

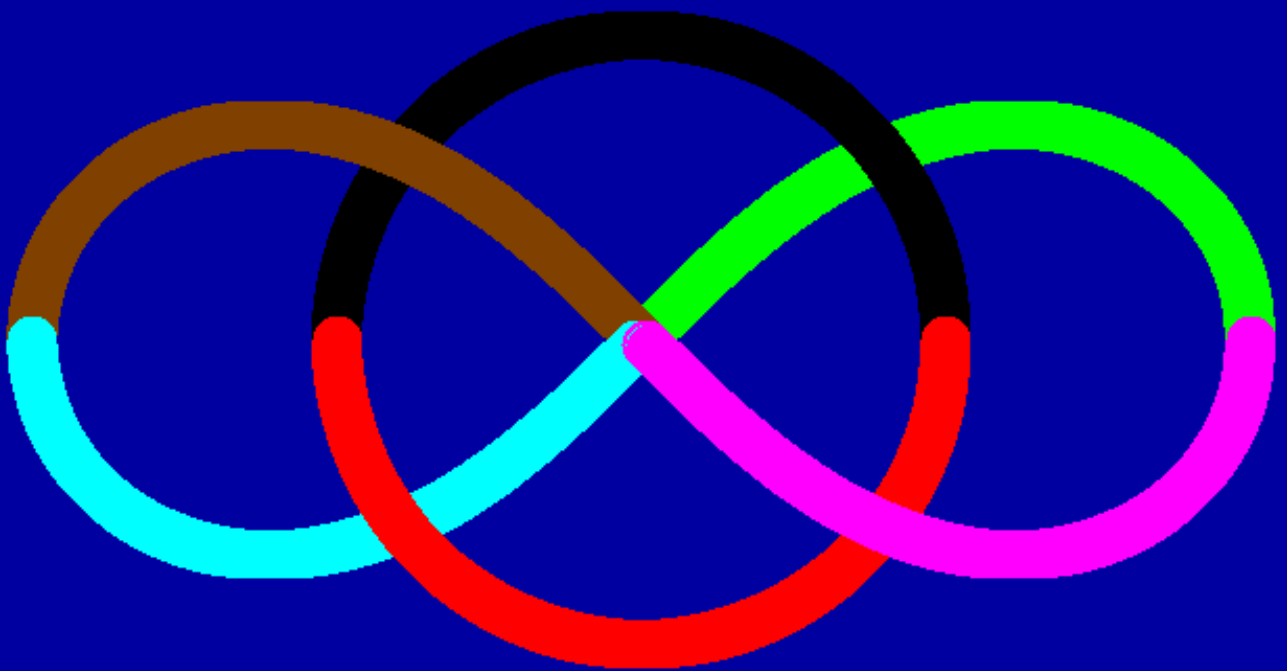
คณิตศาสตร์ปณัย เล่มที่ 39

เสริมความรู้สู่คณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

สรุปเนื้อหาและรวมสูตร

IMO

International Mathematical Olympiad



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 39

สรุปเนื้อหาและรวมสูตร

IMO

International Mathematical Olympiad

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : สรุปเนื้อหาและรวมสูตร IMO (International Mathematical Olympiad)

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : ธันวาคม พ.ศ. 2561

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-478-073-6

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

การสอบ International Mathematical Olympiad (IMO) นักเรียนต้องมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญเช่น เรขาคณิต ตรรกศาสตร์ ทฤษฎีจำนวน อสมการ คอมบินาทอริก หนังสือ สรุปเนื้อหาและรวมสูตร IMO (International Mathematical Olympiad : IMO) ได้รวบรวมสูตรที่สำคัญซึ่งเป็นพื้นฐานในการทำข้อสอบ IMO นักเรียนที่สนใจการพิสูจน์ที่มาของสูตรหรือทฤษฎีบทสามารถดูได้จากหนังสือดังนี้

สูตรเรขาคณิต มาจากหนังสือคณิตศาสตร์ปรณัย เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต

สูตรตรรกศาสตร์ มาจากหนังสือคณิตศาสตร์ปรณัย เล่มที่ 31 โลกตรรกศาสตร์

สูตรอสมการ มาจากหนังสือคณิตศาสตร์ปรณัย เล่มที่ 29 โลกอสมการ เล่มที่ 30 โลกอสมการ 2

สูตรทฤษฎีจำนวน มาจากหนังสือคณิตศาสตร์ปรณัย เล่มที่ 37 โลกทฤษฎีจำนวน

สูตรคอมบินาทอริก มาจากหนังสือคณิตศาสตร์ปรณัย เล่มที่ 36 โลกคอมบินาทอริก

สำหรับผู้สนใจเนื้อหาในระดับอุดมศึกษา แนะนำหนังสือ สรุปเนื้อหาและรวมสูตร Calculus I Calculus II

Calculus III Differential Equations Probability and Statistics

ภายในเล่มมีโจทย์เสริมความรู้สู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก (IMO) ให้นักเรียนได้ฝึกทำโจทย์ สำหรับผู้ที่ต้องการเทคนิคแบบต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาโจทย์ ขอแนะนำหนังสือ คณิตศาสตร์ปรณัย เล่มที่ 38 เทคนิคการทำข้อสอบ IMO International Mathematical Olympiad ได้รวบรวมเทคนิคต่างๆ ที่สำคัญในการทำข้อสอบ

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณผู้อ่านทุกท่านที่ติดตามผลงานคณิตศาสตร์ปรณัยมาโดยตลอด

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

หน้า

1. สรุปเนื้อหาและรวมสูตรเรขาคณิต	1 - 44
2. สรุปเนื้อหาและรวมสูตรตรีโกณมิติ	45 - 74
3. สรุปเนื้อหาและรวมสูตรอสมการ	75 - 92
4. สรุปเนื้อหาและรวมสูตรทฤษฎีจำนวน	93 - 124
5. สรุปเนื้อหาและรวมสูตรคอมบินาทอริก	125 - 148
6. โจทย์เสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก (IMO) ชุดที่ 1	149 - 178
7. โจทย์เสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก (IMO) ชุดที่ 2	179 - 246
8. โจทย์เสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก (IMO) ชุดที่ 3	247 - 328

บทที่ 1

สรุปเนื้อหาและรวมสูตร

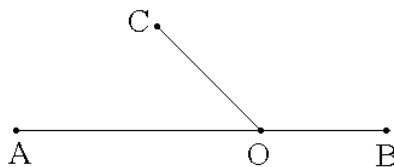
เรขาคณิต

ทฤษฎีบท 1 [Euclid I. 13.]

มุมประชิดของเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งรวมกันเท่ากับ 2 มุมฉาก

ทฤษฎีบท 1.1 เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน มุมทั้ง 4 มุมที่เกิดขึ้นรวมกันเท่ากับ 4 มุมฉาก

ทฤษฎีบท 2 [Euclid I. 14.] ที่จุดปลาย O ของเส้นตรง OC มีเส้นตรง OA และ OB อยู่คนละด้านของเส้นตรง OC ถ้า $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$ แล้ว OA และ OB เป็นเส้นตรงเดียวกัน

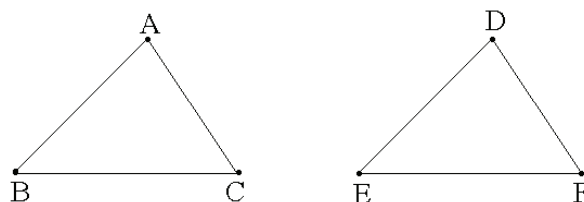


ทฤษฎีบท 3 [Euclid I. 15.] เส้นตรงสองเส้นตัดกันมุมตรงข้ามต้องเท่ากัน

ทฤษฎีบท 4 [Euclid I. 4.] ถ้า สามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันสองด้านและมุมระหว่างด้านที่เท่ากัน

มีขนาดของมุมเท่ากัน แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างเช่น ถ้า $AB = DE$, $AC = DF$ และ $\angle BAC = \angle EDF$ แล้ว $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ



หมายเหตุ การกล่าวอ้างผลของทฤษฎีบทนี้จะใช้คำว่า ด้าน-มุม-ด้าน หรือ ด.ม.ด.

ทฤษฎีบท 5 [Euclid I. 5.] มุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่ากัน

ทฤษฎีบท 6 [Euclid I. 6.] ถ้า สามเหลี่ยมมีมุมเท่ากันสองมุม แล้ว ด้านตรงมุมที่เท่ากันต้องยาวเท่ากัน

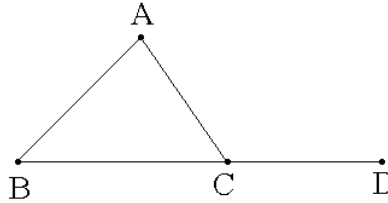
ทฤษฎีบท 7 [Euclid I. 8.] ถ้า สามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันทั้งสามคู่

แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างเช่น ถ้า $AB = DE$, $AC = DF$ และ $BC = EF$ แล้ว $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ

หมายเหตุ การกล่าวอ้างผลของทฤษฎีบทนี้จะใช้คำย่อว่า ด้าน-ด้าน-ด้าน หรือ ด.ด.ด.

ทฤษฎีบท 8 [Euclid I. 16.] ต่อด้านของสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะใหญ่กว่ามุมภายในด้านตรงข้ามทั้งสองมุม



จากรูปจะได้ $\angle ACD > \angle ABC$ และ $\angle ACD > \angle BAC$

ทฤษฎีบท 8.1 ผลบวกของมุมภายในสามเหลี่ยมสองมุมมีค่าน้อยกว่าสองมุมฉาก

ทฤษฎีบท 8.2 สามเหลี่ยมทุกรูปต้องมีมุมแหลมอย่างน้อยสองมุม

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือสามเหลี่ยมมีมุมป้านได้อย่างมากหนึ่งมุม

ทฤษฎีบท 8.3 จากจุดที่อยู่นอกเส้นตรงลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงนั้นได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 9 [Euclid I. 18.]

ในสามเหลี่ยมมุมที่อยู่ด้านตรงข้ามด้านใหญ่มีขนาดใหญ่มุมที่อยู่ด้านตรงข้ามด้านเล็ก

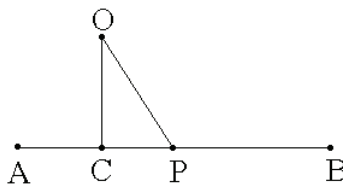
ทฤษฎีบท 10 [Euclid I. 19.]

ในสามเหลี่ยมด้านที่อยู่ด้านตรงข้ามมุมใหญ่มีขนาดยาวกว่าด้านที่อยู่ด้านตรงข้ามมุมเล็ก

ทฤษฎีบท 11 [Euclid I. 20.] ด้านสองด้านของสามเหลี่ยมรวมกันยาวกว่าด้านที่สาม

ทฤษฎีบท 12 O เป็นจุดนอกเส้นตรง AB ในบรรดาเส้นตรงที่ลากจาก O มายังเส้นตรง AB

เส้นที่ตั้งฉากกับ AB จะเป็นเส้นที่สั้นที่สุด เพราะฉะนั้น ถ้า $OC \perp AB$ แล้ว $OC \leq OP$ ทุกจุด P บน AB



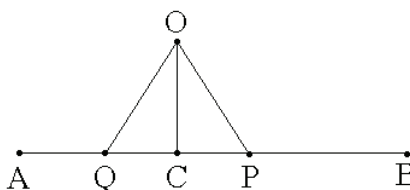
ทฤษฎีบท 12.1 O เป็นจุดอยู่นอกเส้นตรง AB และ C อยู่บน AB

ถ้า OC เป็นเส้นตรงที่สั้นที่สุดที่ลากจาก O มายัง AB แล้ว $OC \perp AB$

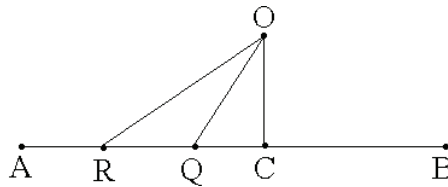
เพราะฉะนั้น ถ้า $OC \leq OP$ ทุกจุด P บน AB แล้ว $OC \perp AB$

ทฤษฎีบท 12.2 C เป็นจุดบนเส้นตรง AB และ O เป็นจุดนอกเส้นตรง AB และ $OC \perp AB$

P, Q เป็นจุดบน AB และอยู่คนละด้านของจุด O โดยที่ $CP = CQ$ จะได้ $OP = OQ$

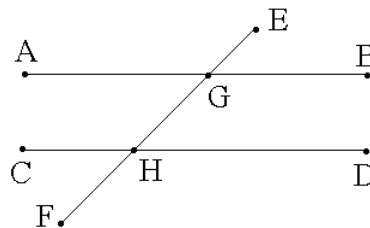


ทฤษฎีบท 12.3 C เป็นจุดบนเส้นตรง AB และ O เป็นจุดนอกเส้นตรง AB และ $OC \perp AB$
 R, Q เป็นจุดบน AB และ $CR > CQ$ จะได้ $OR > OQ$



ทฤษฎีบท 13 [Euclid I. 27. 28.] เส้นตรง EF ตัดเส้นตรง AB และ CD ที่จุด G และ H ตามลำดับ จะได้

1. ถ้า มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้ว AB และ CD ขนานกัน
 ตัวอย่างเช่น ถ้า $\hat{CHG} = \hat{HGB}$ แล้ว AB ขนานกับ CD
2. ถ้า มุมภายนอก และ มุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอกด้านเดียวกันของ EF มีขนาดเท่ากัน
 แล้ว AB และ CD ขนานกัน
 ตัวอย่างเช่น ถ้า $\hat{GHD} = \hat{EGB}$ แล้ว AB ขนานกับ CD
3. ถ้า มุมภายในด้านเดียวกันของ EF รวมกันเท่ากับสองมุมฉาก แล้ว AB และ CD ขนานกัน
 ตัวอย่างเช่น ถ้า $\hat{GHD} + \hat{HGB} = 180^\circ$ แล้ว AB ขนานกับ CD



ทฤษฎีบท 14 เส้นตรง AB และ CD ขนานกัน EF ตัด AB และ CD ที่จุด G และ H ตามลำดับ จะได้

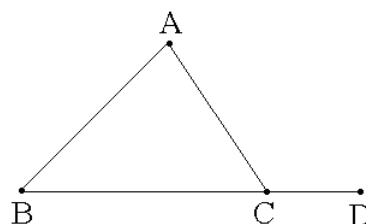
1. มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน ตัวอย่างเช่น $\hat{CHG} = \hat{HGB}$
2. มุมภายนอก และ มุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอกด้านเดียวกันของ EF มีขนาดเท่ากัน
 ตัวอย่างเช่น $\hat{GHD} = \hat{EGB}$
3. มุมภายในด้านเดียวกันของ EF รวมกันเท่ากับสองมุมฉาก
 ตัวอย่างเช่น $\hat{GHD} + \hat{HGB} = 180^\circ$

ทฤษฎีบท 15 [Euclid I. 30.] เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกับเส้นตรงเดียวกันต้องขนานกัน

ทฤษฎีบท 16 [Euclid I. 32.] มุมภายในสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ทฤษฎีบท 16.1 มุมภายนอกของสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของมุมภายในสามเหลี่ยมด้านตรงข้าม

$$\hat{ACD} = \hat{BAC} + \hat{ABC}$$



ทฤษฎีบท 16.2 ผลบวกของมุมภายในสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360°

ทฤษฎีบท 16.3 ผลบวกของมุมภายในรูป n เหลี่ยมเท่ากับ $(n - 2)(180^\circ)$

ทฤษฎีบท 16.4 $A_1A_2 \dots A_n$ เป็นรูป n เหลี่ยมที่มีมุมภายในทุกมุมเล็กกว่า 180°

จะได้ ผลบวกของมุมภายนอกของรูป n เหลี่ยมเท่ากับ 360°

ทฤษฎีบท 16.5 1. สามเหลี่ยมสองรูป ถ้ามีมุมเท่ากันสองมุม แล้ว มุมที่สามของสามเหลี่ยมนั้นต้องเท่ากัน

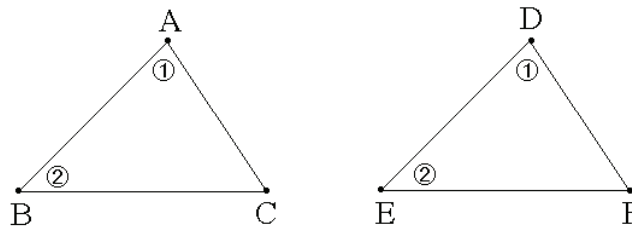
2. สามเหลี่ยมมุมฉาก มุมที่ไม่เป็นมุมฉากทั้งสองมุมรวมกันมีขนาดเท่ากับหนึ่งมุมฉาก

3. ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับมุมที่สาม แล้ว สามเหลี่ยมรูปนั้นต้องเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ทฤษฎีบท 17 [Euclid I. 26.] ถ้า สามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสองมุม และ มีด้านตรงข้ามมุมคู่ที่เท่ากัน

มีความยาวเท่ากัน แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างเช่น $\hat{BAC} = \hat{EDF}$, $\hat{ABC} = \hat{DEF}$ และ $BC = EF$ แล้ว $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ

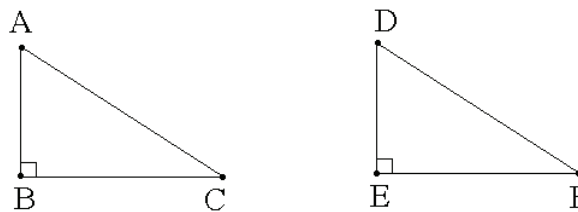


หมายเหตุ การกล่าวอ้างผลของทฤษฎีบทนี้จะใช้คำย่อว่า มุม-มุม-ด้าน หรือ ม.ม.ด.

ทฤษฎีบท 18 ถ้า สามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากันและด้านประกอบมุมฉาก

เท่ากันหนึ่งด้าน แล้ว สามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

ตัวอย่างเช่น $\hat{ABC} = \hat{DEF} = 90^\circ$, $AC = DF$ และ $AB = DE$ แล้ว $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ



หมายเหตุ การกล่าวอ้างผลของทฤษฎีบทนี้จะใช้คำย่อว่า ด้าน-ฉาก-ด้าน หรือ ด.ฉ.ด.

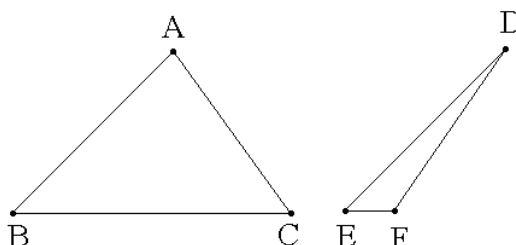
ทฤษฎีบท 19 [Euclid I. 24.] ถ้า สามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน มุมยอดที่เกิดจากด้านคู่่นั้นใน

สามเหลี่ยมรูปที่หนึ่งมีขนาดใหญ่มุมยอดที่เกิดจากด้านคู่่นั้นในสามเหลี่ยมรูปที่สอง

แล้ว ฐานของสามเหลี่ยมซึ่งอยู่ตรงข้ามมุมยอดนั้นของสามเหลี่ยมรูปที่หนึ่งมีขนาดยาวกว่าฐานของ

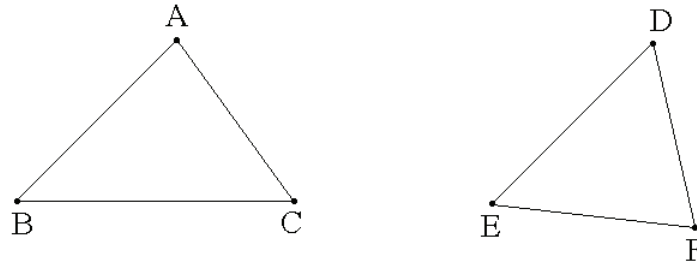
สามเหลี่ยมซึ่งอยู่ตรงข้ามมุมยอดของสามเหลี่ยมรูปที่สอง

ตัวอย่างเช่น ถ้า $AB = DE$, $AC = DF$ และ $\hat{BAC} > \hat{EDF}$ แล้ว $BC > EF$



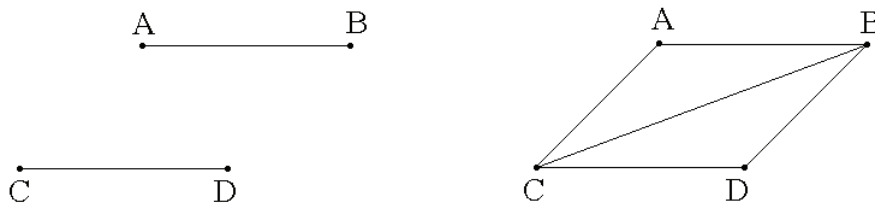
ทฤษฎีบท 19.1 ถ้า สามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสองคู่ ด้านที่สามของสามเหลี่ยมรูปที่หนึ่งยาวกว่าด้านที่สามของสามเหลี่ยมรูปที่สอง แล้ว มุมยอดที่อยู่ตรงข้ามฐานนั้นของสามเหลี่ยมรูปที่หนึ่งมีขนาดใหญ่กว่ามุมยอดของสามเหลี่ยมซึ่งอยู่ตรงข้ามฐานของสามเหลี่ยมรูปที่สอง

ตัวอย่างเช่น ถ้า $AB = DE$, $AC = DF$ และ $BC > EF$ แล้ว $\hat{BAC} > \hat{EDF}$



ทฤษฎีบท 20 [Euclid I. 33.] เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ตัดกันที่เกิดจากการเชื่อมปลายข้างเดียวกันของเส้นขนานสองเส้นซึ่งยาวเท่ากัน ต้องขนานกันและยาวเท่ากัน

ตัวอย่างเช่น ถ้า $AB = CD$ และ AB ขนานกับ CD และ AC ไม่ตัด BD แล้ว $AC = BD$ และ AC ขนานกับ BD



ทฤษฎีบท 21 [Euclid I. 34.] ด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน และ เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทฤษฎีบท 21.1 มุมทุกมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นมุมฉาก

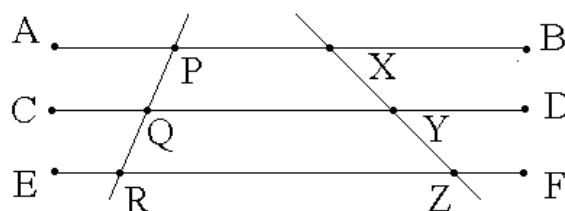
ทฤษฎีบท 21.2 มุมทุกมุมของสี่เหลี่ยมจตุรัสเป็นมุมฉาก และ ด้านทุกด้านของสี่เหลี่ยมจตุรัสยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท 21.3 เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

ทฤษฎีบท 22. ถ้า เส้นขนานสามเส้นแบ่งส่วนของเส้นตัดขวางเส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน

แล้ว เส้นขนานสามเส้น นั้นจะแบ่งเส้นตัดขวางทุกเส้นเป็นระยะทางที่เท่ากัน

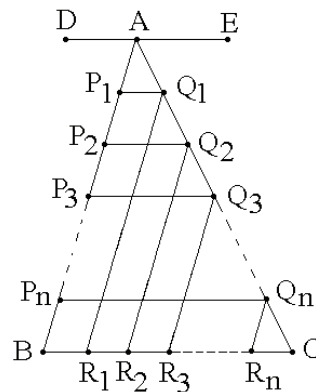
ตัวอย่างเช่น AB , CD , EF ขนานกัน และ $PQ = QR$ แล้ว $XY = YZ$



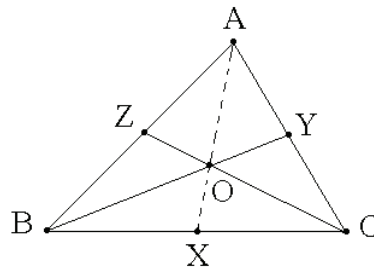
ทฤษฎีบท 22.1 ให้ $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ เป็นจุดบนด้าน AB และ $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ เป็นจุดบนด้าน AC ของ $\triangle ABC$ โดยที่ P_0 และ Q_0 เป็นจุด A และ $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots, P_nQ_n$ ขนานกับ BC และ $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_nB$ จะได้

$$1. AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_nC$$

$$2. P_1Q_1 = \frac{1}{n+1}BC, P_2Q_2 = \frac{2}{n+1}BC, P_3Q_3 = \frac{3}{n+1}BC, \dots, P_nQ_n = \frac{n}{n+1}BC$$



ทฤษฎีบท 22.2 $\triangle ABC$ มีเส้นมัธยฐาน BY และ CZ ตัดกันที่จุด O ต่อส่วนเส้นตรง AO มาตัดด้าน BC ที่ X จะได้ X เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ $\frac{XO}{OA} = \frac{YO}{OB} = \frac{ZO}{OC} = \frac{1}{2}$



หมายเหตุ จุดตัดของเส้นมัธยฐาน เรียกว่า **จุดเซนทรอยด์** (the centroid of the triangle)

เพราะฉะนั้น จุดเซนทรอยด์แบ่งเส้นมัธยฐานออกเป็นสัดส่วน 1 : 2

ทฤษฎีบท 23 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีพื้นที่เท่ากับ (ความกว้าง) $\times$ (ความยาว)

ทฤษฎีบท 23.1 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้างเท่ากันและความยาวเท่ากัน จะต้องมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 23.2 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวเท่ากัน และมีพื้นที่เท่ากัน จะต้องมีความกว้างเท่ากัน

ทฤษฎีบท 24 [Euclid I. 35.]

สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานเดียวกันและอยู่บนด้านคู่ขนานเดียวกัน จะต้องมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 24.1 พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ (ความยาวฐาน) $\times$ (ความสูง)

ทฤษฎีบท 24.2 สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีความยาวฐานเท่ากัน และ มีความสูงเท่ากัน จะต้องมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 25. สามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกันกับสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูงเท่ากัน

จะต้องมีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ทฤษฎีบท 25.1 สามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกันกับสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ อยู่ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน จะมีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมด้านขนาน

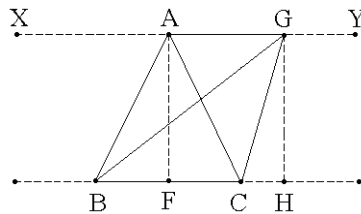
ทฤษฎีบท 25.2 พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}$ (ความยาวฐาน) $\times$ (ความสูง)

ทฤษฎีบท 26 [Euclid I. 37.] สามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกัน และ อยู่ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกันมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 27 [Euclid I. 39.] สามเหลี่ยมสองรูปมีพื้นที่เท่ากันและมีฐานเดียวกัน จุดยอดที่อยู่ข้างเดียวกัน

ของฐานของสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นต้องอยู่ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน

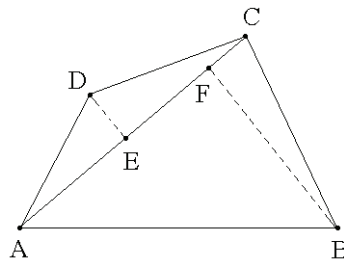
ตัวอย่างเช่น $\triangle ABC$, $\triangle GBC$ มีพื้นที่เท่ากัน จะได้ AG ขนานกับ BC



ทฤษฎีบท 28 พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}$ (ความสูง $\times$ ผลบวกของความยาวด้านคู่ขนาน)

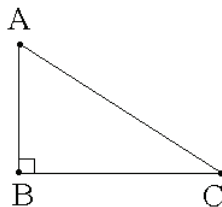
ทฤษฎีบท 28.1 $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า AC เป็นเส้นทแยงมุม $DE \perp AC$ และ $BF \perp AC$

จะได้ พื้นที่ $\square ABCD = \frac{1}{2} AC (DE + BF)$



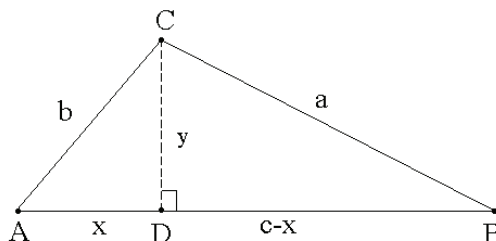
หมายเหตุ ความยาว DE, BF เรียกว่า ระยะจากแยก ของเส้นทแยงมุม AC ใน $\square ABCD$

ทฤษฎีบท 29 [Euclid I. 47.] (Pythagoras's Theorem)



$\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี AB เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก จะได้ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

ทฤษฎีบท 29.1 $\triangle ABC$ มี $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ และ $CD \perp AB$ และ $s = \frac{a+b+c}{2}$



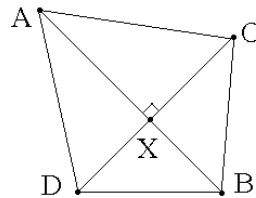
จะได้ 1. $AD = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$

2. $CD = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

3. พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

4. พื้นที่ $\triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

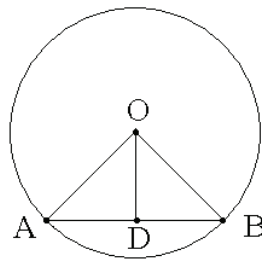
ทฤษฎีบท 29.2 เส้นตรง AB และ CD ตั้งฉากและตัดกันที่จุด X จะได้ $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$



ทฤษฎีบท 30 [Euclid I. 48.]

ถ้า $AB^2 = AC^2 + BC^2$ แล้ว $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\angle C$ เป็นมุมฉาก

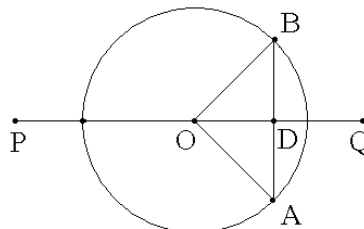
ทฤษฎีบท 31 [Euclid III. 3.] O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ AB เป็นคอร์ดของวงกลมที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง และ D เป็นจุดบนคอร์ด AB



จะได้ 1. ถ้า D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB แล้ว $OD \perp AB$

2. ถ้า $OD \perp AB$ แล้ว D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

ทฤษฎีบท 31.1 O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม AB เป็นคอร์ดของวงกลม จะได้ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับคอร์ด AB และแบ่งครึ่งคอร์ด AB ต้องผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม



ทฤษฎีบท 31.2 เส้นตรงตัดวงกลมได้อย่างมาก 2 จุด

ทฤษฎีบท 32 มีวงกลมเพียงวงเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด 3 จุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎีบท 33 [Euclid III. 9.] ถ้า จุดในวงกลมมีเส้นตรงมากกว่าสองเส้นที่ยาวเท่ากันจากจุดนั้นไปยังเส้นรอบวงกลม แล้ว จุดนั้นต้องเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ทฤษฎีบท 34 [Euclid III. 14.] ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

และ AB, CD เป็นคอร์ดของวงกลม

จะได้ 1. ถ้า $AB = CD$ แล้ว AB, CD ห่างจากจุดศูนย์กลาง O เท่ากัน

2. ถ้า AB, CD ห่างจากจุดศูนย์กลาง O เท่ากัน แล้ว $AB = CD$

ทฤษฎีบท 350 [Euclid III. 15.] O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1

และ AB, CD เป็นคอร์ดของวงกลม Cir_1

F เป็นจุดบน AB และ $OF \perp AB$

และ G เป็นจุดบน CD และ $OG \perp CD$

จะได้ 1. ถ้า $OF < OG$ แล้ว $AB > CD$

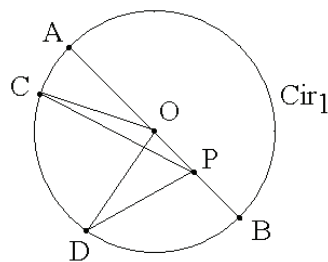
2. ถ้า $AB > CD$ แล้ว $OF < OG$

ทฤษฎีบท 36 O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1

และ P เป็นจุดภายในวงกลม และ ต่อเส้น PO ไปทาง

ด้านจุด O ไปตัดวงกลมที่จุด A และ ต่อเส้นตรง OP ไปทางด้านจุด P ตัดวงกลมที่จุด B

และ C, D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม Cir_1 จะได้



1. $PA > PC$ (กล่าวคือ เส้นตรงที่ลากจาก P ไปยังเส้นรอบวงจะได้ PA เป็นเส้นที่ยาวที่สุด)

2. $PD > PB$ (กล่าวคือ เส้นตรงที่ลากจาก P ไปยังเส้นรอบวงจะได้ PB เป็นเส้นที่สั้นที่สุด)

3. ถ้า $\angle POC > \angle POD$ แล้ว $PC > PD$

ทฤษฎีบท 37 [Euclid III. 8.]

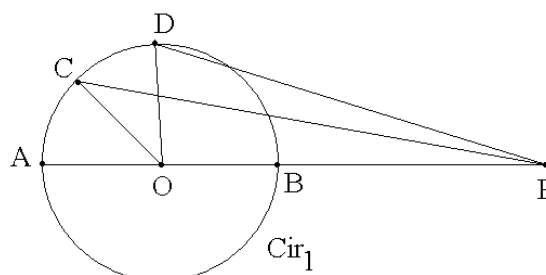
O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ P เป็นจุดภายนอกวงกลม ลากเส้น PO ตัดวงกลมที่จุด B

และ ต่อ PO ไปตัดวงกลมอีกด้านหนึ่งที่จุด A และ C, D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม Cir_1 จะได้

1. $PA > PC$ (กล่าวคือ เส้นตรงที่ลากจาก P ไปยังเส้นรอบวง จะได้ PA เป็นเส้นที่ยาวที่สุด)

2. $PD > PB$ (กล่าวคือ เส้นตรงที่ลากจาก P ไปยังเส้นรอบวง จะได้ PB เป็นเส้นที่สั้นที่สุด)

3. ถ้า $\angle POC > \angle POD$ แล้ว $PC > PD$



ทฤษฎีบท 38 [Euclid III. 20.] O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ A, B, C เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมจะได้ $\widehat{BOC}$ มีขนาดเป็นสองเท่าของ $\widehat{BAC}$

นั่นคือ คอร์ดเดียวกันรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง (ในด้านเดียวกัน)

หรือ ส่วนโค้งเดียวกันรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง (ในด้านเดียวกัน)

ทฤษฎีบท 39 [Euclid III. 21.] ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ B, C เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม A, D เป็นจุดบนส่วนโค้ง BC ด้านเดียวกัน จะได้ $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$

กล่าวโดยง่ายคือ มุมบนส่วนโค้งเดียวกันต้องมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท 39.1 ถ้า $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$

แล้ว ต้องมีวงกลมซึ่งมี BC เป็นคอร์ด และ A, D อยู่บนส่วนโค้งด้านเดียวกันของ BC

ทฤษฎีบท 40 [Euclid III. 22.] มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมรวมกันเท่ากับ 180°

ทฤษฎีบท 40.1

ถ้ามุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180° แล้ว สี่เหลี่ยมนั้นเป็นสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

ทฤษฎีบท 41 [Euclid III. 31.] มุมที่เส้นรอบวงที่รองรับด้วยเส้นผ่านศูนย์กลางมีขนาดเท่ากับ 90°

กล่าวคือ เส้นผ่านศูนย์กลางรองรับมุมที่เส้นรอบวงเท่ากับหนึ่งมุมฉาก

หรือ มุมในส่วนโค้งครึ่งวงกลมมีขนาดเท่ากับหนึ่งมุมฉาก

ทฤษฎีบท 41.1 มุมบนส่วนโค้งที่ยาวกว่าครึ่งวงกลมเป็นมุมแหลม และ มุมบนส่วนโค้งที่สั้นกว่าครึ่งวงกลมเป็นมุมป้าน

ทฤษฎีบท 42 [Euclid III. 26.] วงกลมสองวงที่เท่ากัน จะได้

1. ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่เส้นรอบวงมีขนาดเท่ากัน ต้องมีความยาวส่วนโค้งเท่ากัน
2. ส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน ต้องมีความยาวส่วนโค้งเท่ากัน

ทฤษฎีบท 42.1 วงกลมสองวงที่เท่ากัน จะได้

1. คอร์ดที่รองรับมุมที่เส้นรอบวงมีขนาดเท่ากัน ต้องมีความยาวคอร์ดเท่ากัน
2. คอร์ดที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเท่ากัน ต้องมีความยาวคอร์ดเท่ากัน

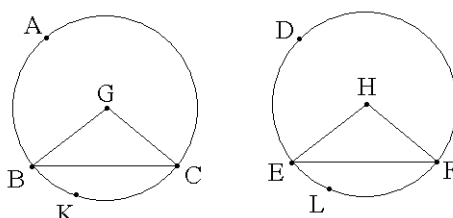
ทฤษฎีบท 43 [Euclid III. 27.] วงกลมสองวงที่เท่ากัน

ส่วนโค้งที่มีความยาวเท่ากัน ต้องรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากันและรองรับมุมที่เส้นรอบวงเท่ากัน

ทฤษฎีบท 43.1 วงกลมสองวงที่เท่ากัน คอร์ดที่มีความยาวเท่ากันต้องรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากันและรองรับมุมที่เส้นรอบวงเท่ากัน

ทฤษฎีบท 44 [Euclid III. 28.] วงกลมที่ผ่านจุด A, B, C และ วงกลมที่ผ่านจุด D, E, F เป็นวงกลมที่เท่ากัน คอร์ด BC ยาวเท่ากับคอร์ด EF จะได้ ส่วนโค้งใหญ่ $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

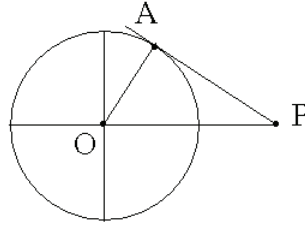
และ ส่วนโค้งน้อย $\widehat{BKC} = \widehat{ELF}$



ทฤษฎีบท 45 [Euclid III. 29.] วงกลมที่ผ่านจุด A, B, C และ วงกลมที่ผ่านจุด D, E, F เป็นวงกลมที่เท่ากัน และ ส่วนโค้งใหญ่ $BAC =$ ส่วนโค้งใหญ่ EDF จะได้ คอร์ด BC ยาวเท่ากับคอร์ด EF

ทฤษฎีบท 46 เส้นสัมผัสวงกลมตั้งฉากกับเส้นรัศมีที่จุดสัมผัส

O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม P เป็นจุดนอกวงกลม และ A เป็นจุดสัมผัส จะได้ $\angle OAP = 90^\circ$



ทฤษฎีบท 46.1

1. ที่จุด P บนเส้นรอบวงของวงกลม มีเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด P เพียงเส้นเดียว
2. ที่จุด P บนเส้นรอบวงของวงกลม เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุด P จะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม
3. เส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ผ่านจุดสัมผัส

ทฤษฎีบท 47 วงกลม Cir_1 มี O เป็นจุดศูนย์กลาง และ T เป็นจุดภายนอกวงกลม Cir_1

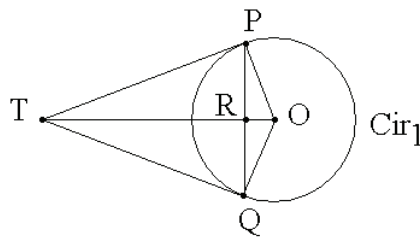
จะได้ มีเส้นสัมผัสวงกลม 2 เส้นเท่านั้นที่ลากจาก T มาสัมผัสวงกลม Cir_1

ทฤษฎีบท 47.1 วงกลม Cir_1 มี O เป็นจุดศูนย์กลาง และ T เป็นจุดภายนอกวงกลม Cir_1

ให้ TP และ TQ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม Cir_1 และ PQ ตัด OT ที่ R

จะได้ $TP = TQ$, $\angle TOP = \angle TOQ$, $PQ \perp OT$ และ $PR = RQ$

และ $\angle PTO = \angle QTO = \frac{1}{2} \angle PTQ$

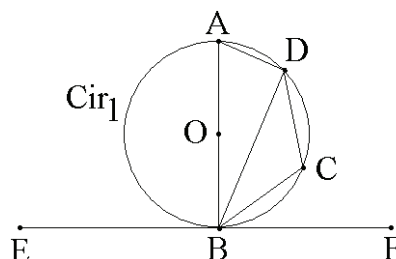


ทฤษฎีบท 48 วงกลมสองวงสัมผัสกันจะได้จุดศูนย์กลางของวงกลมทั้งสองวงและจุดสัมผัสอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

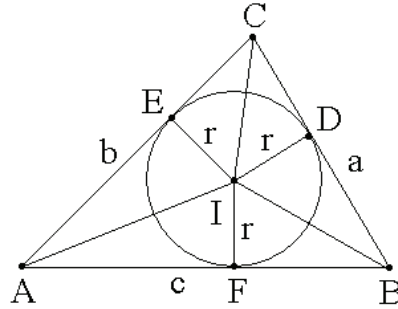
ทฤษฎีบท 49 [Euclid III 32.] วงกลม Cir_1 มี O เป็นจุดศูนย์กลาง EF เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B

และ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ BD เป็นคอร์ดของวงกลม จะได้มุมที่เส้นสัมผัส EF กระทำกับคอร์ด BD มีค่าเท่ากับมุมที่ส่วนโค้งซึ่งรองรับด้วยคอร์ด BD ที่อยู่ด้านตรงข้าม

กล่าวคือ $\angle FBC = \angle BDC$, $\angle EBD = \angle BCD$



ทฤษฎีบท 49.1 ให้ I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ และ r เป็นรัศมีของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$
 ให้ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ และ $\Delta = \Delta_{ABC} = \text{พื้นที่ } \triangle ABC$

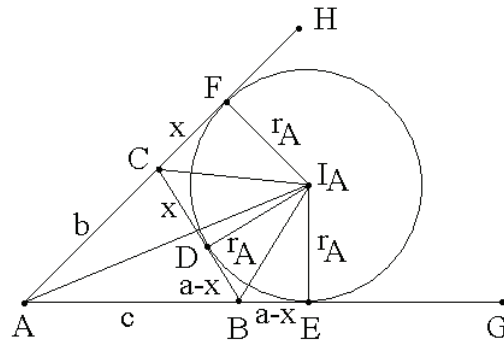


จะได้ 1. $\Delta_{IBC} = \frac{1}{2}ar$, $\Delta_{IAB} = \frac{1}{2}cr$, $\Delta_{IAC} = \frac{1}{2}br$

2. $\Delta = \Delta_{ABC} = sr$ หรือ $r = \frac{\Delta}{s}$

ทฤษฎีบท 49.2 วงกลม ECir_{BC_ABC} เป็นวงกลมแนบนอก $\triangle ABC$ และสัมผัสด้าน BC

และ I_A เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ECir_{BC_ABC} และ r_A เป็นรัศมีของวงกลม ECir_{BC_ABC}

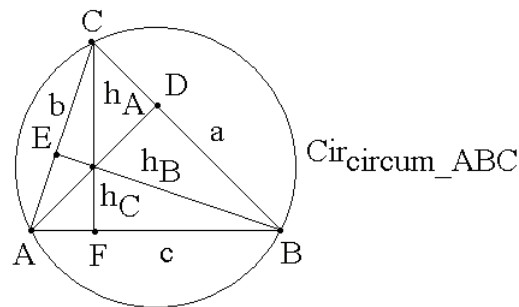


จะได้ 1. $\Delta = \Delta_{ABC} = \text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2}(b+c-a)r_A$

2. $\Delta = \Delta_{ABC} = \text{พื้นที่ } \triangle ABC = (s-a)r_A$ เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$

ทฤษฎีบท 49.3 h_A , h_B , h_C เป็นความสูงของ $\triangle ABC$ ที่ลากจากจุดยอด A , B , C ไปยังฐาน ตามลำดับ

$\text{Cir}_{\text{circum_ABC}}$ เป็นวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ และ R เป็นรัศมีของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$



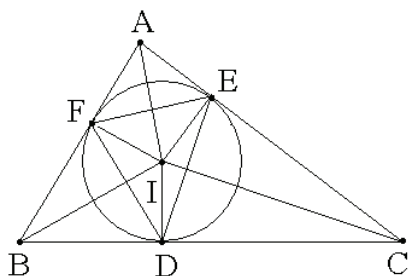
จะได้ 1. $R = \frac{bc}{2h_A} = \frac{ca}{2h_B} = \frac{ab}{2h_C}$

2. $R = \frac{abc}{4\Delta}$ เมื่อ $\Delta = \text{พื้นที่ } \triangle ABC$

หมายเหตุ $\Delta = \Delta_{ABC} = \text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2}ah_A = \frac{1}{2}bh_B = \frac{1}{2}ch_C$

ทฤษฎีบท 49.4 $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$

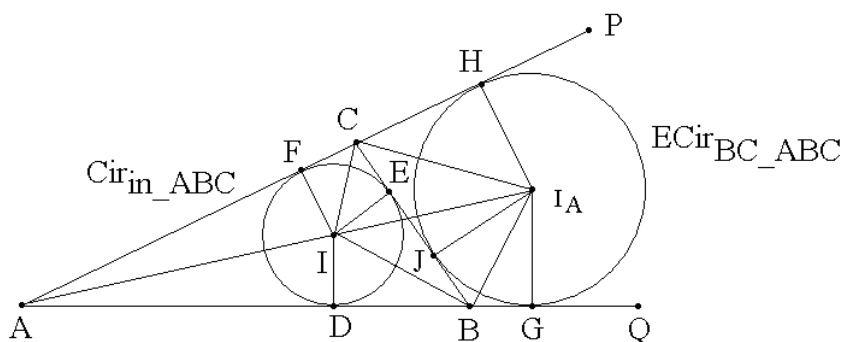
ด้าน BC, CA, AB สัมผัสวงกลมที่จุด D, E, F ตามลำดับ จะได้



มุมภายใน $\triangle DEF$ มีค่า $\widehat{FDE} = 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2}$, $\widehat{DEF} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2}$, $\widehat{EFD} = 90^\circ - \frac{\widehat{ACB}}{2}$

ทฤษฎีบท 49.5 $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ มี I เป็นจุดศูนย์กลางของ $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$

$\text{ECir}_{\text{ABC_BC}}$ เป็นวงกลมแนบนอก $\triangle ABC$ และสัมผัสด้าน BC มี I_A เป็นจุดศูนย์กลางของ $\text{ECir}_{\text{ABC_BC}}$



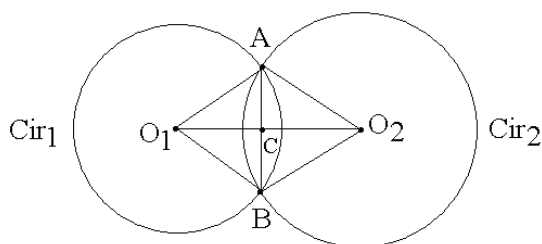
จะได้ 1. $\widehat{BI_A} = 90^\circ$

2. B, C, I_A , I อยู่บนวงกลมเดียวกัน

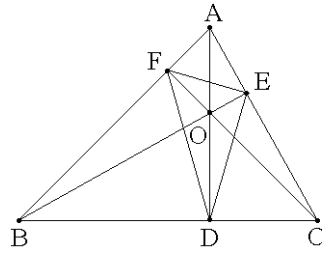
3. A, I, I_A อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ทฤษฎีบท 49.6 O_1, O_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\text{Cir}_1, \text{Cir}_2$ วงกลมทั้งสองตัดกันที่จุด A และ B

ให้ C เป็นจุดตัดของเส้นตรง AB และ O_1O_2 จะได้ $AC = CB$ และ $O_1O_2 \perp AB$



ทฤษฎีบท 49.7 เส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของสามเหลี่ยมมาตั้งฉากกับฐาน มีจุดตัดร่วมกัน



หมายเหตุ

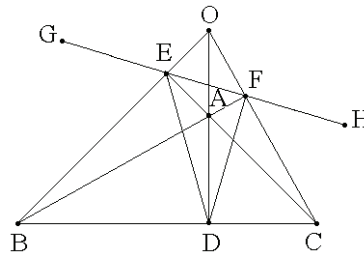
1. จุดตัดร่วมกันของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของสามเหลี่ยมมาตั้งฉากกับฐาน เรียกว่า **จุดออร์โทเซนเตอร์ (orthocentre)**
2. $\triangle DEF$ เรียกว่า **สามเหลี่ยมพีเดล (Pedal triangle)** ของ $\triangle ABC$
3. ในกรณีที่ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน และ $\angle BAC > 90^\circ$ จะได้ จุดออร์โทเซนเตอร์ O ของ $\triangle ABC$ อยู่นอก $\triangle ABC$

ทฤษฎีบท 49.8 $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม $AD \perp BC$, $BE \perp CA$, $CF \perp AB$

และ AD , BE , CF มีจุดตัดร่วมกันที่จุด O จะได้

1. AD แบ่งครึ่งมุม $\angle EDF$, BE แบ่งครึ่งมุม $\angle DEF$ และ CF แบ่งครึ่งมุม $\angle EFD$
2. $\angle EDC = \angle FDB = \angle BAC$, $\angle DEC = \angle FEA = \angle ABC$ และ $\angle DFB = \angle EFA = \angle ACB$
3. $\triangle ABC$, $\triangle BFD$, $\triangle CDE$, $\triangle AEF$ เป็นสามเหลี่ยมมุมเท่า (เพราะฉะนั้นเป็นสามเหลี่ยมคล้าย)

ทฤษฎีบท 49.9 $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน และ $\angle BAC > 90^\circ$ และ $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมพีเดล จะได้ BE แบ่งครึ่งมุมภายนอกของ $\triangle DEF$ และ CF แบ่งครึ่งมุมภายนอกของ $\triangle DEF$

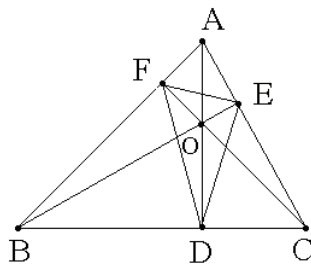


ทฤษฎีบท 49.10 $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม มีจุด D , E , F อยู่บนด้าน BC , CA , AB ตามลำดับ

$AD \perp BC$, $BE \perp CE$, $CF \perp AB$ และ O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$

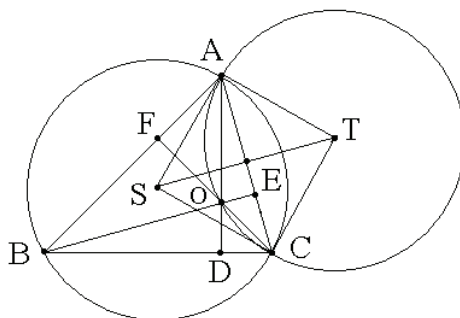
จะได้ A เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle BCO$ และ B เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle ACO$

และ C เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle ABO$

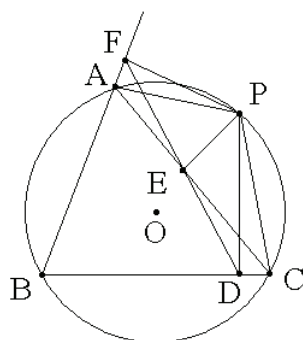


หมายเหตุ ผลที่ได้คือ ถ้า O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$ แล้ว ในบรรดาสี่จุด O , A , B , C จุดหนึ่งจะเป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยสามจุดที่เหลือเป็นจุดยอด

ทฤษฎีบท 49.11 $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม มีจุด D, E, F อยู่บนด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ $AD \perp BC, BE \perp CE, CF \perp AB$ และ O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$
 S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\text{Cir}_{\text{circum_ABC}}$ ซึ่งเป็นวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$
 T เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\text{Cir}_{\text{circum_OAC}}$ ซึ่งเป็นวงกลมล้อมรอบ $\triangle OAC$
 จะได้ $\text{Cir}_{\text{circum_ABC}}$ และ $\text{Cir}_{\text{circum_OAC}}$ มีรัศมีเท่ากัน



ทฤษฎีบท 49.12 (Simson line) P เป็นจุดบนวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ และ D, E, F อยู่บนเส้นตรงที่ผ่าน BC, CA, AB ตามลำดับ และ $PD \perp BC, PE \perp CA, PF \perp AB$ จะได้ D, E, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



หมายเหตุ

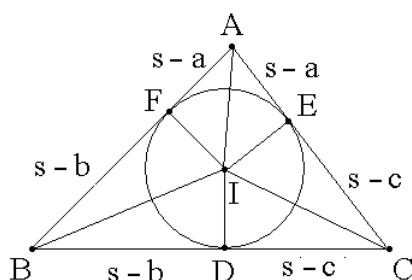
1. เส้นตรงที่ผ่านจุด D, E, F เรียกว่า **เส้นพีแดล (Pedal line)**
 หรือ **เส้นซิมสัน (Simson line)** ของ $\triangle ABC$ สำหรับจุด P
2. ผลจากทฤษฎีบทข้างต้นจะได้ ถ้า P เป็นจุดบนวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$
 และ $PD \perp BC, PF \perp AB$ และ เส้นตรงที่ผ่าน FD ตัดเส้นตรงที่ผ่าน AC ที่จุด E แล้ว $PE \perp AC$

ทฤษฎีบท 49.13 $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ มี $BC = a, CA = b, AB = c$ และ $s = \frac{a+b+c}{2}$

BC, CA, AB สัมผัสวงกลม $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ ที่จุด D, E, F ตามลำดับ

ให้ Δ_{ABC} = พื้นที่ $\triangle ABC$ และ r เป็นรัศมีของวงกลม $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$

จะได้ $AF = AE = s - a, BD = BF = s - b, CD = CE = s - c$ และ $\Delta_{\text{ABC}} = rs$



ทฤษฎีบท 49.14 ECir_{BC_ABC} , ECir_{AB_ABC} , ECir_{AC_ABC} เป็นวงกลมแนบนอก $\triangle ABC$ และสัมผัสด้าน BC , AB , AC ตามลำดับ และ a , b , c เป็นความยาวด้าน BC , AC , AB ตามลำดับ

$$\text{และ } s = \frac{a+b+c}{2}$$

$\Delta = \Delta_{ABC}$ = พื้นที่ $\triangle ABC$ และ BC , CA , AB สัมผัสวงกลม Cir_{in_ABC} ที่จุด D , E , F ตามลำดับ

ให้ ℓ_{AB} , ℓ_{AC} , ℓ_{BC} เป็นเส้นตรงที่ผ่านด้าน AB , AC , BC ตามลำดับ

ℓ_{AB} , ℓ_{AC} , ℓ_{BC} สัมผัสวงกลม ECir_{BC_ABC} ที่จุด F_A , E_A , D_A ตามลำดับ

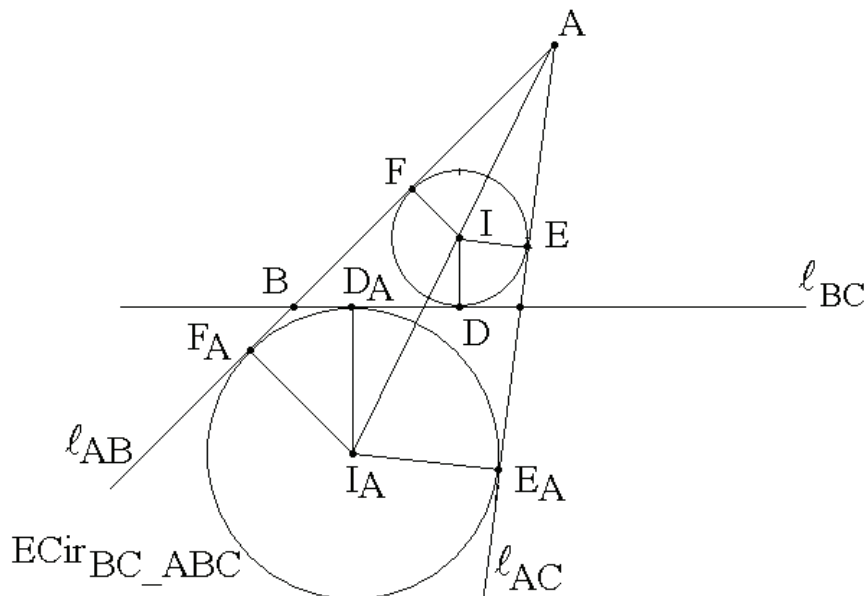
ℓ_{AB} , ℓ_{AC} , ℓ_{BC} สัมผัสวงกลม ECir_{AC_ABC} ที่จุด F_B , E_B , D_B ตามลำดับ

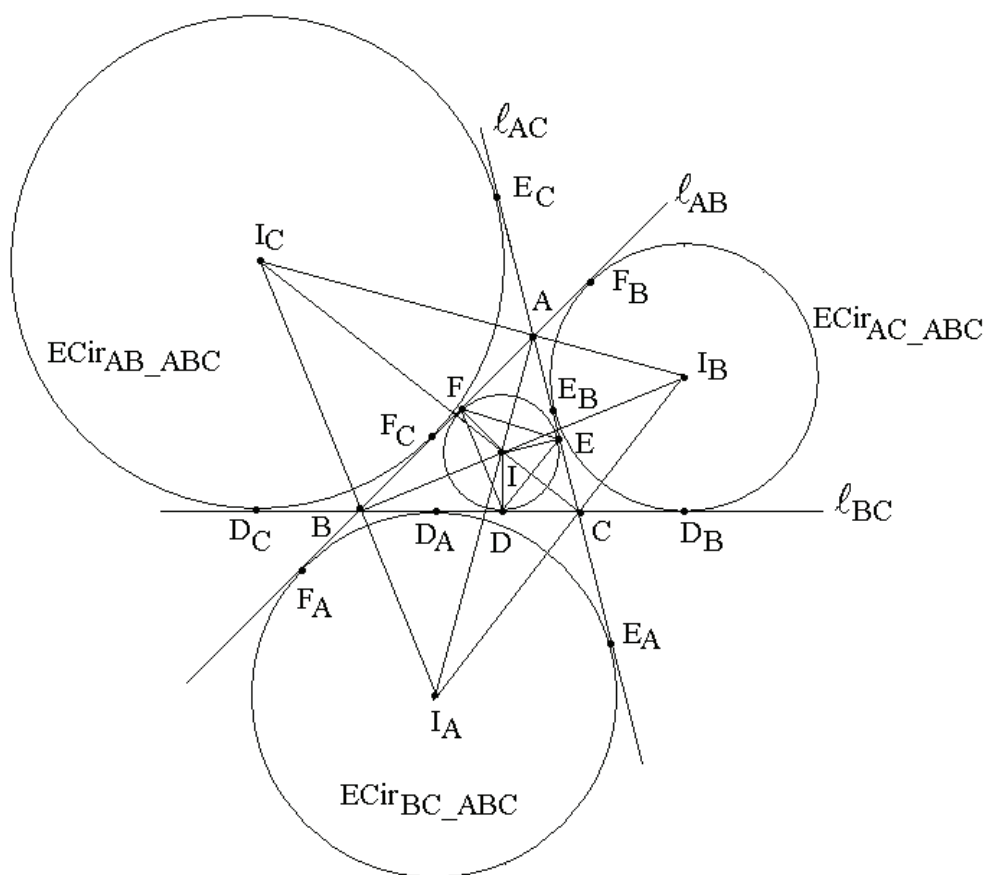
ℓ_{AB} , ℓ_{AC} , ℓ_{BC} สัมผัสวงกลม ECir_{AB_ABC} ที่จุด F_C , E_C , D_C ตามลำดับ

I , I_A , I_B , I_C เป็นจุดศูนย์กลางของ Cir_{in_ABC} , ECir_{BC_ABC} , ECir_{AC_ABC} , ECir_{AB_ABC} ตามลำดับ

r , r_A , r_B , r_C เป็นรัศมีของวงกลม Cir_{in_ABC} , ECir_{BC_ABC} , ECir_{AC_ABC} , ECir_{AB_ABC} ตามลำดับ จะได้

1. $AF_A = AE_A = s$, $BF_B = BD_B = s$ และ $CD_C = CE_C = s$
2. $CD_A = CE_A = s - b$, $CD_B = CE_B = s - a$
3. $BD_A = BF_A = s - c$, $BD_C = BF_C = s - a$
4. $BD_A = CD = s - c$, $CE_B = AE = s - a$ และ $AF_C = BF = s - b$
5. $FF_A = EE_A = a$, $FF_B = DD_B = b$ และ $DD_C = EE_C = c$
6. A , I , I_A อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
7. $\Delta_{ABC} = rs = r_A(s - a)$, $\Delta_{ABC} = r_B(s - b)$ และ $\Delta_{ABC} = r_C(s - c)$
8. $D_AD_C = b$, $D_AD_B = c$, $D_BD_C = b + c$ และ $F_AF_C = b$, $F_CF_B = a$, $F_AF_B = a + b$
 $E_AE_B = c$, $E_BE_C = a$, $E_AE_C = a + c$
9. $DD_A = |b - c|$, $EE_B = |a - c|$ และ $FF_C = |a - b|$
10. $rr_A r_B r_C = \Delta_{ABC}^2$





ทฤษฎีบท 49.15 $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\hat{ACB} = 90^\circ$ ให้ $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ และ $\text{ECir}_{\text{BC_ABC}}$ เป็นวงกลมแนบนอก $\triangle ABC$ และสัมผัสด้าน BC

a, b, c เป็นความยาวด้าน BC, AC, AB ตามลำดับ และ $s = \frac{a+b+c}{2}$

ให้ BC, CA, AB สัมผัสวงกลม $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ ที่จุด D, E, F ตามลำดับ

ให้ l_{AB}, l_{AC} เป็นเส้นตรงที่ผ่านด้าน AB, AC ตามลำดับ

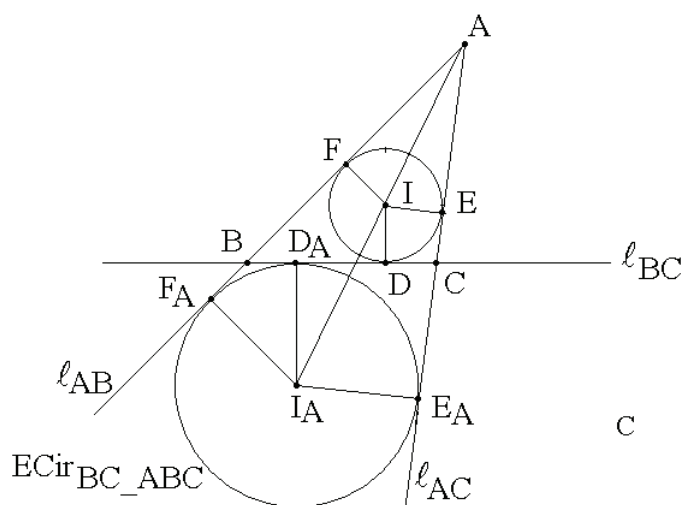
l_{AB}, l_{AC}, l_{BC} สัมผัสวงกลม $\text{ECir}_{\text{BC_ABC}}$

ที่จุด F_A, E_A, D_A ตามลำดับ

r เป็นรัศมีวงกลม $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$

r_A เป็นรัศมีวงกลม $\text{ECir}_{\text{BC_ABC}}$

จะได้ $r = s - c$ และ $r_A = s - b$



ทฤษฎีบท 49.16 $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$

$\text{ECir}_{\text{BC_ABC}}, \text{ECir}_{\text{AB_ABC}}, \text{ECir}_{\text{AC_ABC}}$ เป็นวงกลมแนบนอก $\triangle ABC$ และสัมผัสด้าน BC, AB, AC

ตามลำดับ มี $BC = a, AC = b, AB = c$ และ $s = \frac{a+b+c}{2}$

BC, CA, AB สัมผัสวงกลม $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ ที่จุด D, E, F ตามลำดับ

ให้ l_{AB}, l_{AC}, l_{BC} เป็นเส้นตรงที่ผ่านด้าน AB, AC, BC ตามลำดับ

l_{AB}, l_{AC}, l_{BC} สัมผัสวงกลม ECir_{BC_ABC} ที่จุด F_A, E_A, D_A ตามลำดับ

l_{AB}, l_{AC}, l_{BC} สัมผัสวงกลม ECir_{AC_ABC} ที่จุด F_B, E_B, D_B ตามลำดับ

l_{AB}, l_{AC}, l_{BC} สัมผัสวงกลม ECir_{AB_ABC} ที่จุด F_C, E_C, D_C ตามลำดับ

I, I_A, I_B, I_C เป็นจุดศูนย์กลางของ $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}, \text{ECir}_{BC_ABC}, \text{ECir}_{AC_ABC}, \text{ECir}_{AB_ABC}$ ตามลำดับ

r, r_A, r_B, r_C เป็นรัศมีของวงกลม $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}, \text{ECir}_{BC_ABC}, \text{ECir}_{AC_ABC}, \text{ECir}_{AB_ABC}$ ตามลำดับ

จะได้ 1. A, I, I_A อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ B, I, I_B อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

และ C, I, I_C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

2. $I_A A \perp I_B I_C, I_B B \perp I_A I_C$ และ $I_C C \perp I_A I_C$

3. I_B, A, I_C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ I_C, B, I_A อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

และ I_A, C, I_B อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

4. $\triangle B I_A C, \triangle C I_B A, \triangle A I_C B$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย และ คล้ายกับ $\triangle I_A I_B I_C$

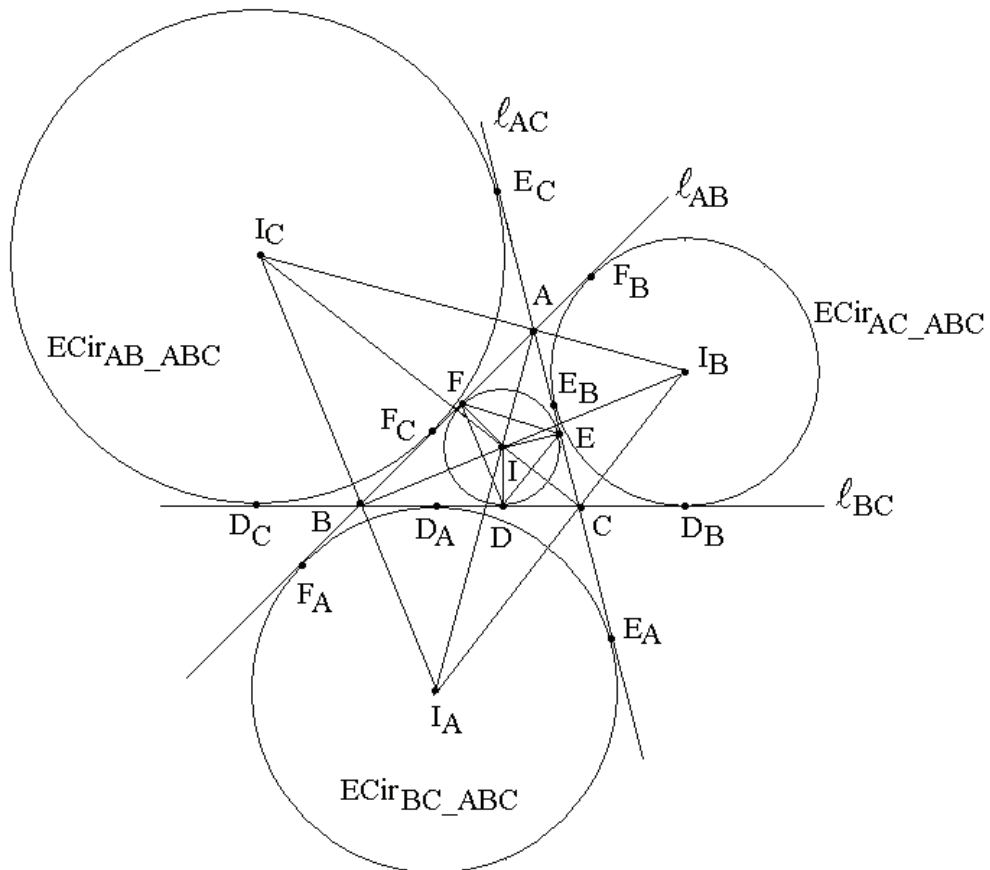
5. $\triangle I_A I_B I_C$ และ $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

6. จุดหนึ่งจุดในบรรดา I, I_A, I_B, I_C

จะเป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยจุดยอดสามจุดที่เหลือ

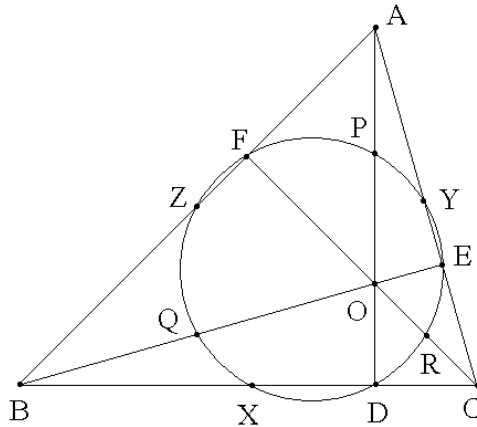
7. วงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยจุดยอดสามจุดจาก I, I_A, I_B, I_C

จะเป็นวงกลมที่มีรัศมียาวเท่ากัน



ทฤษฎีบท 50 วงกลมเก้าจุด (The Nine-points circle)

$\triangle ABC$ มี X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ D, E, F เป็นจุดบนด้าน BC, CA, AB ที่ทำให้ $AD \perp BC, BE \perp CA, CF \perp AB$ ให้ O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ (จุดตัดร่วมกันของเส้นตรง AD, BE, CF) ให้ P, Q, R เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AO, BO, CO ตามลำดับ จะได้ จุด 9 จุด คือ $D, E, F, X, Y, Z, P, Q, R$ อยู่บนวงกลมเดียวกัน



หมายเหตุ วงกลมที่ได้เรียกว่า **วงกลมเก้าจุด (Nine-points circle)** ของ $\triangle ABC$

ต่อไปเราใช้สัญลักษณ์แทนด้วย Cir_9_ABC

เพราะว่า $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมพีเดลของ $\triangle ABC$

เพราะฉะนั้น วงกลมเก้าจุดและวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยมพีเดลเป็นวงกลมเดียวกัน

ทฤษฎีบท 51 $\triangle ABC$ มี X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ

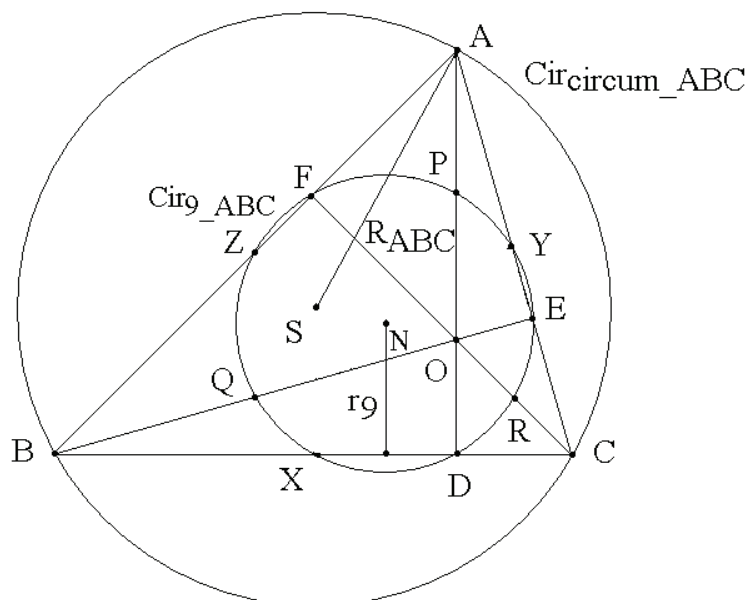
D, E, F เป็นจุดบนด้าน BC, CA, AB ที่ทำให้ $AD \perp BC, BE \perp CA, CF \perp AB$

ให้ O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ (จุดตัดร่วมกันของเส้นตรง AD, BE, CF)

ให้ $Circum_ABC$ เป็นวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ และ S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $Circum_ABC$

ให้ P, Q, R เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AO, BO, CO ตามลำดับ ให้ N เป็นจุดกึ่งกลางของ OS

จะได้ N เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมเก้าจุด (Cir_9_ABC) ของ $\triangle ABC$



ทฤษฎีบท 52 $\triangle ABC$ มี X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ

D, E, F เป็นจุดบนด้าน BC, CA, AB ที่ทำให้ $AD \perp BC, BE \perp CA, CF \perp AB$

ให้ $\text{Cir}_{\text{circum_ABC}}$ เป็นวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ และ S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\text{Cir}_{\text{circum_ABC}}$

ให้ O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ (จุดตัดร่วมกันของเส้นตรง AD, BE, CF)

ให้ P, Q, R เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AO, BO, CO ตามลำดับ

จะได้ รัศมีของวงกลมเก้าจุด Cir_9_ABC ของ $\triangle ABC$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ (รัศมีของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$)

บทแทรก 52.1 รัศมีของวงกลมที่ผ่านจุดกึ่งกลางของด้านของสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากับ ครึ่งหนึ่งของรัศมีของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$

ทฤษฎีบท 53 $\triangle ABC$ มี X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ

D, E, F เป็นจุดบนด้าน BC, CA, AB ที่ทำให้ $AD \perp BC, BE \perp CA, CF \perp AB$

ให้ O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ (จุดตัดร่วมกันของเส้นตรง AD, BE, CF)

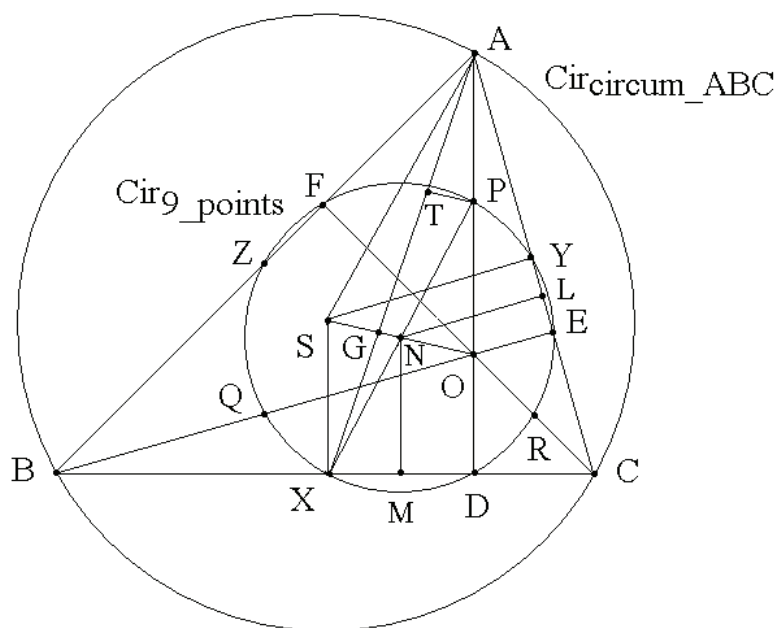
ให้ P, Q, R เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AO, BO, CO ตามลำดับ

$\text{Cir}_{\text{circum_ABC}}$ เป็นวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ และ S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\text{Cir}_{\text{circum_ABC}}$

ให้ S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$, G เป็นจุดเซนทรอยด์ของ $\triangle ABC$,

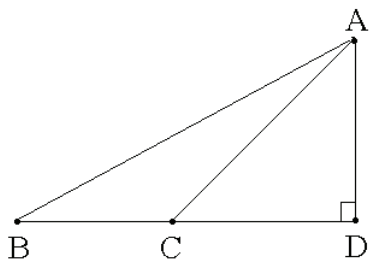
N เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมเก้าจุดของ $\triangle ABC$ และ O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$

จะได้ S, G, N, O อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

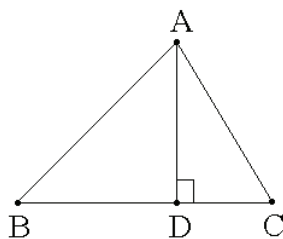


ทฤษฎีบท 54 [Euclid II. 12.] $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน มี $\angle C$ เป็นมุมป้าน

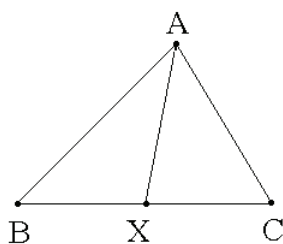
ต่อด้าน BC ไปที่จุด D และ $AD \perp BD$ จะได้ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2 BC CD$



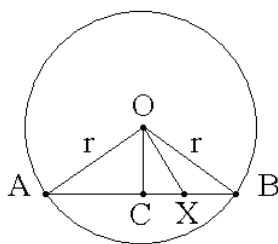
ทฤษฎีบท 55 [Euclid II. 13.] $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม D อยู่บนด้าน BC และ $AD \perp BC$
จะได้ $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 BC CD$



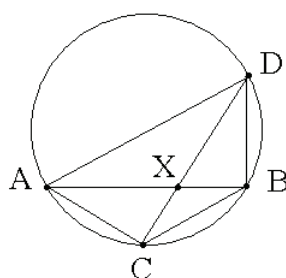
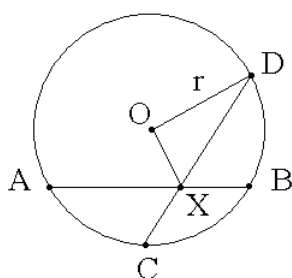
ทฤษฎีบท 56 $\triangle ABC$ มี AX เป็นเส้นมัธยฐาน จะได้ $AB^2 + AC^2 = 2 BX^2 + 2 AX^2$



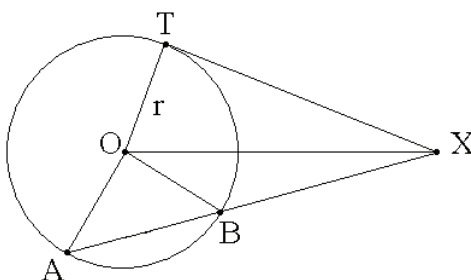
ทฤษฎีบท 56.1 [Euclid III. 35.] AB เป็นคอร์ดของวงกลม ซึ่งมีรัศมีเท่ากับ r และ X เป็นจุดบนคอร์ด AB
จะได้ $AX \cdot XB = r^2 - OX^2$



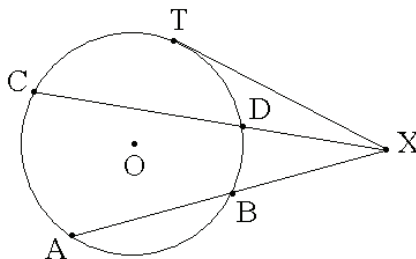
ทฤษฎีบท 57 [Euclid III. 35.] AB และ CD เป็นคอร์ดของวงกลม และตัดกันที่จุด X
จะได้ $AX \cdot XB = CX \cdot XD$ และ $\triangle AXC$, $\triangle BXD$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย



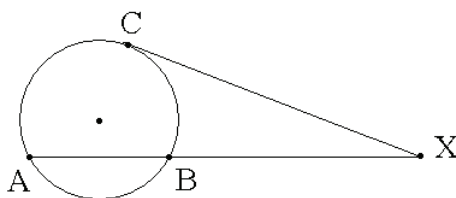
ทฤษฎีบท 57.1 O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม X เป็นจุดภายนอกวงกลมซึ่งมีรัศมีเท่ากับ r
จากจุด X ลากเส้นตรงมาสัมผัสวงกลมที่จุด T และ จากจุด X ลากเส้นตรงมาตัดวงกลมที่จุด A และ B
จะได้ $XA \cdot XB = XT^2 = OX^2 - r^2$



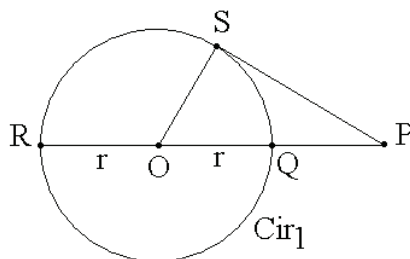
ทฤษฎีบท 58 [Euclid III. 36.] AB, CD เป็นคอร์ดของวงกลม ซึ่งตัดกันนอกวงกลมที่จุด X และ XT เป็นเส้นสัมผัสวงกลม จะได้ $XA \cdot XB = XC \cdot XD = XT^2$



ทฤษฎีบท 59 [Euclid III. 37.] X เป็นจุดภายนอกวงกลม ลากเส้นตรง XA มาตัดวงกลมที่จุด A และ B ลากเส้นตรง XC มาตัดวงกลมที่จุด C และ $XA \cdot XB = XC^2$ จะได้ XC เป็นเส้นสัมผัส



ทฤษฎีบท 59.1 P เป็นจุดภายนอกวงกลม Cir_1 ที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด O และมีรัศมี r และ PS เป็นเส้นสัมผัสวงกลม จะได้ (ระยะไกลสุดของจุด P กับวงกลม) $\times$ (ระยะใกล้สุดของจุด P กับวงกลม) = PS^2 ให้เส้นตรงผ่าน PO ตัดวงกลมที่ R, Q จะได้ $PR \cdot PQ = PS^2$

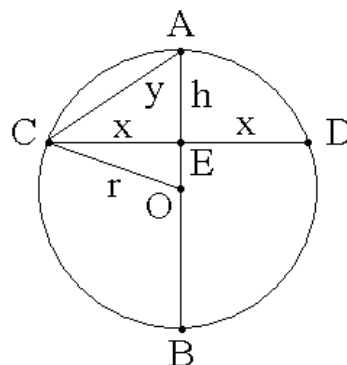


ทฤษฎีบท 59.2 AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง และ วงกลมมีรัศมี r CD เป็นคอร์ดที่ตัดและตั้งฉากกับ AB ที่จุด E

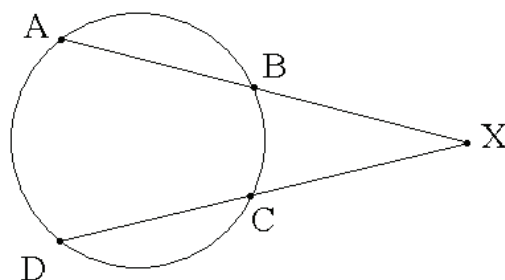
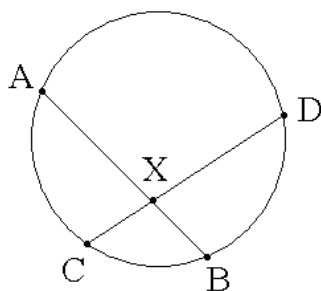
ให้ $CE = ED = x$ และ $AC = y$

และ ความสูงของส่วนโค้งน้อย CD มีค่าเท่ากับ $AE = h$

- จะได้
1. $x^2 = h(2r - h)$
 2. $CD = 2\sqrt{h(2r - h)}$
 3. $r = \frac{x^2 + h^2}{2h}$
 4. $h = r - \sqrt{r^2 - x^2}$
 5. $y^2 = 2rh$



ทฤษฎีบท 59.3 AB และ CD ตัดกันที่จุด X และ $AX \cdot XB = CX \cdot XD$ จะได้ A, B, C, D อยู่บนวงกลมเดียวกัน



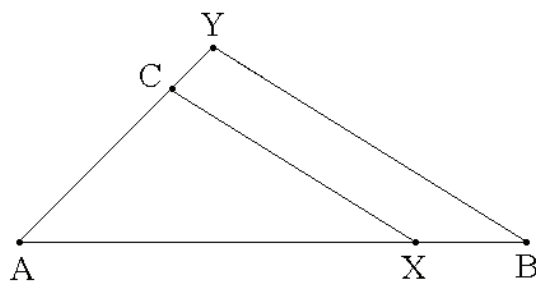
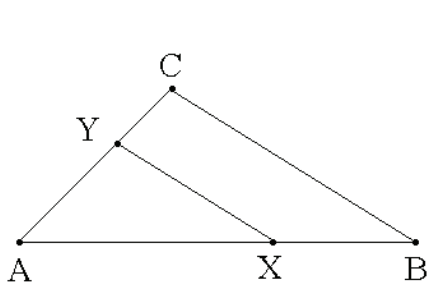
ทฤษฎีบท 59.4 AB และ CD ตัดกันที่จุด X และ $XA : XC = XD : XB$

จะได้ 1. $\triangle AXD$, $\triangle CXB$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

2. A, B, C, D อยู่บนวงกลมเดียวกัน

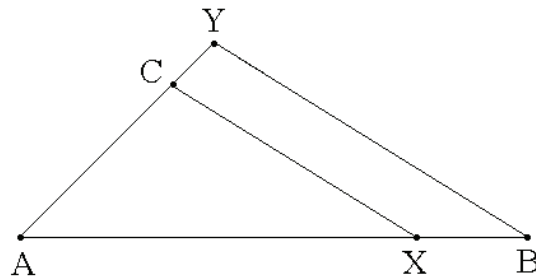
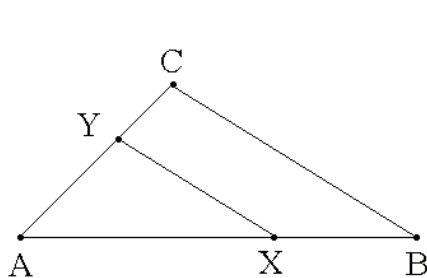
ทฤษฎีบท 60 [Euclid VI. 2.] ให้ X เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่านด้าน AB

Y เป็นจุดเส้นตรงที่ผ่านบนด้าน AC ของ $\triangle ABC$ และ XY ขนานกับ BC จะได้ $AX : XB = AY : YC$



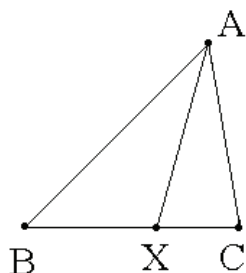
ทฤษฎีบท 60.1 ให้ X เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่านด้าน AB

Y เป็นจุดเส้นตรงที่ผ่านบนด้าน AC ของ $\triangle ABC$ และ $AX : XB = AY : YC$ จะได้ XY ขนานกับ BC



ทฤษฎีบท 61 [Euclid VI. 3 and A.] $\triangle ABC$ มี X เป็นจุดบน BC

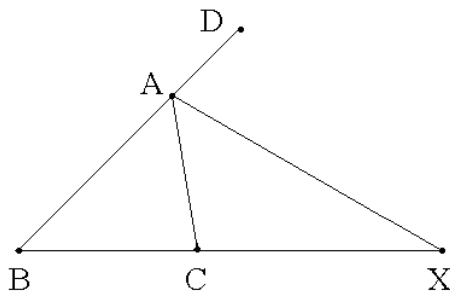
จะได้ AX แบ่งครึ่งมุม $\angle BAC$ ก็ต่อเมื่อ $BX : XC = AB : AC$



ทฤษฎีบท 61.1 [Euclid VI. 3 and A.] $\triangle ABC$ มี X เป็นจุดเส้นตรงที่ผ่านด้าน BC

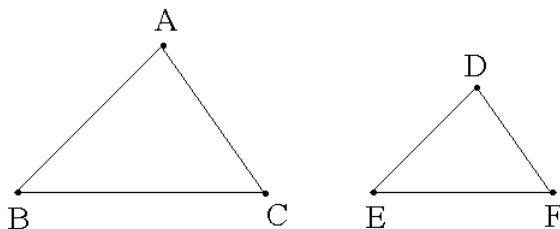
และ CAD เป็นมุมภายนอกของ $\triangle ABC$ จะได้

AX แบ่งครึ่งมุมภายนอก CAD ก็ต่อเมื่อ $BX : XC = AB : AC$



ทฤษฎีบท 62 [Euclid VI. 4.] $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย มี $\hat{BAC} = \hat{EDF}$, $\hat{ABC} = \hat{DEF}$

และ $\hat{BCA} = \hat{EFD}$ จะได้ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$

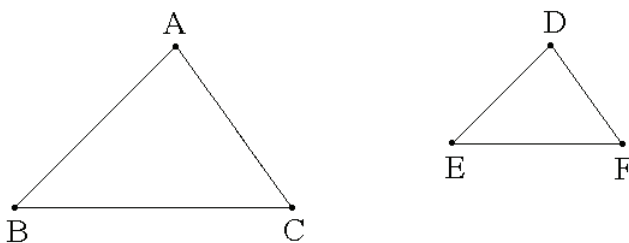


ทฤษฎีบท 63 [Euclid VI. 4.] $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $AB : DE = BC : EF = CA : FD$

จะได้ $\hat{BAC} = \hat{EDF}$, $\hat{ABC} = \hat{DEF}$ และ $\hat{BCA} = \hat{EFD}$ กล่าวคือ $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

ทฤษฎีบท 64 [Euclid VI. 6.] $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $\hat{BAC} = \hat{EDF}$ และ $AB : DE = AC : DF$

จะได้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย



ทฤษฎีบท 65 [Euclid VI. 7.] $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $\hat{ABC} = \hat{DEF}$ และ $AB : DE = AC : DF$

จะได้ $\hat{ACB} = \hat{DFE}$ หรือ $\hat{ACB} = 180^\circ - \hat{DFE}$

ทฤษฎีบท 65.1 $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย และ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$

h_A , h_B , h_C เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$ ที่วัดจากจุดยอด A , B , C ไปยังฐาน ตามลำดับ

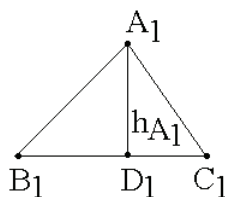
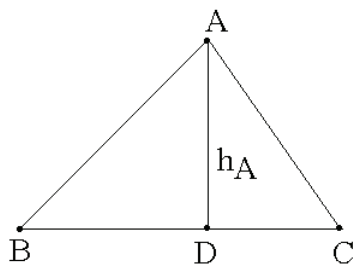
h_{A_1} , h_{B_1} , h_{C_1} เป็นส่วนสูงของ $\triangle A_1B_1C_1$ ที่วัดจากจุดยอด A_1 , B_1 , C_1 ไปยังฐาน ตามลำดับ

R , R_1 เป็นรัศมีของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ ตามลำดับ

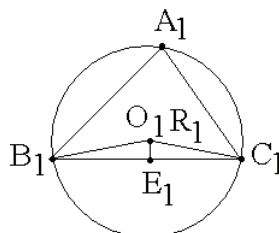
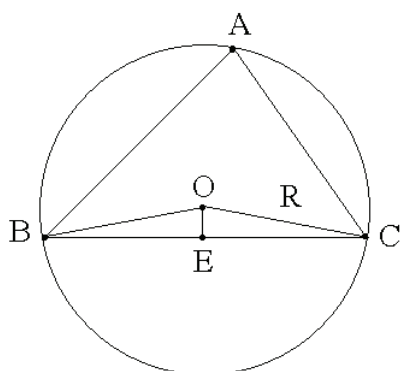
r , r_1 เป็นรัศมีของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ ตามลำดับ

จะได้

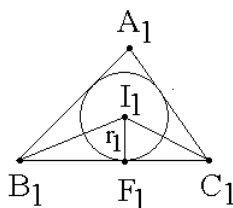
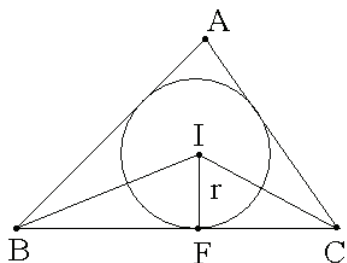
$$1. \frac{h_A}{h_{A_1}} = \frac{h_B}{h_{B_1}} = \frac{h_C}{h_{C_1}} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$$



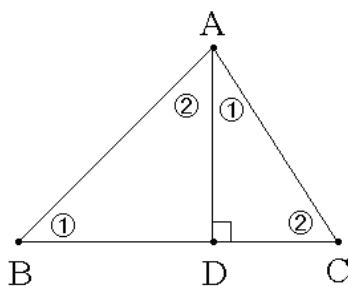
$$2. \frac{R}{R_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$$



$$3. \frac{r}{r_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$$



ทฤษฎีบท 66 [Euclid VI. 8.] $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\angle BAC = 90^\circ$ และ $AD \perp BC$



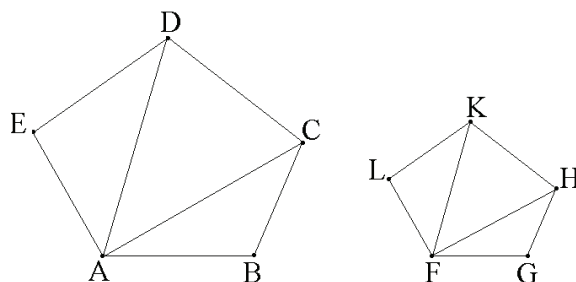
จะได้ 1. $\triangle BDA, \triangle ADC$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย และ $AD^2 = BD \cdot CD$

2. $\triangle BAC, \triangle ADC$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย และ $AC^2 = BC \cdot DC$

3. $\triangle BDA, \triangle BAC$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย และ $AB^2 = CB \cdot BD$

หมายเหตุ ในกรณี $AD^2 = BD \cdot CD$ เรากล่าวว่า AD เป็นค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ BD, CD

ทฤษฎีบท 67 ABCDE และ FGHLK เป็นรูปห้าเหลี่ยมคล้าย โดยมีจุดยอด A, B, C, D, E สมัยกับจุดยอด F, G, H, K, L ตามลำดับ



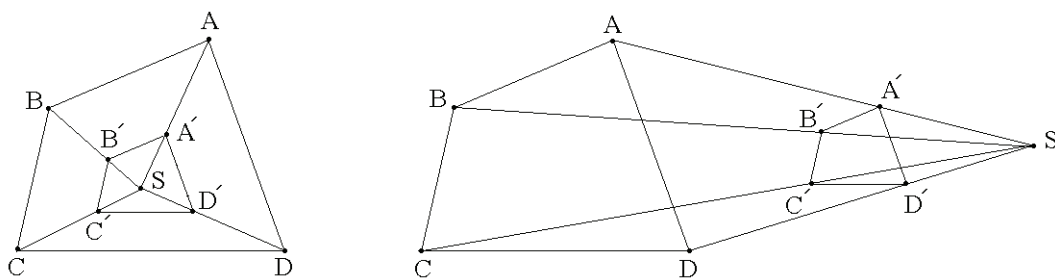
- จะได้
1. $\triangle ABC, \triangle FGH$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย
 2. $\triangle ACD, \triangle FHK$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย
 3. $\triangle ADE, \triangle FKL$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย
 4. $AB : FG = AC : FH = AD : FK$

ทฤษฎีบท 67.1 $A_1A_2 \dots A_n$ และ $B_1B_2 \dots B_n$ เป็นรูป n เหลี่ยมคล้าย

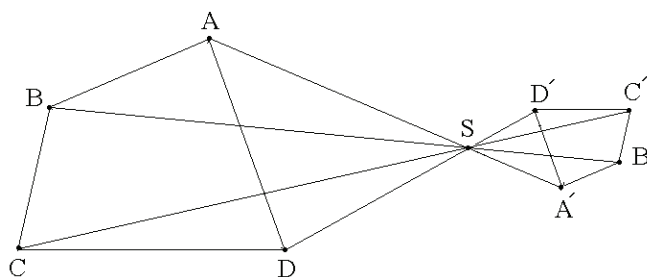
โดยมีจุดยอด $A_1, A_2, \dots, A_n$ สมัยกับจุดยอด $B_1, B_2, \dots, B_n$ ตามลำดับ

- จะได้
1. $\triangle A_1A_iA_{i+1}, \triangle B_1B_iB_{i+1}$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย ทุกค่า $i = 2, 3, 4, \dots, n - 1$
 2. $A_1A_2 : B_1B_2 = A_1A_i : B_1B_i$ ทุกค่า $i = 2, 3, 4, \dots, n - 1$

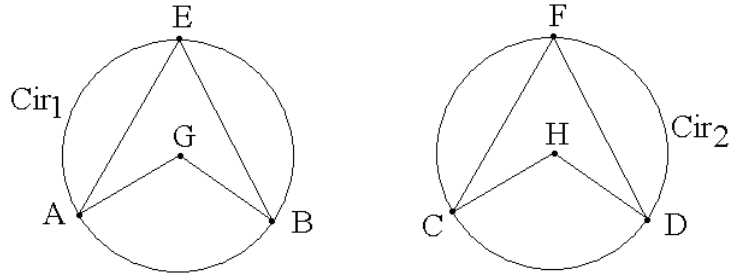
ทฤษฎีบท 68 ABCD และ $A'B'C'D'$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมคล้าย โดยมีจุดยอด A, B, C, D สมัยกับจุดยอด A', B', C', D' ตามลำดับ สามารถวางตำแหน่งให้เส้นตรงที่ผ่านจุดยอดที่สมัยกันมีจุดตัดร่วมกัน



หมายเหตุ การวางตำแหน่งของ ABCD และ $A'B'C'D'$ สามารถทำให้อีกแบบหนึ่งคือ



ทฤษฎีบท 69 [Euclid VI. 33.] วงกลม Cir_1 , Cir_2 มี G, H เป็นจุดศูนย์กลางตามลำดับ และเป็นวงกลมที่มีรัศมีเท่ากัน จุด A, B, E เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม Cir_1
จุด C, D, F เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม Cir_2

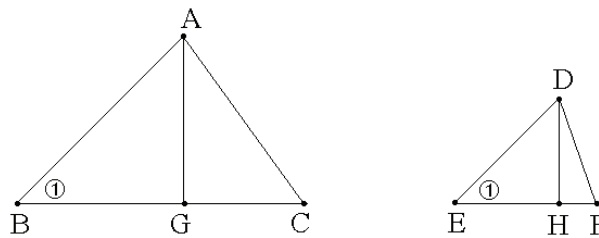


จะได้ 1. $\angle AGB : \angle CHD = \text{ความยาวส่วนโค้งน้อย } AB : \text{ความยาวส่วนโค้งน้อย } CD$
2. $\angle AEB : \angle CFD = \text{ความยาวส่วนโค้งน้อย } AB : \text{ความยาวส่วนโค้งน้อย } CD$

ทฤษฎีบท 70 [Euclid VI. 1.] $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ มีความสูงที่วัดจากจุดยอด C มายังฐาน AB และ ความสูงที่วัดจากจุดยอด F มายังฐาน DE มีขนาดเท่ากัน

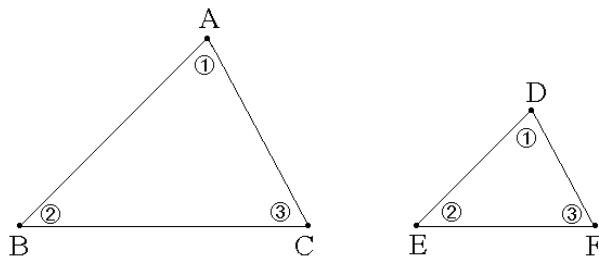
จะได้ พื้นที่ $\triangle ABC : \text{พื้นที่ } \triangle DEF = AB : DE$

ทฤษฎีบท 71 $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ มี $\angle B = \angle E$ จะได้ พื้นที่ $\triangle ABC : \text{พื้นที่ } \triangle DEF = BC \cdot AB : EF \cdot DE$



ทฤษฎีบท 72 [Euclid VI. 19.] $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

มี AB, BC, CA กับ DE, EF, FD สมนัยกันตามลำดับ จะได้ $\frac{\text{Area} \triangle ABC}{\text{Area} \triangle DEF} = \frac{AB^2}{DE^2} = \frac{BC^2}{EF^2} = \frac{CA^2}{FD^2}$

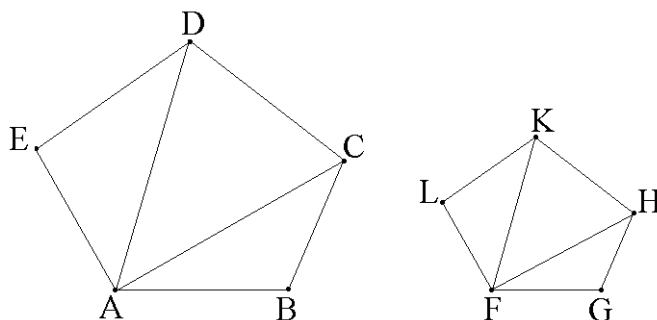


ทฤษฎีบท 73 [Euclid VI. 20.] $ABCDE$ และ $FGHKL$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมคล้าย

โดยมีจุดยอด A, B, C, D, E สมนัยกับจุดยอด F, G, H, K, L ตามลำดับ

ให้ $\text{Area}[ABCDE]$, $\text{Area}[FGHKL]$ เป็นพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยม $ABCDE$ และ $FGHKL$ ตามลำดับ

จะได้ $\frac{\text{Area}[ABCDE]}{\text{Area}[FGHKL]} = \frac{AB^2}{FG^2} = \frac{BC^2}{GH^2} = \frac{CD^2}{HK^2} = \frac{DE^2}{KL^2} = \frac{EA^2}{LF^2}$



ทฤษฎีบท 73.1 $A_1A_2 \dots A_n$ และ $B_1B_2 \dots B_n$ เป็นรูป n เหลี่ยมคล้าย

โดยมีจุดยอด $A_1, A_2, \dots, A_n$ สมนัยกับจุดยอด $B_1, B_2, \dots, B_n$ ตามลำดับ

$$\text{จะได้ } \frac{\text{Area}[A_1A_2A_3 \dots A_n]}{\text{Area}[B_1B_2B_3 \dots B_n]} = \frac{A_1A_2^2}{B_1B_2^2} = \frac{A_2A_3^2}{B_2B_3^2} = \dots = \frac{A_nA_1^2}{B_nB_1^2}$$

ทฤษฎีบท 74 $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{BAC}$ เป็นมุมฉาก จะได้

1. พื้นที่วงกลมที่มี BC เป็นรัศมี

เท่ากับ ผลบวกของ พื้นที่วงกลมที่มี AB และ AC เป็นรัศมี

2. พื้นที่วงกลมที่มี BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

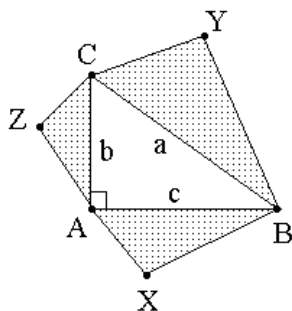
เท่ากับ ผลบวกของ พื้นที่วงกลมที่มี AB และ AC เส้นผ่านศูนย์กลาง

ทฤษฎีบท 74.1 $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{BAC}$ เป็นมุมฉาก

1. พื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่าบนด้าน BC เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่สามเหลี่ยมด้านเท่าบนด้าน AB, AC
2. พื้นที่ของหกเหลี่ยมด้านเท่าบนด้าน BC เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่หกเหลี่ยมด้านเท่าบนด้าน AB, AC
3. พื้นที่ของรูป n เหลี่ยมด้านเท่าบนด้าน BC เท่ากับ ผลบวกของพื้นที่รูป n เหลี่ยมด้านเท่าบนด้าน AB, AC

บนด้าน AB, AC

ทฤษฎีบท 74.2 $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{BAC}$ เป็นมุมฉาก $\triangle CBY, \triangle BAX$ และ $\triangle ACZ$ บนด้าน CB, BA, AC ของ $\triangle ABC$ โดยที่ $\triangle CBY, \triangle BAX$ และ $\triangle ACZ$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย และมีด้าน CB, BA, AC เป็นด้านที่สมนัยกัน จะได้ $\triangle BCY = \triangle ABX + \triangle CAZ$



ทฤษฎีบท 74.3 [Euclid VI. 31.] $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{BAC}$ เป็นมุมฉาก $\text{Pic}_{CB}, \text{Pic}_{BA},$

Pic_{AC} เป็นรูป n เหลี่ยมคล้ายบนด้าน CB, BA, AC และ $\text{Pic}_{CB}, \text{Pic}_{BA}, \text{Pic}_{AC}$ เป็นรูป n เหลี่ยมคล้าย มีด้าน CB, BA, AC เป็นด้านที่สมนัยกัน จะได้ $\text{Area}(\text{Pic}_{CB}) = \text{Area}(\text{Pic}_{BA}) + \text{Area}(\text{Pic}_{AC})$