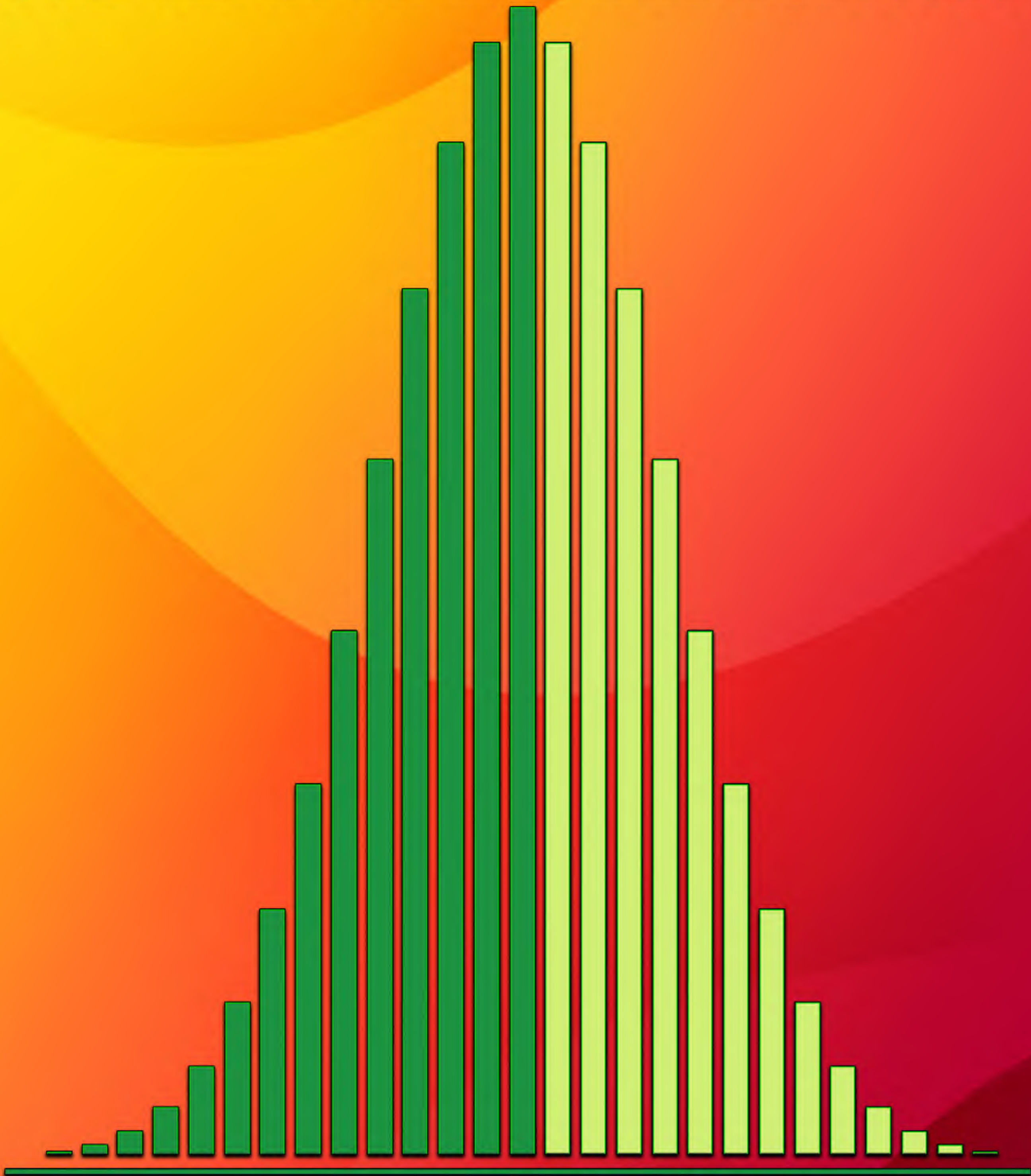
ความน่าจะเป็นและสถิติ



ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ความน่าจะเป็นและสถิติ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ชื่อหนังสือ : ความน่าจะเป็นและสถิติ
ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
พิมพ์ครั้งที่ : 1
เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : สิงหาคม พ.ศ. 2566
เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์ ISBN 978-616-604-113-2

คำนำ

หนังสือ **ความน่าจะเป็นและสถิติ** เป็นหนังสือประกอบการเรียนการสอนวิชา 2301286 ความน่าจะเป็นและสถิติ มีเนื้อหาเกี่ยวกับ ความน่าจะเป็น ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ค่าคาดคะเน การแจกแจงยูนิฟอร์ม การแจกแจงแบล์นูลลี การแจกแจงทวินาม การแจกแจงเรขาคณิต การแจกแจงทวินามลบ การแจกแจงไฮเพอร์จีออเมตริก การแจกแจงปัวส์ซอง การแจกแจงปกติ การแจกแจงปกติมาตรฐาน การแจกแจงไคสแควร์ การแจกแจงที การแจกแจงเอฟ ประมาณค่าและการหาช่วงความเชื่อมั่น $(1-\alpha)100\%$ ของค่าพารามิเตอร์ การทดสอบสมมติฐาน การทดสอบความเป็นอิสระ การสุ่มเพื่อยอมรับคุณภาพของผลิตภัณฑ์ โค้งปฏิบัติการแผนการสุ่มตัวอย่าง (OC-curve) การถดถอยเชิงเส้นและสหสัมพันธ์ การวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) จำแนกทางเดียวและสองทาง การทดสอบแบบไม่อิงพารามิเตอร์

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สิงหาคม 2566

สารบัญ

บทที่ 1
ความน่าจะเป็น
(Probability)

ในระยะเวลาไม่กี่ปีมานี้ ความเจริญเติบโตของวิชาสถิติได้เป็นที่ตระหนักในกิจกรรมต่าง ๆ แทบทุกสาขา วิชาสถิติมิได้จำกัดอยู่เพียงการรวบรวมและการนำเสนอข้อมูลในรูปแผนภูมิ และตาราง แต่จะรวมการสรุปผลจากข้อมูลที่รวบรวมได้ รวมถึงปัญหาทั้งปวงที่เกี่ยวกับการตัดสินใจในความไม่แน่นอนต่าง ๆ โดยอาศัยเรื่องราวของความน่าจะเป็นช่วยในการสร้างแบบจำลอง (model) ใช้ในการศึกษาสถานการณ์ต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับความไม่แน่นอน เช่น การทดลองใช้ยาใหม่ ๆ การควบคุมคุณภาพของสินค้าที่ผลิตจากโรงงาน การคาดหมายการเลือกตั้ง การพยากรณ์วัฏจักรธุรกิจ ฯลฯ เป็นต้น และใช้หลักการทางสถิติช่วยตรวจสอบอย่างมีเหตุผล ดังนั้นจึงอาจกล่าวได้ว่า เราสามารถนำผลของการพัฒนาวิชาสถิติจนถึงปัจจุบันมาช่วยในการดำเนินงานต่าง ๆ ที่มีความไม่แน่นอนมาเกี่ยวข้องด้วย แต่ทั้งนี้ มิได้หมายความว่า วิชาสถิติจะหยุดเพียงนี้ เทคนิคใหม่ ๆ ยังคงได้รับการค้นคว้าพัฒนาต่อไป

เรื่องของความน่าจะเป็น มีประวัติเริ่มต้นในคริสศตวรรษที่ 17 ตามหลักฐานเท่าที่ปรากฏ เชอวาลิเย เดอ เมเร (Chevalier de Me′re′ เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส) นักการพนันมีชื่อในยุคนั้น ได้ประสบปัญหาเรื่องเกมการพนัน ปัญหาที่สำคัญที่เขายกขึ้นมามี 2 ปัญหา

ปัญหาแรก คือ เดอ เมเร ได้ชนะการพนันในเกมการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 4 ครั้ง ซึ่งเขาพนันว่าจะขึ้นแต้ม 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง จึงทำให้เขาพนันในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 24 ครั้งว่าจะขึ้นแต้ม 6 ทั้งคู่อย่างน้อย 1 ครั้ง แต่คราวนี้เขาไม่ชนะ จึงปรึกษาเรื่องนี้กับ ปาสคาล (Pascal, Blaise (1623 – 1662) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส)

คำอธิบายของ ปาสคาล มีดังนี้ ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้ม 6 คือ $\frac{1}{6}$ ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะไม่ขึ้นแต้ม 6 ในการทอด 1 ครั้ง คือ $\frac{5}{6}$ ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 4 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะไม่ขึ้นแต้ม 6 คือ $(\frac{5}{6})^4$ และความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้ม 6 อย่างน้อย 1 ครั้ง คือ $1-(\frac{5}{6})^4$ ประมาณ 0.516 ซึ่งเกินครึ่ง แสดงว่าโอกาสที่ เดอ เมเร จะชนะมีมาก แต่เมื่อทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อม ๆ กัน ความน่าจะเป็นที่จะไม่ได้แต้ม 6 ทั้งคู่ คือ $\frac{35}{36}$ เมื่อทอดลูกเต๋า 2 ลูก 24 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 6 ทั้ง 2 ลูกอย่างน้อย 1 ครั้ง คือ $1-(\frac{35}{36})^{24}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 0.491 ซึ่งน้อยกว่าครึ่ง เดอ เมเร จึงมีโอกาสที่จะแพ้พนัน

ปัญหาที่สองคือ A และ B ตกลงจะเล่นเกมเกมหนึ่ง ซึ่งมีโอกาสที่จะชนะเท่า ๆ กัน คนที่ชนะครบทั้ง 5 เกม เป็นคนแรกจะได้รับรางวัล และเขาเล่นไม่จบ ก่อนเลิก A ชนะ 4 เกม B ชนะ 3 เกม จึงมีปัญหาว่า เขาจะแบ่งรางวัลกันอย่างไร บางคนกล่าวว่า ควรแบ่งเป็นอัตราส่วน $4:3$ จึงจะยุติธรรม บางคนว่าแบ่ง $(5-3):(5-4)$ จึงจะยุติธรรม ปาสคาลได้อธิบายว่า สมมติถ้าเล่นต่อไปอีก 2 เกม ผลลัพธ์อาจเป็นไปได้ดังนี้

A ชนะ	A ชนะ
A ชนะ	B ชนะ
B ชนะ	A ชนะ
B ชนะ	B ชนะ

มี 3 กรณีที่ A จะได้รับรางวัล (คือ A ชนะ 5 เกม) แต่มี 1 กรณีเท่านั้นที่ B จะได้รับรางวัล A จึงมีโอกาสชนิดเป็น 3 เท่าของ B ดังนั้นจึงควรแบ่งรางวัลออกเป็นอัตราส่วน 3 : 1

1.1 ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space)

เมื่อนักวิทยาศาสตร์ต้องการทราบข้อยุติในบางเรื่อง เขาอาจดำเนินการทดลอง เพื่อทราบผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น (outcome) แล้วบันทึกไว้ การทดลอง (experiment) หมายถึงกระบวนการใด ๆ ที่ทำซ้ำเพื่อให้ผลลัพธ์ที่สนใจ เช่น การโยนเหรียญบาท 1 อัน การทดลองนี้จะได้ผลลัพธ์ 2 อย่างคือ หัวหรือก้อย ทำการทดลองเช่นนี้หลาย ๆ ครั้ง ผลลัพธ์เหล่านี้ถ้าได้รับการบันทึกไว้ เราเรียกว่าข้อมูลดิบ (raw data)

บทนิยามที่ 1.1.1 เซตที่มีสมาชิก (element) เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองอย่างหนึ่ง เรียกว่า **ปริภูมิตัวอย่าง** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S

บทนิยามที่ 1.1.2 สมาชิกตัวหนึ่งของปริภูมิตัวอย่าง เรียกว่า **จุดตัวอย่าง** (sample point)

ตัวอย่างที่ 1.1.1 ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก เพื่อดูแต้มที่ปรากฏ ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

ดังนั้น ปริภูมิตัวอย่างจะเขียนได้ดังนี้ $S_1 = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

แต่ถ้าสนใจว่า ขึ้นแต้มคู่หรือคี่ ปริภูมิตัวอย่างคือ $S_2 = \{\text{คู่} , \text{คี่}\}$ □

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า ในการทดลองเดียวกันนั้น อาจจะมีปริภูมิตัวอย่างมากกว่าหนึ่งได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสนใจของผู้ทำการทดลอง เมื่อพิจารณาดูจะเห็นว่า S_1 ให้รายละเอียดมากกว่า S_2 กล่าวคือ ถ้าทราบสมาชิกตัวใดที่เกิดขึ้นใน S_1 จะบอกได้ว่าเป็นสมาชิกตัวใดใน S_2 แต่ถ้าทราบสมาชิกตัวใด ๆ ใน S_2 เราไม่สามารถจะบอกได้ว่าสมาชิกตัวนั้นเป็นสมาชิกตัวใดใน S_1 โดยทั่วไปเรามักจะใช้ปริภูมิตัวอย่างซึ่งให้รายละเอียดมากที่สุดเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง

ตัวอย่างที่ 1.1.2 ในการปาเป้า 2 ครั้ง ถ้าให้ H แทนการปาถูกเป้า และให้ M แทนการปาผิดเป้า ปริภูมิตัวอย่างที่ให้รายละเอียดมากที่สุดคือ $S_1 = \{HH , HM , MH , MM\}$

ถ้าเราสนใจจำนวนครั้งที่ปาถูกเป้า จะได้ปริภูมิตัวอย่าง $S_2 = \{0 , 1 , 2\}$ □

ตัวอย่างที่ 1.1.3 ในการตรวจสินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักรของโรงงานแห่งหนึ่ง ได้หยิบสินค้ามา 3 ชิ้น โดยวิธีสุ่ม (random) แล้วตรวจสอบสภาพทีละชิ้นว่าดีหรือชำรุด ให้สินค้าที่ตรวจแล้วมีสภาพดีแทนด้วย N และสินค้าที่ตรวจแล้วมีสภาพชำรุดแทนด้วย D ปริภูมิตัวอย่างที่ให้รายละเอียดมากที่สุดคือ

$S_1 = \{NNN , NND , NDN , NDD , DNN , DND , DDN , DDD\}$

ถ้าสนใจจำนวนสินค้าที่ชำรุดจากสินค้าที่หยิบมา 3 ชิ้น ปริภูมิตัวอย่างคือ $S_2 = \{0 , 1 , 2 , 3\}$ □

เหตุการณ์ (Event)

ในการทดลองเรามักจะสนใจเกี่ยวกับการเกิดขึ้นของเหตุการณ์มากกว่าสนใจในสมาชิกทั้งหมดของปริภูมิตัวอย่างเช่น เมื่อทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง เราสนใจในเหตุการณ์ A เมื่อเหตุการณ์ A คือการทอดลูกเต๋าแล้วได้แต้มเป็นจำนวนคู่ เหตุการณ์นี้จะเกิดขึ้นเมื่อผลลัพธ์เป็นสมาชิกของเซต $A = \{2 , 4 , 6\}$ ซึ่งเป็นสับเซต (subset) ของปริภูมิตัวอย่าง $S_1 = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$ ในตัวอย่างที่ 1.1.1

บทนิยามที่ 1.1.3 เหตุการณ์ (Event) คือสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง

จากนิยามจะเห็นว่า S และ ϕ ก็เป็นเหตุการณ์ด้วย

ตัวอย่างที่ 1.1.4 ในการตรวจสภาพสินค้าตามตัวอย่างที่ 1.1.3 ปริภูมิตัวอย่างคือ

$S = \{NNN , NND , NDN , DNN , NDD , DND , DDN , DDD\}$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่พบจำนวนของชำรุดมากกว่า 1 ชิ้น จะได้ $B = \{NDD , DND , DDN , DDD\}$
ซึ่งจะเห็นว่า B เป็นสับเซตของ S □

ตัวอย่างที่ 1.1.5 ในการตรวจอายุของหลอดภาพโทรทัศน์ ให้ t แทนอายุของหลอดภาพมีหน่วยเป็นปี ปริภูมิตัวอย่างคือ $S = \{ t \mid t \geq 0 \}$
ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่หลอดภาพชำรุดก่อนครบ 5 ปี
ดังนั้น $E = \{ t \mid 0 \leq t < 5 \}$ □

บทนิยามที่ 1.1.4 เหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างเพียง 1 ตัว เราเรียกว่า **เหตุการณ์เชิงเดียว** (simple event)

เหตุการณ์เชิงประกอบ (compound event) คือเซตที่สามารถเขียนได้เป็นยูเนียน (union) ของเหตุการณ์เชิงเดียว

ตัวอย่างที่ 1.1.6 ในการหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ ถ้าสนใจชุดของไพ่ ปริภูมิตัวอย่างคือ

S = {โพดำ , โพแดง , ข้าวหลามตัด , ดอกจิก}

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ได้โพแดง
B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไพ่ได้โพแดงหรือโพดำ

ดังนั้น A = {โพแดง}
B = {โพแดง} $\cup$ {โพดำ} = {โพแดง , โพดำ} □

จากตัวอย่างข้างต้น A เป็นเหตุการณ์เชิงเดียว และ B เป็นเหตุการณ์เชิงประกอบ ดังนั้นจะเห็นว่า เหตุการณ์เชิงประกอบก็เป็นสับเซตของปริภูมิตัวอย่างด้วย

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 1.1.6 ถ้าไพ่ 52 ใบ เป็นสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง เหตุการณ์ A จะเป็นเหตุการณ์เชิงประกอบ เพราะประกอบด้วยสมาชิกโพแดงแต้มต่าง ๆ ตั้งแต่ 2 จนถึง J , Q , K , A

เนื่องจากเหตุการณ์คือสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง ดังนั้นจึงใช้คำจำกัดความของเซตเพื่อหาเหตุการณ์ในลักษณะต่าง ๆ ดังนี้

1. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ ยูเนียนของเหตุการณ์ A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ A หรือสมาชิกของเหตุการณ์ B หรือสมาชิกของทั้งสองเหตุการณ์ เช่น ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 2 ครั้ง

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่จะได้แต้มเหมือนกันทั้งสองครั้ง

B เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของแต้มมากกว่า 10

$A = \{(1 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4) , (5 , 5) , (6 , 6)\}$

$B = \{(5 , 6) , (6 , 5) , (6 , 6)\}$

$A \cup B = \{(1 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4) , (5 , 5) , (6 , 6) , (5 , 6) , (6 , 5)\}$

นั่นคือ $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่จะได้แต้มเหมือนกันทั้งสองครั้ง หรือได้ผลรวมของแต้มมากกว่า 10

2. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ อินเตอร์เซคชัน (intersection) ของเหตุการณ์ A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของทั้งเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เช่น ในการสอบคัดเลือกเข้าเรียนนายร้อยตำรวจ

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องเป็นชาย

B เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องมีสัญชาติไทย

ดังนั้นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องเป็นชายและมีสัญชาติไทย คือ $A \cap B$

หรือจากตัวอย่างในข้อ 1. $A \cap B = \{(6 , 6)\}$

นั่นคือ $A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเหมือนกันและผลรวมของแต้มมากกว่า 11

3. ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S แล้ว ส่วนเติมเต็ม (complement) ของเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A' หรือ A^c หรือ $\overline{A}$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ A

เช่น ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง ปริภูมิตัวอย่างคือ $S = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่จะได้แต้มอย่างน้อย 5 $A = \{5 , 6\}$

ส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A คือเหตุการณ์ที่จะได้แต้มน้อยกว่า 5 $A' = \{1 , 2 , 3 , 4\}$

ข้อสังเกต $A \cup A' = S$ และ $A \cap A' = \phi$

4. ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ n เหตุการณ์ $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบสมาชิกของด้วยเหตุการณ์อย่างน้อยที่สุดหนึ่งเหตุการณ์ ในบรรดาเหตุการณ์ A_i, $i = 1 , 2 , \ldots , n$

เช่น หยิบลูกบอล 3 ลูก จากกล่องซึ่งมีลูกบอลสีขาว 4 ลูก สีแดง 3 ลูก

ถ้า A_1, A_2 และ A_3 เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ลูกบอลสีขาว 1 ลูก 2 ลูก และ 3 ลูก ตามลำดับ เหตุการณ์ที่จะหยิบลูกบอล 3 ลูก ได้สีขาวอย่างน้อย 1 ลูก คือ $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

5. ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ n เหตุการณ์ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของทุก ๆ เหตุการณ์ เช่นจากตัวอย่างในข้อ 2. ถ้า A_1 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องเป็นชาย

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องมีสัญชาติไทย

A_3 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องมีอายุไม่เกิน 18 ปี

A_4 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องจบการศึกษา ม. 4

เหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องเป็นชายสัญชาติไทย มีอายุไม่เกิน 18 ปี และ จบการศึกษา ม. 4 คือ

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$$

บทนิยามที่ 1.1.5 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ เรากล่าวว่า เหตุการณ์ A และ B **เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน** (mutually exclusive) ถ้า $A \cap B = \phi$

ถ้าไม่พูดเกี่ยวกับเรื่องเซต เราอาจกล่าวว่า เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ถ้าเหตุการณ์ทั้งสองไม่สามารถเกิดขึ้นในเวลาเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 1.1.7 ทอดลูกเต๋า 1 ลูก ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มคู่ และ B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มคี่ ดังนั้น

$A = \{2, 4, 6\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$A \cap B = \phi$

ดังนั้น A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ถ้าพิจารณาจากเหตุการณ์ทั้งสอง จะเห็นว่าในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง แต้มที่ขึ้นจะเป็นแต้มคู่และแต้มคี่ในเวลาเดียวกันไม่ได้ ดังนั้นเราจึงสามารถสรุปได้ว่าเหตุการณ์ทั้งสองเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน โดยไม่จำเป็นต้องหาอินเตอร์เซคชันของเหตุการณ์

บทนิยามที่ 1.1.6 ในการทดลองที่ทำซ้ำกัน n ครั้ง **ความถี่สัมพัทธ์** (relative frequency) ของเหตุการณ์ A คือ $f_A = \dfrac{n(A)}{n}$ เมื่อ n(A) คือจำนวนครั้งที่เกิดเหตุการณ์ A

คุณสมบัติที่สำคัญของความถี่สัมพัทธ์ มีดังนี้

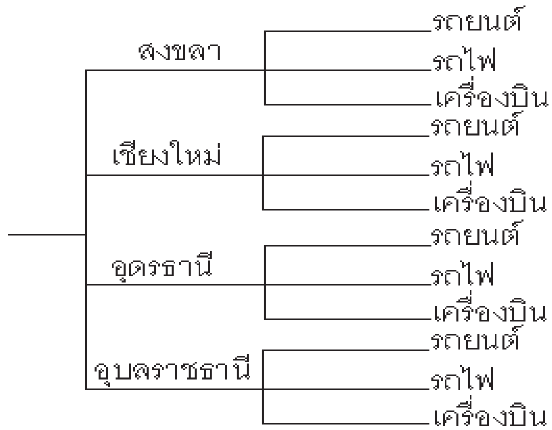
1. $0 \le f_A \le 1$
2. $f_A = 1$ ถ้าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นทุก ๆ ครั้งที่ทำการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง
3. $f_A = 0$ ถ้าเหตุการณ์ A ไม่เกิดขึ้นเลย ในการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง
4. ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน
   และ $f_{A \cup B}$ เป็นความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ $A \cup B$ จะได้ $f_{A \cup B} = f_A + f_B$
5. ถ้าทำการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง ค่าของ f_A ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ n จะลู่เข้า (converge) สู่ค่าของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เมื่อ n ลู่เข้าสู่อนันต์

1.2 การนับจำนวนจุดตัวอย่าง

ปัญหาอย่างหนึ่งของนักสถิติ คือการหาจำนวนสมาชิกที่เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ที่ต้องการหา ดังนั้น ก่อนที่จะกล่าวถึงความน่าจะเป็นต่อไปนี้ เราจะหาจำนวนจุดตัวอย่าง หรือหาจำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดในปริภูมิตัวอย่างหรือในเหตุการณ์ โดยไม่จำเป็นต้องนับจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างหรือเหตุการณ์นั้น

ตัวอย่างที่ 1.2.1 ชายคนหนึ่งต้องการเดินทางไปทัศนาจรในระหว่างวันหยุดประจำปี เขาต้องการเดินทางไปยังจังหวัดใดจังหวัดหนึ่งใน 4 จังหวัด คือ สงขลา เชียงใหม่ อุดรธานี อุบลราชธานี โดยรถยนต์ หรือรถไฟ หรือเครื่องบิน จงหาวิธีต่าง ๆ กันที่เขาจะเลือกเดินทางไปทัศนาจรครั้งนี้

วิธีทำ เพื่อความสะดวกอาจใช้แผนภาพต้นไม้ (tree diagram) ช่วยในการคิดได้ ดังนี้



รูปที่ 1.1

เมื่อดูจากแผนภาพต้นไม้ จะมีวิธีเลือกเดินทางต่าง ๆ กัน 12 วิธี

เราอาจจะคิดหาคำตอบสั้น ๆ ได้ดังนี้ มีวิธีเลือกจังหวัดที่จะไปได้ 4 วิธี

ในแต่ละวิธีที่เลือกจังหวัดจะมีวิธีเลือกการเดินทางได้ 3 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกเดินทาง = $4 \times 3 = 12$ วิธี □

โดยทั่วไปเราสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.2.1 ถ้าต้องการทำงานสองอย่างโดยงานอย่างแรกมีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรกแล้วมีวิธีเลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี

จำนวนวิธีที่เลือกทำงานทั้งสองอย่างคือ n_1n_2 วิธี

ตัวอย่างที่ 1.2.2 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน จงหาจำนวนจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่าง

วิธีทำ ในการทอดลูกเต๋าแต่ละลูก อาจได้แต้มซึ่งต่างกันคือ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

ดังนั้นลูกเต๋าลูกที่หนึ่ง มีวิธีขึ้นได้ 6 วิธี ในแต่ละวิธีที่ลูกเต๋าลูกที่หนึ่งขึ้น ลูกเต๋าลูกที่ 2 ขึ้นได้ 6 วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่ลูกเต๋า 2 ลูก จะขึ้นได้ = $6 \times 6 = 36$ วิธี

นั่นคือจำนวนจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่าง = 36 จุด □

ถ้าขยายทฤษฎีบทที่ 1.2.1 ใช้กับการทำงานมากกว่า 2 อย่างขึ้นไป จะได้ทฤษฎีทั่วไปสำหรับคำนวณหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะทำงาน k อย่างได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.2.2 ถ้างานอย่างหนึ่งมีวิธีเลือกทำได้ n_1 วิธี ในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรกมีวิธีเลือกทำงานอย่างที่สองได้ n_2 วิธี และในแต่ละวิธีที่เลือกทำงานอย่างแรกและอย่างที่สองมีวิธีเลือกทำงานอย่างที่สามได้ n_3 วิธี ฯลฯ จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกทำงาน k อย่าง เท่ากับ $n_1 \, n_2 \, \ldots \, n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1.2.3 เมื่อโยนเหรียญ 3 อัน พร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่เหรียญจะขึ้น

วิธีทำ ในการโยนเหรียญอันแรกมีวิธีขึ้นได้ 2 วิธี คือหัวหรือก้อย
ดังนั้นเหรียญอันแรกมีวิธีขึ้นได้ 2 วิธี
ในแต่ละวิธีที่เหรียญอันแรกขึ้น เหรียญอันที่สองจะขึ้นได้ 2 วิธี
ในแต่ละวิธีที่เหรียญอันแรกและเหรียญอันที่สองขึ้น เหรียญอันที่สามจะขึ้นได้ 2 วิธี
เพราะฉะนั้น จำนวนวิธีที่เหรียญ 3 อัน จะขึ้นได้ = $2 \times 2 \times 2 = 8$ วิธี □

หมายเหตุ โดยทั่วไป สรุปได้ดังนี้

1. ถ้าโยนเหรียญ n อัน พร้อมกัน 1 ครั้ง (หรือโยนเหรียญ 1 อัน n ครั้ง) จำนวนวิธีที่เหรียญจะขึ้น = 2^n
2. ทอดลูกเต๋า n ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง (หรือทอดลูกเต๋า 1 ลูก n ครั้ง) จำนวนวิธีที่ลูกเต๋าจะขึ้น = 6^n

ตัวอย่างที่ 1.2.4 ภัตตาคารแห่งหนึ่งจัดอาหารไว้บริการลูกค้า โดยจัดเครื่องดื่มไว้ 6 ชนิด อาหารคาว 14 ชนิด และของหวาน 7 ชนิด จงหาจำนวนวิธีที่ลูกค้าจะสั่งอาหารและเครื่องดื่มซึ่งประกอบด้วยเครื่องดื่ม 1 ชนิด อาหารคาว 1 ชนิด และของหวานอีก 1 ชนิด

วิธีทำ มีวิธีเลือกเครื่องดื่มได้ 6 วิธี
ในแต่ละวิธีเลือกเครื่องดื่มจะเลือกอาหารคาวได้ 14 วิธี
ในแต่ละวิธีที่เลือกเครื่องดื่มและอาหารคาวแล้ว เลือกของหวานได้ 7 วิธี
ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกสั่งอาหารและเครื่องดื่ม = $6 \times 14 \times 7 = 588$ วิธี □

ตัวอย่างที่ 1.2.5 ก. มีจำนวนซึ่งประกอบด้วยเลข 3 หลักต่าง ๆ กันกี่จำนวน ซึ่งจัดจากตัวเลข 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 โดยให้เลขแต่ละตัวใช้ได้ครั้งเดียวเท่านั้น

ข. มีจำนวนกี่จำนวนตามที่กล่าวในข้อ ก. ที่เป็นจำนวนคี่

วิธีทำ ก. เลขหลักร้อยจัดได้ 5 วิธี คือตัวหนึ่งตัวใดในเซต S = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5}
ในแต่ละวิธีที่จัดเลขหลักร้อย เลขหลักสิบจัดได้ 5 วิธี
ในแต่ละวิธีที่จัดเลขหลักร้อย และ เลขหลักสิบ แล้วเลือกเลขหลักหน่วยได้ 4 วิธี
ดังนั้นมีเลข 3 หลักต่าง ๆ กันอยู่ = $5 \times 5 \times 4 = 100$ จำนวน

ข. เลขหลักร้อยจัดได้ 5 วิธี คือ ตัวหนึ่งตัวใดในเซต S = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5}
ถ้าเลขหลักร้อยเป็นเลขคู่ คือ 2 หรือ 4 เลขหลักหน่วยจัดได้ 3 วิธี และเลขหลักสิบจัดได้ 4 วิธี
ดังนั้นถ้าเลขหลักร้อยเป็น 2 หรือ 4 จะจัดได้ = $2 \times 3 \times 4 = 24$ จำนวน
ถ้าเลขหลักร้อยเป็น 1 หรือ 3 หรือ 5 จัดเลขหลักหน่วยได้ 2 วิธี เลขหลักสิบจัดได้ 4 วิธี
ดังนั้นถ้าเลขหลักร้อยเป็น 1 หรือ 3 หรือ 5 จะจัดได้ = $3 \times 2 \times 4 = 24$ จำนวน
เพราะฉะนั้นมีเลขคี่ 3 หลักอยู่ทั้งหมด = $24 + 24 = 48$ จำนวน □

วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

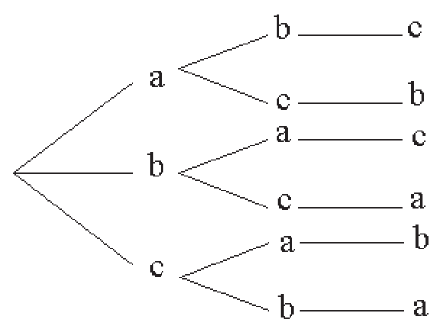
บางครั้งเราต้องการทราบจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมด ในการเรียงสับเปลี่ยนในปริภูมิตัวอย่าง หรือในเหตุการณ์ E เช่นต้องการทราบจำนวนวิธีที่จะจัดคน 6 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลมหรือหาจำนวนวิธีที่จะหยิบฉลากรางวัลที่ 1 และ 2 จากฉลาก 20 ใบ วิธีจัดแบบนี้เรียกว่า **"วิธีเรียงสับเปลี่ยน"**

บทนิยามที่ 1.2.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนคือ การเรียงลำดับของบางสิ่ง หรือทุกสิ่งในเซตโดยคำนึงถึงลำดับที่ เช่น มีอักษร 3 ตัว a , b , c จัดคราวละ 3 ตัว จะได้ 6 วิธีต่าง ๆ กัน คือ

a b c	b a c	c a b
a c b	b c a	c b a

ซึ่งการหาคำตอบอาจทำได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ใช้แผนภาพต้นไม้



รูปที่ 1.2

วิธีที่ 2 ใช้ทฤษฎีบทที่ 1.2.2 ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ 3 วิธี
ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ 2 วิธี
ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตำแหน่งที่ 3 จัดได้ 1 วิธี
ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด คือ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี □

โดยทั่วไป ถ้ามีของ n สิ่งต่าง ๆ กัน จัดคราวละ n สิ่ง จำนวนวิธีที่จะจัดได้ทั้งหมด คือ $n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1)$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ n! ซึ่งอ่านว่า n แฟคทอเรียล (n−factorial)

บทนิยามที่ 1.2.2 n แฟคทอเรียล หมายถึงผลคูณของเลขจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึง n
ดังนั้น $n! = n(n-1)(n-2)...(3)(2)(1)$

ทฤษฎีบทที่ 1.2.3 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยนำมาจัดทีละ n สิ่ง มีค่าเท่ากับ n! วิธี

พิสูจน์ ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ n วิธี
ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ (n − 1) วิธี
ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 , 2 ตำแหน่งที่ 3 จัดได้ (n − 2) วิธี
ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 , 2 , 3 ตำแหน่งที่ 4 จัดได้ (n − 3) วิธี
:
ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 , 2 , ... , (n − 1) ตำแหน่งที่ n จัดได้ 1 วิธี

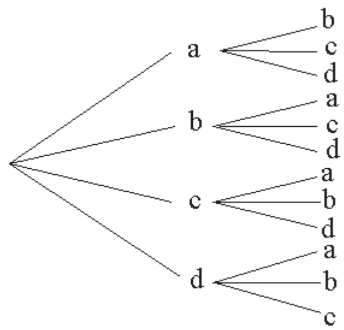
ดังนั้นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งต่าง ๆ กัน จัดทีละ n สิ่ง = $n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1) = n!$ วิธี

ในกรณีที่ต้องการเรียงสับเปลี่ยนของเพียงบางสิ่งจากของทั้งหมด เช่น มีอักษร 4 ตัว คือ a , b , c , d นำมาเรียงสับเปลี่ยนคราวละ 2 ตัว จะได้ 12 วิธี คือ

ab	ac	ad
ba	bc	bd
ca	cb	cd
da	db	dc

ซึ่งการหาคำตอบอาจทำได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 โดยใช้แผนภาพต้นไม้



รูปที่ 1.3

วิธีที่ 2 โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 1.2.1 ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ 4 วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ 3 วิธี

เพราะฉะนั้น วิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัวต่าง ๆ กัน จัดคราวละ 2 ตัว = $4 \times 3 = 12$ วิธี □

ทฤษฎีบทที่ 1.2.4 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดโดยเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง เมื่อ $r < n$ เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

พิสูจน์ ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ n วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ $(n-1)$ วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 , 2 ตำแหน่งที่ 3 จัดได้ $(n-2)$ วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 , 2 , 3 ตำแหน่งที่ 4 จัดได้ $(n-3)$ วิธี

:

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 , 2 , ... , $(r-1)$ ตำแหน่งที่ r จัดได้ $(n-(r-1))$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งต่าง ๆ กัน นำมาจัดทีละ r สิ่ง

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-(r-1))$$

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ข้อตกลง ใช้สัญลักษณ์ ${}^{n}P_r$ หรือ nPr หรือ $(n)_r$ หรือ $P_{(n,r)}$ แทนจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งต่าง ๆ กัน จัดคราวละ r สิ่ง

$$ {}^{n}P_r = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

$$ {}^{n}P_n = n(n-1)(n-2)\ \dots\ (3)(2)(1) = n! $$

จาก $\quad {}^{n}P_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ $\qquad$ ดังนั้น $\quad {}^{n}P_n = \dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!}$

แต่ $\quad {}^{n}P_n = n!$ $\qquad$ ดังนั้น $\quad n! = \dfrac{n!}{0!}$ $\qquad$ ซึ่งจะเป็นได้ก็ต่อเมื่อ $0! = 1$

ตัวอย่างที่ 1.2.6 จงหาจำนวนวิธีที่จะจับฉลากรางวัลที่ 1 และรางวัลที่ 2 จากฉลาก 20 ใบ

วิธีทำ จำนวนวิธีจับฉลาก 2 ใบ จาก 20 ใบ เพื่อให้ได้รางวัลที่ 1 และรางวัลที่ 2 คือ

$$ {}^{20}P_2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{(20)(19)(18!)}{18!} = 380 \text{ วิธี} $$ □

ตัวอย่างที่ 1.2.7 ในการสัมมนาครูสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งจัดโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย จัดให้มี 5 วัน จันทร์ถึงศุกร์ ของสัปดาห์แรกของเดือนเมษายน สมาคมเชิญผู้ทรงคุณวุฒิ 3 คน มาบรรยายโดยให้บรรยายคนละวัน ถ้าผู้บรรยายทั้งสามคนว่างทั้ง 5 วันนั้น จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดวันสำหรับผู้บรรยายทั้งสามคน

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จะจัดวันให้ผู้บรรยายทั้งสามคน ${}^{5}P_3 = \dfrac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี □

ตัวอย่างที่ 1.2.8 ก. จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดให้นักเรียน 5 คน เข้าแถวเพื่อขึ้นรถโรงเรียน

ข. จากข้อ ก. ถ้ามีนักเรียนสองคนไม่ยอมยืนชิดกัน จงหาว่าจะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ ก. จำนวนวิธีที่นักเรียน 5 คน จะเข้าแถว = 5! = 120 วิธี

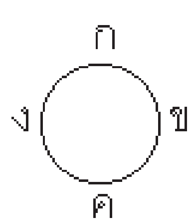
ข. ถ้าจัดให้นักเรียน 2 คนนั้นยืนชิดกัน มีวิธีเข้าแถวได้ $2 \times 4!$ วิธี

แต่วิธีที่นักเรียนทั้ง 5 คน จะเข้าแถว = 5! วิธี

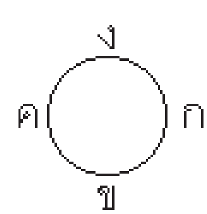
เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่นักเรียน 5 คน จะเข้าแถว โดยที่นักเรียน 2 คนนั้นไม่ยอมยืนชิดกัน

$= 5! - 2(4!) = 4!(5-2) = 72$ วิธี □

วิธีเรียงสับเปลี่ยนที่กล่าวมาแล้ว เป็นการเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง ถ้าต้องการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะต่างจากการจัดเป็นแนวตรง เช่นจัดให้ 4 คนนั่งเรียงแถวจะจัดได้ทั้งหมด 4! = 24 วิธี แต่ถ้าจัดเป็นวงกลมเช่นนั่งรอบโต๊ะกลมซึ่งมี 4 ที่นั่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะลดลงทั้งนี้เพราะการจัดเป็นวงกลมนั้น ถ้าให้แต่ละคนเลื่อนตำแหน่งที่นั่งไป 1 ที่ ก็ยังคงถือว่าเป็นวิธีเดิมอยู่ มิใช่วิธีใหม่ ดังรูปที่ 1.4 และรูปที่ 1.5 ซึ่งในเรื่องของการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมถือว่าไม่แตกต่างกัน

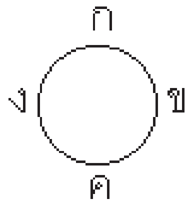


รูปที่ 1.4

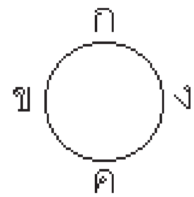


รูปที่ 1.5

การที่จะถือว่าเป็นวิธีแตกต่างกัน จะต้องเป็นดังรูปที่ 1.6 และรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.6



รูปที่ 1.7

กล่าวคือจากรูปที่ 1.7 ถ้าดูในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ข มิได้อยู่ถัดจาก ก หรือถ้าดูในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ง มิได้อยู่ถัดจาก ก เหมือนที่เป็นไปในรูปที่ 1.6

ในการคิดวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม มีหลักอยู่ว่าจะต้องให้สิ่งหนึ่งสิ่งใดอยู่กับที่ แล้วเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหลือ เช่น ให้ ก นั่งอยู่ในตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วจัดเรียงสับเปลี่ยนคนที่เหลือคือ ข , ค และ ง จะได้วิธีต่าง ๆ กัน 3! หรือ 6 วิธี

ดังนั้นในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งเป็นวงกลม เมื่อให้ของสิ่งหนึ่งอยู่กับที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งแล้ว ของที่เหลือ $n - 1$ สิ่ง จะจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ $(n - 1)!$ วิธี

ทฤษฎีบทที่ 1.2.5 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม ของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันมีค่าเท่ากับ $(n - 1)!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1.2.9 ก. จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดหญิง 4 คน และชาย 4 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลม
ข. จากข้อ ก. มีกี่วิธีที่ชายและหญิงจะนั่งสลับที่กัน

วิธีทำ ก. จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนคน 8 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลม = $(8 - 1)! = 7! = 5040$ วิธี

ข. ถ้าให้ชายคนหนึ่งนั่งคงที่ จะจัดให้คนที่เหลือนั่งได้ = 7! วิธี แต่ต้องการให้ชายและหญิงนั่งสลับที่กัน ดังนั้นจึงมีที่นั่งให้ชายได้ 3 ที่ และหญิงได้ 4 ที่

จัดให้ชาย 3 คนที่เหลือ นั่งได้ = 3! วิธี และ จัดให้หญิง 4 คนสลับที่นั่งได้ = 4! วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนชาย 4 คน และหญิง 4 คน นั่งสลับที่เป็นวงกลม = $3! \times 4! = 144$ วิธี □

วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งไม่ต่างกันทั้งหมด

เมื่อพิจารณาการจัดอักษรเรียงสับเปลี่ยนทีละ 3 ตัว คือ a , b , c จัดทีละ 3 ตัว จะได้ 6 วิธี ดังนี้

a b c	b c a	c a b
a c b	b a c	c b a

ถ้า b และ c เหมือนกัน สมมติเป็น x ดังนั้น 6 วิธีที่จัดได้ครั้งแรกจะกลายเป็น

a x x	x x a	x a x
a x x	x a x	x x a

มีเพียง 3 วิธีที่แตกต่างกัน ซึ่งคำนวณหาคำตอบได้ดังนี้

ให้ P เป็นจำนวนวิธีที่จัดได้
ถ้า b และ c ไม่เหมือนกัน ในแต่ละวิธีที่จัด (ซึ่งมี P วิธี) สามารถสลับที่ b และ c ได้อีก 2! วิธี
ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสำหรับกรณีดังกล่าวคือ $P \times 2!$ วิธี
แต่จัดของ 3 สิ่งซึ่งแตกต่างกันได้ 3! วิธี ดังนั้น $2! \times P = 3!$

$$P = \frac{3!}{2!}$$

ในกรณีที่อักษร 4 ตัวต่าง ๆ กัน จะจัดได้ 4! = 24 วิธี
ถ้าให้ a และ b คือ x และ c และ d คือ y จะเหลือวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกันเพียง 6 วิธี ดังนี้

xxyy , xyxy , yxxy , yyxx , xyyx และ yxyx

ซึ่งคำนวณหาคำตอบได้ดังนี้ ให้ P เป็นจำนวนวิธีที่จัดได้
ถ้า a และ b ไม่เหมือนกัน แต่ละวิธีที่จัดได้ (ซึ่งมี P วิธี) สามารถสลับที่ได้ 2! วิธี
และถ้า c และ b ไม่เหมือนกัน ในแต่ละวิธีที่จัดได้สามารถสลับที่ได้อีก 2! วิธี
ดังนั้น ถ้า a , b , c , d ไม่เหมือนกันทั้ง 4 ตัว จะจัดได้ $P \times 2! \times 2!$ วิธี
แต่การจัดของ 4 สิ่งต่าง ๆ กัน สามารถจัดได้ 4! วิธี ดังนั้น $P \times 2! \times 2! = 4!$

$$P = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$$

ทฤษฎีบทที่ 1.2.6 ในการเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งมี n_1 สิ่งที่เหมือนกัน n_2 สิ่งที่เหมือนกัน ... n_k สิ่งที่เหมือนกัน จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 1.2.10 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเหลือง 4 หลอด และสีน้ำเงิน 2 หลอด เพื่อประดับรั้ว ถ้าสายไฟมีขั้วสำหรับใส่หลอดอยู่ 9 อัน

วิธีทำ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน = $\frac{9!}{3!\,4!\,2!}$ = 1260 วิธี □

การจัดหมู่ (Combination)

บทนิยามที่ 1.2.3 การจัดหมู่ของเซตของสิ่งของ คือการหาสับเซตใด ๆ ของเซต โดยไม่คำนึงถึงลำดับที่ในสับเซตนั้น

จำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่ง จัดทีละ r สิ่ง คือจำนวนสับเซตที่ได้จากเซตของของ n สิ่ง แต่ละสับเซตประกอบด้วยของ r สิ่งต่าง ๆ กัน เช่น มีเซต {a , b , c}
สับเซตที่มีสมาชิก 2 ตัว คือ {a , b} , {a , c} , {b , c}
ดังนั้นถ้ามีอักษร a , b , c เลือกมาทีละ 2 ตัว จะได้ 3 วิธี ดังนี้

a b a c b c

แต่ถ้านำมาเรียงสับเปลี่ยน แต่ละวิธีที่จัดหมู่หรือเลือกมา สามารถนำมาสลับที่ได้อีก 2! วิธี ดังนั้นจะจัดได้ 6 วิธี ดังนี้

a b a c b c

b a c a c b

ในการหาสูตรการเลือกของ r สิ่ง จาก n สิ่ง ทำได้ดังนี้ ให้ $\binom{n}{r}$ หรือ ${}^{n}C_{r}$ เป็นจำนวนวิธีเลือกของ r สิ่งจาก n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกันในแต่ละวิธีที่เลือกมา ถ้านำมาเรียงสับเปลี่ยนจะได้ r! วิธี

ดังนั้น $\binom{n}{r}r!$ = จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกัน จัดทีละ r สิ่ง = ${}^{n}P_{r}$

เพราะฉะนั้น
$$\binom{n}{r} = \frac{{}^{n}P_{r}}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ทฤษฎีบทที่ 1.2.7 จำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่งต่าง ๆ กัน จัดทีละ r สิ่ง คือ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี

ทฤษฎีบทประกอบที่ 1.2.8 จำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่งต่าง ๆ กัน จัดทีละ n − r สิ่ง จะเท่ากับจำนวนวิธีจัดหมู่ของทีละ r สิ่ง คือ $\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$ วิธี

ตัวอย่างเช่น $\binom{9}{5}=\binom{9}{4}$ และ $\binom{50}{5}=\binom{50}{45}$ เป็นต้น

ตัวอย่างที่ 1.2.11 มีกี่วิธีในการเลือกกรรมการ 3 คน จากสามีภรรยา 4 คู่

ก. ถ้าทุก ๆ คนมีโอกาสได้รับเลือกเท่ากัน

ข. ถ้ากรรมการต้องประกอบด้วยหญิง 2 คน ชาย 1 คน

ค. ถ้าเลือกทั้งสามีภรรยาจากคู่เดียวกันเป็นกรรมการทั้ง 2 คนไม่ได้

วิธีทำ ก. จำนวนวิธีเลือกกรรมการ = $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$ วิธี

ข. จำนวนวิธีที่จะเลือกผู้หญิง 2 คน = $\binom{4}{2}$ วิธี

แต่ละวิธีที่เลือกผู้หญิง เลือกผู้ชาย 1 คน ได้ = $\binom{4}{1}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกผู้หญิง 2 คน ผู้ชาย 1 คน เป็นกรรมการ = $\binom{4}{2}\times\binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24$ วิธี

ค. เนื่องจากทั้งสามีและภรรยาจากคู่เดียวกันเป็นกรรมการไม่ได้ ดังนั้นจึงเลือก 3 คู่ จาก 4 คู่ หลังจากเลือกคู่แล้ว คู่แรกที่เลือกมาจะเลือกสามีหรือภรรยาได้อีก 2 วิธี คือเลือกสามีหรือภรรยา คู่ที่สองเลือกสามีหรือภรรยาได้อีก 2 วิธี และเลือกสามีหรือภรรยาจากคู่ที่สามได้อีก 2 วิธี ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกกรรมการเมื่อทั้งสามีและภรรยาจากคู่เดียวกันเป็นกรรมการทั้งสองคนไม่ได้คือ $\binom{4}{3}\times2\times2\times2 = 32$ วิธี □

การแบ่งกลุ่ม (Partitioning)

ถ้าต้องการหาจำนวนของการแบ่งเซตที่มีของ n สิ่ง ออกเป็น r สับเซต ซึ่งเรียกว่ากลุ่ม เราไม่ถือว่า ลำดับในแต่ละกลุ่มมีความสำคัญ เช่น ต้องการแบ่งเซต {a , b , c} เป็น 2 กลุ่ม ให้กลุ่มแรกมีจำนวนสมาชิกเป็น 2 กลุ่มที่สองมีจำนวนสมาชิกเป็น 1 จะได้วิธีแบ่งต่าง ๆ กันคือ

{a , b} , {c}

{a , c} , {b}

{b , c} , {a}

ซึ่งการหาคำตอบหาได้ดังนี้ ให้จำนวนวิธีที่แบ่ง แทนด้วยสัญลักษณ์ $\binom{3}{2,1}$

การหาจำนวนวิธีแบ่งเหมือนกับเลือกของมา 2 สิ่ง จาก 3 สิ่ง

ดังนั้นกลุ่มที่เหลือจะมี 1 สิ่ง จำนวนวิธีแบ่ง = $\frac{3!}{2!1!}$ = 3 วิธี เพราะฉะนั้น $\binom{3}{2,1} = \frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี

โดยทั่วไป ถ้าต้องการแบ่งของ n สิ่ง เป็น 2 กลุ่ม กลุ่มแรกมี n_1 สิ่ง กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง

จำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม = $\binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1!n_2!}$ วิธี

หมายเหตุ ถ้า $n_1 = n_2$ เช่นต้องการแบ่ง a b c d ออกเป็น 2 กลุ่ม ๆ ละเท่า ๆ กัน แบ่งได้ดังนี้

วิธีที่		
1	a b	c d
2	a c	b d
3	a d	b c
4	b c	a d
5	b d	a c
6	c d	a b

จะเห็นได้ว่าการแบ่งของโดยวิธีที่ 1 เหมือนกับวิธีที่ 6 คือ ได้ผลเหมือนกัน กลุ่มหนึ่งมี a b อีกกลุ่มหนึ่งมี c d ดังนั้น วิธีที่ 1 และวิธีที่ 6 จึงนับเป็นวิธีเดียวกัน และจะเห็นอีกว่า วิธีที่ 2 และวิธีที่ 5 เป็นวิธีเดียวกัน วิธีที่ 3 และวิธีที่ 4 เป็นวิธีเดียวกัน จึงสรุปว่ามีวิธีแบ่งที่แตกต่างกัน 3 วิธีเท่านั้น จำนวนวิธีที่ซ้ำกันดังกล่าวเกิดจาก 2 กลุ่มที่มีจำนวนสิ่งของเท่ากัน สลับที่กันได้ 2! วิธี แต่การสลับที่นี้ไม่ทำให้เกิดวิธีใหม่ ดังนั้น จำนวนวิธีแบ่งของ = $\frac{6}{2!} = \frac{4!}{2!2!2!}$ วิธี

ดังนั้น ถ้ามีของ n สิ่ง และต้องการแบ่งเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ n_1 สิ่งเท่ากัน จำนวนวิธีแบ่ง = $\frac{n!}{n_1!n_2!2!}$ วิธี

ถ้าต้องการแบ่งของ n สิ่ง เป็น 3 กลุ่ม กลุ่มแรกมี n_1 สิ่ง กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง กลุ่มที่สามมี n_3 สิ่ง ทำได้ดังนี้

ขั้นแรก แบ่งของ n สิ่ง เป็น 2 กลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งมีของ n_1 สิ่ง กลุ่มที่สองมี $n_2 + n_3$ สิ่ง

จำนวนวิธีแบ่ง = $\frac{n!}{n_1!(n_2+n_3)!}$ วิธี

ขั้นต่อไปแบ่งของ ($n_2 + n_3$) สิ่ง เป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ n_2 สิ่ง และ n_3 สิ่ง จำนวนวิธีแบ่ง = $\frac{(n_2+n_3)!}{n_2!n_3!}$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีแบ่งของ n สิ่ง เป็น 3 กลุ่ม กลุ่มแรกมี n_1 สิ่ง กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง กลุ่มที่สามมี n_3 สิ่งเท่ากับ

$$= \frac{n!}{n_1!(n_2+n_3)!} \cdot \frac{(n_2+n_3)!}{n_2!n_3!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!} \text{ วิธี}$$

โดยทั่วไป จะได้เป็นทฤษฎีดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.2.9 จำนวนวิธีแบ่งของ n สิ่ง เป็น r กลุ่ม กลุ่มแรกมี n_1 สิ่ง กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง ... กลุ่มที่ r มี n_r สิ่ง เท่ากับ $\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_r!}$ วิธี

เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n$ และ $n_i \neq n_j$ ทุกค่าของ $i \neq j$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 1.2.10 จำนวนวิธีแบ่งของ n สิ่ง ที่แตกต่างกันเป็น k กลุ่ม กลุ่มละ n_1 สิ่ง เป็นจำนวน k_1 กลุ่ม กลุ่มละ n_2 สิ่ง เป็นจำนวน k_2 กลุ่ม กลุ่มละ n_3 สิ่ง 1 กลุ่ม กลุ่มละ n_4 สิ่ง 1 กลุ่ม

เท่ากับ $\dfrac{n!}{(n_1!)^{k_1}(n_2!)^{k_2}n_3!\,n_4!\,k_1!\,k_2!}$ วิธี

เมื่อ $n = k_1 n_1 + k_2 n_2 + n_3 + n_4$ และ $k = k_1 + k_2 + 1 + 1$

ตัวอย่างที่ 1.2.12 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดให้เด็กนักเรียน 10 คน นั่งรถยนต์ 3 คัน ถ้ารถยนต์แต่ละคันมีที่ว่างสำหรับเด็ก 5 คน 3 คน และ 2 คน ตามลำดับ

วิธีทำ จำนวนวิธีที่แบ่งเด็ก 10 คน เป็น 3 กลุ่ม ให้ขึ้นรถที่มีที่ว่างสำหรับเด็ก 5 คน 3 คน และ 2 คน

$= \dfrac{10!}{5!3!2!} = 2520$ วิธี □

ตัวอย่างที่ 1.2.13 ก. จงหาจำนวนวิธีที่จะแบ่งดินสอ 12 แท่งต่าง ๆ กันเป็น 4 มัด มัดละเท่า ๆ กัน

ข. จงหาจำนวนวิธีที่จะแจกดินสอ 12 แท่งต่าง ๆ กันให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน

วิธีทำ ก. จำนวนวิธีแบ่ง $= \dfrac{12!}{3!3!3!3!4!} = 15{,}400$ วิธี

ข. ใน 1 วิธี ที่แบ่งสามารถแจกให้เด็ก 4 คน ได้ 4! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะแจกดินสอ 12 แท่งต่าง ๆ กัน ให้เด็ก 4 คน ๆ ละเท่า ๆ กัน

$= \left(\dfrac{12!}{3!3!3!3!4!}\right)(4!) = 369{,}600$ วิธี □

ตัวอย่างที่ 1.2.14 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดผู้เข้าสัมมนาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นชาย 7 คน เข้าพักในโรงแรมแห่งหนึ่งซึ่งมีห้องว่าง 3 ห้อง เป็นห้องคู่ 2 ห้อง และห้อง 3 คน อีก 1 ห้อง

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จะแบ่ง 7 คน เป็น 3 กลุ่ม $= \dfrac{7!}{3!2!2!2!}$ วิธี ในแต่ละวิธีแบ่งกลุ่มจัดให้ 3 คนพักห้องสำหรับ 3 คนได้ 1 วิธีและจัดให้ 2 กลุ่ม ๆ ละ 2 คนเข้าพัก 2 ห้องได้ 2! วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะจัดให้ 7 คน เข้าพัก 3 ห้อง $= \dfrac{7!}{3!2!2!2!} \times 2! = 210$ วิธี □

สูตรทั่วไปของการเรียงสับเปลี่ยน หรือการจัดหมู่ของของ n สิ่ง จัดคราวละ r สิ่ง ที่กล่าวถึงข้างต้นนั้น ของทั้งหมดจะต้องต่างกัน ในกรณีที่ของ n สิ่งไม่แตกต่างกันทั้งหมด อาจทำได้โดยวิธีเดียวกับตัวอย่างที่ 1.2.15

ตัวอย่างที่ 1.2.15 จงหาจำนวนวิธี ก. เลือกอักษร 4 ตัวจากอักษรของคำว่า “proportion”

ข. เรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัวจากอักษรของคำว่า “proportion”

วิธีทำ คำ “proportion” มีอักษรทั้งหมด 10 ตัว ซึ่งแบ่งเป็นพวก ๆ ดังนี้ o , o , o : p , p : r , r : t : i : n

ก. ในการเลือกอักษรมา 4 ตัว จำแนกได้เป็น 4 กรณี ดังนี้

(1) อักษร 3 ตัวเหมือนกัน และอีก 1 ตัว ต่างจาก 3 ตัวที่เหมือนกันนั้น

(2) อักษร 2 ตัวเหมือนกัน และอีก 2 ตัวก็เหมือนกัน

(3) อักษร 2 ตัวเหมือนกัน แต่อีก 2 ตัวต่างกัน

(4) อักษรทั้ง 4 ตัวต่างกัน

(1) มีวิธีเลือกอักษร 3 ตัวเหมือนกัน 1 วิธี คือ o , o , o
มีวิธีเลือกอักษร 1 ตัว ซึ่งต่างจาก o 5 วิธี คือ p , r , t , i , n
ดังนั้น จำนวนวิธีเลือกอักษร 4 ตัว ซึ่งมี 3 ตัวเหมือนกัน และอีก 1 ตัวต่างจาก 3 ตัวแรก
$= 1 \times 5 = 5$ วิธี

(2) มีวิธีเลือกอักษร 2 ตัวเหมือนกัน 2 คู่ = $\binom{3}{2} = 3$ วิธี (คือเลือกจาก o o , p p , r r)

(3) มีวิธีเลือกอักษร 2 ตัวเหมือนกัน = $\binom{3}{2}$ วิธี

ในแต่ละวิธีที่เลือกอักษร 2 ตัวเหมือนกัน เลือกอักษร 2 ตัวต่างกันจากที่เหลือได้ = $\binom{5}{2}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเลือก = $\binom{3}{2}\binom{5}{2} = 30$ วิธี

(4) เลือกอักษรต่าง ๆ กัน 4 ตัว จาก o , p , r , i , t , n = $\binom{6}{4} = 15$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดที่เลือกอักษรจาก 4 กรณีทำได้ $= 5 + 3 + 30 + 15 = 53$ วิธี

ข. ถ้าต้องการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัวที่เลือกมา ต้องหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษรแต่ละพวกที่เลือกมาโดยแบ่งเป็น 4 กรณี ดังนี้

(1) แต่ละวิธีที่เลือกอักษร 3 ตัวเหมือนกันและตัวอื่นอีก 1 ตัว เรียงสับเปลี่ยนได้ = $\frac{4!}{3!} = 4$ วิธี
ดังนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัวจาก 10 ตัวโดยมีอักษร 3 ตัวเหมือนกันและตัวอื่นอีก 1 ตัว
$= 5 \times \frac{4!}{3!} = 20$ วิธี

(2) แต่ละวิธีที่เลือกอักษร 4 ตัว โดยให้อักษรเหมือนกัน 2 คู่ เรียงสับเปลี่ยนได้ = $\frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน = $\binom{3}{2} \times \frac{4!}{2!2!} = 18$ วิธี

(3) แต่ละวิธีที่เลือกอักษร 4 ตัว โดยให้อักษร 2 ตัวเหมือนกัน 2 ตัวต่างกันเรียงสับเปลี่ยนได้ = $\frac{4!}{2!} = 6$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน = $30 \times \frac{4!}{2!} = 360$ วิธี

(4) แต่ละวิธีที่เลือกอักษร 4 ตัวต่าง ๆ กัน เรียงสับเปลี่ยนได้ = 4! วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน $= 15 \times 4! = 360$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัวทั้งหมด $= 20 + 18 + 360 + 360 = 758$ วิธี □

สูตรของสเตอร์ลิง (Stirling's Formula)

ในการคำนวณหาค่า n! ถ้า n มีค่ามาก อาจประมาณหาค่า n! โดยใช้สูตร $n! \approx (2\pi)^{\frac{1}{2}} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$
เครื่องหมาย ≈ ใช้เพื่อแสดงว่า อัตราส่วนของทั้งสองข้างมีค่าใกล้ 1 เมื่อ n ลู่เข้าสู่อนันต์
สูตรนี้เรียกว่า **"สูตรของสเตอร์ลิง"** เช่น 10! = 3,628,800 ค่าประมาณโดยใช้สูตรของสเตอร์ลิง คือ 3,598,600 ซึ่งมีความคลาดเคลื่อน 0.8 เปอร์เซ็นต์ สำหรับค่า 100! ความเคลื่อนคลาดเท่ากับ 0.08 เปอร์เซ็นต์

1.3 ความน่าจะเป็น (Probability)

เราคงได้ยินคำกล่าวว่า "วันนี้ฝนอาจจะตก" "เขาอาจจะชนะการแข่งเทนนิส" "ส่วนมากนิสิตที่จบออกไปมักจะรับราชการ" "ฉันมีโอกาส 50 – 50 ที่จะได้หัวเมื่อโยนเหรียญ" "วันนี้ฉันไม่แน่ใจว่าจะชนะการแข่งขันโบว์ลิ่ง" ตัวอย่างทั้งหมดนี้เป็นการกล่าวด้วยความไม่มั่นใจ ทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ของความน่าจะเป็น (mathematical theory of probability) สำหรับปริภูมิตัวอย่างที่นับได้ (finite sample space) ก่อให้เกิดเซตของจำนวนเลขจาก 0 ถึง 1 ซึ่งจำนวนเหล่านี้สามารถนำไปใช้ประเมินผลความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น ซึ่งเป็นผลสืบเนื่องมาจากการทดลองทางสถิติ

ในปริภูมิตัวอย่างเรากำหนดค่าของ "น้ำหนัก" (weight) ให้แก่ทุก ๆ จุดตัวอย่าง ซึ่งผลบวกของน้ำหนักเหล่านี้มีค่าเท่ากับ 1 ถ้าเรามีเหตุผลที่จะเชื่อได้ว่า จุดตัวอย่างอันหนึ่งอันใดมีโอกาสเกิดขึ้นอย่างแน่นอนในการทดลอง ค่าน้ำหนักสำหรับจุดตัวอย่างนั้นควรมีค่าเท่ากับ 1 ในกรณีตรงข้าม ค่าน้ำหนักที่มีค่าใกล้ 0 จะถูกกำหนดให้สำหรับจุดตัวอย่างที่เกิดขึ้นได้ยาก หรือเกิดขึ้นน้อยมาก ในการทดลองทั่ว ๆ ไป เช่น การโยนเหรียญหรือทอดลูกเต๋า จุดตัวอย่างทั้งหมดมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน จะได้รับการกำหนดค่าน้ำหนักให้มีค่าเท่า ๆ กัน สำหรับกรณีที่จุดตัวอย่างอยู่นอกปริภูมิตัวอย่าง เช่น เหตุการณ์เชิงเดียวซึ่งไม่สามารถเกิดขึ้นได้ เรากำหนดค่าน้ำหนักให้มีค่าเป็น 0

ในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ สมมติว่าเป็นเหตุการณ์ A เราบวกค่าน้ำหนักทั้งหมดของจุดตัวอย่างในเหตุการณ์ A นั้น ผลบวกนี้เรียกว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ P(A) ดังนั้นความน่าจะเป็นของเซตว่างคือ $P(\phi)$ จึงเท่ากับ 0 และความน่าจะเป็นของ S เท่ากับ 1

บทนิยามที่ 1.3.1 S เป็นปริภูมิตัวอย่าง A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือผลบวกของน้ำหนักของทุก ๆ จุดตัวอย่าง ในเหตุการณ์ A ดังนั้น

$$0 \le P(A) \le 1 \ , \ P(\phi) = 0 \ , \ P(S) = 1$$

ตัวอย่างที่ 1.3.1 โยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัวอย่างน้อยหนึ่งครั้ง

วิธีทำ ปริภูมิตัวอย่างสำหรับการทดลองนี้ คือ S = {HH , HT , TH , TT}

ถ้าเหรียญเที่ยงตรง ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นแต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน ดังนั้นเรากำหนดน้ำหนัก "w" ให้แก่แต่ละจุดตัวอย่าง เนื่องจากผลรวมของน้ำหนักของจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่างเท่ากับ 1

ดังนั้น $w + w + w + w = 1$

เพราะฉะนั้น $w = \frac{1}{4}$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง จะได้ A = {HH , HT , TH}

เพราะฉะนั้น $P(A) = 3w = \frac{3}{4}$ □

ตัวอย่างที่ 1.3.2 ลูกเต๋าลูกหนึ่งถูกถ่วงน้ำหนักโดยทำให้แต้มคู่มีโอกาสขึ้นเป็น 2 เท่าของแต้มคี่ ถ้า E เป็นเหตุการณ์ที่เมื่อทอดลูกเต๋านี้แล้วจะขึ้นแต้มน้อยกว่า 4 จงหา P(E)

วิธีทำ ปริภูมิตัวอย่างคือ S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} กำหนด w แก่จุดตัวอย่างที่เป็นจำนวนคี่ และ 2w แก่จำนวนคู่

ดังนั้น $w + 2w + w + 2w + w + 2w = 1$

เพราะฉะนั้น $w = \frac{1}{9}$

ดังนั้นเรากำหนดน้ำหนัก $\frac{1}{9}$ แก่จุดตัวอย่างที่เป็นจำนวนคี่ และ $\frac{2}{9}$ แก่จำนวนคู่

E = เหตุการณ์ที่เมื่อทอดลูกเต๋านี้แล้วจะขึ้นแต้มน้อยกว่า 4

$= \{1 , 2 , 3\}$

เพราะฉะนั้น $P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

□

เราอาจจะคิดว่า น้ำหนัก คือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว ถ้าการทดลองเป็นไปตามธรรมชาติ เช่นตัวอย่างที่ 1.3.1 เราสามารถสมมติน้ำหนักของแต่ละจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่างให้เท่ากัน ดังนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คืออัตราส่วนของจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ A ต่อจำนวนสมาชิกใน S

ทฤษฎีบทที่ 1.3.1 การทดลองอย่างหนึ่งมีผลการทดลองเกิดขึ้นได้ N วิธีต่าง ๆ กัน แต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน ถ้า n เป็นจำนวนวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ A ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ $P(A) = \frac{n}{N}$

ตัวอย่างที่ 1.3.3 เมื่อดึงไพ่ 1 ใบ จากสำรับซึ่งมีไพ่ 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่ใบนั้นจะเป็นโพดำ

วิธีทำ ในการดึงไพ่ 1 ใบ ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้มี 52 วิธี ซึ่งแต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน

ใน 52 วิธีนั้น มี 13 วิธีที่จะดึงไพ่ได้โพดำ

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ดึงไพ่ได้โพดำ

ดังนั้น $P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ □

ตัวอย่างที่ 1.3.4 ในการเล่นบริดจ์ ต้องแจกไพ่ 52 ใบ ให้ผู้เล่น 4 คน คนละเท่า ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นทุกคนได้ "A"

วิธีทำ จำนวนวิธีที่จะแจกไพ่ให้ผู้เล่น 4 คน คนละเท่า ๆ กัน = $\frac{52!}{(13!)^4 4!} \times 4! = \frac{52!}{(13!)^4}$ วิธี

จำนวนวิธีแจก A 4 ใบ ให้ผู้เล่น 4 คน = 4! วิธี

แต่ละวิธีที่แจก A แจกไพ่ที่เหลือ 48 ใบ ให้ผู้เล่น 4 คน คนละ 12 ใบ ได้ = $\frac{48!}{(12!)^4}$ วิธี

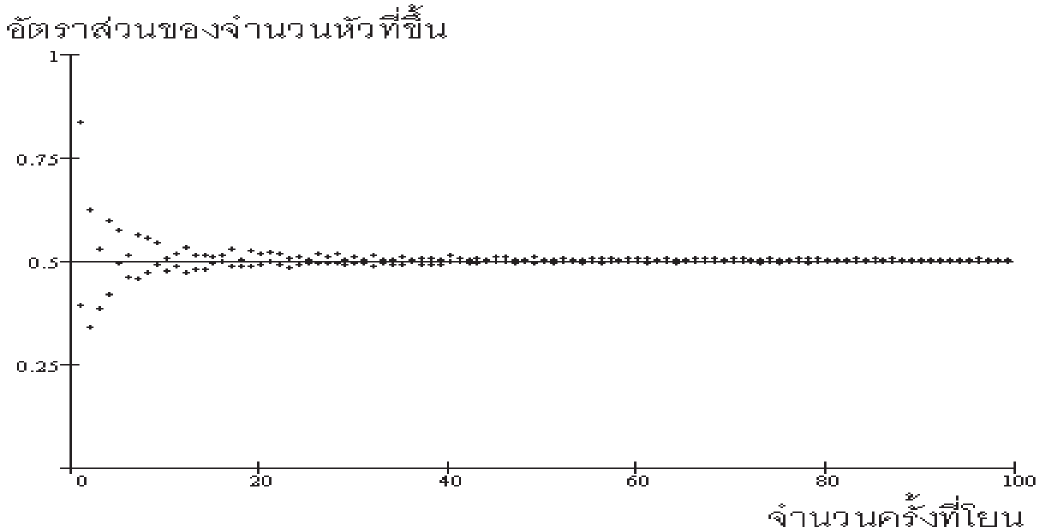
ดังนั้นจำนวนวิธีที่แจกไพ่ให้ผู้เล่นให้ได้ A ทุก ๆ คน = $\frac{48!}{(12!)^4} \times 4!$ วิธี

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ผู้เล่นทุกคนได้ A

ดังนั้น $P(E) = \frac{\left(\frac{48!}{(12!)^4} \times 4!\right)}{\left(\frac{52!}{(13!)^4}\right)} = \frac{24 \times 48! \times (13)^4}{52!} = 0.1054982$ □

ในกรณีที่ไม่สามารถจะสมมติว่าน้ำหนักเท่ากัน จะต้องอาศัยความรู้ที่ผ่านมา หรือจากการทดลอง เช่น ถ้าเหรียญอันหนึ่งมีน้ำหนักสองหน้าไม่เท่ากัน เราจะกะประมาณน้ำหนักหรือความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัวหรือก้อย ได้โดยโยนเหรียญหลาย ๆ ครั้ง แล้วบันทึกผลการทดลองไว้ ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัวคือ อัตราส่วนของจำนวนครั้งที่ขึ้นหัวต่อจำนวนครั้งที่ทำการทดลอง ความน่าจะเป็นที่ได้นี้ คือความน่าจะเป็นซึ่งนิยามในเทอมของความถี่สัมพัทธ์

หมายเหตุ ในการทดลองหาความน่าจะเป็นจะต้องทำการทดลองหลาย ๆ ครั้ง เช่น โยนเหรียญ 1 อัน หลาย ๆ ครั้ง แล้วสังเกตจำนวนหัวที่ขึ้น จากกราฟจะเห็นว่า ถ้าทำการทดลองหลายครั้ง อัตราส่วนของจำนวนหัวที่ขึ้นต่อจำนวนครั้งที่โยนจะใกล้เคียงกับ $\frac{1}{2}$ ซึ่งเป็นความน่าจะเป็นของการขึ้นหัวในการโยนเหรียญ 1 อัน



รูปที่ 1.8

ถ้าต้องการหาความน่าจะเป็นที่ผู้แข่งเทนนิสจะชนะในการแข่งครั้งต่อไป จะต้องอาศัยจากผลการแข่งขันที่ผ่านมาของผู้แข่งและของฝ่ายตรงข้ามด้วย ในทำนองเดียวกัน ถ้าต้องการทราบความน่าจะเป็นที่ม้าตัวหนึ่งจะชนะในการแข่งนัดต่อไป จะต้องทราบประวัติการแข่งของม้าตัวนั้นและตัวอื่น ๆ ที่เข้าแข่งด้วย

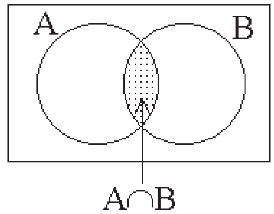
1.4 กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

ในการคำนวณหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์บางอย่าง การคำนวณจะง่ายขึ้นถ้าทราบความน่าจะเป็นของเหตุการณ์อื่น ๆ ด้วย เราอาจจะเขียนเหตุการณ์ที่ต้องการหาความน่าจะเป็น เป็นยูเนียนของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ หรือเป็นส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์บางเหตุการณ์ ซึ่งในการหาความน่าจะเป็นจะต้องใช้กฎที่สำคัญ ๆ ดังจะได้กล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.4.1 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ จะได้

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

พิสูจน์ เมื่อพิจารณาแผนภาพเวนน์ (Venn diagram)



รูปที่ 1.9

$P(A \cup B)$ คือผลบวกของน้ำหนักของจุดตัวอย่างในเซต $A \cup B$ เนื่องจาก $P(A) + P(B)$ คือผลบวกของน้ำหนักใน A และน้ำหนักใน B จะเห็นว่าเราบวกน้ำหนักใน $A \cap B$ สองครั้ง ดังนั้นจะต้องลบน้ำหนักดังกล่าวนี้ออกหนึ่งครั้ง เพื่อจะได้ $P(A \cup B)$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 1.4.2 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน จะได้

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 1.4.2 หาได้จากทฤษฎีบทที่ 1.4.1 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ดังนั้น $A \cap B = \phi$ ซึ่งจะทำให้ $P(A \cap B) = P(\phi) = 0$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ทฤษฎีบทประกอบที่ 1.4.3 ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน จะได้

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

บทนิยามที่ 1.4.1 เซตของเหตุการณ์ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ ประกอบกันขึ้นเป็น **ผลแบ่งกั้น** (partition) ของปริภูมิตัวอย่าง S ถ้า 1. $A_i \cap A_j = \phi$ ทุกค่าของ $i \neq j$

2. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

และ 3. $P(A_i) > 0$ ทุก ๆ ค่าของ i , $i = 1, 2, \ldots, n$

หมายเหตุ ถ้า $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของปริภูมิตัวอย่าง S จะได้

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = P(S) = 1$$

ตัวอย่างที่ 1.4.1 ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งสอบคณิตศาสตร์ผ่านเท่ากับ $\frac{2}{3}$ ความน่าจะเป็นที่เขาสอบฟิสิกส์ผ่านเท่ากับ $\frac{5}{9}$ และความน่าจะเป็นที่เขาสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเท่ากับ $\frac{4}{5}$ จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชา

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เขาสอบคณิตศาสตร์ผ่าน

B เป็นเหตุการณ์ที่เขาสอบฟิสิกส์ผ่าน

จากทฤษฎีบทที่ 1.4.1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ดังนั้น $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$= \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{4}{5} = \frac{19}{45}$$

□

ตัวอย่างที่ 1.4.2 การทดลองทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของแต้ม เป็น 5 หรือ 11

วิธีทำ การทดลองทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง

ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{(1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,4), (6,5), (6,6)\}$

จำนวนจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่าง = 36 จุด

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5

เพราะฉะนั้น $A = \{(1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\}$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 11

เพราะฉะนั้น $B = \{(5,6), (6,5)\}$

ดังนั้น $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ และ $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน เพราะเมื่อทอดลูกเต๋า 2 ลูก พร้อม ๆ กัน จะได้ผลบวกของแต้มเป็น 5 และ 11 ในขณะเดียวกันไม่ได้

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$ □

ทฤษฎีบทที่ 1.4.4 ถ้า A' เป็นส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A แล้ว $P(A') = 1 - P(A)$

พิสูจน์ เนื่องจาก $A \cup A' = S$ และ $A \cap A' = \phi$

ดังนั้น $P(A \cup A') = P(S)$

$P(A) + P(A') = 1$

ดังนั้น $P(A') = 1 - P(A)$

ตัวอย่างที่ 1.4.3 การโยนเหรียญ 1 อัน 6 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

วิธีทำ การโยนเหรียญ 1 อัน 6 ครั้ง จำนวนจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่าง = $2^6 = 64$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 1 อัน 6 ครั้งแล้วเหรียญขึ้นหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

เพราะฉะนั้น E' เป็นเหตุการณ์โยนเหรียญ 1 อัน 6 ครั้ง แล้วไม่ขึ้นหัวเลย

เนื่องจากมีเพียง 1 วิธีเท่านั้นที่ไม่ขึ้นหัวเลย คือขึ้นก้อยทั้ง 6 ครั้ง เพราะฉะนั้น $E' = \{ TTTTTT \}$

ดังนั้น $P(E') = \frac{1}{64}$

เพราะฉะนั้น $P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$ □

1.5 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)

พิจารณาความแตกต่างระหว่างการเลือกของมา 2 ชิ้น โดยวิธีสุ่มจากของรุ่น (lot) หนึ่ง ซึ่งมีของ 100 ชิ้น ในจำนวนนี้มี 20 ชิ้นที่มีข้อบกพร่อง และที่เหลืออยู่ในสภาพดี สมมติเราหยิบของมาจากรุ่นนี้ 2 วิธี วิธีหนึ่งคือหยิบชิ้นแรกแล้ววางกลับที่เดิมก่อนหยิบชิ้นต่อไป (sampling with replacement) อีกวิธีหนึ่งหยิบชิ้นแรกมาแล้วไม่วางกลับที่เดิม (sampling without replacement) แต่หยิบชิ้นที่สองต่อไป

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบของชิ้นแรกแล้วพบของมีข้อบกพร่อง

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบของชิ้นที่สองแล้วพบของมีข้อบกพร่อง

ถ้าหยิบของชิ้นแรกแล้ววางกลับที่เดิมก่อนหยิบครั้งที่สอง $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

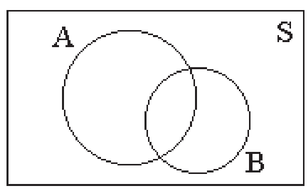
แต่ถ้าหยิบของชิ้นแรกมาแต่ไม่วางกลับที่เดิมก่อนหยิบชิ้นที่สอง $P(A) = \frac{1}{5}$ แต่ $P(B)$ ไม่เท่าเดิม ก่อนที่จะหา $P(B)$ เราจะต้องทราบว่าเมื่อหยิบของชิ้นที่สอง เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้วหรือไม่

ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ที่เกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เรียกว่า “**ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข**” และจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(B \mid A)$ ซึ่งอ่านว่า “ความน่าจะเป็นที่ B จะเกิดขึ้นเมื่อ A เกิดขึ้นแล้ว” หรือ “ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A ให้”

จากตัวอย่างข้างต้น $P(B \mid A) = \frac{19}{99}$ เนื่องจากว่าครั้งแรกได้ของที่มีข้อบกพร่อง ดังนั้นจะเหลือของที่มีข้อบกพร่องเพียง 19 ชิ้น จากที่เหลือทั้งสิ้น 99 ชิ้น

เมื่อไรก็ตามที่ต้องการหา $P(B \mid A)$ เราต้องหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เทียบกับปริภูมิตัวอย่างที่ลดลง (reduced sample space)

พิจารณาแผนภาพเวนน์ ถ้าต้องการหา $P(B)$ จะต้องหาเทียบกับปริภูมิตัวอย่าง S แต่ถ้าต้องการหา $P(B \mid A)$ ต้องหาเทียบกับ A ซึ่ง A คือปริภูมิตัวอย่างที่ลดลงจาก S มาเป็น A



รูปที่ 1.10

ก่อนที่จะให้นิยามของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข ขอให้พิจารณาตัวอย่างของการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ปริภูมิตัวอย่าง คือ

$S = \{(x_1, x_2) \mid x_1$ เป็นแต้มของลูกเต๋าลูกที่หนึ่ง , x_2 เป็นแต้มของลูกเต๋าลูกที่สอง$\}$

$$= \left\{\begin{matrix} (1,1),(1,2),(1,3),\dots,(1,6), \\ (2,1),(2,2),(2,3),\dots,(2,6), \\ \vdots \\ (6,1),(6,2),(6,3),\dots,(6,6) \end{matrix}\right\}$$

ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์

$$A = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10\}$$

$$B = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2\}$$

ดังนั้น $A = \{(5, 5), (4, 6), (6, 4)\}$ และ $P(A) = \frac{3}{36}$

$B = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), \dots, (6, 5)\}$ และ $P(B) = \frac{15}{36}$

ในที่นี้เราสนใจเฉพาะเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 10 และต้องการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้แต้มของลูกที่หนึ่งมากกว่าลูกที่สอง

$P(B|A)$ = ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มของลูกเต๋าลูกที่หนึ่งมากกว่าลูกที่สองเมื่อกำหนดให้ผลรวมของแต้มเท่ากับ 10

$= \frac{1}{3}$

ในทำนองเดียวกัน $P(A|B) = \frac{1}{15}$

เนื่องจาก $A \cap B = \{(6\ ,\ 4)\}$ ดังนั้น $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

ดังนั้น ถ้าพิจารณาการหา $P(B|A)$ และ $P(A|B)$ ในเทอมของความน่าจะเป็นโดยทั่วไป

$$P(B|A) = \frac{1}{3} = \frac{(\frac{1}{36})}{(\frac{3}{36})} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{15} = \frac{(\frac{1}{36})}{(\frac{15}{36})} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

เพื่อจะให้คำจำกัดความสมบูรณ์ ควรพิจารณาถึงความน่าจะเป็นซึ่งนิยามในเทอมของความถี่สัมพัทธ์ สมมติการทดลองอย่างหนึ่งทำการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง ให้ $n(A)$, $n(B)$ และ $n(A \cap B)$ เป็นจำนวนครั้งที่เกิดเหตุการณ์ A , B และ $A \cap B$ ในการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง ตามลำดับ

$\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ คือความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ B ที่เกิดขึ้นเมื่อ A เกิดขึ้นแล้ว

ดังนั้น $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ คือความถี่สัมพัทธ์ที่มีเงื่อนไขของ B เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A ให้

เราอาจเขียน $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ ได้ดังนี้ $\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\left(\frac{n(A \cap B)}{n}\right)}{\left(\frac{n(A)}{n}\right)} = \frac{f_{A \cap B}}{f_A}$

เมื่อ $f_{A \cap B}$ และ f_A คือความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ $A \cap B$ และ A ตามลำดับ และ n เป็นจำนวนครั้งของการทดลองที่ทำซ้ำ ๆ กัน

ถ้า n มีค่ามาก แล้ว ค่าของ $f_{A \cap B}$ จะใกล้เคียงกันกับ $P(A \cap B)$ และ ค่าของ f_A จะใกล้เคียงกับค่าของความน่าจะเป็น $P(A)$ และ ค่าของ $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ จะใกล้เคียงกับค่าของความน่าจะเป็น $P(B|A)$

บทนิยามที่ 1.5.1 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B กำหนดให้เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว แทนด้วยสัญลักษณ์ $P(B|A)$ คือ $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ เมื่อ $P(A) \neq 0$

ข้อสังเกต มี 2 วิธีที่จะหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $P(B|A)$ คือ

1. หาโดยตรง โดยหาความน่าจะเป็นของ B เทียบกับปริภูมิตัวอย่างที่ลดลงคือ A
2. ใช้บทนิยาม $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ เมื่อ $P(A \cap B)$ และ $P(A)$ หาจากปริภูมิตัวอย่างตอนเริ่มต้น (original sample space)

ตัวอย่างที่ 1.5.1 ในสำนักงานแห่งหนึ่งมีเครื่องคิดเลข 100 เครื่อง มีทั้งเครื่องไฟฟ้า (E) และเครื่องที่ใช้มือหมุน (M) บางเครื่องใหม่ (N) และบางเครื่องใช้แล้ว (U) ตารางข้างล่างเป็นจำนวนเครื่องคิดเลขแยกตามสภาพ

ชนิด / สภาพ	E	M	รวม
N	40	30	70
U	20	10	30
รวม	60	40	100

ชายคนหนึ่งเลือกเครื่องคิดเลขเครื่องหนึ่งมาโดยวิธีสุ่ม และพบว่าเป็นของใหม่ จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องคิดเลขนี้จะเป็นเครื่องไฟฟ้า

วิธีทำ เราต้องการหา $P(E|N)$

ถ้าหาจากปริภูมิตัวอย่างที่ลดลง (มีเครื่องคิดเลขใหม่ 70 เครื่อง) $P(E|N) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$

ถ้าหาโดยใช้คำจำกัดความของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$$P(E|N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{(\frac{40}{100})}{(\frac{70}{100})} = \frac{4}{7}$$ □

จาก $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ และ $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

จะได้ $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$ หรือ $P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$

ทฤษฎีบทที่ 1.5.1 ทฤษฎีการคูณของความน่าจะเป็น (Multiplication Theorem of Probability)
ในการทดลองครั้งหนึ่ง ถ้าเหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้นทั้งสองเหตุการณ์ จะได้

$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$ เมื่อ $P(A) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B)\,P(A|B)$ เมื่อ $P(B) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 1.5.2 สินค้ารุ่นหนึ่งประกอบด้วยสินค้าที่มีข้อบกพร่อง 20 ชิ้น และสินค้าที่มีสภาพดี 80 ชิ้น ถ้าเลือกของมา 2 ชิ้น ทีละชิ้นโดยวิธีสุ่ม โดยของชิ้นแรกที่หยิบมามิได้ใส่กลับคืนก่อนหยิบชิ้นที่สอง
จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบของที่มีข้อบกพร่องทั้ง 2 ชิ้น

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่พบของชิ้นแรกมีข้อบกพร่อง
B เป็นเหตุการณ์ที่พบของชิ้นที่สองมีข้อบกพร่อง

ต้องการหา $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A) = \left(\frac{20}{100}\right)\left(\frac{19}{99}\right) = \frac{19}{495}$$ □

ในกรณีที่มีเหตุการณ์ 3 เหตุการณ์ คือ A_1 , A_2 , A_3 เราสามารถขยายผลของทฤษฎีบทที่ 1.5.1 ได้ดังนี้

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\,P(A_2 | A_1)\,P(A_3 | (A_1 \cap A_2))$$

เมื่อ $P(A_1) \neq 0$ และ $P(A_1 \cap A_2) \neq 0$ ทั้งสองค่า

ในทำนองเดียวกัน ทฤษฎีบทที่ 1.5.1 ใช้ได้กับเหตุการณ์ที่มีจำนวนจำกัด k เหตุการณ์ คือ $A_1, A_2, \ldots, A_k$
จากตัวอย่างที่ 1.5.2 ถ้าหยิบของชิ้นแรกมาตรวจสภาพแล้ววางกลับที่เดิม แล้วหยิบชิ้นที่สองมาโดยวิธีสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะพบของชิ้นที่สองมีข้อบกพร่อง = $\frac{20}{100}$

นั่นคือ $P(B|A) = P(B)$
ในกรณีนี้เรากล่าวว่า เหตุการณ์ B เป็นอิสระจากเหตุการณ์ A (event B is independent of event A)

บทนิยามที่ 1.5.2 เหตุการณ์ B เป็นอิสระจากเหตุการณ์ A ก็ต่อเมื่อ $P(B|A) = P(B)$ เท่านั้น
หรืออาจจะกล่าวว่า เหตุการณ์ B เป็นอิสระจากเหตุการณ์ A เมื่อการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ไม่มีผลต่อการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ B

จากบทนิยามที่ 1.5.2 จะได้ว่า

ถ้าเหตุการณ์ A เป็นอิสระจากเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ A จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ B' ด้วย

ถ้าเหตุการณ์ A เป็นอิสระจากเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ A' จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ B' ด้วย

ถ้าเหตุการณ์ A เป็นอิสระจากเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ B จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ A ซึ่งในกรณีนี้เรากล่าวว่า **เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน** (event A and B are independent)

ทฤษฎีบทที่ 1.5.2 ทฤษฎีการคูณของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ ที่เป็นอิสระต่อกัน
เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ เท่านั้น

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 1.5.2 $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
ถ้า A และ B เป็นอิสระต่อกัน แล้ว $P(B|A) = P(B)$
เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

ในกรณีที่มีเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน n เหตุการณ์ คือ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน เราสามารถขยายผลของทฤษฎีบทที่ 1.5.2 ได้ดังนี้

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

ตัวอย่างที่ 1.5.3 เมื่อดึงไพ่ 3 ใบ จากสำรับซึ่งมี 52 ใบ โดยดึงมาทีละใบ
จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ “A” ทั้ง 3 ใบ

ถ้า ก. ดึงไพ่แล้วใส่กลับคืนสำรับก่อนดึงไพ่ใบต่อไป

ข. ดึงไพ่แล้วไม่ใส่กลับคืนสำรับก่อนดึงไพ่ใบต่อไป

วิธีทำ ให้ E_1, E_2 และ E_3 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ “A” ในการดึงไพ่ครั้งแรก ครั้งที่สอง และครั้งที่สาม ตามลำดับ
ก. เมื่อดึงไพ่แล้วใส่กลับคืนสำรับก่อนการดึงไพ่ใบต่อไป

เพราะฉะนั้น E_1 , E_2 และ E_3 เป็นอิสระต่อกัน

เพราะฉะนั้น $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)$

$$= \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{4}{52}\right) = \frac{1}{2197}$$

ข. เมื่อดึงไพ่แล้วไม่ใส่กลับคืนสำรับก่อนดึงไพ่ใบต่อไป

เพราะฉะนั้น $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2 \mid E_1)P(E_3 \mid (E_1 \cap E_2))$

$$= (\frac{4}{52})(\frac{3}{51})(\frac{2}{50})$$

$$= \frac{1}{5575}$$ □

ตัวอย่างที่ 1.5.4 เมื่อทอดลูกเต๋า 2 ลูก สองครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 และ 11

วิธีทำ ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ครั้งที่หนึ่ง

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ครั้งที่สอง

B_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 11 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ครั้งที่หนึ่ง

B_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 11 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ครั้งที่สอง

เพราะว่า เหตุการณ์ A_1 และ B_2 เป็นอิสระต่อกัน เพราะฉะนั้น $P(A_1 \cap B_2) = P(A_1)\,P(B_2)$

เพราะว่า เหตุการณ์ A_2 และ B_1 เป็นอิสระต่อกัน เพราะฉะนั้น $P(A_2 \cap B_1) = P(A_2)\,P(B_1)$

ความน่าจะเป็นที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 และ 11 เท่ากับ

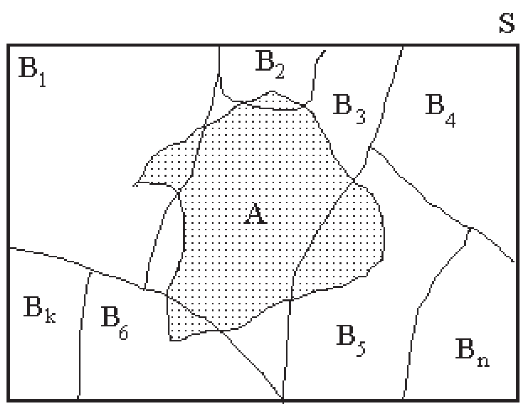
$$P((A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1)) = P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1)$$

$$= P(A_1)P(B_2) + P(A_2)P(B_1)$$

$$= (\frac{4}{36})(\frac{2}{36}) + (\frac{4}{36})(\frac{2}{36})$$

$$= \frac{1}{81}$$ □

ถ้า A เป็นเหตุการณ์เทียบกับปริภูมิตัวอย่าง S และ $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ เป็นเซตของผลแบ่งกั้นของ S



รูปที่ 1.11

ดังนั้น $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)$ ซึ่งบางเซต $A \cap B_i$ อาจเป็นเซตว่าง

เพราะว่า $A \cap B_1, A \cap B_2, \ldots, A \cap B_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นร่วมกันเป็นคู่ ๆ (pairwise mutually exclusive)

ดังนั้น $$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n)$$

แต่ $$P(A \cap B_j) = P(B_j)P(A \mid B_j)$$

ดังนั้น $$P(A) = P(B_1)P(A \mid B_1) + P(B_2)P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n)P(A \mid B_n)$$

จะได้เป็นทฤษฎีดังนี้

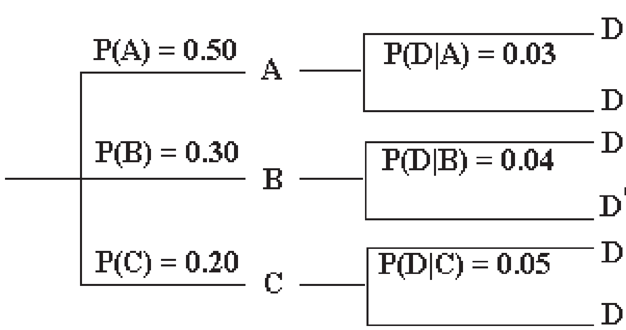
ทฤษฎีบทที่ 1.5.3 กำหนด $\{ B_1 , B_2 , \ldots , B_n \}$ เป็นเซตของเหตุการณ์ซึ่งเป็นผลแบ่งกั้นของปริภูมิตัวอย่าง S และ $P(B_i) \neq 0$ ทุก ๆ ค่าของ $i = 1 , 2 , \ldots , n$
ถ้า A เป็นเหตุการณ์หนึ่งของ S
แล้วจะได้ว่า $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A \mid B_i)$

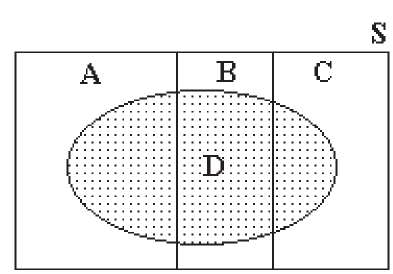
ตัวอย่างที่ 1.5.5 พิจารณาตัวอย่างข้างต้น สินค้ารุ่นหนึ่งประกอบด้วยของที่อยู่ในสภาพดี 80 ชิ้น และมีข้อบกพร่อง 20 ชิ้น หยิบสินค้ามา 2 ชิ้น โดยวิธีสุ่มโดยไม่ได้ใส่ของชิ้นแรกกลับที่เดิมก่อนหยิบชิ้นที่สอง
ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ของชิ้นแรกที่หยิบมาตรวจพบว่ามีข้อบกพร่อง
B เป็นเหตุการณ์ที่ของชิ้นที่สองที่หยิบมาตรวจพบว่ามีข้อบกพร่อง
จงหา P(B)

วิธีทำ เพราะว่า $B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} P(B) &= P((B \cap A) \cup (B \cap A')) \\ &= P(B \cap A) + P(B \cap A') \\ &= P(A) P(B \mid A) + P(A') P(B \mid A') \\ &= \left(\frac{20}{100}\right)\left(\frac{19}{99}\right) + \left(\frac{80}{100}\right)\left(\frac{20}{99}\right) \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$
□

ตัวอย่างที่ 1.5.6 โรงงานแห่งหนึ่งมีเครื่องจักร 3 เครื่อง A , B และ C ซึ่งสามารถผลิตสินค้าได้ 50% 30% และ 20% ของปริมาณสินค้าทั้งหมดที่ผลิตจากโรงงานแห่งนี้ ตามลำดับ เปอร์เซ็นต์ของสินค้าที่พบข้อบกพร่องซึ่งผลิตโดยเครื่องจักรทั้งสามเครื่องคือ 3% 4% และ 5% ตามลำดับ ถ้าเลือกสินค้าชิ้นหนึ่งโดยวิธีสุ่มแล้วตรวจสภาพ จงหาความน่าจะเป็นที่ของชิ้นนี้จะมีข้อบกพร่อง
วิธีทำ ให้ A , B และ C เป็นเหตุการณ์ที่สินค้าผลิตจากเครื่องจักร A , B และ C ตามลำดับ
เพราะฉะนั้น { A , B , C} เป็นผลแบ่งกั้นของ S
ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่ตรวจพบว่าสินค้าที่หยิบมามีข้อบกพร่อง
พิจารณาแผนภาพต้นไม้ของความน่าจะเป็น และ แผนภาพของเวนน์ได้ดังนี้





รูปที่ 1.12

เพราะว่า $S = A \cup B \cup C$

และ $D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} P(D) &= P((D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)) \\ &= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C) \\ &= P(A)\,P(D \mid A) + P(B)\,P(D \mid B) + P(C)\,P(D \mid C) \\ &= (0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05) \\ &= 0.037 \end{aligned}$$
□

1.6 กฎของเบส์ (Bayes' Rule)

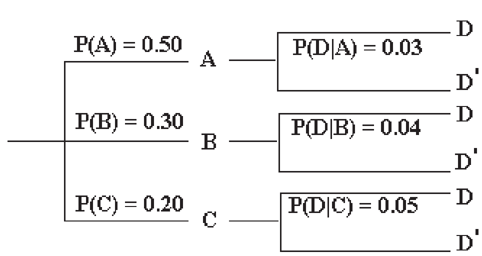
ทฤษฎีบทที่ 1.6.1 (กฎของเบส์) ให้ $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ เป็นเซตของเหตุการณ์ซึ่งเป็นผลแบ่งกั้นของปริภูมิตัวอย่าง S ซึ่ง $P(B_i) \neq 0$ ทุกค่าของ i ตั้งแต่ 1 ถึง n

ถ้า A เป็นเหตุการณ์หนึ่งของปริภูมิตัวอย่าง S ซึ่ง $P(A) \neq 0$

แล้วจะได้ว่า $P(B_k \mid A) = \dfrac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}$ ทุกค่าของ k ตั้งแต่ 1 ถึง n

พิสูจน์ เนื่องจาก
$$\begin{aligned} P(B_k \mid A) &= \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A)} \\ &= \frac{P(B_k)P(A \mid B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.6.1 จากตัวอย่างที่ 1.5.6 ถ้าเลือกสินค้ามาชิ้นหนึ่งโดยวิธีสุ่ม และพบว่าสินค้าชิ้นนั้นมีข้อบกพร่อง จงหาความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นนั้นผลิตโดยเครื่องจักร A



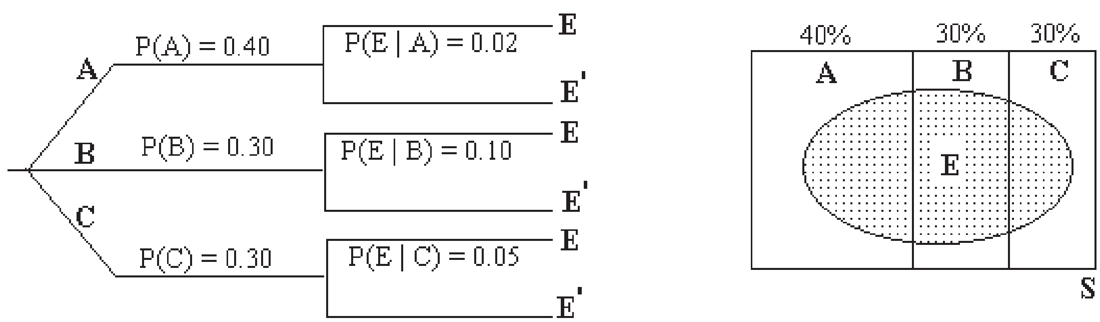
วิธีทำ
$$\begin{aligned} P(A \mid D) &= \frac{P(D \cap A)}{P(D)} \\ &= \frac{P(A)P(D \mid A)}{P(A)P(D \mid A) + P(B)P(D \mid B) + P(C)P(D \mid C)} \\ &= \frac{(0.50)(0.03)}{(0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05)} \\ &= \frac{15}{37} \end{aligned}$$
□

ตัวอย่างที่ 1.6.2 ในเทศกาลปีใหม่ ร้านค้าแห่งหนึ่งจัดผู้ห่อของขวัญไว้ 3 คน คือ กันยา ขนิษฐา และพาณี กันยาห่อของขวัญ 40% ของของขวัญทั้งหมดและลืมเอาป้ายติดราคาออกก่อนห่อของ 1 ใน 50 ครั้ง ขนิษฐาห่อของขวัญ 30% ของของขวัญทั้งหมดและลืมเอาป้ายออกก่อนห่อ 1 ใน 10 ครั้ง พาณีซึ่งห่อของขวัญที่เหลือลืมเอาป้ายออกก่อนห่อ 1 ใน 20 ครั้ง สมมติมีลูกค้าคนหนึ่งมาต่อว่าที่ร้านว่าไม่ได้เอาป้ายติดราคาออกก่อนห่อของขวัญ จงหาความน่าจะเป็นที่ของขวัญชิ้นนั้นห่อโดยกันยา

วิธีทำ ให้ A , B , C เป็นเหตุการณ์ที่ของขวัญชิ้นหนึ่งห่อโดย กันยา ขนิษฐา และ พาณี ตามลำดับ

E เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ห่อลืมเอาป้ายติดราคาออกก่อนห่อของขวัญ

พิจารณาแผนภาพต้นไม้ของความน่าจะเป็น และ แผนภาพของเวนน์ได้ดังนี้



รูปที่ 1.13

$$
\begin{aligned}
P(A \mid E) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \\
&= \frac{P(A)P(E \mid A)}{P(A)P(E \mid A) + P(B)P(E \mid B) + P(C)P(E \mid C)} \\
&= \frac{(0.40)(0.02)}{(0.40)(0.02) + (0.30)(0.10) + (0.30)(0.05)} \\
&= \frac{8}{53}
\end{aligned}
$$

□

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. ทดลองทอดลูกเต๋า 2 ลูก สีเขียว และสีแดง แล้วบันทึกแต้มที่ขึ้นไว้
   ก. จงเขียนปริภูมิตัวอย่าง S
   ข. จงเขียนเหตุการณ์ A ที่ได้ผลบวกของแต้มน้อยกว่า 5
   ค. จงเขียนเหตุการณ์ B ที่ลูกเต๋าลูกใดลูกหนึ่งขึ้นแต้ม 6
   ง. จงเขียนเหตุการณ์ C ที่ลูกเต๋าสีเขียวขึ้นแต้ม 2
2. การทดลองอย่างหนึ่งประกอบด้วยการโยนเหรียญอันหนึ่ง แล้วโยนเหรียญนั้นเป็นครั้งที่สองถ้าครั้งแรกขึ้นหัว แต่ถ้าครั้งแรกขึ้นก้อย ทอดลูกเต๋าลูกหนึ่งอีก 1 ครั้ง
   ก. จงเขียนปริภูมิตัวอย่าง S
   ข. จงเขียนเหตุการณ์ A ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้มน้อยกว่า 4
   ค. จงเขียนเหตุการณ์ B ที่เหรียญขึ้นก้อย 2 ครั้ง
3. ทำการทดลองโดยถามแม่บ้าน 3 คน ว่าใช้ผงซักฟอก “X” หรือไม่
   ก. จงเขียนปริภูมิตัวอย่าง S ใช้อักษร Y แทนการตอบรับ และอักษร N แทนการปฏิเสธ
   ข. จงเขียนเหตุการณ์ E ที่แม่บ้านอย่างน้อย 2 คน ใช้ผงซักฟอก “X”
   ค. ถ้าสมาชิกของเหตุการณ์หนึ่งคือ YYY , NYY , YYN , NYN เหตุการณ์ที่กล่าวถึงหมายถึงอะไร
4. นักศึกษาปีที่หนึ่งของวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ต้องเรียนวิทยาศาสตร์ 1 วิชา สังคมศาสตร์ 1 วิชา คณิตศาสตร์ 1 วิชา ถ้ามีวิชาในหมวดวิทยาศาสตร์ให้เลือก 3 วิชา วิชาในหมวดสังคมศาสตร์มีให้เลือก 4 วิชา และวิชาในหมวดคณิตศาสตร์มีให้เลือก 2 วิชา นักศึกษาคนหนึ่งจะจัดโปรแกรมการศึกษาของเขาได้กี่วิธี
5. ข้อสอบวิชาหนึ่งมีคำถามแบบ “ถูก” “ผิด” อยู่ 8 ข้อต่าง ๆ กัน มีกี่วิธีที่นักเรียนคนหนึ่งจะตอบคำถามถ้าเขาตอบทั้ง 8 ข้อ
6. มีกี่วิธีต่าง ๆ กันที่จะจัดอักษรจากคำว่า “ตรอมตรม”
7. หัวหน้าทีมบาสเกตบอล ต้องการจัดให้ผู้เล่น 9 คนลงเล่น 5 ตำแหน่งต่าง ๆ กัน มีกี่วิธีที่เขาจะจัด ถ้าผู้เล่นทุกคนสามารถเล่นตำแหน่งใดก็ได้
8. มีกี่วิธีที่จะจัดเลข 3 หลัก (ตั้งแต่หนึ่งร้อยขึ้นไป) จากเลขโดด 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5
   ก. ถ้าแต่ละเลขโดดใช้ได้เพียงครั้งเดียวเท่านั้น ข. ถ้าแต่ละเลขโดดใช้กี่ครั้งก็ได้
9. มีกี่วิธีที่จะปลูกต้นมะม่วง 2 ต้น ชมพู่ 3 ต้น และน้อยหน่า 2 ต้น เป็นแถวตรง ถ้าต้นไม้ชนิดเดียวกันไม่มีความแตกต่างกัน
10. ในฤดูการแข่งขันฟุตบอลปีหนึ่ง โรงเรียนแห่งหนึ่งเข้าแข่งขัน 8 ครั้ง มีกี่วิธีที่โรงเรียนนี้จะชนะ 4 ครั้ง แพ้ 3 ครั้ง และเสมอ 1 ครั้ง
11. เด็กนักเรียน 10 คน ขออาศัยรถ 3 คัน ที่ผ่านมาในซอยเพื่อไปลงที่ถนนใหญ่ ถ้ารถ 3 คัน มีที่ว่าง 2 , 4 และ 5 ที่นั่งตามลำดับ มีกี่วิธีที่เด็กทั้ง 10 คนนั้นจะขึ้นรถ
12. มีกี่วิธีที่จะเลือกกรรมการ 3 คน จากกลุ่มของชาย 5 คน และหญิง 3 คน ถ้า
    ก. เลือกโดยไม่มีข้อแม้ใด ๆ

ข. กรรมการชุดนี้ต้องประกอบด้วย ชาย 2 คน และหญิง 1 คน

ค. กรรมการชุดนี้ต้องประกอบด้วย ชาย 1 คน และหญิง 2 คน โดยที่มีหญิงคนหนึ่งต้องเป็นกรรมการเสมอ

13. ในการเล่นบริดจ์ ไพ่แต่ละมือมี 13 ใบ มีกี่วิธีที่ไพ่ในมือของผู้เล่นคนหนึ่งจะเป็นโพดำ 5 ใบ ข้าวหลามตัด 3 ใบ ดอกจิก 3 ใบ และโพแดง 2 ใบ

14. ร้านขายโทรทัศน์แห่งหนึ่งได้รับโทรทัศน์ 10 เครื่องจากโรงงาน มี 3 เครื่องที่มีข้อบกพร่อง โรงแรมแห่งหนึ่งต้องการซื้อ 4 เครื่อง มีกี่วิธีที่จะได้เครื่องที่มีข้อบกพร่องอย่างน้อย 2 เครื่อง

15. จงหาจำนวนวิธีเลือกอักษร 4 ตัว จากอักษรของคำ “expression”

16. จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัว จากอักษรของคำ “examination”

17. บริษัทแห่งหนึ่ง มีตำแหน่งว่าง 1 ตำแหน่ง มีผู้สมัคร 3 คน คือ ก ข และ ค โอกาสที่ ก และ ข จะได้ทำงานมีเท่า ๆ กัน แต่ ค มีโอกาสเป็น 2 เท่าของ ก จงหาความน่าจะเป็นที่แต่ละคนจะได้ทำงาน

18. จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ในข้อ 1

19. กล่องใบหนึ่งมีซอง 500 ซอง บรรจุเงินซองละ 100 บาท 50 ซอง 25 บาท 100 ซอง และ 10 บาท 350 ซอง ถ้าขายซองละ 25 บาทเท่ากันหมด จงเขียนปริภูมิตัวอย่างของจำนวนเงินต่าง ๆ ที่บรรจุในซอง และจงหาความน่าจะเป็นที่ซองแรกที่ถูกซื้อบรรจุเงินน้อยกว่า 100 บาท

20. ทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของแต้ม

ก. เท่ากับ 5 ข. อย่างมากที่สุดเป็น 4

21. ดึงไพ่ 5 ใบ จากสำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

ก. โพดำ 5 ใบ ข. โพแดง 4 ใบ ค. A 2 ใบ และ K 2 ใบ

22. หยิบหนังสือมา 3 เล่ม โดยไม่เจาะจงจากชั้นหนังสือซึ่งมีหนังสือวรรณคดี 3 เล่ม พจนานุกรม 1 เล่ม และนวนิยาย 4 เล่ม จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้

ก. พจนานุกรม ข. นวนิยาย 2 เล่ม และวรรณคดี 1 เล่ม

23. ดึงไพ่มา 2 ใบจากสำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ โดยดึงทีละใบ เมื่อหยิบแล้วไม่คืนกลับที่เดิม จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่ทั้งสองใบมีแต้มเกิน 2 แต่น้อยกว่า 9

24. ผู้เล่นบาสเกตบอลคนหนึ่งโยนลูกลงห่วง 50% ของจำนวนครั้งที่ได้โยน จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะโยนลูกลงห่วง 3 ครั้ง ในการโยน 4 ครั้งต่อไป

25. ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นพร้อมกัน กำหนดให้ $P(A) = 0.4$ และ $P(B) = 0.5$ จงหา

ก. $P(A \cup B)$ ข. $P(A')$ ค. $P(A' \cap B)$

26. กำหนด $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, $P(\{a\}) = P(\{b\}) = P(\{c\}) = P(\{d\}) = \frac{1}{7}$, $P(\{e\}) = \frac{2}{7}$, $P(\{f\}) = \frac{1}{14}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$ และ $B = \{d, e, f\}$ จงหา $P(A \mid B)$ และ $P(B \mid A)$

27. A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ ถ้า $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$, $P(A \mid B) = \frac{1}{4}$

ก. เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด

ข. จงหา $P(A' \mid B')$