คณิตศาสตร์ปริทัศน์ เล่มที่ 38

เสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

เทคนิคการทำข้อสอบ IMO

International Mathematical Olympiad

Geometry
Trigonometry
Combinatorics
Number theory
Arrange in order
Algebraic Identity
Trigonometrics Substitutions
Telescopic Sums and Products

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 38

เทคนิคการทำข้อสอบ IMO

International Mathematical Olympiad

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : เทคนิคการทำข้อสอบ IMO (International Mathematical Olympiad)
ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
พิมพ์ครั้งที่ : 1
เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : ตุลาคม พ.ศ. 2561
เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์
ISBN (e–book) : 978-616-478-050-7
พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

ในการสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ (International Mathematical Olympiad : IMO) นักเรียนต้องมีความรู้พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญเช่น เรขาคณิต ตรีโกณมิติ ทฤษฎีจำนวน อสมการ คอมบินาทอริก และต้องมีเทคนิคแบบต่างๆ ในการแก้ปัญหาโจทย์ ในหนังสือ **เทคนิคการทำข้อสอบ IMO International Mathematical Olympiad** ได้รวบรวมเทคนิคต่างๆ ที่สำคัญในการทำข้อสอบเช่น

- ใช้เรียงลำดับข้อมูลก่อนการแก้ปัญหาจะง่าย (ตัวอย่าง 8.5.1, 8.5.2, 8.5.3)
- ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติมาช่วยในการแก้สมการและอสมการ (ตัวอย่าง 7.2.3 แบบฝึกหัดบทที่ 7 ข้อ 3)
- ใช้หลักรังนกพิราบช่วยในการแก้ปัญหา (ตัวอย่าง 2.1.3, 2.1.4)
- ใช้ Telescopic sums and products ช่วยหาผลบวกและผลคูณ (ตัวอย่าง 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3)
- ใช้ทฤษฎีบทเรขาคณิตที่สำคัญช่วยในการทำโจทย์เรขาคณิตเช่น Pascal's theorem, Newton's theorem , Desargues' theorem, Brianchon's theorem, Pompeiu's theorem (บทที่ 4)
- ใช้เงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอของการมีวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม วงกลมแนบในสามเหลี่ยม วงกลมล้อมรอบสี่เหลี่ยม วงกลมแนบในสี่หลี่ยม ซึ่งเป็นเนื้อหาที่นิยมออกข้อสอบ (บทที่ 5)
- ใช้ Power of point, Radical line, Radical center ช่วยแก้ปัญหาเรขาคณิต (บทที่ 5)
- ใช้รูปแบบเอกซ์โพเนนเชียลของจำนวนเชิงซ้อนช่วยแก้ปัญหาเรขาคณิต (ตัวอย่าง 5.3.1, 5.3.2)
- ใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function) ฟังก์ชันนูน (Convex function) ช่วยหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน (ตัวอย่าง 6.2.1, 6.2.2)
- ใช้เอกลักษณ์ที่สำคัญเช่น ผลต่างกำลังสอง ผลต่างกำลังสาม Sophie Germain's Identity (หน้า 198) Lagrange's Identity (หน้า 203) Abel summation formula (หน้า 203) มาช่วยในการหาผลบวกของอนุกรมและพิสูจน์อสมการ (ตัวอย่าง 6.7.3, 6.7.4, 6.7.5)
- ใช้อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเฉลี่ยเรขาคณิตและค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก (หน้า 216) ช่วยในการพิสูจน์อสมการ (ตัวอย่าง 6.8.1 แบบฝึกหัดบทที่ 6 ข้อ 7, 8)
- ใช้คุณสมบัติของ ตัวหารร่วมมาก ตัวคูณร่วมน้อย จำนวนเฉพาะ มอดุโล n ทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต (หน้า 321) ช่วยแก้ปัญหาทฤษฎีจำนวน (ตัวอย่าง 8.1.1)
- ใช้ทฤษฎีบทที่สำคัญเช่น Gauss's theorem, Wilson's theorem, Euler's theorem, Fermat's Theorem, Fermat's little theorem (บทที่ 8) ช่วยในการทำโจทย์ทฤษฎีจำนวน

การทำโจทย์ข้อสอบ IMO ส่วนใหญ่ต้องใช้หลายเทคนิควิธีช่วยในการแก้ปัญหา ขอให้นักเรียนศึกษาการทำโจทย์จากตัวอย่างและแบบฝึกหัดพร้อมเฉลยภายในเล่มซึ่งมีการใช้เทคนิคการแก้ปัญหาแบบต่างๆ อีกมากมาย

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณผู้อ่านทุกท่านที่ติดตามผลงานคณิตศาสตร์ปรนัยมาโดยตลอด

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/homepage
http://www.math.sc.chula.ac.th/~tdumrong/homepage

สารบัญ

		หน้า
1	**อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**	**1 – 8**
	1.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	1
	1.2 ใช้การจัดรูปพีชคณิตจากซ้ายไปเท่ากับขวาหรือจัดรูปเข้ามาหากันตรงกลาง	2
	1.3 ใช้การจัดรูปพีชคณิตที่ต้องมีการบวกเข้าและลบออก	4
	1.4 ใช้เหตุผลเฉพาะ	6
2	**หลักรังนกพิราบ**	**9 – 18**
	2.1 หลักรังนกพิราบ	9
3	**Telescoping sums and Telescoping products**	**19 – 42**
	3.1 Telescoping sums	19
	3.2 Telescoping products	22
4	**Pascal's theorem, Pappus' theorem, Newton's theorem, Desargues' theorem, Brianchon's theorem, Pompeiu's theorem**	**43 – 74**
	4.1 Pascal's theorem และ Pappus' theorem	43
	4.2 Newton's theorem	52
	4.3 Dasargue's theorem	55
	4.4 Pompeiu's theorem	59
5	**จุด เส้นตรง สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม วงกลม**	**75 – 182**
	5.1 สี่เหลี่ยมแนบในวงกลม สามเหลี่ยมแนบในวงกลม	75
	5.2 Power of Points, Radical axis and Radical center	82
	5.3 รูปแบบเอกซ์โพเนนเชียลของจำนวนเชิงซ้อน	104
6	**แคลคูลัสและพีชคณิต**	**183 – 284**
	6.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear function)	183
	6.2 ฟังก์ชันนูน (Convex function)	186
	6.3 The Maen Value Theorem	189
	6.4 ฟังก์ชันเป็นคาบ (Periodicity)	192
	6.5 เอกลักษณ์และตัวประกอบ	197
	6.6 กำลังสองสมบูรณ์	201
	6.7 ผลบวกของอนุกรมและผลบวกของพหุนาม	203

6.8 อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิตและเรขาคณิตและฮาร์มอนิก (A.M. – G.M. – H.M.) 216
6.9 Chebyshev polynomial 219
7 การหาผลเฉลยของสมการและระบบสมการ 285 – 318
7.1 Discriminant 285
7.2 การหาผลเฉลยโดยแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ 288
7.3 การหาผลเฉลยของสมการและระบบสมการ 291
8 ทฤษฎีจำนวน 319 – 400
8.1 หารลงตัว ตัวหารร่วมมาก ตัวคูณร่วมน้อย 319
8.2 จำนวนกำลัง k สัมบูรณ์และจำนวนสามเหลี่ยม 323
8.3 อันดับสามตัวพีทาโกรัส (Pythagorean Triples) 325
8.4 ลงรอย 329
8.5 การสมมติให้ข้อมูลมีการเรียงลำดับ 334
8.6 Gauss's theorem, Fermat's theorem, Euler's theorem, Wilson's theorem, Fermat's Little theorem 337

บทที่ 1

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

Mathematical Induction

1.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์สูตรหรือข้อความทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญเช่น

1. การแสดงว่า $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า $n \in N$
2. การแสดงว่า $a + b$ หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$
3. การแสดงว่า $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ ทุกค่า $n \in N$

ให้ P(n) เป็นข้อความในพจน์ของ n

การพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริง เราใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้หลายแบบเช่น

แบบที่ 1 ถ้า (1) P(1) เป็นจริง

(2) ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2 ให้ $m \geq 1$

ถ้า (1) P(m) เป็นจริง

(2) ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq m$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกค่า n = m, m + 1, m + 2, ...

แบบที่ 3 ถ้า (1) P(1) เป็นจริง

(2) ถ้า P(k) เป็นจริง ทุกค่า $k < n$ แล้ว P(n) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เทคนิควิธีในการพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มีหลายแบบดังต่อไปนี้

1.2 ใช้การจัดรูปพีชคณิตจากซ้ายไปเท่ากับขวาหรือจัดรูปเข้ามาหากันตรงกลาง

ตัวอย่าง 1.2.1 จงแสดงว่า $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{(1)(1+1)}{2} = 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$

เพราะฉะนั้น $1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$

$= (k + 1)(\frac{k}{2} + 1)$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 1.2.2 จงแสดงว่า $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!) = (n + 1)! - 1$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!) = (n + 1)! - 1$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1(1!) = 1 = (1 + 1)! - 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + k(k!) = (k + 1)! - 1$

บวกทั้งสองข้างด้วย $(k + 1)((k + 1)!)$ จะได้

$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + k(k!) + (k + 1)((k + 1)!) = ((k + 1)! - 1) + (k + 1)((k + 1)!)$

$= (k + 1)! + (k + 1)((k + 1)!) - 1$

$= (k + 2)((k + 1)!) - 1$

$= (k + 2)! - 1$

$= ((k + 1) + 1)! - 1$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!) = (n + 1)! - 1$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 1.2.3 จงแสดงว่า $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{2}(3(1) - 1) = 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ เพราะฉะนั้น $1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) = \frac{k}{2}(3k - 1)$

บวกทั้ง 2 ข้างด้วย $(3(k + 1) - 2)$ จะได้

$$\begin{aligned} 1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) + (3(k + 1) - 2) &= \frac{k}{2}(3k - 1) + (3(k + 1) - 2) \\ &= \frac{k}{2}(3k - 1) + 3k + 1 \\ &= \frac{3k^2 - k + 6k + 1}{2} \\ &= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} \\ &= \frac{(k+1)}{2}(3k + 2) \\ &= \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 1.2.4 จงแสดงว่า $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(1)^2(2(1)^2 - 1) = 1 = 1^3$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ เพราะฉะนั้น $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2k - 1)^3 = k^2(2k^2 - 1)$

บวกด้วย $(2(k + 1) - 1)^3$ ทั้งสองข้างจะได้

$$\begin{aligned} 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2k - 1)^3 + (2(k + 1) - 1)^3 &= k^2(2k^2 - 1) + (2(k + 1) - 1)^3 \\ &= 2k^4 - k^2 + (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1) \\ &= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1 \\ &= (2k^4 + 4k^3 + k^2) + (4k^3 + 8k^2 + 2k) + (2k^2 + 4k + 1) \\ &= (k^2 + 2k + 1)(2k^2 + 4k + 1) \\ &= (k + 1)^2(2(k + 1)^2 - 1) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

1.3 ใช้การจัดรูปพีชคณิตที่ต้องมีการบวกเข้าและลบออก

ตัวอย่าง 1.3.1 ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มและ $a + b \neq 0$ จงแสดงว่า $(a + b) \mid (a^{2n} - b^{2n})$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a + b \neq 0$ ให้ P(n) แทนข้อความ " $(a + b) \mid (a^{2n} - b^{2n})$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^2 - b^2)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2k} - b^{2k})$ เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)} &= a^2 a^{2k} - b^2 b^{2k} \\ &= a^2 a^{2k} - a^2 b^{2k} + a^2 b^{2k} - b^2 b^{2k} \qquad \text{(บวกเข้าและลบออก)} \\ &= a^2 (a^{2k} - b^{2k}) + b^{2k} (a^2 - b^2) \end{aligned}$$

เพราะว่า $(a + b) \mid (a^{2k} - b^{2k})$ และ $(a + b) \mid (a^2 - b^2)$ เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)})$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2n} - b^{2n})$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$

:

$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 - \ldots + b^{n-1})$ เมื่อ n เป็นเลขคู่

โดยใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิตเมื่อพจน์แรก $= a^{n-1}$ และอัตราส่วนร่วม $= -\frac{b}{a}$

เพราะฉะนั้น $a^{n-1} - a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 - \ldots + b^{n-1}$

$$= \frac{(a^{n-1})(1 - (-\frac{b}{a})^n)}{1 - (-\frac{b}{a})} \qquad \text{(เพราะว่า n เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น } (-\tfrac{b}{a})^n = \tfrac{b^n}{a^n})$$

$$= \frac{a^n - b^n}{a + b}$$

□

ตัวอย่าง 1.3.2 ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มและ $a - b \neq 0$ จงแสดงว่า $(a - b) \mid (a^n - b^n)$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มและ $a - b \neq 0$ ให้ P(n) แทนข้อความ " $(a - b) \mid (a^n - b^n)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(a - b) \mid (a - b)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(a - b) \mid (a^k - b^k)$ เมื่อ $k \geq 1$

$$a^{k+1} - b^{k+1} = a\,a^k - b^k\,b$$
$$= a\,a^k - a\,b^k + a\,b^k - b^k\,b \qquad \text{(บวกเข้าและลบออก)}$$
$$= a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$$

เพราะว่า $(a - b) \mid (a^k - b^k)$ และ $(a - b) \mid (a - b)$ เพราะฉะนั้น $(a - b) \mid (a^{k+1} - b^{k+1})$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(a - b) \mid (a^n - b^n)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ 1. $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots + b^{n-1}$

2. โดยใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิตจะได้

$$a^{n-1} + a^{n-2}\,b + a^{n-3}\,b^2 + \ldots + b^{n-1} = \frac{a^{n-1}(1 - (\frac{b}{a})^n)}{1 - (\frac{b}{a})}$$
$$= \frac{a^n - b^n}{a - b}$$ □

ตัวอย่าง 1.3.3 ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มและ $a + b \neq 0$

จงแสดงว่า $(a + b) \mid (a^{2n-1} + b^{2n-1})$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มและ $a + b \neq 0$ ให้ P(n) แทนข้อความ " $(a + b) \mid (a^{2n-1} + b^{2n-1})$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a^{2(1)-1} + b^{2(1)-1} = a + b$ เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2(1)-1} + b^{2(1)-1})$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2k-1} + b^{2k-1}$

$$a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1} = a^{2k+1} + b^{2k+1}$$
$$= a^2\,a^{2k-1} + b^2\,b^{2k-1}$$
$$= a^2\,a^{2k-1} + a^2\,b^{2k-1} - a^2\,b^{2k-1} + b^2\,b^{2k-1} \qquad \text{(บวกเข้าและลบออก)}$$
$$= a^2(a^{2k-1} + b^{2k-1}) - b^{2k-1}(a^2 - b^2)$$

เพราะว่า $(a + b) \mid (a^2 - b^2)$ และ $(a + b) \mid (a^{2k-1} + b^{2k-1})$

เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1})$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a + b$ หาร $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ เมื่อ n เป็นเลขคี่

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3\,b + a^2\,b^2 - a\,b^3 + b^4)$

$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5\,b + a^4\,b^2 - a^3\,b^3 + a^2\,b^4 - a\,b^5 + b^6)$ □

1.4 ใช้เหตุผลเฉพาะ

ตัวอย่าง 1.4.1 กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง ทุกค่า $n \in N$

จงแสดงว่า $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ "

เพราะว่า $|x_1| \le |x_1|$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(1) การแสดงว่า P(2) เป็นจริง

เพราะว่า $|a + b|^2 = (a + b)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

$\le |a^2 + 2ab + b^2|$

$\le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$

$= (|a| + |b|)^2$

เพราะฉะนั้น $|a + b| \le |a| + |b|$

เพราะฉะนั้น $|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$ เพราะฉะนั้น P(2) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(2), P(3), ... , P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 2$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(2), P(3), ... , P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 2$

เพราะฉะนั้น $|x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|$ เมื่อ $k \ge 2$

$|x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}| = |(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + (x_{k+1})|$

$\le |x_1 + x_2 + \ldots + x_k| + |x_{k+1}|$ (P(2) เป็นจริง)

$\le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| + |x_{k+1}|$ (P(k) เป็นจริง)

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n = 2, 3, 4, ...

เพราะฉะนั้น $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 1.4.2 จงแสดงว่า $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(\cos x + i \sin x)^1 = \cos x + i \sin x$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะฉะนั้น $(\cos x + i \sin x)^k = (\cos kx + i \sin kx)$ ... (1)

$(\cos x + i \sin x)^{k+1} = (\cos x + i \sin x)(\cos x + i \sin x)^k$

$= (\cos x + i \sin x)(\cos kx + i \sin kx)$ (จาก (1))

$= \cos x \cos kx + i \cos x \sin kx + i \sin x \cos kx - \sin x \sin kx$

$= (\cos x \cos kx - \sin x \sin kx) + i(\cos x \sin kx + \sin x \cos kx)$

$= \cos(x + kx) + i \sin(x + kx)$

$= \cos(k + 1)x + i \sin(k + 1)x$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทของเดอมัวฟ์ กล่าวว่า

ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 1.4.3 จงแสดงว่า $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^n เซต

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^n เซต "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\{ a_1 \}$ มีสับเซต 2 เซต คือ $\varnothing$ และ $\{ a_1 \}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ ... (1)

ให้ $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \}$ เป็นเซตที่มีสมาชิก k + 1 ตัว

จาก (1) จะได้ $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^k เซต

ให้ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2^k}$ เป็นสับเซตของ $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k \}$

เพราะว่า $A_1 \cup \{ a_{k+1} \}, A_2 \cup \{ a_{k+1} \}, A_3 \cup \{ a_{k+1} \}, \ldots, A_{2^k} \cup \{ a_{k+1} \}$

และ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2^k}$

เป็นสับเซตของ $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \}$

เพราะฉะนั้น $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^{k+1} เซต

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพระฉะนั้น $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^n เซต ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น ถ้า $|A| = n$ แล้ว $|P(A)| = 2^n$ □

ตัวอย่าง 1.4.4 จงแสดงว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{dx}{dx} = 1 = 1!$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะว่า $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^{k+1}) = \frac{d^k}{dx^k}(\frac{d}{dx}(x^{k+1}))$

$= \frac{d^k}{dx^k}((k+1)x^k)$

$= (k+1)\frac{d^k}{dx^k}(x^k)$

$= (k+1)(k!)$ ($P(k)$ เป็นจริง $\Rightarrow \frac{d^k}{dx^k}(x^k) = k!$)

$= (k+1)!$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 1.4.5 จงแสดงว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x+c)^n = n!$ และ $\frac{d^n}{dx^n}(x-c)^n = n!$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด เพราะว่า $(x+c)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}c + \binom{n}{2}x^{n-2}c^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}xc^n + \binom{n}{n}c^n$

และ $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}) = 0$, $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-2}) = 0$, ... , $\frac{d^n}{dx^n}(x) = 0$, $\frac{d^n}{dx^n}(c^n) = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^n}{dx^n}(x+c)^n = \frac{d^n}{dx^n}\binom{n}{0}x^n = \frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

แทนค่า c ด้วย $-c$ จะได้ $\frac{d^n}{dx^n}(x-c)^n = n!$ □

บทที่ 2

หลักรังนกพิราบ

Pigeonhole principle

2.1 หลักรังนกพิราบ (Pigeonhole principle)

หลักรังนกพิราบกล่าวอย่างง่ายเช่น มีนก 3 ตัวบินเข้ารังนก 2 รังต้องมีนกอย่างน้อย 2 ตัวอยู่รังเดียวกัน

ทฤษฎีบท 2.1.1 หลักรังนกพิราบ (Pigeonhole principle) แบบที่ 1

ถ้ามีนก n + 1 ตัวบินเข้ารังนก n รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ข้อพิสูจน์ ให้ นก n + 1 ตัวบินเข้ารังนก n รัง ... (1)

สมมติ " มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว " ไม่จริง ... (2)

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีนกน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่งตัว

เพราะว่ามีรังนก n รัง เพราะฉะนั้นมีนกน้อยกว่าหรือเท่ากับ n ตัว ... (3)

เพราะฉะนั้น (1) และ (3) ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (2) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว □

ตัวอย่าง 2.1.1 เลือกนักเรียน 13 คน ออกมาหน้าชั้นเรียนต้องมีอย่างน้อย 2 คนเกิดเดือนเดียวกัน

แนวคิด เดือน 12 เดือนคือ เดือนมกราคม, เดือนกุมภาพันธ์, ... , เดือนธันวาคม

ให้นักเรียนเป็นนก 13 ตัวและให้เดือน 12 เดือนเป็นรังนก

โดยหลักรังนกพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีนักเรียนอย่างน้อย 2 คนเกิดเดือนเดียวกัน □

ทฤษฎีบท 2.1.2 หลักรังนกพิราบ (Pigeonhole principle) แบบที่ 2

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n > m$

ถ้ามีนก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ข้อพิสูจน์ ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n > m$

ให้มีนก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง

สมมติ " มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว " ไม่จริง ... (1)

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีนกน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 ตัว ... (2)

จาก (2) และมีรังนก m รัง เพราะฉะนั้นมีนกน้อยกว่าหรือเท่ากับ m ตัว ... (3)

เพราะฉะนั้น (1) และ (3) ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น " มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว " เป็นจริง

เพราะฉะนั้นถ้ามีนก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว □

ตัวอย่าง 2.1.2 เลือกจำนวนเต็มบวก n + 1 ตัวจากเซต {1, 2, 3, ... , 2n}

จงแสดงว่า มี x, y จากจำนวน n + 1 ตัวที่เลือกออกมานั้นที่ทำให้ $x \mid y$

แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ เป็นจำนวนเต็มบวก n + 1 ตัวจากเซต {1, 2, 3, ... , 2n}

ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ เป็นนก n + 1 ตัว

ให้ {1, 2}, {2, 4}, ... , {k, 2k}, ... , {n, 2n} เป็นรังนก n รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี k ที่ทำให้รัง {k, 2k} มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ x = k และ y = 2k เพราะฉะนั้น x, y เป็นนกสองตัวที่อยู่รัง {k, 2k} และ $x \mid y$ □

ทฤษฎีบท 2.1.3 หลักรังนกพิราบ (Pigeonhole principle) แบบที่ 3

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกและ n > m

ถ้านก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ ตัว

หรือ ถ้านก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกมากกว่าหรือเท่ากับ $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ ตัว

ข้อพิสูจน์ กรณีที่ 1 $m \mid n$

สมมติ " มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ ตัว " ไม่จริง ... (1)

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ ... (2)

เพราะว่า $m \mid n$ เพราะฉะนั้นให้ n = qm เพราะฉะนั้น $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor = q$ ... (3)

เพราะว่ามีรังนก m รังและทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่า q

เพราะฉะนั้นจำนวนนกทั้งหมดน้อยกว่า mq เพราะฉะนั้น n < mq เกิดข้อขัดแย้งกับ n = qm (จาก (3))

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ ตัว

กรณีที่ 2 $m \nmid n$

ให้ n = qm + r, 0 < r < m ... (4)

เพราะฉะนั้น $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor = \lfloor q + \frac{r}{m} \rfloor = q$ ... (5)

สมมติ " มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ ตัว " ไม่จริง ... (6)

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่า q + 1 (จาก (5))

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่าหรือเท่ากับ q

เพราะว่ามีรังนก m รังและทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่าหรือเท่ากับ q

เพราะฉะนั้นจำนวนนกทั้งหมดน้อยกว่าหรือเท่ากับ mq เพราะฉะนั้น $n \leq mq$ ... (7)

จาก (5) $n = qm + r$, $0 < r < m$ และ $n \leq mq$ ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (6) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor + 1$ ตัว □

ตัวอย่างเช่น นกพิราบ 13 ตัวและรังนก 5 รังต้องมีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย 3 ตัว

เพราะว่า $\lfloor \frac{13}{5} \rfloor + 1 = \lfloor 2.6 \rfloor + 1 = 3$ เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย 3 ตัว

ตัวอย่าง 2.1.3 จงแสดงว่าในจำนวนเต็มบวก n + 1 จำนวนต้องมีสองจำนวนที่ผลต่างหารด้วย n ลงตัว

แนวคิด ให้ Z เป็นเซตของจำนวนเต็ม ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ เป็นจำนวนเต็มบวก n + 1 ตัว

ให้ $y_i = \{ r \mid r \equiv i \pmod{n} \}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

เพราะฉะนั้น $y_i \cap y_j = \varnothing$ ทุกค่า $i \neq j$ และ $Z = y_1 \cup y_2 \cup \ldots \cup y_n$

ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ เป็นนก n + 1 ตัว ให้ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ เป็นรังนก n รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักรังนกพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี i ที่ทำให้รัง $y_i = \{ r \mid r \equiv i \pmod{n} \}$ มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ a, b เป็นนกสองตัวที่อยู่รัง y_i เพราะฉะนั้น $a \equiv i \pmod{n}$ และ $b \equiv i \pmod{n}$

เพราะฉะนั้น $a - b = 0 \pmod{n}$ เพราะฉะนั้น $n \mid (a - b)$ □

ตัวอย่าง 2.1.4 ให้ n เป็นเลขคี่และ $n \geq 3$

จงแสดงว่า มีสมาชิกของ $\{ 2^1 - 1, 2^2 - 1, \ldots, 2^{n-1} - 1 \}$ ที่หารด้วย n ลงตัว

แนวคิด ให้ r_i เป็นจำนวนเต็มและ $0 \leq r_i < n$ และ $2^i \equiv r_i \pmod{n}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ... (1)

เพราะว่า n เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $r_i \neq 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

ให้ $r_1, r_2, \ldots, r_n$ เป็นนก n ตัว ให้ $1, 2, 3, \ldots, n - 1$ เป็นรังนก $n - 1$ รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ $i, j \in \{ 1, 2, 3, \ldots, n \}$ และ $i \neq j$ ที่ทำให้ $r_i = r_j$ ... (2)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $i > j$ ... (3)

จาก (1) จะได้

$$\begin{aligned} 2^i &\equiv r_i \pmod{n} \\ &\equiv r_j \pmod{n} && \text{(จาก (2))} \\ &\equiv 2^j \pmod{n} && \text{(จาก (1))} \\ 2^i - 2^j &\equiv 0 \pmod{n} \\ 2^j(2^{i-j} - 1) &\equiv 0 \pmod{n} && \text{(จาก (3) } i - j > 0\text{)} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $n \mid (2^j(2^{i-j} - 1))$ ... (4)

เพราะว่า n เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $\gcd(n, 2^j) = 1$ ... (5)

เพราะว่า $n \mid (2^j(2^{i-j} - 1))$ และ $\gcd(n, 2^j) = 1$ เพราะฉะนั้น $n \mid (2^{i-j} - 1)$ ... (6)

เพราะว่า $i, j \in \{ 1, 2, 3, \ldots, n + 1 \}$ และ $i - j > 0$ เพราะฉะนั้น $i - j \in \{ 1, 2, 3, \ldots, n - 1 \}$ ... (7)

จาก (6) และ (7) จะได้ว่ามีสมาชิกของ $\{ 2^1 - 1, 2^2 - 1, \ldots, 2^{n-1} - 1 \}$ ที่หารด้วย n ลงตัว □

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. ให้ $A \subset \{1, 2, 3, 4, \ldots, 99, 100\}$ และ $|A| = 51$
   จงแสดงว่า มี $a, b \in A$ ที่ทำให้ $\gcd(a, b) = 1$
2. ให้ $A \subset \{1, 2, 3, 4, \ldots, 99, 100\}$ และ $|A| = 51$
   จงแสดงว่า มี $a, b \in A$ ที่ทำให้ $a \mid b$ หรือ $b \mid a$
3. จงแสดงว่า ในบรรดาจำนวนจริงบวก 9 ตัวต่างกัน
   จะมีจำนวน 2 จำนวนเรียกว่า a, b ที่ทำให้ $0 < \frac{a - b}{1 + ab} < \sqrt{2} - 1$
4. ให้ $\square PQRS$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านหนึ่งหน่วยและมี O เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม
   ให้ ΔABC อยู่ใน $\square PQRS$ และ O ไม่อยู่ในรูป ΔABC
   จงแสดงว่า $AB \leq 1$ หรือ $BC \leq 1$ หรือ $CA \leq 1$
5. ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ เป็นจำนวนที่ต่างกันทุกค่าซึ่งเลือกจาก 1, 2, 3, ... , 100
   จงแสดงว่า มี $A, B \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_{11}\}$ ที่ทำให้ $A \cap B = \varnothing$ และ $\sum A = \sum B$
   หมายเหตุ $\sum S$ หมายถึงผลบวกของสมาชิกใน S
6. ให้ $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 9$ เป็นจุดที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม
   จงแสดงว่า มี P_i และ P_j ที่ทำให้มีจุด Q บน P_iP_j และ Q มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม
7. จงแสดงว่า ในกลุ่มของคน 6 คน จะมีคน 3 คนที่รู้จักซึ่งกันและกัน หรือ มีคน 3 คนที่ไม่รู้จักกัน
8. ให้ $\overline{d_1d_2d_3 \ldots d_{16}}_{(10)}$ เป็นจำนวนเต็ม 16 หลัก
   จงแสดงว่า มี d_i เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ หรือมี $i < k$ ที่ทำให้ผลคูณ $d_i\, d_{i+1} \ldots d_k$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์
9. ให้ n เป็นจำนวนนกและ b เป็นจำนวนรังนก
   กำหนดให้นกทุกตัวต้องเข้าอาศัยในรังนกรังใดรังหนึ่ง
   จงหาอสมการในเทอมของ n, b ที่ทำให้
   ถ้า เงื่อนไขอสมการในเทอมของ n, b เป็นจริง แล้วต้องมีรังนกอย่างน้อยสองรังที่มีจำนวนนกเท่ากัน

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 2

1. แนวคิด ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 99, 100\}$ ให้ $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_{50}, a_{51} \}$

แบ่ง S ออกเป็น 50 กลุ่ม คือ $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots, \{k, k + 1\}, \ldots, \{99, 100\}$

ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_{50}, a_{51}$ เป็นนก 51 ตัว ให้ $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots, \{99, 100\}$ เป็นรังนก 50 รัง

โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี k และมี a_i, a_j ที่ทำให้ $\{ a_i, a_j \} = \{k, k + 1\}$

เพราะฉะนั้น $\gcd(a_i, a_j) = \gcd(k, k + 1) = 1$ □

2. แนวคิด ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 99, 100\}$

ให้ $S_1 = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\} \subset S$

$S_3 = \{3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3, \ldots\} \subset S$

$S_5 = \{5, 5 \cdot 2, 5 \cdot 2^2, 5 \cdot 2^3, \ldots\} \subset S$

:

$S_{2n-1} = \{(2n - 1), (2n - 1)2, (2n - 1)2^2, (2n - 1)2^3, \ldots\} \subset S$

:

$S_{99} = \{99\} \subset S$

เพราะฉะนั้น $S = \bigcup_{n=1}^{50} S_{2n-1}$ และ $S_i \cap S_j = \varnothing$ ทุกค่า $i \neq j$

ให้ $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_{51} \}$ ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_{51}$ เป็นนก 51 ตัว และให้ $S_1, S_3, S_5, \ldots, S_{99}$

โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี k และมี a, b ที่ทำให้ $a, b \in S_k$

เพราะฉะนั้นมี x, y ที่ทำให้ $a = k \cdot 2^x$ และ $b = k \cdot 2^y$

เพราะว่า $x \leq y$ หรือ $y \leq x$ เพราะฉะนั้น $k \cdot 2^x \mid k \cdot 2^y$ หรือ $k \cdot 2^y \mid k \cdot 2^x$

เพราะฉะนั้น $a \mid b$ หรือ $b \mid a$ □

3. แนวคิด ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_9$ เป็นจำนวนจริงบวกต่างกัน ให้ $x_i = \arctan a_i$, $i = 1, 2, \ldots, 9$

แบ่ง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ออกเป็น 8 ส่วนเท่าๆ กันคือ

$A_k = (-\frac{4\pi}{8} + (k - 1)\frac{\pi}{8}, -\frac{4\pi}{8} + (k - 1)\frac{\pi}{8}]$, $k = 1, 2, \ldots, 8$

เพราะฉะนั้น $A_1 = (-\frac{4\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}]$, $A_2 = (-\frac{3\pi}{8}, -\frac{2\pi}{8}]$, $A_3 = (-\frac{2\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}]$, $\ldots$, $A_8 = (\frac{3\pi}{8}, \frac{4\pi}{8}]$

เพราะฉะนั้น $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] = \bigcup_{i=1}^{8} A_i$ และ $A_i \cap A_j = \varnothing$ ทุกค่า $i \neq j$

ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_9$ เป็นนก 9 ตัว ให้ $A_1, A_2, \ldots, A_8$ เป็นรังนก 8 รัง

โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้น มี k และมี x_i, x_j ที่ทำให้ $x_i, x_j \in A_k$ และ $x_i < x_j$

เพราะฉะนั้นมี x_i, x_j ที่ทำให้ $x_i = \arctan b$ และ $x_j = \arctan a$

เพราะว่า $x_i, x_j \in A_k$ และ $x_i < x_j$ เพราะฉะนั้น $0 < x_j - x_i < \frac{\pi}{8}$

เพราะฉะนั้น $0 < \tan(x_j - x_i) < \tan\frac{\pi}{8}$ (tan เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, \frac{\pi}{8})$)

$$0 < \tan(\arctan a - \arctan b) < \tan\frac{\pi}{8}$$

$$0 < \frac{\tan(\arctan a) - \tan(\arctan b)}{1 + \tan(\arctan a)\tan(\arctan b)} < \tan\frac{\pi}{8}$$

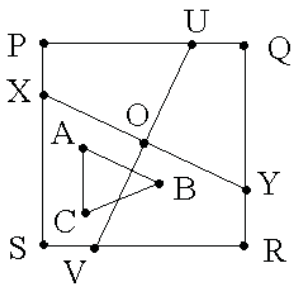
$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < \tan\frac{\pi}{8}$$

เพราะว่า $\tan^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

เพราะฉะนั้น $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{2} - 1$

เพราะฉะนั้น $0 < \frac{a-b}{1+ab} < \sqrt{2} - 1$ □

4. แนวคิด



รูปที่ 2.2.1

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ AB เป็นด้านของ Δ ABC ใกล้จุด O มากที่สุด

ให้ X, Y เป็นจุดบนขอบ □ PQRS และ XY ขนานกับ AB และ XY ผ่านจุด O

ให้ U, V เป็นจุดบนขอบ □ PQRS และ UV $\perp$ AB และ UV ผ่านจุด O

เพราะฉะนั้น XY, UV แบ่ง □ PQRS ออกเป็น □ SVOX, □ YRVO, □ UQYO และ □ PXOU

เพราะว่า O เป็นจุดกึ่งกลางของ □ PQRS และ UV $\perp$ XY ที่จุด O

เพราะฉะนั้น □ SVOX, □ YRVO, □ UQYO และ □ PXOU เท่ากันทุกประการ

เพราะว่า Δ ABC อยู่ใน □ PQRS และ O ไม่อยู่ในรูป Δ ABC

เพราะฉะนั้น Δ ABC อยู่ในสี่เหลี่ยมสองชิ้นจาก □ SVOX, □ YRVO, □ UQYO และ □ PXOU

ให้ □ SVOX และ □ YRVO เป็นรังนก 2 รัง ให้ A, B, C เป็นนก 3 ตัว

โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี □ SVOX หรือ □ YRVO ที่มีจุดสองจุดจาก A, B, C บรรจุอยู่

จากรูปที่ 2.2.1 A, C อยู่ใน □ SVOX

เพราะว่า OX < OP และ OV < OS และ $P\hat{O}S = 90°$ และ $X\hat{O}V = 90°$

เพราะฉะนั้น $XV^2 = OX^2 + OV^2 < OP^2 + OS^2 = PS^2 = 1$

เพราะฉะนั้นสองจุดใดๆ ใน □ SVOX ห่างกันน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1

เพราะว่าสองจุดใดๆ ใน □ SVOX ห่างกันน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 เพราะฉะนั้น $AC \leq 1$ □

5. แนวคิด สับเซตแท้ของ $\{ x_1, x_2, \ldots, x_{11} \}$ ที่มิใช่เซตว่างมีทั้งหมด $2^{11} - 2 = 2048 - 2 = 2046$ เซต
สับเซตแท้ขนาด 11 ของ $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ มีผลบวกมากสุดเท่ากับ $100 + 99 + \ldots + 91 + 90 = 1045$
ให้ $S_1, S_2, \ldots, S_{2046}$ เป็นสับเซตของ $\{ x_1, x_2, \ldots, x_{11} \}$ ที่มิใช่เซตว่าง
เพราะฉะนั้น $1 \le \sum S_i \le 1045$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, 2046$
ให้ $S_1, S_2, \ldots, S_{2046}$ เป็นนก 2046 ตัว และให้ 1, 2, ... , 1045 เป็นรังนก 1045 รัง
โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว
เพราะฉะนั้นมี $k \in \{1, 2, \ldots, 1045\}$ และ S_i, S_j ที่ทำให้ $\sum S_i = \sum S_j = k$
กรณีที่ 1 $S_i \cap S_j = \varnothing$ ให้ $A = S_i$ และ $B = S_j$
เพราะฉะนั้นมี $A, B \subset \{ x_1, x_2, \ldots, x_{11} \}$ ที่ทำให้ $A \cap B = \varnothing$ และ $\sum A = \sum B$
กรณีที่ 2 $S_i \cap S_j \neq \varnothing$ ให้ $A = S_i - (S_i \cap S_j)$ และ $B = S_j - (S_i \cap S_j)$ เพราะฉะนั้น $A \cap B = \varnothing$
เพราะฉะนั้นมี $A, B \subset \{ x_1, x_2, \ldots, x_{11} \}$ ที่ทำให้ $A \cap B = \varnothing$ และ $\sum A = \sum B$ □

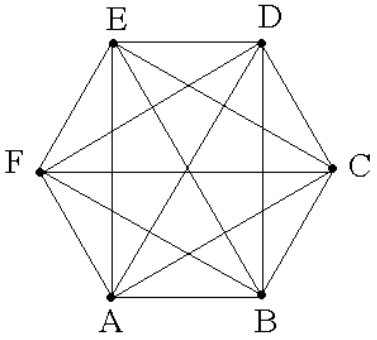
6. แนวคิด ให้ Z เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก
P(x, y, z) เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มมีรูปแบบได้ 8 รูปแบบ
ให้ $C_1 = \{(x, y, z) \mid$ x เป็นเลขคู่, y เป็นเลขคู่, z เป็นเลขคู่ $\}$
$C_2 = \{(x, y, z) \mid$ x เป็นเลขคู่, y เป็นเลขคู่, z เป็นเลขคี่ $\}$
$C_3 = \{(x, y, z) \mid$ x เป็นเลขคู่, y เป็นเลขคี่, z เป็นเลขคู่ $\}$
$C_4 = \{(x, y, z) \mid$ x เป็นเลขคู่, y เป็นเลขคี่, z เป็นเลขคี่ $\}$
$C_5 = \{(x, y, z) \mid$ x เป็นเลขคี่, y เป็นเลขคู่, z เป็นเลขคู่ $\}$
$C_6 = \{(x, y, z) \mid$ x เป็นเลขคี่, y เป็นเลขคู่, z เป็นเลขคี่ $\}$
$C_7 = \{(x, y, z) \mid$ x เป็นเลขคี่, y เป็นเลขคี่, z เป็นเลขคู่ $\}$
$C_8 = \{(x, y, z) \mid$ x เป็นเลขคี่, y เป็นเลขคี่, z เป็นเลขคี่ $\}$
เพราะฉะนั้น $Z \times Z \times Z = \bigcup_{i=1}^{8} C_i$ และ $C_i \cap C_j = \varnothing$ ทุกค่า $i \neq j$
ให้ $P_1, P_2, \ldots, P_9$ เป็นนก 9 ตัว และให้ $C_1, C_2, \ldots, C_8$ เป็นรังนก 8 รัง
โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว
ให้ C_k เป็นรังนกที่มีนก $P_i, P_j \in C_k$
ให้ (x_i, y_i, z_i) และ (x_j, y_j, z_j) เป็นพิกัดของ P_i, P_j ตามลำดับ
เพราะว่า $P_i, P_j \in C_k$ เพราะฉะนั้น (x_i, y_i, z_i) และ $(x_j, y_j, z_j) \in C_k$
เพราะฉะนั้น x_i, x_j เป็นเลขคู่พร้อมกัน หรือ เป็นเลขคี่พร้อมกัน
y_i, y_j เป็นเลขคู่พร้อมกัน หรือ เป็นเลขคี่พร้อมกัน
z_i, z_j เป็นเลขคู่พร้อมกัน หรือ เป็นเลขคี่พร้อมกัน
เพราะฉะนั้น $Q(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{x_i + x_j}{2}, \frac{x_i + x_j}{2})$ มีพิกัดเป็นจำนวนเต็มและอยู่บน P_iP_j □

7. แนวคิด ให้ A, B, C, D, E, F เป็นคน 6 คน

ให้ A, B, C, D, E, F เป็นจุดยอด 6 จุดของหกเหลี่ยมด้านเท่า ABCDEF เขียนเส้นตรงเชื่อมทุกจุดของหกเหลี่ยมด้านเท่า ABCDEF ระบายสีทุกเส้นตรงด้วยสีแดงหรือสีน้ำเงินโดยใช้เงื่อนไข

ถ้า คน 2 คนรู้จักกัน แล้ว ให้ระบายเส้นตรงที่เชื่อมสองจุดนั้นด้วยสีแดง

ถ้า คน 2 คนรู้จักไม่กัน แล้ว ให้ระบายเส้นตรงที่เชื่อมสองจุดนั้นด้วยสีน้ำเงิน



รูปที่ 2.2.2

เพราะฉะนั้นปัญหาข้างต้นคือ การพิสูจน์ว่า หกเหลี่ยมด้านเท่า ABCDEF ที่ระบายสีแล้ว ต้องมีสามเหลี่ยมที่ทุกด้านระบายสีแดง หรือ ต้องมีสามเหลี่ยมที่ทุกด้านระบายสีแดง

ขั้นที่ 1 เลือกจุดมาหนึ่งจุด โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้จุดที่เลือกคือจุด A

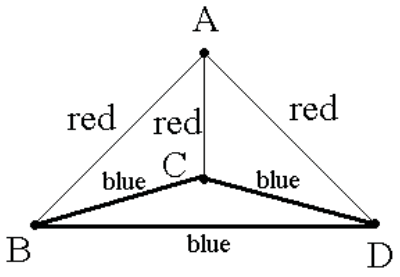
จุด A มีเส้นเชื่อม 5 เส้นคือ AB, AC, AD, AE, AF

ให้รังนกสีแดงและรังนกสีน้ำเงินเป็นรังนกสองรัง และให้ AB, AC, AD, AE, AF เป็นนก 5 ตัว

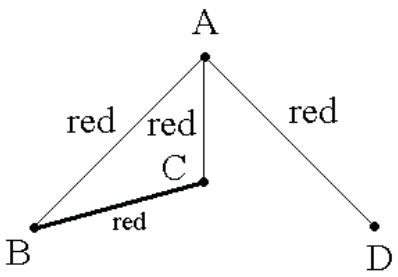
โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสามตัว

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ AB, AC, AD อยู่รังนกสีเดียวกัน

เพราะฉะนั้น AB, AC, AD ระบายสีเดียวกัน



รูปที่ 2.2.3.1



รูปที่ 2.2.3.2

กรณีที่ 1 AB, AC, AD ระบายสีแดง

กรณีที่ 1.1 BC, CD, DB ทุกเส้นระบายสีน้ำเงิน

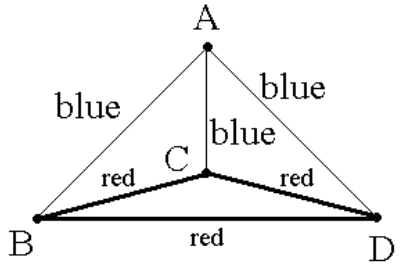
เพราะฉะนั้น B, C, D ไม่รู้จักกัน เพราะฉะนั้นมีคน 3 คนที่ไม่รู้จักซึ่งกันและกัน

กรณีที่ 1.2 BC, CD, DB มีสีแดงอย่างน้อยหนึ่งเส้น

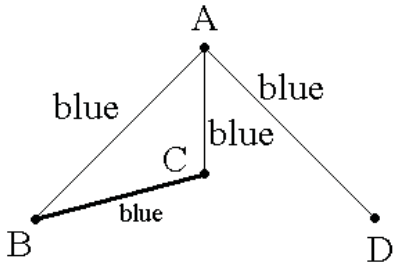
โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ BC ระบายสีแดง

เพราะฉะนั้น AB, BC, CA ระบายสีแดง

เพราะฉะนั้น A, B, C รู้จักกัน เพราะฉะนั้นมีคน 3 คนที่รู้จักซึ่งกันและกัน



รูปที่ 2.2.4.1



รูปที่ 2.2.4.2

กรณีที่ 2 AB, AC, AD ระบายสีน้ำเงิน

กรณีที่ 2.1 BC, CD, DB ทุกเส้นระบายสีแดง

เพราะฉะนั้น B, C, D รู้จักกัน เพราะฉะนั้นมีคน 3 คนที่รู้จักซึ่งกันและกัน

กรณีที่ 2.2 BC, CD, DB มีสีน้ำเงินอย่างน้อยหนึ่งเส้น

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ BC ระบายสีน้ำเงิน

เพราะฉะนั้น AB, BC, CA ระบายสีน้ำเงิน

เพราะฉะนั้น A, B, C ไม่รู้จักกัน เพราะฉะนั้นมีคน 3 คนที่ไม่รู้จักซึ่งกันและกัน □

8. แนวคิด กรณีที่ 1 $\{ d_1, d_2, d_3, \dots, d_{16} \} \cap \{0, 1, 4, 9\} \neq \varnothing$

เพราะฉะนั้นมี $d_i \in \{0, 1, 4, 9\}$ เพราะฉะนั้นมี d_i เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

กรณีที่ 2 $\{ d_1, d_2, d_3, \dots, d_{16} \} \cap \{0, 1, 4, 9\} = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $\{ d_1, d_2, d_3, \dots, d_{16} \} \subset \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

ให้ $x_0 = 1$

$x_1 = d_1$

$x_2 = d_1 d_2$

:

$x_i = d_1 d_2 \dots d_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, 16$

เพราะว่า $\{ d_1, d_2, d_3, \dots, d_{16} \} \subset \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$

เพราะฉะนั้น $x_i = 2^{p_i} 3^{q_i} 5^{r_i} 7^{s_i}$ ทุกค่า $i = 0, 1, 2, \dots, 16$

เมื่อ p_i, q_i, r_i, s_i เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

ให้ $U = \{ 2^a 3^b 5^c 7^d \mid a, b, c, d$ เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์$\}$

เพราะฉะนั้น $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{16} \in U$

ให้ $C_1 = \{ 2^a 3^b 5^c 7^d \mid a$ เป็นเลขคู่, b เป็นเลขคู่, c เป็นเลขคู่, d เป็นเลขคู่$\} \subset U$

$C_2 = \{ 2^a 3^b 5^c 7^d \mid a$ เป็นเลขคู่, b เป็นเลขคู่, c เป็นเลขคู่, d เป็นเลขคี่$\} \subset U$

$C_3 = \{ 2^a 3^b 5^c 7^d \mid a$ เป็นเลขคู่, b เป็นเลขคู่, c เป็นเลขคี่, d เป็นเลขคู่$\} \subset U$

$C_4 = \{ 2^a 3^b 5^c 7^d \mid a$ เป็นเลขคู่, b เป็นเลขคู่, c เป็นเลขคี่, d เป็นเลขคี่$\} \subset U$

$C_5 = \{ 2^a 3^b 5^c 7^d \mid a$ เป็นเลขคู่, b เป็นเลขคี่, c เป็นเลขคู่, d เป็นเลขคู่$\} \subset U$

$C_6 = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคู่, b เป็นเลขคี่, c เป็นเลขคู่, d เป็นเลขคี่ $\} \subset U$

$C_7 = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคู่, b เป็นเลขคี่, c เป็นเลขคี่, d เป็นเลขคู่ $\} \subset U$

$C_8 = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคู่, b เป็นเลขคี่, c เป็นเลขคี่, d เป็นเลขคี่ $\} \subset U$

$C_9 = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคี่, b เป็นเลขคู่, c เป็นเลขคู่, d เป็นเลขคู่ $\} \subset U$

$C_{10} = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคี่, b เป็นเลขคู่, c เป็นเลขคู่, d เป็นเลขคี่ $\} \subset U$

$C_{11} = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคี่, b เป็นเลขคู่, c เป็นเลขคี่, d เป็นเลขคู่ $\} \subset U$

$C_{12} = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคี่, b เป็นเลขคู่, c เป็นเลขคี่, d เป็นเลขคี่ $\} \subset U$

$C_{13} = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคี่, b เป็นเลขคี่, c เป็นเลขคู่, d เป็นเลขคู่ $\} \subset U$

$C_{14} = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคี่, b เป็นเลขคี่, c เป็นเลขคู่, d เป็นเลขคี่ $\} \subset U$

$C_{15} = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคี่, b เป็นเลขคี่, c เป็นเลขคี่, d เป็นเลขคู่ $\} \subset U$

$C_{16} = \{ 2^a\ 3^b\ 5^c\ 7^d \mid a$ เป็นเลขคี่, b เป็นเลขคี่, c เป็นเลขคี่, d เป็นเลขคี่ $\} \subset U$

เพราะฉะนั้น $U = \bigcup_{i=1}^{16} C_i$ และ $C_i \cap C_j = \varnothing$ ทุกค่า $i \neq j$

ให้ $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{16}$ เป็นนก 17 ตัว และให้ $C_1, C_2, \ldots, C_{16}$ เป็นรังนก 16 รัง

โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ C_t เป็นรังนกที่มีนก x_j และ x_v อยู่ในรัง C_t

เพราะฉะนั้น $\frac{x_v}{x_j} = 2^{p_v - p_j}\ 3^{q_v - q_j}\ 5^{r_v - r_j}\ 7^{s_v - s_j}$

เพราะว่า x_j และ x_v อยู่ในรัง C_t เพราะฉะนั้น $p_v - p_j$, $q_v - q_j$, $r_v - r_j$, $s_v - s_j$ เป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้น $\frac{x_v}{x_j}$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

เพราะว่า $d_{j+1}\ d_{j+2} \ldots d_v = \frac{x_v}{x_j}$

เพราะฉะนั้นมี i และ k โดยที่ $i < k$ ที่ทำให้ผลคูณ $d_i\ d_{i+1} \ldots d_k$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์ □

9. แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_b$ เป็นจำนวนนกในรังที่ 1, 2, ... , b ตามลำดับ

เพราะว่านกทุกตัวต้องเข้าอาศัยในรังนกรังใดรังหนึ่ง เพราะฉะนั้น $x_1 + x_2 + \ldots + x_b = n$ ... (1)

สมมติ $x_1, x_2, \ldots, x_b$ ต่างกันทุกค่า ... (2)

เพราะฉะนั้น $\left| \{ x_1, x_2, \ldots, x_b \} \right| = b$ และ $x_1, x_2, \ldots, x_b \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, n\}$

เพราะฉะนั้น $x_1 + x_2 + \ldots + x_b \geq 0 + 1 + 2 + \ldots + (b - 1)$

$$= \frac{b(b-1)}{2} \quad \ldots (3)$$

จาก (1) และ (3) จะได้ $n \geq \frac{b(b-1)}{2}$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_b$ ต่างกันทุกค่า แล้ว $n \geq \frac{b(b-1)}{2}$

เพราะฉะนั้น ถ้า $n < \frac{b(b-1)}{2}$ แล้ว มีอย่างน้อยสองรังที่มีจำนวนนกเท่ากัน □

บทที่ 3

Telescoping Sums and Telescoping Products

3.1 Telescoping Sums

การหาผลบวกอนุกรม เช่นผลบวกของอนุกรมเลขคณิต ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต เรามีความจำเป็นที่ต้องใช้หลักการหาผลบวกในรูปแบบ Telescoping Sums ซึ่งมีหลักที่สำคัญดังนี้

ทฤษฎีบท 3.1.1 ให้ $F : N \to R$ จะได้

1. $\sum_{k=2}^{n} (F(k) - F(k-1)) = F(n) - F(1)$
2. $\sum_{k=1}^{n} (F(k+1) - F(k)) = F(n+1) - F(1)$

ข้อพิสูจน์ 1. $\sum_{k=2}^{n} (F(k) - F(k-1))$

$= (F(2) - F(1)) + (F(3) - F(2)) + (F(4) - F(3)) + ... + (F(n-1) - F(n-2)) + (F(n) - F(n-1))$

$= F(n) - F(1)$

2. $\sum_{k=1}^{n} (F(k+1) - F(k))$

$= (F(2) - F(1)) + (F(3) - F(2)) + (F(4) - F(3)) + ... + (F(n) - F(n-1)) + (F(n+1) - F(n))$

$= F(n+1) - F(1)$ □

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาค่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

แนวคิด $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$

$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} (F(n) - F(n+1))$ (ให้ $F(k) = \frac{1}{k}$)

$= \lim_{N\to\infty} (1 - F(N + 1))$

$= 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}$

$= 1$ □

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาค่า $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4}$

แนวคิด $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-4} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n-2)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{N} (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+2})$

$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4} \sum_{n=3}^{N} (F(n) - F(n + 4))$ (ให้ $F(k) = \frac{1}{k-2}$)

$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4} ((F(3) - F(7)) + (F(4) - F(8)) + (F(5) - F(9)) + ... + (F(N - 1) - F(N)) + (F(N) - F(N + 1))$

$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4} (F(3) + F(4) + F(5) + F(6) - F(N + 1) - F(N + 2) - F(N + 3) - F(N + 4))$

$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{N+3} - \frac{1}{N+4} - \frac{1}{N+5} - \frac{1}{N+6})$

$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{4} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4})$

$= \frac{19}{80}$ □

ตัวอย่าง 3.1.3 จงหาค่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

แนวคิด $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2} (\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$

$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)})$

$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (F(n) - F(n + 1))$ (ให้ $F(k) = \frac{1}{k(k+1)}$)

$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2} (\frac{1}{2} - \frac{1}{(N+1)(N+2)})$

$= \frac{1}{4}$ □

ตัวอย่าง 3.1.4 จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^{n} k!\,k = (n + 1)! - 1$

แนวคิด $\sum_{k=1}^{n} k!\,k = \sum_{k=1}^{n} k!\,((k + 1) - 1)$

$= \sum_{k=1}^{n} ((k + 1)! - k!)$

$= \sum_{k=1}^{n} (F(k + 1) - F(k))$ (ให้ $F(k) = k!$)

$= F(n + 1) - F(1)$

$= (n + 1)! - 1$ □

ตัวอย่าง 3.1.5 จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}} - 1\right)$

แนวคิด
$$2\sin\tfrac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} 2\sin\tfrac{x}{2}\cos(kx)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sin(\tfrac{x}{2}+kx) + \sin(\tfrac{x}{2}-kx)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sin(kx+\tfrac{x}{2}) - \sin(kx-\tfrac{x}{2})\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sin((k+\tfrac{1}{2})x) - \sin((k-\tfrac{1}{2})x)\right)$$
$$= \sin((n+\tfrac{1}{2})x) - \sin\tfrac{x}{2} \qquad (\text{ให้ } F(k) = \sin((k-\tfrac{1}{2})x)$$

$$\sin\tfrac{x}{2} + 2\sin\tfrac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \sin((n+\tfrac{1}{2})x)$$
$$\sin\tfrac{x}{2}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)\right) = \sin((n+\tfrac{1}{2})x)$$
$$1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}$$
$$\sum_{k=1}^{n}\cos(kx) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}} - 1\right)$$ □

ตัวอย่าง 3.1.6 จงแสดงว่า $\sum_{k=0}^{n} \arctan\frac{1}{k^2+k+1} = \arctan(n+1)$

แนวคิด เพราะว่า $\arctan(k+1) - \arctan k = \arctan\left(\frac{(k+1)-k}{1+(k+1)k}\right) = \arctan\frac{1}{k^2+k+1}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{k=0}^{n}\arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n}(\arctan(k+1) - \arctan k)$ (ให้ $F(k) = \arctan(k+1)$)

$= \arctan(n+1) - \arctan 0 = \arctan(n+1)$ □

ตัวอย่าง 3.1.7 จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{2k^2} = \arctan\frac{n}{n+1}$

แนวคิด เพราะว่า $\arctan(2k+1) - \arctan(2k-1) = \arctan\left(\frac{(2k+1)-(2k-1)}{1+(2k+1)(2k-1)}\right)$

$= \arctan\frac{2}{1+(4k^2-1)} = \arctan\frac{1}{2k^2}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2} = \sum_{k=1}^{n}(\arctan(2k+1) - \arctan(2k-1))$ (ให้ $F(k) = \arctan(2k+1)$)

$= \arctan(2n+1) - \arctan 1$

$= \arctan\frac{(2n+1)-1}{1+(2n+1)(1)}$

$= \arctan\frac{n}{n+1}$ □

3.2 Telescoping Products

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์บางครั้งต้องใช้หลักการของ Telescoping Products เพื่อช่วยในการหาพจน์ทั่วไปของผลคูณ

ทฤษฎีบท 3.2.1 ให้ $F : N \to R - \{0\}$ จะได้

1. $\prod_{k=m}^{n} \frac{F(k+1)}{F(k)} = \frac{F(n+1)}{F(m)}$
2. $\prod_{k=m}^{n} \frac{F(k-1)}{F(k)} = \frac{F(m-1)}{F(n)}$

ข้อพิสูจน์ 1. $\prod_{k=1}^{n} \frac{F(k+1)}{F(k)} = \frac{F(m+1)}{F(m)} \frac{F(m+2)}{F(m+1)} \cdots \frac{F(n)}{F(n-1)} \frac{F(n+1)}{F(n)} = \frac{F(n+1)}{F(m)}$

2. $\prod_{k=m}^{n} \frac{F(k-1)}{F(k)} = \frac{F(m-1)}{F(m)} \frac{F(m)}{F(m+1)} \cdots \frac{F(n-2)}{F(n-1)} \frac{F(n-1)}{F(n)} = \frac{F(m-1)}{F(n)}$ □

ตัวอย่าง 3.2.1 จงแสดงว่า $\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}$

แนวคิด $\prod_{n=2}^{N} (1 - \frac{1}{n^2}) = \prod_{n=2}^{N} (1 - \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n}) = \prod_{n=2}^{N} (1 - \frac{1}{n}) \prod_{n=2}^{N} (1 + \frac{1}{n})$ ... (1)

$\prod_{n=2}^{N} (1 - \frac{1}{n}) = \prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} = \prod_{n=2}^{N} \frac{F(n-1)}{F(n)} = \frac{F(1)}{F(N)} = \frac{1}{N}$ (เมื่อ F(n) = n) ... (2)

$\prod_{n=2}^{N} (1 + \frac{1}{n}) = \prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n} = \prod_{n=2}^{N} \frac{G(n+1)}{G(n)} = \frac{G(N+1)}{G(2)} = \frac{N+1}{2}$ (เมื่อ G(n) = n) ... (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $\prod_{n=2}^{N} (1 - \frac{1}{n^2}) = \prod_{n=2}^{N} (1 - \frac{1}{n}) \prod_{n=2}^{N} (1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{N} \frac{N+1}{2}$ ... (4)

$$\prod_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = \lim_{N \to \infty} \prod_{n=2}^{N} (1 - \frac{1}{n^2}) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2} \frac{N+1}{N} \quad \text{(จาก (4))}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \to \infty} \frac{N+1}{N}$$

$$= \frac{1}{2}$$

□

ตัวอย่าง 3.2.2 ให้ $a_0 = 1$ และ $a_n = \frac{1}{n} a_{n-1}$ เมื่อ $n \geq 1$ จงหา $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

แนวคิด เพราะว่า $a_n = \frac{1}{n} a_{n-1}$ เพราะฉะนั้น $n a_n = a_{n-1}$ และ $n = \frac{a_{n-1}}{a_n}$

เพราะฉะนั้น $\prod_{n=1}^{N} n = \prod_{n=1}^{N} \frac{a_{n-1}}{a_n}$

$$N! = \frac{a_0}{a_N}$$

$$= \frac{1}{a_N} \quad (a_0 = 1)$$

เพราะฉะนั้น $a_N = \frac{1}{N!}$ เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$ □

ตัวอย่าง 3.2.3 จงแสดงว่า $\cos\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{8\pi}{2^n-1}\ \ldots\ \cos\frac{2^n\pi}{2^n-1} = \frac{1}{2^n}$

แนวคิด $2^n \sin\frac{2\pi}{2^n-1}(\cos\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{8\pi}{2^n-1}\ \ldots\ \cos\frac{2^n\pi}{2^n-1})$

$= 2^{n-1}(2\sin\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{2\pi}{2^n-1})\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{8\pi}{2^n-1}\ \ldots\ \cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}$

$= 2^{n-1}\sin\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{8\pi}{2^n-1}\ \ldots\ \cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}$

$= 2^{n-2}(2\sin\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1})\cos\frac{8\pi}{2^n-1}\ \ldots\ \cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}$

$= 2^{n-2}\sin\frac{8\pi}{2^n-1}\cos\frac{8\pi}{2^n-1}\ \ldots\ \cos\frac{2^n\pi}{2^n-1}$

:

$= \sin\frac{2^{n+1}\pi}{2^n-1}$

$= \sin(2\pi + \frac{2\pi}{2^n-1})$

$= \sin\frac{2\pi}{2^n-1}$

เพราะฉะนั้น $\cos\frac{2\pi}{2^n-1}\cos\frac{4\pi}{2^n-1}\cos\frac{8\pi}{2^n-1}\ \ldots\ \cos\frac{2^n\pi}{2^n-1} = \frac{1}{2^n}$ □

ตัวอย่าง 3.2.4 จงแสดงว่า $\prod_{k=1}^{n}(1 - \tan^2\frac{2^k\pi}{2^n+1}) = -2^n$

แนวคิด เพราะว่า $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ เพราะฉะนั้น $1 - \tan^2 x = \frac{2\tan x}{\tan 2x}$

เพราะฉะนั้น $\prod_{k=1}^{n}(1 - \tan^2\frac{2^k\pi}{2^n+1}) = \prod_{k=1}^{n}\frac{2\tan\frac{2^k\pi}{2^n+1}}{\tan\frac{2^{k+1}\pi}{2^n+1}}$

$= 2^n\frac{\tan\frac{2\pi}{2^n+1}}{\tan\frac{2^{n+1}\pi}{2^n+1}}$

$= 2^n\frac{\tan\frac{2\pi}{2^n+1}}{\tan(2\pi-\frac{2\pi}{2^n+1})}$

$= 2^n\frac{\tan\frac{2\pi}{2^n+1}}{-\tan\frac{2\pi}{2^n+1}}$

$= -2^n$ □

ทฤษฎีบท 3.2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i}$

ข้อพิสูจน์ ให้ $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+p)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{p}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}) = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p})$

$= \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - ... - \frac{1}{N+p})$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+p)} = \lim_{N\to\infty} S_N$

$= \lim_{N\to\infty} (\frac{1}{p}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - ... - \frac{1}{N+p}))$

$= \frac{1}{p}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{p})$

$= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i}$ □

ตัวอย่าง 3.2.5 จงหาค่า 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$

2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

แนวคิด 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = 4(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i}) = 4(\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2})) = 3$

2. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)} = 3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} = 3(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10})$

$= 3(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} - \frac{7}{20})$

$= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i} - \frac{21}{20}$

$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{21}{20} = \frac{60+30+20-63}{60} = \frac{47}{60}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

$= 3 \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)})$

$= 3(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)})$

$= 3((\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2}) - (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6})$

$= \frac{1}{2}$ □

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

2. จงแสดงว่า $n - 1 < \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} + \ldots + \frac{2n-1}{\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}} < n$

3. จงหาพหุนาม P(x), Q(x) ที่ทำให้ทุกจำนวนจริง x ที่ไม่เป็นรากของ Q(x) จะได้

   $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+1)}{Q(x+1)} = \frac{1}{x(x+2)}$

4. จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^{n} k!\,(k^2 + k + 1) = (n+1)!\,(n+1) - 1$

5. ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรก $a_1 = a$ และผลต่างร่วม $d \neq 0$

   จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{n}{a(a+nd)}$

6. จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})} = 2$

7. ให้ $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{k+1} = x_k^2 + x_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

   จงแสดงว่า $\left\lfloor \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \ldots + \frac{1}{x_{100}+1} \right\rfloor = 1$

8. ให้ F_n เป็นจำนวนฟิโบนักชี $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

   จงหาค่า 8.1 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$

   8.2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$

9. จงแสดงว่า

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \ldots + \sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}} = 2014 - \frac{1}{2014}$$

10. จงแสดงว่า

    10.1 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2027}} < 16$

    10.2 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24$

11. ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก $1 \leq m < n$ จงแสดงว่า

    $2(\sqrt{n} - \sqrt{m}) < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{m-1})$

12. ให้ $a_k = \frac{k}{(k-1)^{\frac{4}{3}} + k^{\frac{4}{3}} + (k+1)^{\frac{4}{3}}}$ จงแสดงว่า $a_1 + a_2 + \ldots + a_{999} < 50$

13. จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} = 2$

14. จงแสดงว่า $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$

15. จงแสดงว่า $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{2^{2^n}}) = 2$

16. จงแสดงว่า $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} + \frac{\sin 3x}{\cos^3 x} + ... + \frac{\sin nx}{\cos^n x} = \cot x - \frac{\cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$

ทุกค่า $x \neq \frac{k\pi}{2}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

17. จงแสดงว่า $\frac{1}{\cos 0^o \cos 1^o} + \frac{1}{\cos 1^o \cos 2^o} + ... + \frac{1}{\cos 88^o \cos 89^o} = \frac{\cos 1^o}{\sin^2 1^o}$

18. ให้ a เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มบวก $\frac{a}{\pi}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

จงแสดงว่า $\frac{1}{\cos a - \cos 3a} + \frac{1}{\cos a - \cos 5a} + ... + \frac{1}{\cos a - \cos((2n+1)a)} = \frac{\cot a - \cot((n+1)a)}{2\sin a}$

19. จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{a}{2^n} = \frac{1}{a} - \cot a$ ทุกค่า $a \neq k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

20. จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3 \frac{a}{3^n} = \frac{1}{4}(a - \sin a)$

21. จงแสดงว่า $\frac{1}{90} \sum_{k=1}^{90} 2k \sin(2k)^\circ = \cot 1^\circ$

22. จงแสดงว่า $\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + ... + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot(2^n x)$

ทุกจำนวนเต็มบวก n ทุกจำนวนจริง $x \neq \frac{k\pi}{2^m}$, m = 0, 1, 2, ... และ k เป็นจำนวนเต็ม

23. จงแสดงว่า $\frac{\tan 1}{\cos 2} + \frac{\tan 2}{\cos 4} + \frac{\tan 4}{\cos 8} + ... + \frac{\tan 2^n}{\cos 2^{n+1}} = \tan 2^{n+1} - \tan 1$

24. จงแสดงว่า $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$

25. จงแสดงว่า $(1 - \cot 1^\circ)(1 - \cot 2^\circ)(1 - \cot 3^\circ) ... (1 - \cot 44^\circ) = 2^{22}$

26. จงแสดงว่า $(\frac{1}{2} + \cos \frac{\pi}{20})(\frac{1}{2} + \cos \frac{3\pi}{20})(\frac{1}{2} + \cos \frac{9\pi}{20})(\frac{1}{2} + \cos \frac{27\pi}{20}) = \frac{1}{16}$

27. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก x เป็นจำนวนจริงและ $x \neq 2^{k+1}(\frac{\pi}{3} + m\pi)$ ทุกค่า k = 1, 2, ... , n

และ m เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า $\prod_{k=1}^{n} (1 - 2\cos \frac{x}{2^k}) = (-1)^n \frac{1+2\cos x}{1+2\cos \frac{x}{2^n}}$

28. จงแสดงว่า $\prod_{k=1}^{n} (1 + 2\cos \frac{2\pi(3^k)}{3^n+1}) = 1$

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 3

1. แนวคิด $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} \cdot \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{(k+1)^2k-k^2(k+1)}$

$= \frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}$

$= \frac{(k+1)\sqrt{k}}{k(k+1)} - \frac{k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}$

$= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$= \sum_{k=1}^{n} (F(k) - F(k+1))$ (ให้ $F(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$)

$= F(1) - F(n+1)$

$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ □

2. แนวคิด $\frac{2k-1}{\sqrt{(k-1)^2+1}+\sqrt{k^2+1}} = \frac{2k-1}{\sqrt{(k-1)^2+1}+\sqrt{k^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{(k-1)^2+1}-\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{(k-1)^2+1}-\sqrt{k^2+1}}$

$= \frac{2k-1}{(k-1)^2+1-(k^2+1)} (\sqrt{(k-1)^2+1} - \sqrt{k^2+1})$

$= \frac{2k-1}{k^2-2k+1+1-k^2-1} (\sqrt{(k-1)^2+1} - \sqrt{k^2+1})$

$= \frac{2k-1}{1-2k} (\sqrt{(k-1)^2+1} - \sqrt{k^2+1})$

$= \sqrt{k^2+1} - \sqrt{(k-1)^2+1}$ ... (1)

$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} + \ldots + \frac{2n-1}{\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{\sqrt{(k-1)^2+1}+\sqrt{k^2+1}}$

$= \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k^2+1} - \sqrt{(k-1)^2+1})$ (จาก (1))

$= \sum_{k=1}^{n} (F(k) - F(k-1))$ (ให้ $F(k) = \sqrt{k^2+1}$)

$= F(n) - F(0)$

$= \sqrt{n^2+1} - 1$ ... (2)

$n^2 < n^2 + 1 \Rightarrow n < \sqrt{n^2+1} \Rightarrow n - 1 < \sqrt{n^2+1} - 1$ ... (3)

$n^2 + 1 < n^2 + 2n + 1 \Rightarrow n^2 + 1 < (n+1)^2 \Rightarrow \sqrt{n^2+1} < n+1 \Rightarrow \sqrt{n^2+1} - 1 < n$ ... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $n - 1 < \sqrt{n^2+1} - 1 < n$ ... (5)

จาก (2) และ (5) จะได้ $n - 1 < \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}+\sqrt{10}} + \ldots + \frac{2n-1}{\sqrt{(n-1)^2+1}+\sqrt{n^2+1}} < n$ □

3. แนวคิด $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+1)}{Q(x+1)} = \frac{1}{x(x+2)} = \frac{2(x+1)}{2x(x+1)(x+2)}$

$$= \frac{(2x^2+5x+2)-(2x^2+3x)}{2x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{(2x+1)(x+2)-(2(x+1)+1)x}{2x(x+1)(x+2)}$$

$$= \frac{2x+1}{2x(x+1)} - \frac{2(x+1)+1}{2(x+1)(x+2)}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+1)}{Q(x+1)} = \frac{2x+1}{2x(x+1)} - \frac{2(x+1)+1}{2(x+1)(x+2)}$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ x มีค่ามากพอที่จะทำให้ $x + k > 0$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

เพราะว่า $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+1)}{Q(x+1)} = \frac{2x+1}{2x(x+1)} - \frac{2(x+1)+1}{2(x+1)(x+2)}$

และ $\frac{P(x+1)}{Q(x+1)} - \frac{P(x+2)}{Q(x+2)} = \frac{2(x+1)+1}{2(x+1)(x+2)} - \frac{2(x+2)+1}{2(x+2)(x+3)}$

และ $\frac{P(x+2)}{Q(x+2)} - \frac{P(x+3)}{Q(x+3)} = \frac{2(x+2)+1}{2(x+2)(x+3)} - \frac{2(x+3)+1}{2(x+3)(x+4)}$

:

และ $\frac{P(x+k)}{Q(x+k)} - \frac{P(x+k+1)}{Q(x+k+1)} = \frac{2(x+k)+1}{2(x+k)(x+k+1)} - \frac{2(x+k+1)+1}{2(x+k+1)(x+k+2)}$

:

และ $\frac{P(x+n-1)}{Q(x+n-1)} - \frac{P(x+n)}{Q(x+n)} = \frac{2(x+n-1)+1}{2(x+n-1)(x+n)} - \frac{2(x+n)+1}{2(x+n)(x+n+1)}$

เพราะฉะนั้น $\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+n)}{Q(x+n)} = \frac{2x+1}{2x(x+1)} - \frac{2(x+n)+1}{2(x+n)(x+n+1)}$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{2x+1}{2x(x+1)} = \frac{2x+1}{2x(x+1)}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ และ $\lim_{n\to\infty} \frac{2(x+n)+1}{2(x+n)(x+n+1)} = 0$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \frac{P(x+n)}{Q(x+n)}$ มีค่า

ให้ $\lim_{n\to\infty} \frac{P(x+n)}{Q(x+n)} = C$ เมื่อ C เป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้น $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + C$

เพราะฉะนั้นมี x มากเป็นจำนวนอนันต์ที่ทำให้ $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + C$ ... (1)

ให้ x เป็นจำนวนจริงและไม่เป็นรากของ Q(x)

เพราะฉะนั้น $Q(x) \neq 0$ ... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $2x(x+1)P(x) = ((2x+1) + 2Cx(x+1))Q(x)$

เพราะว่า $x(x+1)$ และ $2x+1$ ไม่มีตัวประกอบร่วม

เพราะฉะนั้น $P(x) = ((2x+1) + 2Cx(x+1))R(x)$ และ $Q(x) = 2x(x+1)R(x)$ เมื่อ R(x) เป็นพหุนาม □

4. แนวคิด $\sum_{k=1}^{n} k!(k^2 + k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k!(k^2 + 2k + 1 - k)$

$= \sum_{k=1}^{n} k!((k+1)^2 - k)$

$= \sum_{k=1}^{n} k!(k+1)(k+1) - k!\,k$

$= \sum_{k=1}^{n} (k+1)!\,(k+1) - k!\,k$

$= \sum_{k=1}^{n} F(k+1) - F(k)$ (ให้ $F(k) = k!\,k$)

$= F(n+1) - F(1)$

$= (n+1)!\,(n+1) - 1$ □

5. แนวคิด เพราะว่า $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรก $a_1 = a$ และผลต่างร่วม $d \neq 0$

เพราะฉะนั้น $a_k = a + (n-1)d$ เพราะฉะนั้น $a_{k+1} - a_k = d$ ... (1)

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{a_k a_{k+1}}$

$= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}}$ (จาก (1))

$= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k a_{k+1}} - \frac{a_k}{a_k a_{k+1}}\right)$

$= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$= \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} (F(k) - F(k+1))$ (ให้ $F(k) = \frac{1}{a_k}$)

$= \frac{1}{d}(F(1) - F(n+1))$

$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+nd}\right)$

$= \frac{1}{d}\left(\frac{a+nd-a}{a(a+nd)}\right) = \frac{n}{a(a+nd)}$ □

6. แนวคิด ให้ $\frac{6^k}{(3^k - 2^k)(3^{k+1} - 2^{k+1})} = \frac{A}{3^k - 2^k} - \frac{B}{3^{k+1} - 2^{k+1}}$ ... (1)

เพราะฉะนั้น $6^k = A(3^{k+1} - 2^{k+1}) - B(3^k - 2^k)$

$3^k\,2^k = A\,3^{k+1} - B\,3^k - A\,2^{k+1} - B\,2^k$

$= 3^k(3A - B) - 2^k(2A - B)$

$3^k\,2^k + 2^k(2A - B) = 3^k(3A - B)$

$2^k(3^k + (2A - B)) = 3^k(3A - B)$

เพราะฉะนั้น $3A - B = 2^k$ และ $3^k + (2A - B) = 3^k$

เพราะฉะนั้น $3A - B = 2^k$ และ $2A - B = 0$ เพราะฉะนั้น $A = 2^k$ และ $B = 2^{k+1}$ ... (2)

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{2^k}{3^k-2^k} - \frac{2^{k+1}}{3^{k+1}-2^{k+1}}\right) \quad \text{(จาก (1) และ (2))}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (F(k) - F(k+1)) \quad \left(\text{ให้ } F(k) = \frac{2^k}{3^k-2^k}\right)$$

$$= F(1) - F(N+1)$$

$$= \frac{2^1}{3^1-2^1} - \frac{2^{N+1}}{3^{N+1}-2^{N+1}}$$

$$= 2 - \frac{2^{N+1}}{3^{N+1}-2^{N+1}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6^k}{(3^k-2^k)(3^{k+1}-2^{k+1})} = \lim_{N\to\infty}\left(2 - \frac{2^{N+1}}{3^{N+1}-2^{N+1}}\right) = 2 \quad \square$$

7. แนวคิด เพราะว่า $\frac{1}{x_{k+1}} = \frac{1}{x_k^2+x_k} = \frac{1}{x_k(x_k+1)} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_k+1}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{x_k+1} = \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}$ ... (1)

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \ldots + \frac{1}{x_{100}+1} = \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{x_k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}} \quad \text{(จาก (1))}$$

$$= \sum_{k=1}^{100} (F(k) - F(k+1)) \quad \left(\text{ให้ } F(k) = \frac{1}{x_k}\right)$$

$$= F(1) - F(101)$$

$$= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{101}}$$

$$= 2 - \frac{1}{x_{101}} \quad \left(\text{ให้ } x_1 = \frac{1}{2}\right)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \ldots + \frac{1}{x_{100}+1} = 2 - \frac{1}{x_{101}}$ ... (2)

เพราะว่า $x_{k+1} = x_k^2 + x_k = x_k(x_k+1)$

เพราะฉะนั้น $x_1 = \frac{1}{2}$,

$x_2 = x_1(x_1+1) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1) = \frac{3}{4}$,

$x_3 = x_2(x_2+1) = \frac{3}{4}(\frac{3}{4}+1) = \frac{21}{16} > 1$

เพราะฉะนั้น $x_{k+1} = x_k^2 + x_k = x_k(x_k+1) > x_k > 1$ ทุกค่า $k = 3, 4, 5, \ldots, 101$

เพราะฉะนั้น $x_{101} > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x_{101}} < 1 \Rightarrow -1 < -\frac{1}{x_{101}} < 0 \Rightarrow 1 < 2 - \frac{1}{x_{101}} < 2$

เพราะฉะนั้น $\lfloor 2 - \frac{1}{x_{101}} \rfloor = 1$ ... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $\lfloor \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \ldots + \frac{1}{x_{100}+1} \rfloor = 1$ $\square$

8. แนวคิด

8.1 $\sum_{n=2}^{N} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = \sum_{n=2}^{N} \frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}F_{n+1}}$ (คุณสมบัติ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$)

$= \sum_{n=2}^{N} \frac{F_{n+1}}{F_{n-1}F_{n+1}} - \frac{F_{n-1}}{F_{n-1}F_{n+1}}$

$= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{F_{n-1}} - \frac{1}{F_{n+1}}$

$= \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_N} - \frac{1}{F_{N+1}}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{F_n}{F_{n-1}F_{n+1}}$

$= \lim_{N\to\infty} (\frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} - \frac{1}{F_N} - \frac{1}{F_{N+1}})$

$= \lim_{N\to\infty} (1 + 1 - \frac{1}{F_N} - \frac{1}{F_{N+1}})$ (คุณสมบัติ $F_1 = 1,\ F_2 = 1$)

$= 2$ (บทช่วย 1)

8.2 $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \sum_{n=2}^{N} \frac{F_n}{F_{n-1}F_nF_{n+1}}$

$= \sum_{n=2}^{N} \frac{F_{n+1}-F_{n-1}}{F_{n-1}F_nF_{n+1}}$ (คุณสมบัติ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$)

$= \sum_{n=2}^{N} (\frac{F_{n+1}}{F_{n-1}F_nF_{n+1}} - \frac{F_{n-1}}{F_{n-1}F_nF_{n+1}})$

$= \sum_{n=2}^{N} (\frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_nF_{n+1}})$

$= \frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_NF_{N+1}}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{F_{n-1}F_{n+1}}$

$= \lim_{N\to\infty} (\frac{1}{F_1F_2} - \frac{1}{F_NF_{N+1}})$

$= \lim_{N\to\infty} (1 - \frac{1}{F_NF_{N+1}})$ (คุณสมบัติ $F_1 = 1,\ F_2 = 1$)

$= 1$ (บทช่วย 1)

บทช่วย 1 $\lim_{n\to\infty} F_n = \infty$ และ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{F_N} = 0$

ข้อพิสูจน์ สมมติ F_n มีขอบเขตบน ... (1)

เพราะฉะนั้นมี M ที่ทำให้ $F_n < M$ ทุกค่า n ... (2)

เพราะว่า $F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$

เพราะฉะนั้น $F_1 = F_2 < F_3 < F_4 < F_5 < ... < F_M < F_{M+1} < F_{M+2} < ...$

เพราะฉะนั้น $M \le F_{M+2}$ ... (3)

เพราะฉะนั้น (2) และ (3) ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น F_n ไม่มีขอบเขตบน

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} F_n = \infty$ และ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{F_n} = 0$

หมายเหตุ $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ ดูการพิสูจน์จาก ทฤษฎีบท 9.4.1 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 37 หน้า 462 □

9. แนวคิด $1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2(n^2+2n+1)+(n^2+2n+1)+n^2}{n^2(n+1)^2}$

$$= \frac{n^4+2n^3+3n^2+2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n(n+1)+1)^2}{n^2(n+1)^2} = (1 + \frac{1}{n(n+1)})^2$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

$$\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1+\frac{1}{2013^2}+\frac{1}{2014^2}} = \sum_{n=1}^{2013}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$= \sum_{n=1}^{2013}(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 2013 + \sum_{n=1}^{2013}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 2013 + \sum_{n=1}^{2013}(F(n) - F(n+1)) \qquad (\text{ให้ } F(n) = \frac{1}{n})$$

$$= 2013 + F(1) - F(2014)$$

$$= 2014 - \frac{1}{2014}$$ □

10. แนวคิด

10.1 $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2027}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{17}+\sqrt{19}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2027}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\cdot0+1}+\sqrt{4\cdot0+3}} + \frac{1}{\sqrt{4\cdot1+1}+\sqrt{4\cdot1+3}} + \frac{1}{\sqrt{4\cdot2+1}+\sqrt{4\cdot2+3}} + \frac{1}{\sqrt{4\cdot3+1}+\sqrt{4\cdot3+3}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{4\cdot4+1}+\sqrt{4\cdot4+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4\cdot506+1}+\sqrt{4\cdot506+3}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\cdot0+1}+\sqrt{2\cdot0+3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot1+1}+\sqrt{2\cdot1+3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot2+1}+\sqrt{2\cdot2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot3+1}+\sqrt{2\cdot3+3}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\cdot4+1}+\sqrt{2\cdot4+3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2\cdot506+1}+\sqrt{2\cdot506+3}} \qquad \dots (1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}\cdot\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}} = \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}{(2n+1)-(2n+3)}$$

$$= \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n+3}}{-2} = \frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{2} \qquad \dots (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 0+1}+\sqrt{2\cdot 0+3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 1+1}+\sqrt{2\cdot 1+3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 2+1}+\sqrt{2\cdot 2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3+1}+\sqrt{2\cdot 3+3}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\cdot 4+1}+\sqrt{2\cdot 4+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2\cdot 506+1}+\sqrt{2\cdot 506+3}}$$
$$= \sum_{n=1}^{506} \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n+3}}$$
$$= \sum_{n=1}^{506} \frac{\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n+1}}{2} \qquad \text{(จาก (2))}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{506} \left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{506} (F(n) - F(n-1)) \qquad \left(\text{ให้ } F(n) = \sqrt{2n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(F(506) - F(0)) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1015} - \sqrt{3}\right) < \frac{1}{2}\sqrt{1015}$$
$$< \frac{1}{2}\sqrt{1024}$$
$$= 16 \qquad \ldots (3)$$

จาก (1) และ (3) จะได้ $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2027}} < 16$

หมายเหตุ $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2025}+\sqrt{2027}} = 11.121$

10.2 ให้ $S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}$

$$2S = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}$$
$$> \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{13}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10001}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{2} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{9}}{2} + \frac{\sqrt{13}-\sqrt{11}}{2} + \ldots + \frac{\sqrt{9999}-\sqrt{9997}}{2}$$
$$+ \frac{\sqrt{10001}-\sqrt{9999}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{10001}-1}{2}$$
$$> 49.5$$

เพราะฉะนั้น $S > 24$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} > 24$

หมายเหตุ $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{11}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}} = 24.862$ □

11. แนวคิด $(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = 1$

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$< \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

เพราะฉะนั้น $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}}$ ... (1)

$$\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$> \sum_{k=m}^{n-1} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \quad \text{(จาก (1))}$$

$$= 2\sum_{k=m}^{n-1} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = 2\sum_{k=m}^{n-1} (F(k+1) - F(k)) \quad \text{(ให้ } F(k) = \sqrt{k}\text{)}$$

$$= 2(F(n) - F(m))$$

$$= 2(\sqrt{n} - \sqrt{m})$$

เพราะฉะนั้น $2(\sqrt{n} - \sqrt{m}) < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ ... (2)

$$(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})(\sqrt{k} + \sqrt{k-1}) = 1$$

$$\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) = \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$> \frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}} = \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ ... (3)

$$\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} = \sum_{k=m}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

$$< \sum_{k=m}^{n-1} 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \quad \text{(จาก (3))}$$

$$= 2\sum_{k=m}^{n-1} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$

$$= 2\sum_{k=m}^{n-1} (F(k) - F(k-1)) \quad \text{(ให้ } F(k) = \sqrt{k}\text{)}$$

$$= 2(F(n-1) - F(m-1))$$

$$= 2(\sqrt{n-1} - \sqrt{m-1})$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} < 2(\sqrt{n-1} - \sqrt{m-1})$ ... (4)

จาก (2) และ (4) จะได้ $2(\sqrt{n} - \sqrt{m}) < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} < 2(\sqrt{n-1} - \sqrt{m-1})$ □