \pi \cdot s})} \text{ simplify} \rightarrow \frac{-(\exp(-\pi \cdot s) - 1)}{(\exp(-\pi \cdot s) + 1) \cdot s^2}$$

ตัวอย่าง 5.2.26 จงผลการแปลงลาปลาซของ $\sinh ax$ และ $\cosh ax$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ } L\{\sinh ax\}(s) &= L\left\{\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2}\right\}(s) \\
 &= \frac{1}{2} (L\{e^{ax}\}(s) - L\{e^{-ax}\}(s)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(s+a) - (s-a)}{(s+a)(s-a)}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{s^2 - a^2}\right) \\
 &= \frac{a}{s^2 - a^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L\{\cosh ax\}(s) &= L\left\{\frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}\right\}(s) \\
 &= \frac{1}{2} (L\{e^{ax}\}(s) + L\{e^{-ax}\}(s)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{(s+a) + (s-a)}{(s+a)(s-a)}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2s}{s^2 - a^2}\right) \\
 &= \frac{s}{s^2 - a^2}
 \end{aligned}$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$\sinh(a \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{a}{(s^2 - a^2)}$$

$$\cosh(a \cdot x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{s}{(s^2 - a^2)}$$

สูตรและสมบัติของผลการแปลงลาปลาซ

$$1. \mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}$$

$$2. \mathcal{L}\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$3. \mathcal{L}\{\sin ax\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$4. \mathcal{L}\{\cos ax\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$5. \mathcal{L}\{e^{ax}\}(s) = \frac{1}{s - a}$$

$$6. \mathcal{L}\{x^n e^{ax}\}(s) = \frac{n!}{(s - a)^{n+1}}, n = 1, 2, \dots$$

$$7. \mathcal{L}\{e^{cx} \sin ax\}(s) = \frac{a}{(s - c)^2 + a^2}$$

$$8. \mathcal{L}\{e^{cx} \cos ax\}(s) = \frac{s - c}{(s - c)^2 + a^2}$$

ให้ $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s)$ และ $G(s) = \mathcal{L}\{g(x)\}(s)$

$$9. \mathcal{L}\{c_1 f(x) + c_2 g(x)\}(s) = c_1 F(s) + c_2 G(s)$$

$$10. \mathcal{L}\{x^n f(x)\}(s) = (-D)^n F(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$11. \mathcal{L}\{e^{cx} f(x)\}(s) = F(s - c)$$

$$12. \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t) dt\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$$

$$13. \mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = s F(s) - f(0)$$

$$14. (f * g)(x) = \int_0^x f(x - u) g(u) du = \int_0^x f(u) g(x - u) du = (g * f)(x)$$

$$15. \mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s) \text{ และ } \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(x-u)g(u) du\right\}(s) = F(s)G(s)$$

$$16. \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{L}\{x^a\}(s) = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}, a > -1$$

$$17. h(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < c \\ f(x-c) & , c \leq x < \infty \end{cases} \text{ จะได้ } \mathcal{L}\{h(x)\}(s) = e^{-cs} F(s)$$

$$18. \mathcal{L}\{F^{(n)}(x)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$19. \mathcal{L}\{u_p(x)\}(s) = \frac{e^{-ps}}{s}$$

$$20. \mathcal{L}\{u_p(x)f(x-p)\}(s) = e^{-ps} F(s)$$

$$21. \mathcal{L}\{u_p(x)f(x)\}(s) = e^{-ps} \mathcal{L}\{f(x+p)\}(s)$$

$$22. \text{ฟังก์ชันเป็นคาบ } f(x+T) = f(x) \text{ จะได้ } \mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \int_0^T e^{-sx} f(x) dx$$

$$23. \mathcal{L}\{\sinh ax\}(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

$$24. \mathcal{L}\{\cosh ax\}(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน

$$1.1 \ f(x) = 2x^4$$

$$1.2 \ f(x) = 4x - 10$$

$$1.3 \ f(x) = xe^{4x}$$

$$1.4 \ f(x) = e^{-x} \sin x$$

$$1.5 \ f(x) = x \cos x$$

$$1.6 \ f(x) = x^2 + 6x - 3$$

$$1.7 \ f(x) = 4x^2 - 5 \sin 3x$$

$$1.8 \ f(x) = \sin 2x \cos 2x$$

$$1.9 \ f(x) = \cos x \cos 2x$$

$$1.10 \ f(x) = (1 + e^{2x})^2$$

$$1.11 \ f(x) = e^{3x} \cos 2x - e^x \sin 5x$$

$$1.12 \ f(x) = x \sin x$$

$$1.13 \ f(x) = \frac{d}{dx}(xe^{5x})$$

$$1.14 \ f(x) = \frac{d^2}{dx^2}(\cos x + xe^x)$$

$$1.15 \ f(x) = xe^{2x} \sin 3x$$

$$1.16 \ f(x) = x \sin^2 2x$$

$$1.17 \ f(x) = \int_0^x \cos t \cos (x - t) dt$$

2. จงหาผลประสาน $f * g$ และ $L\{f * g\}$ ของฟังก์ชัน $f(x)$ และ $g(x)$

$$2.1 \ f(x) = e^{2x}, g(x) = e^{3x}$$

$$2.2 \ f(x) = \cos 2x, g(x) = \sin 2x$$

$$2.3 \ f(x) = \sin 2x, g(x) = \sin 2x$$

$$2.4 \ f(x) = 1, g(x) = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} - \sin x$$

$$2.5 \ f(x) = x, g(x) = x^3$$

$$2.6 \ f(x) = x, g(x) = e^{-4x}$$

3. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน

$$3.1 \ f(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

$$3.2 \ f(x) = x^{\frac{7}{2}}$$

4. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน

$$4.1 \ f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ 2 & , 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$4.2 \ f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 3 \\ x-3 & , 3 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$4.3 \ f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x & , \frac{\pi}{2} \leq x < \infty \end{cases}$$

5. จงเขียนสูตรฟังก์ชันต่อไปนี้ในรูปแบบผลบวกของฟังก์ชันหนึ่งหน่วยขั้นบันได และหาผลการแปลงลาปลาซ

$$5.1 \ f(x) = \begin{cases} -1 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$5.2 \ f(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , 1 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$5.3 \ f(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ e^x & , 1 \leq x < 2 \\ 0 & , 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$5.4 \ f(x) = \begin{cases} 2 & , 0 \leq x < 1 \\ 3x & , 1 \leq x < 2 \\ 5 & , 2 \leq x < \infty \end{cases}$$

$$5.5 \ f(x) = |2x - 1|$$

$$5.6 \ f(x) = |x - 3|$$

เฉลยแบบฝึกหัด 5.2

In[81]:= 1.;

In[82]:= 1.1; TraditionalForm[LaplaceTransform[2 x⁴, x, s]]

Out[82]/TraditionalForm=

$$\frac{48}{s^5}$$

In[83]:= 1.2; TraditionalForm[LaplaceTransform[4 x - 10, x, s]]

Out[83]/TraditionalForm=

$$\frac{4}{s^2} - \frac{10}{s}$$

In[84]:= 1.3; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * e^{4*x}, x, s]]

Out[84]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{(s - 4)^2}$$

In[85]:= 1.4; TraditionalForm[LaplaceTransform[e^{-x} Sin[x], x, s]]

Out[85]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{(s + 1)^2 + 1}$$

In[86]:= 1.5; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * Cos[x], x, s]]

Out[86]/TraditionalForm=

$$\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

In[87]:= 1.6; TraditionalForm[LaplaceTransform[x² + 6 x - 3, x, s]]

Out[87]/TraditionalForm=

$$\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{3}{s}$$

In[88]:= 1.7; TraditionalForm[
LaplaceTransform[4 x² - 5 Sin[3 x], x, s]]

Out[88]/TraditionalForm=

$$\frac{8}{s^3} - \frac{15}{s^2 + 9}$$

```
In[89]:= 1.8; TraditionalForm[
  LaplaceTransform[Sin[2 x] Cos[2 x], x, s]]
```

Out[89]/TraditionalForm=

$$\frac{2}{s^2 + 16}$$

```
In[90]:= 1.9; TraditionalForm[
  LaplaceTransform[Cos[x] Cos[2 x], x, s]]
```

Out[90]/TraditionalForm=

$$\frac{s(s^2 + 5)}{s^4 + 10s^2 + 9}$$

```
In[91]:= 1.10; TraditionalForm[LaplaceTransform[(1 + e^{2 x})^2, x, s]]
```

Out[91]/TraditionalForm=

$$\frac{2}{s-2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-4}$$

```
In[92]:= 1.11; TraditionalForm[
  LaplaceTransform[e^{3 x} Cos[2 x] - e^x Sin[5 x], x, s]]
```

Out[92]/TraditionalForm=

$$\frac{s-3}{(s-3)^2 + 4} - \frac{5}{(s-1)^2 + 25}$$

```
In[93]:= 1.12; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * Sin[x], x, s]]
```

Out[93]/TraditionalForm=

$$\frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

```
In[94]:= 1.13; TraditionalForm[D[x * e^{5 x}, x]]
```

Out[94]/TraditionalForm=

$$5e^{5x}x + e^{5x}$$

```
In[95]:= TraditionalForm[LaplaceTransform[D[x * e^{5 x}, x], x, s]]
```

Out[95]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{s-5} + \frac{5}{(s-5)^2}$$

In[96]:= 1.14; TraditionalForm[D[Cos[x] + e^x x, {x, 2}]]

Out[96]/TraditionalForm=

$$e^x x + 2 e^x - \cos(x)$$

In[97]:= TraditionalForm[
LaplaceTransform[D[Cos[x] + e^x x, {x, 2}], x, s]]

Out[97]/TraditionalForm=

$$-\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2}{s - 1} + \frac{1}{(s - 1)^2}$$

In[98]:= 1.15; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * e^{2x} Sin[3 x], x, s]]

Out[98]/TraditionalForm=

$$\frac{6(s - 2)}{(s^2 - 4s + 13)^2}$$

In[99]:= 1.16; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * (Sin[2 x])², x, s]]

Out[99]/TraditionalForm=

$$\frac{8(3s^2 + 16)}{s^2(s^2 + 16)^2}$$

In[122]:= 1.17; TraditionalForm[
Integrate[Cos[t] Cos[x - t], {t, 0, x}]]

Out[122]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{2} (\sin(x) + x \cos(x))$$

In[123]:= TraditionalForm[
LaplaceTransform[
Integrate[Cos[t] Cos[x - t], {t, 0, x}], x, s]]

Out[123]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{2} \left(\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \right)$$

2.

2.1

$$f(x) := e^{2 \cdot x}$$

$$g(x) := e^{3 \cdot x}$$

$$\int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt \rightarrow -\exp(2 \cdot x) + \exp(3 \cdot x)$$

$$f_star_g(x) := \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt$$

$$f_star_g(x) \text{ simplify } \rightarrow -\exp(2 \cdot x) + \exp(3 \cdot x)$$

$$f_star_g(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{-1}{(s-2)} + \frac{1}{(s-3)}$$

$$f_star_g(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{-1}{(s-2)} + \frac{1}{(s-3)} \text{ simplify } \rightarrow \frac{1}{(s-2) \cdot (s-3)}$$

2.2

$$f(x) := \cos(2 \cdot x)$$

$$g(x) := \sin(2 \cdot x)$$

$$\int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt \rightarrow x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$f_star_g(x) := \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt$$

$$f_star_g(x) \text{ expand } \rightarrow x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$f_star_g(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{2}{(s^2 + 4)^2} \cdot s$$

2.3

$$f(x) := \sin(2 \cdot x)$$

$$g(x) := \sin(2 \cdot x)$$

$$\int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - x \cdot \cos(x)^2 + \frac{1}{2} \cdot x$$

$$f_star_g(x) := \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt$$

$$f_star_g(x) \text{ expand } \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - x \cdot \cos(x)^2 + \frac{1}{2} \cdot x$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) - x \cdot \left(\frac{1 + \cos(2 \cdot x)}{2} \right) + \frac{1}{2} \cdot x \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{(s^2 + 4)} - \frac{s^2}{(s^2 + 4)^2}$$

$$\frac{1}{(s^2 + 4)} - \frac{s^2}{(s^2 + 4)^2} \text{ simplify } \rightarrow \frac{4}{(s^2 + 4)^2} .$$

2.4

$$f(x) := 1$$

$$g(x) := \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} - \sin(x)$$

$$\int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt \rightarrow -1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \exp(2 \cdot x) - \frac{1}{2} + \cos(x) \cdot \exp(x) \right) \cdot \exp(-x)$$

$$f_star_g(x) := \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt$$

$$f_star_g(x) \text{ expand } \rightarrow -1 + \frac{1}{2} \cdot \exp(x) - \frac{1}{2 \cdot \exp(x)} + \cos(x)$$

$$-1 + \frac{1}{2} \cdot \exp(x) - \frac{1}{2 \cdot \exp(x)} + \cos(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{-1}{s} + \frac{1}{2 \cdot (s-1)} - \frac{1}{2 \cdot (s+1)} + \frac{s}{(s^2 + 1)}$$

2.5

$$f(x) := x$$

$$g(x) := x^3$$

$$\int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt \text{ expand} \rightarrow \frac{1}{20} \cdot x^5$$

$$f_star_g(x) := \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt$$

$$f_star_g(x) \text{ expand} \rightarrow \frac{1}{20} \cdot x^5$$

$$f_star_g(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{6}{s^6}$$

2.6

$$f(x) := x$$

$$g(x) := e^{-4 \cdot x}$$

$$\int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt \rightarrow \frac{-1}{16} + \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot \exp(-4 \cdot x)$$

$$f_star_g(x) := \int_0^x f(t) \cdot g(x-t) dt$$

$$f_star_g(x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{-1}{16} + \frac{1}{4} \cdot x + \frac{1}{16} \cdot \exp(-4 \cdot x)$$

$$f_star_g(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{-1}{16 \cdot s} + \frac{1}{4 \cdot s^2} + \frac{1}{16 \cdot (s+4)}$$

3.

3.1

$$f(x) := x^{\frac{5}{2}}$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{15}{8 \cdot s^{\frac{7}{2}}} \cdot \pi^{\frac{1}{2}}$$

3.2

$$f(x) := x^{\frac{7}{2}}$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{105}{16 \cdot s^{\frac{9}{2}}} \cdot \pi^{\frac{1}{2}}$$

4.1

$$f(x) := 2 \cdot \Phi(x - 3)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow 2 \cdot \frac{\exp(-3 \cdot s)}{s}$$

4.2

$$f(x) := (x - 3) \cdot \Phi(x - 3)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{\exp(-3 \cdot s)}{s^2}$$

4.3

$$f(x) := \sin(x) \cdot \Phi\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \exp\left(\frac{-1}{2} \cdot \pi \cdot s\right) \cdot \frac{s}{(s^2 + 1)}$$

5.

5.1

$$f(x) := (-1) - [(-1) \cdot \Phi(x-1)] + (1) \cdot \Phi(x-1)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{-1}{s} + 2 \cdot \frac{\exp(-s)}{s}$$

$$f(x) := -1 + 2 \cdot \Phi(x-1)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{-1}{s} + 2 \cdot \frac{\exp(-s)}{s}$$

5.2

$$f(x) := (x) - [(x) \cdot \Phi(x-1)] + (1) \cdot \Phi(x-1)$$

$$f(x) \rightarrow x - x \cdot \Phi(x-1) + \Phi(x-1)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{1}{s^2} - \frac{\exp(-s)}{s^2}$$

5.3

$$f(x) := [(e^x) \cdot \Phi(x-1)] - [(e^x) \cdot \Phi(x-2)]$$

$$f(x) \rightarrow \exp(x) \cdot \Phi(x-1) - \exp(x) \cdot \Phi(x-2)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{\exp(-s+1)}{(s-1)} - \frac{\exp(-2 \cdot s+2)}{(s-1)}$$

5.4

$$f(x) := 2 - (2 \cdot \Phi(x-1)) + [(3 \cdot x) \cdot \Phi(x-1)] - [(3 \cdot x) \cdot \Phi(x-2)] + (5 \cdot \Phi(x-2))$$

$$f(x) \rightarrow 2 - 2 \cdot \Phi(x-1) + 3 \cdot x \cdot \Phi(x-1) - 3 \cdot x \cdot \Phi(x-2) + 5 \cdot \Phi(x-2)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{2}{s} + \frac{\exp(-s)}{s} + 3 \cdot \frac{\exp(-s)}{s^2} - \frac{\exp(-2 \cdot s)}{s} - 3 \cdot \frac{\exp(-2 \cdot s)}{s^2}$$

5.5

$$f(x) := [-(2 \cdot x - 1)] - \left[[-(2 \cdot x - 1)] \cdot \Phi\left(x - \frac{1}{2}\right) \right] + \left[(2 \cdot x - 1) \cdot \Phi\left(x - \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$f(x) \rightarrow -2 \cdot x + 1 - (-2 \cdot x + 1) \cdot \Phi\left(x - \frac{1}{2}\right) + (2 \cdot x - 1) \cdot \Phi\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{-2}{s^2} + \frac{1}{s} + 4 \cdot \frac{\exp\left(\frac{-1}{2} \cdot s\right)}{s^2}$$

5.6

$$f(x) := [-(x - 3)] - \left[[-(x - 3)] \cdot \Phi(x - 3) \right] + \left[(x - 3) \cdot \Phi(x - 3) \right]$$

$$f(x) \rightarrow -x + 3 - (-x + 3) \cdot \Phi(x - 3) + (x - 3) \cdot \Phi(x - 3)$$

$$f(x) \text{ laplace, } x \rightarrow \frac{-1}{s^2} + \frac{3}{s} + 2 \cdot \frac{\exp(-3 \cdot s)}{s^2}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 5.2 (Mathematica)

In[1]:= 1.;

In[2]:= 1.1; TraditionalForm[LaplaceTransform[2 x⁴, x, s]]

Out[2]/TraditionalForm=

$$\frac{48}{s^5}$$

In[3]:= 1.2; TraditionalForm[LaplaceTransform[4 x - 10, x, s]]

Out[3]/TraditionalForm=

$$\frac{4}{s^2} - \frac{10}{s}$$

In[4]:= 1.3; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * e^{4*x}, x, s]]

Out[4]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{(s - 4)^2}$$

In[5]:= 1.4; TraditionalForm[LaplaceTransform[e^{-x} Sin[x], x, s]]

Out[5]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{(s + 1)^2 + 1}$$

In[6]:= 1.5; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * Cos[x], x, s]]

Out[6]/TraditionalForm=

$$\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2}$$

In[7]:= 5.6; TraditionalForm[LaplaceTransform[x² + 6 x - 3, x, s]]

Out[7]/TraditionalForm=

$$\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{3}{s}$$

In[8]:= 1.7; TraditionalForm[
LaplaceTransform[4 x² - 5 Sin[3 x], x, s]]

Out[8]/TraditionalForm=

$$\frac{8}{s^3} - \frac{15}{s^2 + 9}$$

In[9]:= 1.8; TraditionalForm[
LaplaceTransform[Sin[2 x] Cos[2 x], x, s]]

Out[9]/TraditionalForm=

$$\frac{2}{s^2 + 16}$$

In[10]:= 1.9; TraditionalForm[LaplaceTransform[Cos[x] Cos[2 x], x, s]]

Out[10]/TraditionalForm=

$$\frac{s(s^2 + 5)}{s^4 + 10s^2 + 9}$$

In[11]:= 1.10; TraditionalForm[LaplaceTransform[(1 + e^{2x})², x, s]]

Out[11]/TraditionalForm=

$$\frac{2}{s-2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-4}$$

In[12]:= 1.11; TraditionalForm[
LaplaceTransform[e^{3x} Cos[2 x] - e^x Sin[5 x], x, s]]

Out[12]/TraditionalForm=

$$\frac{s-3}{(s-3)^2 + 4} - \frac{5}{(s-1)^2 + 25}$$

In[13]:= 1.12; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * Sin[x], x, s]]

Out[13]/TraditionalForm=

$$\frac{2s}{(s^2 + 1)^2}$$

In[14]:= 1.13; TraditionalForm[D[x * e^{5x}, x]]

Out[14]/TraditionalForm=

$$5e^{5x}x + e^{5x}$$

In[15]:= TraditionalForm[LaplaceTransform[D[x * e^{5x}, x], x, s]]

Out[15]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{s-5} + \frac{5}{(s-5)^2}$$

In[16]:= 1.14; TraditionalForm[D[Cos[x] + e^x x, {x, 2}]]

Out[16]/TraditionalForm=

$$e^x x + 2 e^x - \cos(x)$$

In[17]:= TraditionalForm[
LaplaceTransform[D[Cos[x] + e^x x, {x, 2}], x, s]]

Out[17]/TraditionalForm=

$$-\frac{s}{s^2 + 1} + \frac{2}{s - 1} + \frac{1}{(s - 1)^2}$$

In[18]:= 1.15; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * e^{2x} Sin[3 x], x, s]]

Out[18]/TraditionalForm=

$$\frac{6(s - 2)}{(s^2 - 4s + 13)^2}$$

In[19]:= 1.16; TraditionalForm[LaplaceTransform[x * (Sin[2 x])², x, s]]

Out[19]/TraditionalForm=

$$\frac{8(3s^2 + 16)}{s^2 (s^2 + 16)^2}$$

In[20]:= 1.17; TraditionalForm[
Integrate[Cos[t] Cos[x - t], {t, 0, x}]]

Out[20]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{2} (\sin(x) + x \cos(x))$$

In[21]:= TraditionalForm[
LaplaceTransform[
Integrate[Cos[t] Cos[x - t], {t, 0, x}], x, s]]

Out[21]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{2} \left(\frac{s^2 - 1}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{s^2 + 1} \right)$$

In[57]:= 2.;

In[58]:= 2.1;

In[59]:= f[x_] := e^{2*x}

In[60]:= g[x_] := e^{3*x}

In[61]:= TraditionalForm[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$]

Out[61]/TraditionalForm=

$$e^{2x} (e^x - 1)$$

In[62]:= TraditionalForm[Simplify[
LaplaceTransform[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$, x, s]]]

Out[62]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{s^2 - 5s + 6}$$

In[63]:= 2.2;

In[64]:= f[x_] := Cos[2 x]

In[65]:= g[x_] := Sin[2 x]

In[66]:= TraditionalForm[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$]

Out[66]/TraditionalForm=

$$x \sin(x) \cos(x)$$

In[67]:= TraditionalForm[Simplify[
LaplaceTransform[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$, x, s]]]

Out[67]/TraditionalForm=

$$\frac{2s}{(s^2 + 4)^2}$$

In[68]:= 2.3;

In[69]:= f[x_] := Sin[2 x]

In[70]:= g[x_] := Sin[2 x]

In[71]:= TraditionalForm[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$]

Out[71]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{4} (\sin(2x) - 2x \cos(2x))$$

In[72]:= TraditionalForm[Simplify[
LaplaceTransform[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$, x, s]]]

Out[72]/TraditionalForm=

$$\frac{4}{(s^2 + 4)^2}$$

In[73]:= 2.4;

In[74]:= f[x_] := 1

In[75]:= g[x_] := $\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} - \sin[x]$

In[76]:= TraditionalForm[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$]

Out[76]/TraditionalForm=

$$\cos(x) + \sinh(x) - 1$$

In[77]:= TraditionalForm[Simplify[
LaplaceTransform[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$, x, s]]]

Out[77]/TraditionalForm=

$$-\frac{s^3 - s^2 + s + 1}{s - s^5}$$

In[78]:= 2.5;

In[79]:= f[x_] := x

In[80]:= g[x_] := x³

In[81]:= TraditionalForm[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$]

Out[81]/TraditionalForm=

$$\frac{x^5}{20}$$

In[82]:= TraditionalForm[Simplify[
LaplaceTransform[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$, x, s]]]

Out[82]/TraditionalForm=

$$\frac{6}{s^6}$$

In[83]:= 2.6;

In[84]:= f[x_] := x

In[85]:= g[x_] := e^{-4 x}

In[86]:= TraditionalForm[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$]

Out[86]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{16} (4x + e^{-4x} - 1)$$

In[87]:= TraditionalForm[Simplify[
LaplaceTransform[$\int_0^x (f[t]) * (g[x - t]) dt$, x, s]]]

Out[87]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{s^2 (s + 4)}$$

In[88]:= 3.;

In[89]:= 3.1; TraditionalForm[LaplaceTransform[x^{15/2}, x, s]]

Out[89]/TraditionalForm=

$$\frac{15\sqrt{\pi}}{8s^{7/2}}$$

In[90]:= 3.2; TraditionalForm[LaplaceTransform[x^{7/2}, x, s]]

Out[90]/TraditionalForm=

$$\frac{105\sqrt{\pi}}{16s^{9/2}}$$

In[95]:= 4.;

In[96]:= 4.1; TraditionalForm[
LaplaceTransform[2 UnitStep[x - 3], x, s]]

Out[96]/TraditionalForm=

$$\frac{2e^{-3s}}{s}$$

In[97]:= 4.2; TraditionalForm[Simplify[
LaplaceTransform[(x - 3) * UnitStep[x - 3], x, s]]]

Out[97]/TraditionalForm=

$$\frac{e^{-3s}}{s^2}$$

In[98]:= 4.3; TraditionalForm[Simplify[
LaplaceTransform[Sin[x] * UnitStep[x - $\frac{\pi}{2}$], x, s]]]

Out[98]/TraditionalForm=

$$\frac{e^{-\frac{\pi s}{2}} s}{s^2 + 1}$$

In[36]:= 5.;

In[37]:= 5.1; TraditionalForm[
LaplaceTransform[-1 + 2 UnitStep[x - 1], x, s]]

Out[37]//TraditionalForm=

$$\frac{2e^{-s}}{s} - \frac{1}{s}$$

In[38]:= TraditionalForm[Simplify[%]]

Out[38]//TraditionalForm=

$$-\frac{1 - 2e^{-s}}{s}$$

In[39]:= 5.2; TraditionalForm[
LaplaceTransform[x + (1 - x) UnitStep[x - 1], x, s]]

Out[39]//TraditionalForm=

$$-\frac{e^{-s}(s+1)}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s}$$

In[40]:= TraditionalForm[Simplify[%]]

Out[40]//TraditionalForm=

$$\frac{1 - e^{-s}}{s^2}$$

In[41]:= 5.3; TraditionalForm[
LaplaceTransform[e^x UnitStep[x - 1] - e^x UnitStep[x - 2], x, s]]

Out[41]//TraditionalForm=

$$\frac{e^{1-s}}{s-1} - \frac{e^{-2(s-1)}}{s-1}$$

In[42]:= TraditionalForm[Simplify[%]]

Out[42]//TraditionalForm=

$$\frac{e^{1-2s}(e^s - e)}{s-1}$$

```
In[43]:= 5.4; TraditionalForm[LaplaceTransform[
  2 + (3 x - 2) * UnitStep[x - 1] + (5 - 3 x) * UnitStep[x - 2],
  x, s]]
```

Out[43]//TraditionalForm=

$$\frac{3 e^{-s} (s + 1)}{s^2} - \frac{3 e^{-2s} (2s + 1)}{s^2} + \frac{5 e^{-2s}}{s} - \frac{2 e^{-s}}{s} + \frac{2}{s}$$

```
In[44]:= TraditionalForm[Simplify[%]]
```

Out[44]//TraditionalForm=

$$\frac{e^{-2s} (2 e^{2s} s - s + e^s (s + 3) - 3)}{s^2}$$

```
In[45]:= 5.5; TraditionalForm[LaplaceTransform[Abs[2 x - 1], x, s]]
```

Out[45]//TraditionalForm=

$$\frac{e^{-s/2} (e^{s/2} s - 2 e^{s/2} + 4)}{s^2}$$

```
In[46]:= TraditionalForm[Simplify[%]]
```

Out[46]//TraditionalForm=

$$\frac{s + 4 e^{-s/2} - 2}{s^2}$$

```
In[47]:= 5.6; TraditionalForm[LaplaceTransform[Abs[x - 3], x, s]]
```

Out[47]//TraditionalForm=

$$\frac{e^{-3s} (3 e^{3s} s - e^{3s} + 1)}{s^2} + \frac{e^{-3s}}{s^2}$$

```
In[48]:= TraditionalForm[Simplify[%]]
```

Out[48]//TraditionalForm=

$$-\frac{-3s - 2 e^{-3s} + 1}{s^2}$$

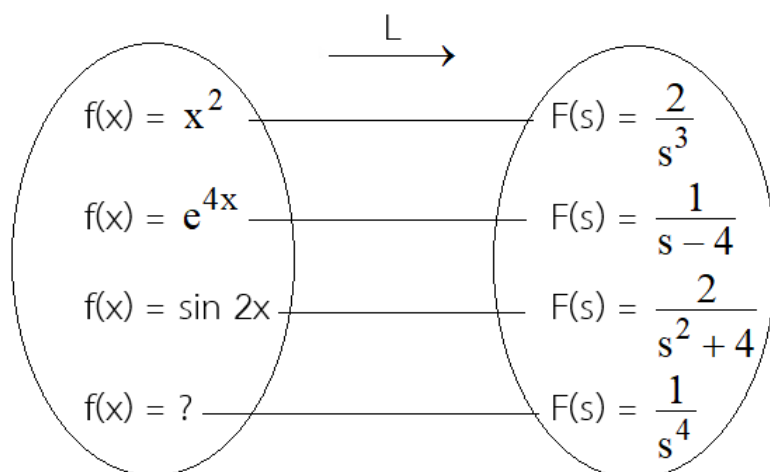
5.3 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

ผลการแปลงลาปลาซเป็นตัวดำเนินการที่ส่งค่าที่เป็นฟังก์ชันไปเป็นฟังก์ชันเช่น

$$\text{ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน } f(x) = x^2 \text{ ได้เป็น } F(s) = L\{f(x)\}(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$\text{นั่นคือ } L \text{ ส่งฟังก์ชัน } f(x) = x^2 \text{ ไปเป็นฟังก์ชัน } F(s) = \frac{2}{s^3}$$

ตัวอย่างของการส่งค่าด้วยผลการแปลงลาปลาซ



ปัญหาที่เราสนใจขณะนี้คือ ถ้ากำหนด $F(s)$ มาให้ แล้วจะมี $f(x)$ ที่ทำให้ $L\{f(x)\}(s) = F(s)$ หรือไม่ ตัวอย่างเช่น

$$F(s) = \frac{1}{s^4} \text{ จะมี } f(x) \text{ ที่ทำให้ } L\{f(x)\}(s) = \frac{1}{s^4} \text{ หรือไม่}$$

$$F(s) = s^2 \text{ จะมี } f(x) \text{ ที่ทำให้ } L\{f(x)\}(s) = s^2 \text{ หรือไม่}$$

$$F(s) = e^{4s} \text{ จะมี } f(x) \text{ ที่ทำให้ } L\{f(x)\}(s) = e^{4s} \text{ หรือไม่}$$

ทฤษฎีบท 5.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[0, T]$, $T > 0$ และ $f(x) = O[e^{ax}]$,

$$\text{ถ้า } F(s) = L\{f(x)\} \text{ แล้วจะได้ } \lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $f(x) = O[e^{ax}]$

$$\text{เพราะฉะนั้นมีจำนวนจริง } M > 0 \text{ และ } x_0 > 0 \text{ ที่ทำให้ } |f(x)| < Me^{ax} \text{ ทุก } x > x_0 \quad \dots (1)$$

เพราะว่า f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0, x_0]$

$$\text{เพราะฉะนั้นมีจำนวนจริง } K > 0 \text{ ที่ทำให้ } |f(x)| < K \text{ ทุก } x \text{ ในช่วง } [0, x_0] \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะว่า } |F(s)| = |L\{f(x)\}(s)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \right| \\
&= \left| \int_0^{x_0} e^{-sx} f(x) dx + \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \right| \\
&\leq \left| \int_0^{x_0} e^{-sx} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \right| \\
&\leq \int_0^{x_0} |e^{-sx} f(x)| dx + \int_{x_0}^{\infty} |e^{-sx} f(x)| dx \\
&= \int_0^{x_0} e^{-sx} |f(x)| dx + \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} |f(x)| dx \\
&< \int_0^{x_0} e^{-sx} K dx + \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} |f(x)| dx \quad (\text{จาก (2)}) \\
&< K \int_0^{x_0} e^{-sx} dx + \int_{x_0}^{\infty} e^{-sx} M e^{ax} dx \quad (\text{จาก (1)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= K \left[\frac{e^{-sx}}{-s} \right]_{x=0}^{x=x_0} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{x_0}^b M e^{-(s-a)x} dx \\
&= K \left(\frac{e^{-sx_0}}{-s} - \frac{1}{-s} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{M e^{-(s-a)b}}{-(s-a)} \right]_{x=x_0}^{x=b} \\
&= K \left(\frac{1 - e^{-sx_0}}{s} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{M e^{-(s-a)b}}{-(s-a)} - \frac{M}{-(s-a)} \right) \\
&= K \left(\frac{1 - e^{-sx_0}}{s} \right) + \left(0 + \frac{M}{s-a} \right) \\
&= K \left(\frac{1 - e^{-sx_0}}{s} \right) + \frac{M}{s-a}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{s \rightarrow \infty} |F(s)| < K \left(\frac{1 - e^{-sx_0}}{s} \right) + \frac{M}{s-a}$

เพราะว่า $\lim_{s \rightarrow \infty} K \left(\frac{1 - e^{-sx_0}}{s} \right) + \frac{M}{s-a} = 0$ และ $0 \leq |F(s)| < K \left(\frac{1 - e^{-sx_0}}{s} \right) + \frac{M}{s-a}$

เพราะฉะนั้น $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$



ผลจากทฤษฎีบท 5.3.1 จะได้ ถ้า $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$ แล้ว ไม่มี $f(x)$ ที่ทำให้ $L\{f(x)\}(s) = F(s)$

ตัวอย่างเช่น

เพราะว่า $F(s) = s^2$ และ $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$ เพราะฉะนั้นไม่มี $f(x)$ ที่ทำให้ $L\{f(x)\}(s) = F(s)$

เพราะว่า $F(s) = e^{4s}$ และ $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$ เพราะฉะนั้นไม่มี $f(x)$ ที่ทำให้ $L\{f(x)\}(s) = F(s)$

บทนิยาม 5.3.1

ให้ $F(s)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง (a, ∞) , $a > 0$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $[0, \infty)$

และ $L\{f(x)\}(s) = F(s)$

เราเรียก f ว่าเป็น **ผลการแปลงลาปลาซผกผัน** (inverse Laplace transform) ของ F

เขียนแทนด้วย $L^{-1}\{F\} = f$ หรือ $L^{-1}\{F(s)\}(x) = f(x)$ หรือ $L^{-1}F(s) = f(x)$ หรือ $L^{-1}F = f$

ตัวอย่างเช่น

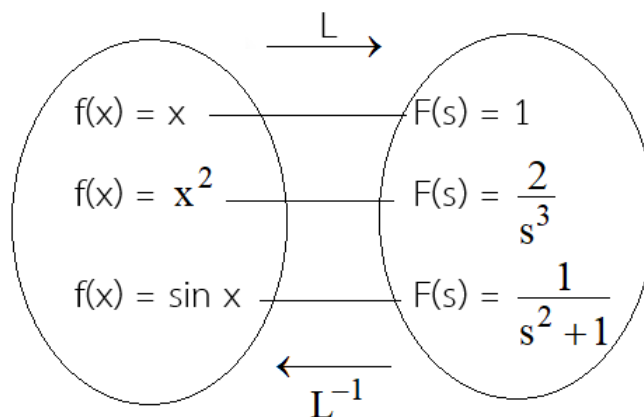
$f(x) = x$ เป็นผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s) = \frac{1}{s^2}$

$f(x) = \sin x$ เป็นผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$

เพราะฉะนั้น $L\{\frac{1}{s^2}\}(x) = x$ และ $L\{\frac{1}{s^2 + 1}\}(x) = \sin x$

ข้อสังเกต

ผลการแปลงลาปลาซ L กับ ผลการแปลงลาปลาซผกผัน L^{-1} เป็นการดำเนินการที่กระทำกับฟังก์ชัน เหมือนกับการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรต



ในเรื่องของการหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตจะพบว่า

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 4) = 2x \text{ และ } \frac{d}{dx}(x^2 + 10) = 2x$$

นั่นคือมีฟังก์ชันหลายฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เหมือนกันและ $\int 2x \, dx = x^2 + C$

ในเรื่องของผลการแปลงลาปลาซก็มีฟังก์ชันหลายฟังก์ชันที่มีผลการแปลงเหมือนกัน

ตัวอย่างเช่น

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0 \\ e^x & , 0 < x < \infty \end{cases} \text{ จะได้ } \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) \, dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^x \, dx = \frac{1}{s-1}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ e^x & , 0 < x < \infty \end{cases} \text{ จะได้ } \int_0^{\infty} e^{-sx} g(x) \, dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^x \, dx = \frac{1}{s-1}$$

เพราะฉะนั้น $L\{f(x)\}(s) = L\{g(x)\}(s)$ แต่ $f(x) \neq g(x)$

ถ้าเราพิจารณาผลการแปลงผกผัน $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(x)$ เฉพาะฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$

แล้ว $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(x) = e^x$ บนช่วง $[0, \infty)$ เท่านั้น

ข้อสรุปในการหา $L^{-1}\{F(s)\}(x)$ เราจะใช้ผลจากทฤษฎีของเลิร์ช (Lerch's theorem) ซึ่งกล่าวไว้ว่า

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[0, \infty)$ และ $L\{f\} = L\{g\}$ แล้ว $f = g$

แนวคิดในการหาสูตรผลการแปลงลาปลาซผกผันจะคล้ายกับความสัมพันธ์ระหว่างสูตรอนุพันธ์กับสูตรการอินทิเกรต

ตัวอย่างเช่น

สูตรอนุพันธ์

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

สูตรอินทิเกรต

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C$$

สูตรของผลการแปลงลาปลาซผกผันก็จะได้มาจากสูตรผลการแปลงลาปลาซ

สูตรผลการแปลงลาปลาซ

$$L\{1\}(s) = \frac{1}{s}$$

$$L\{e^{ax}\}(s) = \frac{1}{s-a}$$

$$L\{\sin ax\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

$$L\{\cos ax\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

$$L\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

สูตรผลการแปลงลาปลาซผกผัน

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(x) = 1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}(x) = e^{ax}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 + a^2}\right\}(x) = \sin ax$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2}\right\}(x) = \cos ax$$

$$L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}(x) = x^n$$

ในการอินทิเกรตเมื่อฟังก์ชันมีความซับซ้อนมากขึ้นเช่น $\int x e^x dx$, $\int (x^2 + 4x) dx$, $\int \frac{4x}{x^2 + 4x - 5} dx$ เรามีวิธีการอินทิเกรตโดยใช้การอินทิเกรตทีละส่วน การแยกเป็นเศษส่วนย่อย การจัดรูปทางพีชคณิตซึ่งในการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันก็จะมีแนวคิดในการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันด้วยวิธีจัดรูปทางพีชคณิต การแยกเป็นเศษส่วนย่อย ซึ่งจะได้ศึกษาต่อไป

สมบัติของผลการแปลงลาปลาซผกผัน

1. ผลการแปลงลาปลาซผกผันมีสมบัติเชิงเส้น

$$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\}(x) = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\}$$

ข้อพิสูจน์ ให้ $L^{-1}\{F_1(s)\}(x) = f_1(x)$ และ $L^{-1}\{F_2(s)\}(x) = f_2(x)$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \int_0^\infty e^{-sx} f_1(x) dx = F_1(s)$$

$$\text{และ } \int_0^\infty e^{-sx} f_2(x) dx = F_2(s) \text{ ทุก } s > s_0 \text{ สำหรับบางค่าคงตัว } s_0 > 0$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) &= c_1 \int_0^\infty e^{-sx} f_1(x) dx + c_2 \int_0^\infty e^{-sx} f_2(x) dx \\ &= \int_0^\infty e^{-sx} (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx \\ &= L\{c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)\}(s) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\}(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$
 $= (c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\})(x)$
 เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\}$ □

ตัวอย่าง 5.3.1 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s) = \frac{4}{s+1}$

วิธีทำ $L^{-1}\{F(s)\}(x) = L^{-1}\{\frac{4}{s+1}\}(x)$
 $= 4 L^{-1}\{\frac{1}{s+1}\}(x)$
 $= 4e^{-x}$ □

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}$

วิธีทำ โดยการจัดรูปทางพีชคณิตจะได้ $\frac{2s+3}{s^2+4} = 2(\frac{s}{s^2+4}) + \frac{3}{2}(\frac{2}{s^2+4})$
 เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{\frac{2s+3}{s^2+4}\}(x) = L^{-1}\{2(\frac{s}{s^2+4}) + \frac{3}{2}(\frac{2}{s^2+4})\}(x)$
 $= 2 L^{-1}\{\frac{s}{s^2+4}\}(x) + \frac{3}{2} L^{-1}\{\frac{2}{s^2+4}\}(x)$
 $= 2 \cos 2x + \frac{3}{2} \sin 2x$ □

แนวคิดเกี่ยวกับสูตรผลการแปลงลาปลาซผกผันมีความคล้ายกับสูตรการอินทิเกรตที่ได้มาสูตรของการหาอนุพันธ์
 ตัวอย่างเช่น

เพราะว่า $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$ เพราะฉะนั้น $\int n x^{n-1} dx = x^n + C$

แต่สูตรการอินทิเกรตเรานิยมที่จะท่องจำคือ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$

ในทำนองเดียวกันกับผลการแปลงลาปลาซผกผันเรามีแนวทางในการหาสูตรดังนี้

1. การหาสูตร $L^{-1}\{\frac{1}{s^n}\}(x)$

เพราะว่า $L\{x^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ จะได้ $L\{x^{n-1}\}(s) = \frac{(n-1)!}{s^n}$ และ $L\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\}(s) = \frac{1}{s^n}$

เพราะฉะนั้นสูตรผลการแปลงลาปลาซผกผันคือ $L^{-1}\{\frac{1}{s^n}\}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$

2. การหาสูตร $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}(x)$

จากสูตร $L\{e^{ax}\}(s) = \frac{1}{s-a}$ จะได้ $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}(x) = e^{ax}$

จากสูตร $L\{x^n e^{ax}\}(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ จะได้ $L\{x^{n-1} e^{ax}\}(s) = \frac{(n-1)!}{(s-a)^n}$

เพราะฉะนั้น $L\left\{\frac{x^{n-1} e^{ax}}{(n-1)!}\right\}(s) = \frac{1}{(s-a)^n}$

เพราะฉะนั้นสูตรผลการแปลงลาปลาซผกผันคือ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}(x) = \frac{x^{n-1} e^{ax}}{(n-1)!}$

3. การหาสูตร $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}\right\}(x)$

จากสูตร $L\{e^{ax} \sin bx\}(s) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$ จะได้ $L\left\{\frac{e^{ax} \sin bx}{b}\right\}(s) = \frac{1}{(s-a)^2 + b^2}$

เพราะฉะนั้นสูตรผลการแปลงลาปลาซผกผันคือ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}\right\}(x) = \frac{e^{ax} \sin bx}{b}$

4. การหาสูตร $L^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}\right\}(x)$

จากสูตร $L\{e^{ax} \cos bx\}(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$ จะได้สูตร $L^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}\right\}(x) = e^{ax} \cos bx$

5. การหาสูตร $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + b^2}\right\}(x)$

เพราะว่า $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}\right\}(x) = \frac{e^{ax} \sin bx}{b}$ เพราะฉะนั้น $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + b^2}\right\}(x) = \frac{\sin bx}{b}$

สรุปสูตรผลการแปลงลาปลาซผกผันที่สำคัญ

$$1. L^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\right\}(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \text{ เมื่อ } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$2. L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}(x) = e^{ax}$$

$$3. L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}(x) = \frac{x^{n-1} e^{ax}}{(n-1)!}$$

$$4. L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^2 + b^2}\right\}(x) = \frac{e^{ax} \sin bx}{b}$$

$$5. L^{-1}\left\{\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}\right\}(x) = e^{ax} \cos bx$$

$$6. L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + b^2}\right\}(x) = \frac{\sin bx}{b}$$

ตัวอย่าง 5.3.3 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+13}$

วิธีทำ $F(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+13}$

$$= \frac{s+4}{(s+2)^2+9}$$

$$= \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{2}{(s+2)^2+3^2}$$

$$= \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + 2\left(\frac{1}{(s+2)^2+3^2}\right)$$

เพราะว่า $L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\}(x) = e^{-2x} \cos 3x$

และ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+3^2}\right\}(x) = \frac{e^{-2x} \sin 3x}{3}$

เพราะฉะนั้น $L^{-1}\{F(s)\}(x) = L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + 2\left(\frac{1}{(s+2)^2+3^2}\right)\right\}(x)$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2}\right\}(x) + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+3^2}\right\}(x)$$

$$= e^{-2x} \cos 3x + 2\left(\frac{e^{-2x} \sin 3x}{3}\right)$$

□

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$\frac{s+4}{s^2+4s+13} \text{ invlaplace, } s \rightarrow \exp(-2 \cdot t) \cdot \cos(3 \cdot t) + \frac{2}{3} \cdot \exp(-2 \cdot t) \cdot \sin(3 \cdot t)$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

```
In[66]:= InverseLaplaceTransform[ $\frac{s+4}{s^2+4s+13}$ , s, x]
```

```
Out[66]:=  $\frac{1}{6} e^{(-2-3i)x} ((3+2i) + (3-2i) e^{6ix})$ 
```

```
In[67]:= Simplify[ComplexExpand[%]]
```

```
Out[67]:=  $\frac{1}{3} e^{-2x} (3 \cos(3x) + 2 \sin(3x))$ 
```

```
In[68]:= TraditionalForm[%]
```

```
Out[68]//TraditionalForm=
```

$$\frac{1}{3} e^{-2x} (2 \sin(3x) + 3 \cos(3x))$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Maxima

```
(%i1)      ilt((s+4)/(s^2+4*s+13),s,x);
```

```
(%o1)      %e-2x  $\left( \frac{2 \sin(3x)}{3} + \cos(3x) \right)$ 
```

การแยก $F(s)$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยเป็นวิธีที่ใช้ในการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันได้

$$\text{ตัวอย่างเช่น } F(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } L^{-1}\{F(s)\}(x) &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}(x) \\ &= L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(x) - L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(x) \\ &= 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.3.4 จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s) = \frac{2s^2 + 3}{s(s-1)^2}$

วิธีทำ การแยก $F(s)$ เป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย

$$\begin{aligned} \text{ให้ } \frac{2s^2 + 3}{s(s-1)^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} \\ &= \frac{A(s-1)^2 + Bs(s-1) + Cs}{s(s-1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2s^2 + 3 = A(s-1)^2 + Bs(s-1) + Cs \quad \dots (1)$$

แทนค่า $s = 0$ ในสมการ (1) จะได้ $3 = A$

แทนค่า $s = 1$ ในสมการ (1) จะได้ $5 = C$

สัมประสิทธิ์ s^2 ในสมการ (1) จะได้ $2 = A + B$ เพราะฉะนั้น $B = -1$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } F(s) &= \frac{2s^2 + 3}{s(s-1)^2} \\ &= \frac{3}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{5}{(s-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } L^{-1}\{F(s)\}(x) &= L^{-1}\left\{\frac{3}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{5}{(s-1)^2}\right\}(x) \\ &= 3 - e^x + 5xe^x \end{aligned}$$

ข้อแนะนำ การแยกเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยเมื่อตัวหารของ $F(s)$ มีตัวประกอบเป็น $(s - c)^k$ หรือ $(s^2 + as + b)^k$ เมื่อ $G(s)$ มีระดับชั้นน้อยกว่า k

การเขียนเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อยจะได้

$$\frac{G(s)}{(s - c)^k} = \frac{A_1}{s - c} + \frac{A_2}{(s - c)^2} + \frac{A_3}{(s - c)^3} + \dots + \frac{A_k}{(s - c)^k}$$

$$\frac{G(s)}{(s^2 + as + b)^k} = \frac{A_1 + B_1s}{s^2 + as + b} + \frac{A_2 + B_2s}{(s^2 + as + b)^2} + \frac{A_3 + B_3s}{(s^2 + as + b)^3} + \dots + \frac{A_k + B_ks}{(s^2 + as + b)^k}$$

เมื่อ $A_1, A_2, \dots, A_k, B_1, B_2, \dots, B_k$ เป็นค่าคงตัว

ในกรณีตัวหารมีตัวประกอบหลายลักษณะปนกันก็ใช้แนวคิดข้างต้นช่วยในการเขียนเป็นผลบวกย่อย ตัวอย่างเช่น

$$\frac{s+1}{(s-4)^3} = \frac{A_1}{s-4} + \frac{A_2}{(s-4)^2} + \frac{A_3}{(s-4)^3}$$

$$\frac{2s+3}{s^2(s-1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{B_1}{s-1}$$

$$\frac{s^2+4}{(s^2+1)^2} = \frac{A_1s+B_1}{s^2+1} + \frac{A_2s+B_2}{(s^2+1)^2}$$

$$\frac{5s^2+20s}{(s-1)^2(s^2+4)} = \frac{A_1}{s-1} + \frac{A_2}{(s-1)^2} + \frac{B_1s+C_1}{s^2+4}$$

การหาค่าคงตัว A_i , B_i และ C_i สามารถทำได้โดยการหาผลบวกทางด้านขวามือ แล้วใช้เหตุผลว่าส่วนเท่ากันก็ต่อเมื่อเศษเท่ากัน ต่อไปจึงทำการเทียบสัมประสิทธิ์เพื่อแก้สมการหาค่าคงตัว หรือใช้วิธีแทนค่าบางค่าที่เหมาะสมก็จะได้อาคงตัวที่ต้องการ

$$\begin{aligned}\text{ตัวอย่างเช่น } F(s) &= \frac{2s}{(s+1)(s^2+1)} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} \\ &= \frac{A(s^2+1) + (Bs+C)(s+1)}{(s+1)(s^2+1)}\end{aligned}$$

เพราะว่าส่วนเท่ากัน เพราะฉะนั้นเศษต้องเท่ากัน

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2s = A(s^2 + 1) + (Bs + C)(s + 1) \quad \dots (1)$$

แทนค่า $s = -1$ ในสมการ (1) จะได้ $-2 = 2A$ เพราะฉะนั้น $A = -1$

พิจารณาสัมประสิทธิ์ s^2 ในสมการ (1) จะได้ $0 = A + B$ เพราะฉะนั้น $B = 1$

พิจารณาค่าคงตัวในสมการ (1) จะได้ $0 = A + C$ เพราะฉะนั้น $C = 1$

$$\text{เพราะฉะนั้น } F(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+1}$$

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้น } L^{-1}\{F(s)\}(x) &= L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1} + \frac{s+1}{s^2+1}\right\}(x) \\ &= -L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\}(x) + L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}(x) + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}(x) \\ &= -e^{-x} + \cos x + \sin x\end{aligned}$$



การคำนวณโดยโปรแกรม Mathcad

$$\frac{s+1}{(s-4)^3} \text{ convert, parfrac, s } \rightarrow \frac{5}{(s-4)^3} + \frac{1}{(s-4)^2}$$

$$\frac{s+1}{(s-4)^3} \text{ invlaplace, s } \rightarrow \frac{5}{2} \cdot t^2 \cdot \exp(4 \cdot t) + t \cdot \exp(4 \cdot t)$$

$$\frac{2 \cdot s + 3}{s^2 \cdot (s-1)} \text{ convert, parfrac, s } \rightarrow \frac{-3}{s^2} - \frac{5}{s} + \frac{5}{(s-1)}$$

$$\frac{2 \cdot s + 3}{s^2 \cdot (s-1)} \text{ invlaplace, s } \rightarrow -3 \cdot t - 5 + 5 \cdot \exp(t)$$

$$\frac{s^2+4}{(s^2+1)^2} \text{ convert, parfrac, s } \rightarrow \frac{3}{(s^2+1)^2} + \frac{1}{(s^2+1)}$$

$$\frac{s^2+4}{(s^2+1)^2} \text{ invlaplace, s } \rightarrow \frac{-3}{2} \cdot t \cdot \cos(t) + \frac{5}{2} \cdot \sin(t)$$

$$\frac{5 \cdot s^2 + 20 \cdot s}{(s-1)^2 \cdot (s^2+4)} \text{ convert, parfrac, s } \rightarrow \frac{5}{(s-1)^2} + \frac{4}{(s-1)} - 4 \cdot \frac{(s+1)}{(s^2+4)}$$

$$\frac{5 \cdot s^2 + 20 \cdot s}{(s-1)^2 \cdot (s^2+4)} \text{ invlaplace, s } \rightarrow 5 \cdot t \cdot \exp(t) + 4 \cdot \exp(t) - 4 \cdot \cos(2 \cdot t) - 2 \cdot \sin(2 \cdot t)$$

การคำนวณโดยโปรแกรม Mathematica

$$\text{In[28]:= Apart}\left[\frac{s+1}{(s-4)^2}, s\right]$$

$$\text{Out[28]= } \frac{5}{(-4+s)^2} + \frac{1}{-4+s}$$

$$\text{In[29]:= InverseLaplaceTransform}\left[\frac{s+1}{(s-4)^2}, s, x\right]$$

$$\text{Out[29]= } e^{4x} (1 + 5x)$$

$$\text{In[30]:= Apart}\left[\frac{2s+3}{s^2(s-1)}, s\right]$$

$$\text{Out[30]= } \frac{5}{-1+s} - \frac{3}{s^2} - \frac{5}{s}$$

$$\text{In[31]:= InverseLaplaceTransform}\left[\frac{2s+3}{s^2(s-1)}, s, x\right]$$

$$\text{Out[31]= } -5 + 5e^x - 3x$$

$$\text{In[32]:= Apart}\left[\frac{s^2+4}{(s^2+1)^2}, s\right]$$

$$\text{Out[32]= } \frac{3}{(1+s^2)^2} + \frac{1}{1+s^2}$$

$$\text{In[33]:= InverseLaplaceTransform}\left[\frac{s^2+4}{(s^2+1)^2}, s, x\right]$$

$$\text{Out[33]= } \frac{1}{2} (-3x \cos[x] + 5 \sin[x])$$

$$\text{In[34]:= Apart}\left[\frac{s^2 + 4 s}{(s - 1)^2 (s^2 + 1)}, s\right]$$

$$\text{Out[34]= } \frac{5}{2 (-1 + s)^2} + \frac{1}{2 (-1 + s)} + \frac{-4 - s}{2 (1 + s^2)}$$

$$\text{In[35]:= InverseLaplaceTransform}\left[\frac{s^2 + 4 s}{(s - 1)^2 (s^2 + 1)}, s, x\right]$$

$$\text{Out[35]= } \frac{1}{2} \left(e^x + 5 e^x x - \text{Cos}[x] - 4 \text{Sin}[x] \right)$$