

คณิตศาสตร์ปณิธิ เล่มที่ 27

โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม.ปลาย และข้อสอบ Entrance

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก
ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย
และข้อสอบ Entrance

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 27

โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย และข้อสอบ Entrance

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : เมษายน พ.ศ. 2562

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-485-670-7

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

หนังสือ คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 27 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม.ปลาย และ ข้อสอบ ENTRANCE รวบรวมข้อสอบมาจาก คณิตศาสตร์ ๑ คณิตศาสตร์ ๒ คณิตศาสตร์ ก.คณิตศาสตร์ กข. และ ข้อสอบแข่งขันต่างๆ โดยคัดเลือกข้อสอบที่สามารถทำได้ทั้งสองแบบ คือโดยใช้ วิธีจริง และ วิธีตัดตัวเลือก เพื่อให้นักเรียนได้เห็นการหาคำตอบโดยวิธีจริงตามหลักสูตร และได้ฝึกหัดใช้ข้อสังเกต หรือใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เล็ก ๆ น้อย ๆ ช่วยในการตัดตัวเลือก

เนื้อหาภายในเล่มมีข้อสอบให้นักเรียนฝึกทำ 15 ชุดแต่ละชุดมีข้อสอบแบบตัวเลือก 25 ข้อ และแบบเติมคำตอบ 10 ข้อ สำหรับข้อสอบแบบตัวเลือก การเฉลยข้อสอบจะใช้ วิธีจริง และ วิธีตัดตัวเลือก นอกจากนั้นยังมีบทความพิเศษ การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คืออะไร ข้อสอบ Entrance ที่ไม่สมบูรณ์ (สาเหตุที่เกิดและแนวทางแก้ไข) หลักฐานทางการศึกษาที่ยืนยันว่ามีข้อสอบแบบตัดตัวเลือกได้ออกสอบทุกปี ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2517 ถึง พ.ศ. 2546

การทำข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย และ ข้อสอบ ENTRANCE โดยการตัดตัวเลือกที่ผู้เขียนได้จัดทำเป็นชุด หนังสือ คณิตศาสตร์ปรนัย ตั้งแต่ พ.ศ. 2537 จนถึงปัจจุบัน เช่น คู่มือตัดตัวเลือกภาค 1 - 3 และ คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 25 คู่มือตัดตัวเลือกข้อสอบ ม. ปลาย ฉบับสมบูรณ์ จากข้อสอบ Entrance ที่ผ่านทำให้เกิดเทคนิคการตัดตัวเลือกแบบต่าง ๆ มากมาย ซึ่งนำมาใช้ในการเฉลยข้อสอบแบบตัดตัวเลือก เช่น

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร	เซตคำตอบคือตัวเลือกใด
เซตคำตอบเป็นสับเซตของตัวเลือกใด	โดเมนและเรนจ์คือเซตใด
เขียนรูปดูก็ตัดตัวเลือกได้	ความชันก็ตัดตัวเลือกได้
คว่ำหงาย-เปิดซ้ายขวาก็ตัดตัวเลือกได้	ประพจน์จริงเท็จก็ตัดตัวเลือกได้
ฟังก์ชัน $f(x)$ มีสูตรตรงกับตัวเลือกใด	มุมแหลมหรือมุมป้านก็ตัดตัวเลือกได้
ใช้เหตุผลเกี่ยวกับควอดรนต์ตัดตัวเลือก	นำค่าที่โจทย์กำหนดแทนค่าในตัวเลือก
ทดเลขเท่าที่จำเป็นแล้วค่อย ๆ ตัดตัวเลือก	นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ฯลฯ

การทำข้อสอบแบบตัดตัวเลือกนั้น ผู้เขียนขอยืนยันว่าการตัดตัวเลือกไม่ใช่การสอนให้นักเรียนทำการเดาสุ่มตัวเลือกแบบไร้เหตุผล แต่การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ ที่ผู้เขียนได้แนะนำเป็นการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม ถูกต้อง รัดกุม และ รวดเร็ว ในการทำข้อสอบ

หนังสือเล่มนี้จะมีประโยชน์มากที่สุดนักเรียนต้องดู วิธีจริง และ วิธีตัดตัวเลือก ทั้งสองวิธีให้เข้าใจ เพราะว่าการตัดตัวเลือกจะช่วยให้ทำข้อสอบได้คะแนนเร็วขึ้น แต่วิธีจริงจะช่วยให้นักเรียนสามารถทำข้อสอบแบบเติมคำตอบ และ ข้อสอบแบบอัตนัย นอกจากนั้นวิธีจริงจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจหลักการและการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาซึ่งจะมีประโยชน์ในการเรียนระดับสูงต่อไป

สวัสดิ์ศรีครับ

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

บทความพิเศษ	หน้าที่
การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คืออะไร.....	1 – 16
ข้อสอบ ENTRANCE ที่ไม่สมบูรณ์.....	17 – 40
ตัวอย่างข้อสอบ ENTRANCE ที่ตัดตัวเลือกได้จากอดีตสู่ปัจจุบัน	
คณิตศาสตร์ ก. และ คณิตศาสตร์ กข. (2517 – 2541).....	41 – 64
ตัวอย่างข้อสอบคณิตศาสตร์ 1. และ คณิตศาสตร์ 2. ที่ตัดตัวเลือกได้	
จากอดีตสู่ปัจจุบัน (ตุลาคม 2541 – มีนาคม 2546).....	65 – 76
โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก	
ชุดที่ 1.	77 – 94
ชุดที่ 2.	95 – 112
ชุดที่ 3.	113 – 138
ชุดที่ 4.	139 – 156
ชุดที่ 5.	157 – 176
ชุดที่ 6.	177 – 200
ชุดที่ 7.	201 – 224
ชุดที่ 8.	225 – 250
ชุดที่ 9.	251 – 274
ชุดที่ 10.	275 – 296
ชุดที่ 11.	297 – 318
ชุดที่ 12.	319 – 338
ชุดที่ 13.	339 – 360
ชุดที่ 14.	361 – 384
ชุดที่ 15.	385 – 406

การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คืออะไร

ข้อสอบคณิตศาสตร์ Entrance แบบตัดตัวเลือกได้ คาดว่าคงมีมาตั้งแต่การเปลี่ยนแปลงโครงสร้างข้อสอบ Entrance จากข้อสอบแบบอัตนัยทั้งหมดมาเป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิด 5 ตัวเลือก จนกระทั่งเป็นข้อสอบแบบปรนัยชนิด 4 ตัวเลือกในปัจจุบัน เทคนิคการทำข้อสอบโดยใช้วิธีตัดตัวเลือก VS. วิธีจริง ได้เขียนเผยแพร่ให้กับนักเรียนและครูผู้สอนและผู้ออกข้อสอบได้อ่านกันตั้งแต่ คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 1. ปี พ.ศ. 2537 ข้อจำกัดต่าง ๆ ที่ทำให้ต้องมีข้อสอบแบบตัดตัวเลือกได้ในข้อสอบทุกชุด เกิดจากเหตุผลต่าง ๆ ซึ่งจะขอล่าถึงในรูปแบบของการ ถาม-ตอบ ต่อไปนี้

คำถาม 1. การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คืออะไร

คำตอบ 1. การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์เป็นการหาคำตอบของข้อสอบแบบปรนัย โดยวิธีกำจัดตัวเลือกที่ไม่ต้องการออกไปก่อนโดยใช้เหตุผลง่าย ๆ ว่าในข้อสอบแต่ละข้อ

มีตัวเลือกที่ได้คะแนนเพียงตัวเลือกเดียว

และ มีตัวเลือกที่ไม่ได้คะแนนมีอยู่ 3 ตัวเลือก

เพราะฉะนั้นการหาตัดตัวเลือกที่ไม่ได้คะแนนซึ่งมีถึง 3 ตัวเลือกทิ้งไปก่อนอาจเป็นวิธีที่ได้คะแนนเร็วกว่า

คำถาม 2. การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คือการทำข้อสอบแบบเดาสุ่มใช่หรือไม่

คำตอบ 2. ไม่ใช่การเดาสุ่มแน่นอน เพราะว่าเหตุผลที่เราใช้ในการตัดตัวเลือกเป็นเหตุผลทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถมั่นใจได้ว่าตัวเลือกที่ตัดทิ้งไปนั้นเป็นตัวเลือกที่ไม่ได้คะแนนแน่นอน

คำถาม 3. การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ใช้เนื้อหาคณิตศาสตร์อะไรบ้าง

คำตอบ 3. เหตุผลและเนื้อหาที่เราใช้ในการตัดตัวเลือกต้องเป็น เนื้อหาทางคณิตศาสตร์อย่างแน่นอน แต่เป็นการเลือกใช้เหตุผลพื้นฐานคณิตศาสตร์ที่ ถูกต้อง เหมาะสม รัดกุม และ รวดเร็ว ตามหลักสูตรที่นักเรียนเรียนมาให้ตรงกับกรแก้ปัญหาข้อสอบคณิตศาสตร์ข้อนั้น ตัวอย่างเช่น

1. คำถามเกี่ยวกับเซต

เราสามารถใช้ แผนภาพของเวนน์ หรือ การสมมติสมาชิก ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

2. คำถามเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณ $\sin x$, $\cos x$

ในการตัดตัวเลือกเราสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับ

ค่าบวกหรือลบของ $\sin x$, $\cos x$ ในควอดรนต์ต่าง ๆ

ขอบเขตของค่า $-1 \leq \sin x \leq 1$ และ $-1 \leq \cos x \leq 1$

โดเมนของฟังก์ชันตรีโกณ $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan$, ...

ค่าของ $|\sec x| \geq 1$, $|\csc x| \geq 1$

$\arctan$ ของค่าบวก ต้องมีค่าเป็นบวก, $\arctan$ ของค่าลบ ต้องมีค่าเป็นลบ

$\arcsin$ ของค่าบวก ต้องมีค่าเป็นบวก, $\arcsin$ ของค่าลบ ต้องมีค่าเป็นลบ

3. คำถามเกี่ยวกับตรรกศาสตร์

เราสามารถใช้ ค่าความจริง T หรือ F ของประพจน์ p , q , r , ... ช่วยในการจำแนกตัวเลือกเช่น

ประพจน์ในตัวเลือกใดไม่เป็นสัจนิรันดร์

ตรวจสอบว่าประพจน์คู่ใดไม่สมมูลกัน

ประพจน์คู่ใดเป็นนิเสธกันหรือไม่

4. คำถามเกี่ยวกับเวกเตอร์

เราสามารถวาดรูปเพื่อวัดความยาวของเวกเตอร์ก็ตัดตัวเลือกได้

เราสามารถวาดรูปเพื่อดูจุดปลายของเวกเตอร์ว่าอยู่ในควอดรนต์ใดก็ตัดตัวเลือกได้

5. คำถามเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

ใช้ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนช่วยในการตัดตัวเลือก

ใช้ค่าพิสัยของจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ เพื่อดูว่า $z = a + bi$ อยู่ในควอดรนต์ใด ก็ตัดตัวเลือกได้

6. คำถามเกี่ยวกับสมการเส้นตรง

เราสามารถใช้ ความชัน ระยะตัดแกน และ กราฟของเส้นตรง ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

7. คำถามเกี่ยวกับภาคตัดกรวย เช่น พาราโบลา

เราสามารถใช้ พิกัดจุดยอด โฟกัส หรือลักษณะ คว่ำหงาย เปิดซ้ายขวา ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

รูปแบบสมการพาราโบลา สามารถดูได้ว่าเป็นพาราโบลาคว่ำหรือหงาย พาราโบลาเปิดซ้ายหรือเปิดขวา ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

8. คำถามเกี่ยวกับภาคตัดกรวย เช่น วงกลม วงรี ไฮเพอร์โบลา

สำหรับวงกลมใช้รูปแบบสมการวงกลม จุดศูนย์กลาง จุดบนวงกลม รัศมี ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

สำหรับวงรีใช้พิกัด จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก แกนโท ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

สำหรับไฮเพอร์โบลาใช้พิกัด จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนตามขวาง แกนสังยุค

ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

9. คำถามเกี่ยวกับเซตคำตอบของสมการ หรือ เซตคำตอบของอสมการ

เราสามารถใช้ การแทนค่า x บางค่าเพื่อดูว่า x นั้นอยู่หรือไม่อยู่ในเซตคำตอบ ช่วยตัดตัวเลือกได้

10. คำถามเกี่ยวกับโดเมน และ เรนจ์ของความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

ใช้การแทนค่า x บางค่าเพื่อดูว่า x นั้นอยู่ในโดเมนของความสัมพันธ์หรือไม่ ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ใช้การแทนค่า y บางค่าเพื่อดูว่า y นั้นอยู่ในเรนจ์ของความสัมพันธ์หรือไม่ ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ใช้ค่าของฟังก์ชันบางค่าช่วยในการตัดตัวเลือกได้

คำถาม 4. ข้อสอบ ENTRANCE ที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการตัดตัวเลือกมีมาตั้งแต่เมื่อไร

คำตอบ 4. ในความคิดของผู้เขียนคาดว่ามีมาพร้อมๆ กับการสอบแบบปรนัย ซึ่งแต่เดิมประมาณก่อน พ.ศ. 2510 การสอบ ENTRANCE จะเป็นการสอบแบบอัตนัย นักเรียนต้องแสดงวิธีทำทุกข้อ แต่หลังจากนั้น ได้มีการเปลี่ยนลักษณะข้อสอบจากแสดงวิธีทำ มาเป็นแบบปรนัย ตัวอย่างเช่น

ข้อสอบแบบอัตนัย จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 4x - 5 = 0$

นักเรียนที่จะได้คะแนนจากข้อนี้ต้องมีความรู้ การแยกตัวประกอบ หรือ รุ้สูตรรากของสมการกำลังสอง

ข้อสอบแบบปรนัย คำตอบของสมการ $x^2 - 4x - 5 = 0$ คือตัวเลือกใด

1. 1, 5

2. -1, 5

3. 1, -5

4. -1, -5

นักเรียนที่มีความรู้ การแยกตัวประกอบ หรือ รุ้สูตรรากของสมการกำลังสอง ต้องทำคะแนนได้แน่นอน แต่พวกที่ไม่มีความรู้ การแยกตัวประกอบ หรือ รุ้สูตรรากของสมการกำลังสอง ก็ได้คะแนนเหมือนกัน ถ้านักเรียนคนนั้นแทนค่าและคิดเลขเป็น

เพราะว่าเมื่อ แทนค่า $x = -1$ จะได้ $x^2 - 4x - 5 = 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

แทนค่า $x = 5$ จะได้ $x^2 - 4x - 5 = 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

คำถามถึงครูผู้สอนและผู้ออกข้อสอบคณิตศาสตร์ ท่านคิดว่านักเรียนที่ได้คะแนนจากการแทนค่าจะมีความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบหรือไม่ แต่จากประสบการณ์ของผู้เขียนในการตรวจข้อสอบ CALCULUS ของนิสิตปีที่ 1 ซึ่งเป็นข้อสอบแบบแสดงวิธีทำพบว่า มีนิสิตมากกว่า 1 คนแยกตัวประกอบไม่เป็น

ตัวอย่างข้อสอบจริง ข้อ 6 หมวด ข. คณิตศาสตร์ ก. 2520

ค่าของ x ที่สอดคล้องสมการ $\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x}$ คือ

ก. $x > 1$

ข. $x < \frac{1}{2}$

ค. $0 < x < \frac{1}{2}$

ง. $\frac{1}{2} < x < 1$

จ. $0 < x < \frac{1}{2}$ หรือ $x > 1$

วิธีจริงที่หลักสูตรคณิตศาสตร์ต้องการ

เอา $x^2(2x-1)^2$ คูณตลอด ;

$$\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x}$$

$$x^2(2x-1)^2 \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x} x^2(2x-1)^2$$

$$x^2(2x-1) < x(2x-1)^2$$

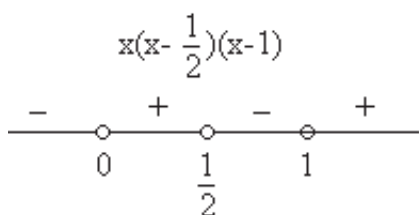
$$x^2(2x-1) - x(2x-1)^2 < 0$$

$$x(2x-1)(x - (2x-1)) < 0$$

$$x(2x-1)(1-x) < 0$$

$$x(x - \frac{1}{2})(1-x) < 0$$

$$x(x - \frac{1}{2})(x-1) > 0$$



เพราะฉะนั้นค่าของ x คือ $0 < x < \frac{1}{2}$ หรือ $x > 1$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $x = 0$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ข.

เพราะว่า $x = 2$ ทำให้ $\frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ จริง เพราะฉะนั้น $x = 2$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ค. และ ง.

เพราะว่า $x = 0.1$ ทำให้ $\frac{1}{0.2-1} = -\frac{1}{0.8} < 10$ จริง เพราะฉะนั้น $x = 0.1$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ก.

เพราะฉะนั้นได้ตัวเลือก จ. เป็นคำตอบ

หมายเหตุ ตัวอย่างนี้จะเห็นว่าการตัดตัวเลือกได้คะแนนเร็วกว่าวิธีจริง

คำถาม 5. ทำไมจึงต้องมีข้อสอบ ENTRANCE ที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการตัดตัวเลือก

คำตอบ 5. ครูผู้สอนและผู้ออกข้อสอบคณิตศาสตร์ทุกคนอยากให้ข้อสอบที่ออกมานั้นสามารถวัดความรู้ได้ตรงวัตถุประสงค์และต้องใช้ความรู้จริงตามหลักสูตร โดยต้องมีขั้นตอนการคำนวณต่างๆ ครบถ้วนจึงจะได้คำตอบที่ต้องการ แต่สาเหตุที่ยังมีข้อสอบ ENTRANCE ที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการตัดตัวเลือก อาจเป็นเพราะข้อจำกัดต่าง ๆ เช่น

1. หลักสูตรบังคับ

ตัวอย่างเช่น หลักสูตรบังคับว่านักเรียนต้องบอกได้ว่า ประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์

เพราะฉะนั้นแทนค่า T F แล้วดูค่าความจริงของตัวเลือกว่าเป็นจริงหรือเท็จ ก็จะตัดตัวเลือกได้

2. ข้อสอบต้องเป็นความลับ

เมื่อข้อสอบเป็นความลับ ก็ไม่สามารถตรวจสอบได้โดยง่าย ทำให้ไม่สามารถปรับปรุงคุณภาพให้ดีขึ้นได้ตลอดเวลา เพราะฉะนั้นตัวเลือกบางตัวจึงยังมีข้อบกพร่อง ทำให้เราตัดตัวเลือกทั้งได้

3. มีเวลาในการออกข้อสอบน้อย

เมื่อเวลาในการออกข้อสอบมีน้อย จึงไม่สามารถตรวจสอบการอ้างเหตุผลทางคณิตศาสตร์อื่นๆ ที่สามารถตัดตัวเลือกบางตัวเลือกได้

4. การออกข้อสอบแบบตัวเลือกต้องมีการสร้างตัวลวง ซึ่งตัวลวงนี้เองทำให้

เราสามารถใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เล็กๆ น้อยๆ มาช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ความคิดเห็นของผู้เขียน ในข้อสอบไม่ควรจะมีตัวเลือกที่ลวงนักเรียน เพราะว่าผู้ที่ทำข้อสอบและได้คำตอบใกล้เคียงกับคำตอบจริง แสดงว่านักเรียนคนนั้นต้องมีความรู้ทางคณิตศาสตร์มากกว่าที่ทำข้อสอบโดยการเดา หากผู้ออกข้อสอบเห็นแก่ประโยชน์ของเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ อย่าสร้างตัวลวงเลย เพื่อว่านักเรียนที่มีความรู้คนนั้นจะได้เฉลียวใจกับการที่ไม่มีคำตอบให้เลือกจะได้ย้อนกลับไปตรวจสอบการคิดเลขใหม่

คำถาม 6. เราควรใช้เทคนิคการตัดตัวเลือกแบบใดกับข้อสอบคณิตศาสตร์

คำตอบ 6. เทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ไม่ได้มีใน ค 011 – ค 016 แต่เทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบมีที่ตัวข้อสอบเอง นั่นคือคำถาม และ รูปแบบของข้อสอบจะเป็นตัวชี้แนะว่า ต้องใช้เทคนิคการตัดตัวเลือกแบบใด

คำถาม 7. เทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์มีอะไรบ้าง

คำตอบ 7. เทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คงจะมีใหม่ออกมาเรื่อย ๆ ขึ้นอยู่กับลักษณะข้อสอบ ในหนังสือเล่มนี้ผู้เขียนจะนำเทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ที่ได้เขียนไว้ ตั้งแต่การเฉลยข้อสอบ

ENTRANCE พ.ศ. 2537 จาก หนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 1. จนถึง ENTRANCE ระบบใหม่ คณิตศาสตร์ 1. และ คณิตศาสตร์ 2. มีนาคม พ.ศ. 2546

ตัวอย่างของเทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ที่สำคัญ

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
 2. เซตคำตอบคือเซตในตัวเลือกใด
 3. เซตคำตอบเป็นสับเซตของตัวเลือกใด
 4. โดเมนและเรนจ์คือเซตในตัวเลือกใด
 5. ใช้การดูเครื่องหมายบวกลบของ $\sin$, $\cos$, ... ในการจำแนกตัวเลือก
 6. พาราโบลา คว่ำ หายย เปิดซ้าย หรือเปิดขวา ก็ตัดตัวเลือกได้
 7. เส้นตรงมีความชันเป็นบวกหรือลบ
 8. วาดรูปที่สอดคล้องกับโจทย์ แล้วทำการวัดระยะทาง
 9. ประมาณค่าของโจทย์กับของตัวเลือก
 10. ขนาดของเวกเตอร์ ใช้ในการตัดตัวเลือกได้
 11. ใช้ค่า $\det A$ ในการตัดตัวเลือกได้
 12. เปรียบเทียบค่า มากกว่าหรือน้อยกว่า ระหว่างโจทย์กับตัวเลือก
 13. รูปแบบสมการภาคตัดกรวย ในการตัดตัวเลือกได้
 14. จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ใช้ในการตัดตัวเลือกเกี่ยวกับภาคตัดกรวยได้
 15. แกนสมมาตรขนานแกน X หรือ แกน Y จำแนกตัวเลือกเกี่ยวกับภาคตัดกรวยได้
 16. การพิจารณาข้อความ 2 ข้อความหากเราทำได้ 1 ข้อความก็จะตัดตัวเลือกได้ 2 ตัวเลือก
 17. คำถามที่ถามว่าตัวเลือกใดผิดแสดงว่าโจทย์ต้องการให้เราตัดตัวเลือกที่ถูกทั้ง
 18. คำถามที่ถามว่าตัวเลือกใดถูก แสดงว่าโจทย์ต้องการให้เราตัดตัวเลือกที่ผิดทั้ง
- ฯลฯ

เทคนิคการตัดตัวเลือกที่ดีที่สุดคือการทำด้วยวิธีจริงไปเรื่อยๆ และสังเกตตัวเลือกไปด้วยว่าเราจะตัดตัวเลือกได้หรือยังเมื่อเห็นว่าได้คำตอบที่ถูกต้องแล้วก็ควรจะหยุดทำข้อสอบข้อนั้น ไปทำข้ออื่นต่อดีกว่า

สำหรับนักเรียนที่สนใจเทคนิคการตัดตัวเลือก ขอแนะนำให้อ่านหนังสือ คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 25 คู่มือตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย ฉบับสมบูรณ์

ตัวอย่างข้อสอบต่าง ๆ และเทคนิคการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมเช่น

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ตัวอย่าง ค่า x จากสมการ $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$ ตรงกับข้อใด

1. $2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi$

2. $2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi$

3. $2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{4}$

4. $2n\pi$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x และ n แทนค่า $n = 0$ ตัดตัวเลือกแต่ละตัวคือ

1. $\frac{\pi}{2}, 0$

2. $\frac{\pi}{4}, 0$

3. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$

4. 0

เพราะว่า $\sin 0 + \cos 0 = 1 + \sin 0 \cos 0$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

เพราะว่า $\sin \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1 + \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

ตัวอย่าง ค่าของ $(\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta})^2 + (\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta})^2 - (\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta})^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0

2. 1

3. 3

4. 5

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ θ แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \frac{1}{\sin \theta})^2 + (\cos \theta + \frac{1}{\cos \theta})^2 - (\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta})^2 &= (\sin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{4}})^2 + (\cos \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}})^2 - (\tan \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}})^2 \\ &= (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1})^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{1})^2 - (1+1)^2 = (\frac{3}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{3}{\sqrt{2}})^2 - 4 = 4.5 + 4.5 - 4 = 5 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

ตัวอย่าง ถ้า $A_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีใช้เอกฐาน แล้ว $\det(\text{adj}(\text{adj}A))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $|A|^{n^2+2n}$

2. $|A|^{n^2-2n}$

3. $|A|^{(n-1)^2}$

4. $|A|^{(n+1)^2}$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของเมทริกซ์ A และ n

แทนค่า $n = 1$ และ $A = [4]$ จะได้ว่า $\det A = 4$, $A^{-1} = [\frac{1}{4}]$, $\text{adj}A = \det A \cdot A^{-1} = 4 [\frac{1}{4}] = [1]$

และ $\det(\text{adj}(\text{adj}[4])) = \det(\text{adj}([1])) = \det([1]) = 1$ เพราะว่าค่า $\det$ ของแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

1. $|A|^{n^2+2n} = 4^3 = 64$

2. $|A|^{n^2-2n} = 4^{-1} = 0.25$

3. $|A|^{(n-1)^2} = 4^0 = 1$

4. $|A|^{(n+1)^2} = 4^4 = 256$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = (3x - 2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$, $x > 0$ ค่าของ $f'(x^2) - f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $6x^2 - 2 - \frac{4}{x^3}$

2. $6x^2 - 4 - \frac{2}{x^3}$

3. $18x^2 - 14 - \frac{4}{x^3}$

4. $18x^2 - 16 - \frac{2}{x^3}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $f(x) = (3x - 2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}} = (3x - 2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}} 4x^{-\frac{1}{2}}$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 2(3x - 2)(3) + 4(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} = 18x - 12 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$

และ $f'(x^2) = 18x^2 - 12 - \frac{2}{x^3}$ ขณะนี้โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x เพราะว่า $f'(1)$ เป็น

ตัวเลขเพราะฉะนั้น $f'(x^2) - f'(1)$ ต้องมีเทอมของ $\frac{2}{x^3}$ และ $18x^2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ

3.

ตัวอย่าง สมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(1, 3)$ และมีความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด (x, y) ใดๆ เป็น $2x + 5$ คือสมการในตัวเลือกใด

1. $y = x^2 + 5x - 3$

2. $y = 2x^2 + 5x - 3$

3. $y = x^2 + 5x + 3$

4. $y = 2x^2 + 5x + 3$

การตัดตัวเลือก ความชันของเส้นสัมผัสของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $2x + 5$

2. $4x + 5$

3. $2x + 5$

4. $4x + 5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ต่อไปแทนค่าจุดผ่าน $(1, 3)$ ในตัวเลือกที่เหลือ

เพราะว่า $(1, 3)$ ไม่อยู่บนเส้นโค้งของตัวเลือก 3. $y = x^2 + 5x - 3$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

ถ้า z เป็นราก แล้ว $\bar{z}$ คอนจูเกตต้องเป็นรากด้วย

ตัวอย่าง รากที่สอดคล้องสมการ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$ คือข้อใด

1. $\{1, 2, 3, i, -1\}$

2. $\{1, 2, -3, 1 + i, -1\}$

3. $\{1, 2, -1 + i, -1 - i\}$

4. $\{1, 2, 3, 1 + i\}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$ เป็นสมการพหุนามที่สัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้น ถ้า z เป็นคำตอบแล้ว $\bar{z}$ ต้องเป็นคำตอบด้วย

ตัวเลือก 1. มี i แต่ไม่มี $-i$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ตัวเลือก 2. มี $-i$ แต่ไม่มี i เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

ตัวเลือก 4. มี $1 + i$ แต่ไม่มี $1 - i$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ตัวอย่าง กำหนด $\sin x + \cos y = a$ และ $\cos x + \sin y = b$ จะได้ $\sin(x + y)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{a^2 + b^2}{2}$

2. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

3. $\frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$

4. $\frac{a^2 + b^2 + 2}{2}$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x, y, a และ b

แทนค่า $x = 0, y = 0$ จะได้ $a = \sin 0 + \cos 0 = 1$ และ $b = \cos 0 + \sin 0 = 1$

ค่าของโจทย์ $\sin(x + y) = \sin(0 + 0) = 0$

แทนค่า $a = 1, b = 1$ ในแต่ละตัวเลือกจะได้

1. $\frac{a^2 + b^2}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$

2. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{1-1}{2} = 0$

3. $\frac{a^2 + b^2 - 2}{2} = \frac{1+1-2}{2} = 0$

4. $\frac{a^2 + b^2 + 2}{2} = \frac{1+1+2}{2} = 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

แทนค่า $x = 0, y = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $a = \sin 0 + \cos \frac{\pi}{2} = 0$ และ $b = \cos 0 + \sin \frac{\pi}{2} = 2$

ค่าของโจทย์ $\sin(x + y) = \sin(0 + \frac{\pi}{2}) = 1$

แทนค่า $a = 0, b = 2$ ในตัวเลือก 2. และ 4. ที่เหลือ

2. $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{0-4}{0+4} = -1$

3. $\frac{a^2 + b^2 - 2}{2} = \frac{0+4-2}{2} = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง $\sin x + \cos y = a$... (1)

$\sin^2 x + 2\sin x \cos y + \cos^2 y = a^2$... (2)

$\cos x + \sin y = b$... (3)

$\cos^2 x + 2\sin y \cos x + \sin^2 y = b^2$... (4)

(2) + (4); $\sin^2 x + 2\sin x \cos y + \cos^2 y + \cos^2 x + 2\sin y \cos x + \sin^2 y = a^2 + b^2$

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos y + 2\sin y \cos x + \cos^2 y + \sin^2 y = a^2 + b^2$

$1 + 2(\sin x \cos y + \sin y \cos x) + 1 = a^2 + b^2$

$2\sin(x + y) = a^2 + b^2 - 2$

$\sin(x + y) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$

โดเมนและเรนจ์คือเซตในตัวเลือกใด

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 2\}$ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือตัวเลือกใด

1. $D_r = [0, 5], R_r = [0, 3]$

2. $D_r = [1, 5], R_r = [0, 3]$

3. $D_r = [1, 5], R_r = [-1, 3]$

4. $D_r = [0, 5], R_r = [-1, 3]$

การตัดตัวเลือก จากเงื่อนไข $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 2$ แสดงว่า $x = 0$ ไม่ได้

เพราะว่าตัวเลือก 1. และ 4. มี 0 เป็นสมาชิกในโดเมน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

แทนค่า $x = 5$ และ $y = -1$ จะได้ $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{5-1} + \sqrt{-1+1} = 2$

เพราะฉะนั้น $y = -1$ ได้ เพราะตัวเลือก 2. ไม่มี -1 เป็นสมาชิกในเรนจ์

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

เซตคำตอบคือตัวเลือกใด

ตัวอย่าง เซตคำตอบของสมการ $\frac{x^2(x-3)}{x+4} > 0$ คือตัวเลือกใด

1. $(-\infty, -4] \cup [3, \infty)$

2. $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

3. $(-\infty, -4) \cup \{0\} \cup [3, \infty)$

4. $(-\infty, -4] \cup \{0\} \cup [3, \infty)$

การตัดตัวเลือก เพราะจากเงื่อนไขของโจทย์ $\frac{x^2(x-3)}{x+4} > 0$ ค่าของ x เท่ากับ 0 ไม่ได้

เพราะว่าตัวเลือก 1. และ 4. มี 0 เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

เพราะว่า $x = 3$ ทำให้ $\frac{x^2(x-3)}{x+4} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 3$ ไม่ได้

เพราะว่าตัวเลือก 3. $(-\infty, -4) \cup \{0\} \cup [3, \infty)$ มี 3 เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

ตัวอย่าง เซตคำตอบของสมการ $\frac{|x|}{|x|-5} \leq 0$ คือตัวเลือกใด

1. $(-\infty, 5]$

2. $[0, 5)$

3. $(5, \infty)$

4. $(-5, 5)$

การตัดตัวเลือก จากเงื่อนไขของโจทย์ $\frac{|x|}{|x|-5} \leq 0$

เพราะว่า $x = 5$ ไม่ได้

เพราะว่าตัวเลือก 1. มี 5 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

เพราะว่า $x = -4$ ได้

เพราะว่าตัวเลือก 2. ไม่มี -4 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

เพราะฉะนั้น $x = 0$ ได้

เพราะว่าตัวเลือก 3. ไม่มี 0 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

ใช้การส่งค่าฟังก์ชันช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & , x \geq 0 \\ -x^2-1 & , x < 0 \end{cases}$ แล้ว $f^{-1}(x)$ มีค่าตรงกับข้อใด

- | | |
|---|--|
| $1. f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & , x \geq 2 \\ -\sqrt{-x-1} & , x < -1 \end{cases}$ | $2. f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & , x \geq 2 \\ -\sqrt{1-x} & , x < 1 \end{cases}$ |
| $3. f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & , x \geq -1 \\ -\sqrt{-x-1} & , x < -1 \end{cases}$ | $4. f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & , x \geq 0 \\ -\sqrt{1-x} & , x < 0 \end{cases}$ |

การตัดตัวเลือก

จากโจทย์ $f(-1) = -2$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(-2) = -1$ และ $f^{-1}(-2)$

เพราะว่าค่าของ $f^{-1}(-2)$ ในแต่ละตัวเลือกคือ

- | | |
|----------------------|-----------------------------|
| 1. $f^{-1}(-2) = -1$ | 2. $f^{-1}(-2) = -\sqrt{3}$ |
| 3. $f^{-1}(-2) = -1$ | 4. $f^{-1}(-2) = -\sqrt{3}$ |

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

เพราะว่า $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & , x \geq 0 \\ -x^2-1 & , x < 0 \end{cases}$ มีเรนจ์เป็นเซต $(-\infty, -1) \cup [2, \infty)$

เพราะฉะนั้นโดเมนของ f^{-1} คือ $(-\infty, -1) \cup [2, \infty)$

เพราะว่าโดเมนของ f^{-1} ในตัวเลือก 3. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & , x \geq -1 \\ -\sqrt{-x-1} & , x < -1 \end{cases}$ คือ $(-\infty, \infty)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

โดเมนและเรนจ์คือเซตในตัวเลือกใด

ตัวอย่าง กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 3|x| + 5|y| = 15\}$ เซต $D_r \cap R_r$ คือตัวเลือกใด

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. $[-3, 3]$ | 2. $[-5, 5]$ |
| 3. $[0, 3]$ | 4. $[0, 5]$ |

การตัดตัวเลือก เพราะว่า ถ้า $y = 5$ จะทำให้ $3|x| = 15 - 25 = -10 < 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $5 \notin R_r$ เพราะฉะนั้น $5 \notin D_r \cap R_r$

เพราะว่าตัวเลือก 2. และ 4. มี 5 เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

เพราะว่าเงื่อนไข $3|x| + 5|y| = 3|\pm x| + 5|\pm y| = 15$

เพราะฉะนั้น $\pm x, \pm y \in D_r \cap R_r$ เพราะฉะนั้นสมาชิกของ $D_r \cap R_r$ ต้องมีทั้งค่าบวกและค่าลบ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

เปรียบเทียบค่าระหว่างโจทย์กับตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนดให้ อนุกรม $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{25}{3} + \frac{125}{3} + \dots$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. เป็นอนุกรมลู่เข้ามีผลบวกเท่ากับ $\frac{3}{4}$
2. เป็นอนุกรมลู่เข้ามีผลบวกเท่ากับ $\frac{5}{4}$
3. เป็นอนุกรมลู่เข้ามีผลบวกเท่ากับ $\frac{7}{4}$
4. เป็นอนุกรมลู่ออก

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{25}{3} + \frac{125}{3} + \dots > \frac{7}{4}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

ตัวอย่าง ตัวเลือกใดเป็นผลบวกของอนุกรมอนันต์ $2 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \dots$

1. $\frac{20}{9}$
2. $\frac{40}{9}$
3. $\frac{91}{45}$
4. $\frac{218}{99}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าค่าของโจทย์เท่ากับ $2.2222\dots < 2.3$ และค่าของตัวเลือกมีค่าเป็นดังนี้

1. $\frac{20}{9} = 2.222$
2. $\frac{40}{9} > 3$
3. $\frac{91}{45} = 2.02$
4. $\frac{218}{99} = 2.202$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

วิธีจริง ให้ $S = 2 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \dots$... (1)

$$10S = 20 + 2 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \dots \quad \dots (2)$$

เพราะว่า (2) - (1) จะได้ $9S = 20$ เพราะฉะนั้น $S = \frac{20}{9}$

ปัญหาภาคตัดกรวย ใช้พิกัดจุดศูนย์กลางช่วยตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนดให้วงรีมีสมการเป็น $6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y - 4 = 0$ สมการของวงกลมที่บรรจุในวงรีแนบในและมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงรีที่กำหนดให้คือ

1. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$

การตัดตัวเลือก จัดรูปสมการวงรี $6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y - 4 = 0$

$$6(x^2 + 2x + 1) + 5(y^2 - 4y + 4) = 4 + 6 + 20$$

$$6(x + 1)^2 + 5(y - 2)^2 = 30$$

เพราะฉะนั้นวงรีมีจุดศูนย์กลาง $(-1, 2)$ เพราะว่างกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของตัวเลือกแต่ละตัวคือ

1. $(-1, 2)$
2. $(1, -2)$
3. $(-2, 1)$
4. $(2, 1)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

วาดรูปและวัดระยะทางก็ตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่าง วงกลม $x^2 + y^2 + 6x + 14y + 22 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$ อยู่ใกล้กันมากที่สุดเป็นระยะทางเท่าใด

- | | |
|------------|------------|
| 1. 2 หน่วย | 2. 3 หน่วย |
| 3. 5 หน่วย | 4. 6 หน่วย |

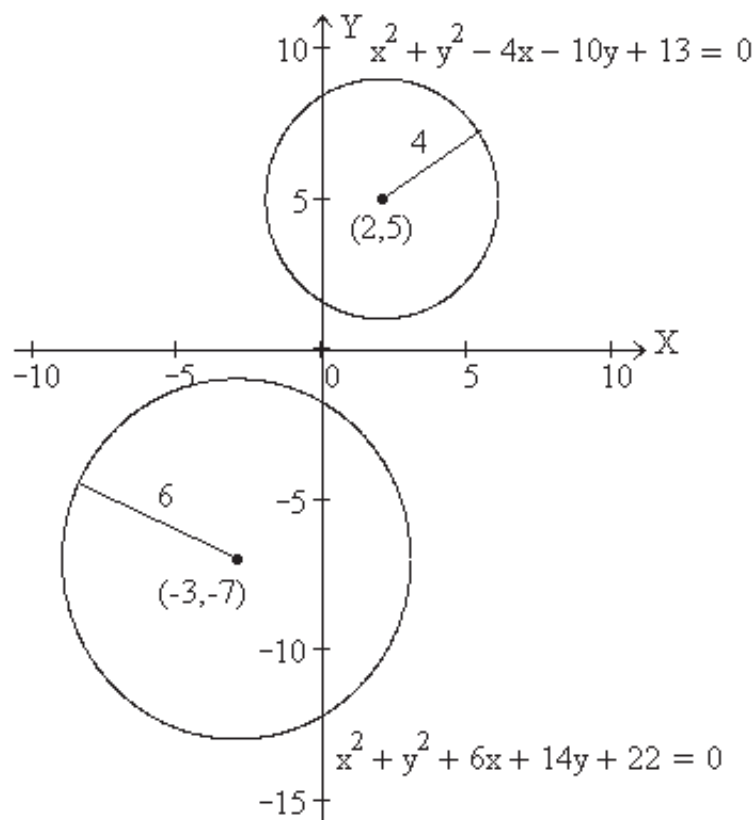
การตัดตัวเลือก ท่องจำสูตรไว้ใช้งานได้เลย $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ และ รัศมีเท่ากับ $\sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$ เพราะฉะนั้น

วงกลม $x^2 + y^2 + 6x + 14y + 22 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-3, -7)$ และรัศมี $= \sqrt{\frac{36}{4} + \frac{196}{4} - 22} = 6$

วงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(2, 5)$ และรัศมี $= \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{100}{4} - 13} = 4$

วาดรูปวงกลมโดยใช้ 1 cm ต่อ 1 หน่วย



โดยการวัดระยะทางจากรูปจะเห็นว่าจุดที่อยู่ใกล้กันมีระยะเท่ากับ 2 เซนติเมตร เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

วาดรูปและใช้พิกัดของจุดช่วยตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $2x + 3y - 4 = 0$ และ N เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, \frac{13}{2})$ และตั้งฉากกับ L ถ้า P เป็นจุดตัดของเส้นตรง L กับ N จุดที่เกิดจากเส้นตรงที่ลากจากจุด P ไปตั้งฉากกับแกน Y คือจุดใด

1. $(-1, 0)$
2. $(0, 2)$
3. $(-\frac{49}{5}, 0)$
4. $(0, \frac{121}{5})$

การตัดตัวเลือก โจทย์ถามว่า

จุดที่เกิดจากเส้นตรงที่ลากจากจุด P

ไปตั้งฉากกับแกน Y คือจุดใด

แสดงว่าจุดนั้นอยู่บนแกน Y

1. $(-1, 0)$ อยู่บนแกน X
2. $(0, 2)$ อยู่บนแกน Y
3. $(-\frac{49}{5}, 0)$ อยู่บนแกน X
4. $(0, \frac{121}{5})$ อยู่บนแกน Y

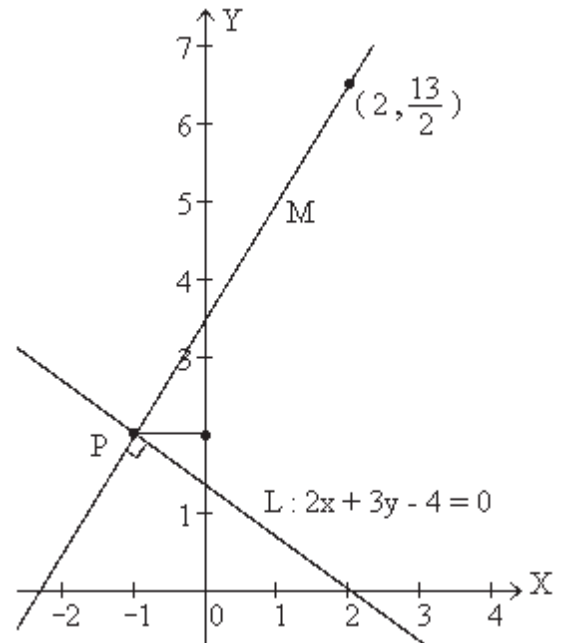
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

ต่อไปวาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

จากรูปจะเห็นว่าเมื่อลากเส้นจากจุด P มาตั้งฉากกับแกน Y

จะตัดแกน Y ทางด้านบวก 2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.



บวกเป็นราก ลบก็ต้องเป็นรากด้วย

ตัวอย่าง คำตอบทั้งหมดของสมการ $\arccos(\sin(\pi + \arccos(x^2 - \frac{1}{2}))) = \pi$ เป็นสมาชิกของเซตใด

1. $\{\dots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \dots\}$
2. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \dots\}$
3. $\{\dots, -\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \dots\}$
4. $\{\dots, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots\}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าสมการ $\arccos(\sin(\pi + \arccos(x^2 - \frac{1}{2}))) = \pi$ มีพจน์ของ x^2

เพราะฉะนั้น ถ้า x เป็นรากของสมการ แล้ว $-x$ ต้องเป็นรากของสมการด้วย

เพราะว่าตัวเลือก 1. และ ตัวเลือก 2. มีแต่ค่า บวก เท่านั้น เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

แทนค่า $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ เพราะว่า $\arccos(\sin(\pi + \arccos(x^2 - \frac{1}{2}))) = \arccos(\sin(\pi + \arccos(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})))$

$$= \arccos(\sin(\pi + \arccos(0))) = \arccos(\sin(\pi + \frac{\pi}{2})) = \arccos(\sin(\frac{3\pi}{2})) = \arccos(-1) = \pi$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ เป็นคำตอบ เพราะว่าตัวเลือก 4. ไม่มี $\frac{1}{\sqrt{2}}$ เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

ปัญหาภาคตัดกรวย ใช้พิกัดจุดศูนย์กลางช่วยตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง ให้ $(1, -3)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สัมผัสกับเส้นตรง $x - y - 6 = 0$ ที่จุด $(2, -4)$
สมการของวงกลมคือสมการในข้อใด

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$

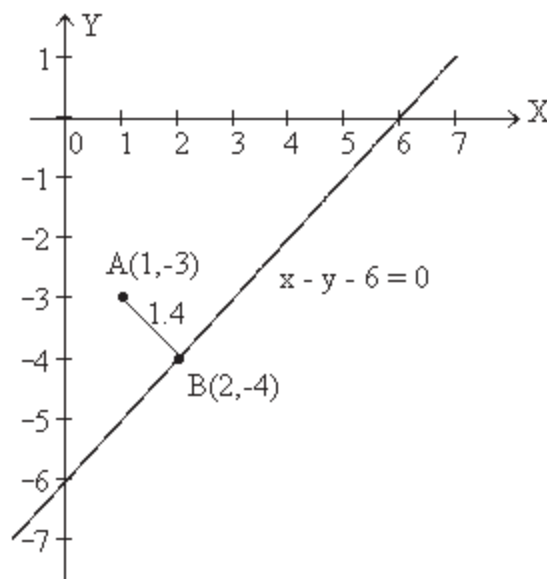
2. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 8 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

การตัดตัวเลือก เขียนกราฟเส้นตรง $x - y - 6 = 0$

และจุด $A(1, -3)$ และ $B(2, -4)$ ตามเงื่อนไขของโจทย์



โดยการวาดรูปเส้นตรงและวัดระยะทางจากจุด $A(1, -3)$ มายังเส้นตรงจะได้ระยะทาง 1.4 เซนติเมตร
เพราะว่าวงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

และจุดศูนย์กลางของวงกลมในแต่ละคือ

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-1, 3)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

2. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 8 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(1, -3)$ เพราะฉะนั้นเก็บตัวเลือก 2. ไว้ก่อน

3. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(1, 3)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

4. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(1, -3)$ เพราะฉะนั้นเก็บตัวเลือก 4. ไว้ก่อน

เพราะว่าวงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีรัศมี $r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$ และจากตัวเลือกที่เหลือ

2. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 8 = 0$ มีรัศมี $= \sqrt{\frac{2^2}{4} + \frac{6^2}{4} - 8} = \sqrt{2} = 1.414$

4. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ มีรัศมี $= \sqrt{\frac{2^2}{4} + \frac{6^2}{4} - 6} = 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

เซตคำตอบคือตัวเลือกใด

ตัวอย่าง กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ $[0, 2\pi]$ เซตคำตอบของสมการ $\frac{\sin^2 x - \sin x}{\cos x - \frac{1}{2}} < 0$ คือเซตใด

1. $(0, \frac{\pi}{4}) \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$

2. $(0, \frac{\pi}{3}) \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$

3. $(0, \frac{\pi}{3}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{3}]$

4. $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$

การตัดตัวเลือก คำถามและตัวเลือกแบบนี้เราจะใช้วิธีนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ โดยเลือกค่าที่คิดเลขง่าย ๆ และจำแนกตัวเลือกได้ยิ่งดีเช่น $x = \frac{\pi}{4}$ จำแนกตัวเลือก 1. กับ 2. ได้

แทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$ เพราะว่า $\frac{\sin^2(\frac{\pi}{4}) - \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}} = -1 < 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{\pi}{4}$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

เพราะว่าตัวเลือก 1. และ 4. ไม่มี $\frac{\pi}{4}$ เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

เพราะว่า $x = \frac{5\pi}{3}$ จำแนกตัวเลือก 2. กับ 3. ได้

แทนค่า $x = \frac{5\pi}{3}$ เพราะว่า $\frac{\sin^2(\frac{5\pi}{3}) - \sin \frac{5\pi}{3}}{\cos \frac{5\pi}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\frac{5\pi}{3}$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ

เพราะว่าตัวเลือก 2. มี $\frac{5\pi}{3}$ เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ตัวอย่าง รากที่สอดคล้องสมการ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$ คือข้อใด

1. $\{1, 2, 3, i, -1\}$

2. $\{1, 2, -3, 1+i, -1\}$

3. $\{1, 2, -1+i, -1-i\}$

4. $\{1, 2, 3, 1+i\}$

การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ให้ใช้การแทนค่าแล้วทำการตัดตัวเลือกดีกว่า

แทนค่า $z = 1$ จะได้ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 1 - 2 - 1 + 6 - 4 = 0$

แทนค่า $z = 2$ จะได้ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 2^5 - 2(2^4) - 2^3 + 12 - 4 = 0$

แทนค่า $z = -1$ จะได้ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = -1 - 2 + 1 - 6 - 4 = -12 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

แทนค่า $z = 3$ จะได้ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 3^5 - 2(3^4) - 3^3 + 6(3) - 4 = 68 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วาดรูปจริงและดูค่าความชันก็ตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่าง ถ้า $A(3, 10)$, $B(-8, 2)$ และ $C(10, -2)$ เป็นจุดมุมยอดของสามเหลี่ยม ABC แล้วสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับ BC คือข้อใด

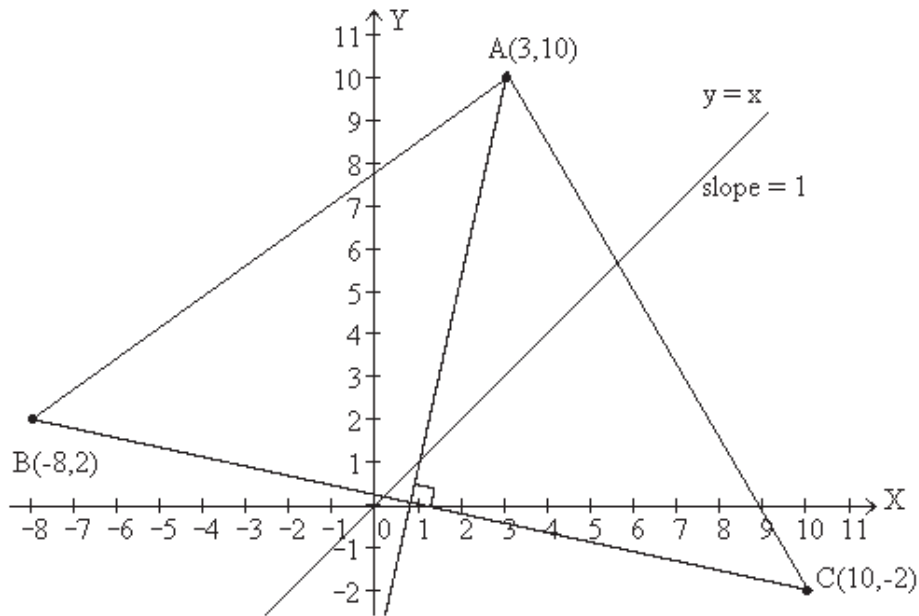
1. $2x - 9y + 7 = 0$

2. $2y - 9x + 7 = 0$

3. $2y - 9x - 7 = 0$

4. $2y + 9x - 7 = 0$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์



เส้นที่ลากจาก A มาตั้งฉากกับ BC มีความชันเป็นบวก และ มีค่ามากกว่า 1

ความชันของแต่ละตัวเลือกคือ

1. ความชัน $= \frac{2}{9} < 1$

2. ความชัน $= \frac{9}{2} > 1$

3. ความชัน $= \frac{9}{2} > 1$

4. ความชัน $= -\frac{9}{2} < 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

เพราะว่าเส้นตรงต้องผ่านจุด $A(3, 10)$

แทนค่า $x = 3, y = 10$ ในตัวเลือก 2. และ 3.

2. เพราะว่า $2y - 9x + 7 = 20 - 27 + 7 = 0$

เพราะฉะนั้นเส้นตรง $2y - 9x + 7 = 0$ ผ่านจุด $A(3, 10)$

3. เพราะว่า $2y - 9x - 7 = 20 - 27 - 7 \neq 0$

เพราะฉะนั้นเส้นตรง $2y - 9x - 7 = 0$ ไม่ผ่านจุด $A(3, 10)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

ข้อสอบ Entrance ที่ไม่สมบูรณ์

ในการประชุมเพื่อจัดทำข้อสอบทุกครั้งที่กรรมการออกข้อสอบไม่ต้องการให้มีข้อสอบผิดหรือข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์เกิดขึ้น แต่ในการสอบ Entrance ที่ผ่านมาในบางปีมีข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์เกิดขึ้น สำหรับการสอบการวัดผลในชั้นเรียน ถ้านักเรียนพบข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์ก็ควรจะนำข้อสงสัยไปถามกับครูผู้สอน แต่ถ้าเป็นการสอบ Entrance กรรมการคุมสอบจะไม่สามารถตอบคำถามเกี่ยวกับความไม่สมบูรณ์ของข้อสอบได้ นักเรียนควรเขียนหมายเหตุไว้ที่กระดาษข้อสอบหรือกระดาษคำตอบ เพื่อให้ผู้ตรวจข้อสอบหรือกรรมการออกข้อสอบจะได้ทราบ และทำการแก้ไขได้ทันเวลา เช่นตรวจสอบข้อสอบนั้นอีกครั้ง หากข้อสอบนั้นไม่สมบูรณ์จริง จะได้ยกประโยชน์ให้กับนักเรียน ในบางครั้งความไม่สมบูรณ์ของข้อสอบ Entrance บางข้อ มีความยุ่งยากซับซ้อนมากขนาดประชุมกรรมการออกข้อสอบชุดนั้นก็อาจจะหาข้อสรุปไม่ได้

ในบทความนี้จะรวบรวมข้อสอบ Entrance ที่ไม่สมบูรณ์ และแนะนำแนวทางการแก้ไขปรับปรุงคุณภาพข้อสอบให้ดีขึ้น ความไม่สมบูรณ์ของข้อสอบผู้เขียนคาดว่าเกิดจากสาเหตุที่สำคัญดังนี้

1. พิมพ์ข้อสอบผิด สาเหตุที่สำคัญคือพนักงานพิมพ์ผิดไม่ใช่ครูสอนคณิตศาสตร์ และไม่ใช้กรรมการออกข้อสอบ บางครั้งการเว้นวรรคของ ภาษาไทยกับภาษาคณิตศาสตร์ การเว้นวรรคที่แตกต่างกันอาจมีความหมายแตกต่างกัน เช่นข้อสอบ สถิติ ความน่าจะเป็น การนับจำนวนวิธี

2. กรรมการตัวจริงที่เป็นผู้ออกข้อสอบ อาจจะได้เป็นผู้ที่ตรวจข้อสอบ ในการทำงานออกข้อสอบกรรมการออกข้อสอบหลายคนมาร่วมประชุมออกข้อสอบ เมื่อประชุมเสร็จแล้ว ประธานของที่ประชุมนำข้อสอบไปให้พนักงานพิมพ์ดีดพิมพ์ เมื่อพิมพ์ข้อสอบเสร็จแล้ว ด้วยเหตุผลทางด้านความลับของข้อสอบ การตรวจสอบคำผิดอาจมีเพียงท่านเดียว จึงอาจทำให้เกิดข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์ได้โดยง่าย ตัวอย่างเช่น

คณิตศาสตร์ กข. 2532 ข้อ 32. เป็นข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} c & -1 \\ 1 & -c \end{bmatrix}$ และ $\det(2A)^2 + (1 - c^2)^3 \det(A^{-1})^t = 45$

จงหาจำนวนจริง c ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับสมการข้างต้นอยู่ในเซตใดต่อไปนี้

- | | |
|---------------------------|--------------------------|
| 1. $\{-3, -2, \sqrt{5}\}$ | 2. $\{2, 3, -\sqrt{5}\}$ |
| 3. $\{-\sqrt{2}, 2, 3\}$ | 4. $\{\sqrt{2}, -2, 2\}$ |

เพราะว่าการสลับกัน ระหว่าง $)^2$ กับ $)^2$ จะทำให้ $\det(2A)^2$ และ $\det(2A^2)$ มีความหมายแตกต่างกัน

ถ้าเปลี่ยนเป็น $\det(2A^2) + (1 - c^2)^3 \det(A^{-1})^t = 45$ จะมีคำตอบ $c \in \{\sqrt{2}, -2, 2\}$

3. การแปลความหมายจากภาษาไทยเป็นภาษาคณิตศาสตร์ อาจมีความหมายไม่ตรงกับที่กรรมการออกข้อสอบต้องการ ส่วนใหญ่จะพบในข้อสอบประเภทการนับจำนวนวิธี การจัดลำดับจัดหมู่ ความน่าจะเป็น ตัวอย่างเช่น การโยนเหรียญ 4 อัน พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัวระหว่าง 2 กับ 4 อัน

การแปลความหมายแบบที่ 1. ตรงกับ ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัว 3 อันเท่านั้น

การแปลความหมายแบบที่ 2. ตรงกับ ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัว 2 หรือ 3 หรือ 4 อัน

4. มีคำตอบมากกว่า 1 ข้อหรือไม่มีคำตอบ ในการสร้างตัวเลือก อาจมีการสร้างตัวลวง บางครั้งตัวลวงก็อาจทำให้เกิดเหตุการณ์ข้อสอบไม่มีตัวเลือก หรือมีตัวเลือกมากกว่า 1 ตัวเลือก

5. นำข้อสอบเก่ามาออกใหม่โดยการเปลี่ยนเงื่อนไข เปลี่ยนตัวแปร แต่บางครั้งเปลี่ยนแปลงไม่ครบทุกแห่งจึงทำให้ข้อสอบนั้นไม่สมบูรณ์ ตัวอย่างเช่น

ข้อสอบครั้งที่ 1. นาย ก. อายุ 15 ปี นาย ข. อายุ 16 ปี และ นาย ค. อายุ 17 ปี เรียกรถแท็กซี่เพื่อไปโรงเรียน อายุเฉลี่ยของคนทั้ง 3 เท่ากับเท่าใด

ตอบ 16 ปี

ข้อสอบครั้งที่ 2. เปลี่ยนแค่ตัวเลข นาย ก. อายุ 19 ปี นาย ข. อายุ 20 ปี และ นาย ค. อายุ 21 ปี เรียกรถแท็กซี่เพื่อไปโรงเรียน อายุเฉลี่ยของคนทั้ง 3 เท่ากับเท่าใด

ตอบ 20 ปี

ข้อสอบครั้งที่ 3. เปลี่ยนภาษาของคำถาม ก. อายุ 15 ปี นาย ข. อายุ 16 ปี และ นาย ค. อายุ 17 ปี เรียกรถแท็กซี่เพื่อไปโรงเรียน อายุเฉลี่ยของคนในรถแท็กซี่เท่ากับเท่าใด

ตอบ 16 ปี หรือตอบไม่ได้ เพราะไม่รู้อายุของคนขับรถแท็กซี่

6. ข้อสอบบางข้ออาจมีความผิดพลาดตัวมาจากหนังสือเรียน เช่นในหนังสือเรียน ค. 012 หน้า 198 กล่าวถึงคุณสมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ข้อ (4) ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใด ๆ จะต้องอยู่ระหว่างค่าจากการสังเกตที่น้อยที่สุด และค่าจากการสังเกตที่มากที่สุด ในข้อมูลชุดนั้นกล่าวคือ $X_{\min} < \bar{X} < X_{\max}$ เมื่อ $X_{\min}$ และ $X_{\max}$ เป็นค่าจากการสังเกตที่น้อยที่สุดและค่าสังเกตที่มากที่สุด ในข้อมูลชุดนั้นตามลำดับ

คำกล่าวนี้นี้ผิดเมื่อ ข้อมูลคือ 1, 1, 1 จะได้ว่า $X_{\min} = \bar{X} = X_{\max} = 1$

หมายเหตุ กรณีที่ถูกต้องเสมอคือ $X_{\min} \leq \bar{X} \leq X_{\max}$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า หากข้อสอบถามว่าข้อ (4) ถูกหรือผิด ข้อสอบข้อนี้ต้องเป็นข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์ คำถามที่ครูผู้สอน ผู้ปกครอง และตัวนักเรียนอยากรู้ คือ

1. ข้อสอบคะแนนเต็ม 100 คะแนน ถ้ามีข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์ 2 ข้อ ๆ ละ 3 คะแนน ขอถามว่า

1.1 คะแนนเต็มของข้อสอบชุดนั้นจะเป็น 100 คะแนน หรือ 94 คะแนน

1.2 นักเรียนจะได้คะแนน(ยกประโยชน์ให้นักเรียน) 6 คะแนน หรือไม่

1.3 การแก้ไขโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ตรวจข้อสอบจะแก้ไขก่อนการตรวจข้อสอบหรือไม่

2. ถ้า ข้อสอบ มีนาคม 2546 มีข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์ 2 ข้อ ๆ ละ 3 คะแนน

กับ ข้อสอบ ตุลาคม 2546 มีข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์ 3 ข้อ ๆ ละ 2 คะแนน อยากถามว่า

2.1 ข้อสอบ 2 ชุดนี้จะมีคะแนนเต็มเหมือนกันหรือไม่

2.2 เกณฑ์การแก้ปัญหาคำถามข้อสอบไม่สมบูรณ์ของข้อสอบ 2 ชุดนี้ จะเหมือนกันหรือไม่

ตัวอย่างข้อสอบที่ไม่สมบูรณ์เหล่านี้รวบรวมมาจากข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข. คณิตศาสตร์ 1. และ คณิตศาสตร์ 2. เพื่อเป็นตัวอย่างให้ครูผู้สอน กรรมการออกข้อสอบ ได้ใช้เป็นกรณีตัวอย่างเพื่อที่จะได้ปรับปรุงคุณภาพของข้อสอบให้ถูกต้อง เหมาะสม และดียิ่งขึ้นต่อไป

คณิตศาสตร์ ก. 2530 ข้อ 24.

นิเสธของข้อความ “ ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a < b$ หรือ $a > b$ ” ตรงกับข้อใด

1. $a \neq b$ และ $a > b$ และ $a < b$
2. $a \neq b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$
3. $a = b$ และ $a > b$ และ $a < b$
4. $a = b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$

ตอบ ไม่มีตัวเลือกใดถูกต้อง

แนวคิด เพราะว่า “ ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a < b$ หรือ $a > b$ ” มีค่าความจริงเป็นจริง

เพราะฉะนั้นตัวเลือกที่เป็นนิเสธของ “ ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a < b$ หรือ $a > b$ ” ต้องมีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะว่าค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกคือ

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. $a \neq b$ และ $a > b$ และ $a < b$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ | เพราะฉะนั้นเก็บตัวเลือก 1. ไว้ก่อน |
| 2. $a \neq b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$ มีค่าความจริงเป็นจริง | เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. |
| 3. $a = b$ และ $a > b$ และ $a < b$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ | เพราะฉะนั้นเก็บตัวเลือก 3. ไว้ก่อน |
| 4. $a = b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$ มีค่าความจริงเป็นจริง | เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. |

ให้ $p = “ a \neq b ”$, $q = “ a < b ”$ และ $r = “ a > b ”$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \sim (“ \text{ถ้า } a \neq b \text{ แล้ว } a < b \text{ หรือ } a > b ”) &= \sim (p \rightarrow (q \vee r)) = \sim (\sim p \vee (q \vee r)) \\ &= p \wedge \sim (q \vee r) = p \wedge \sim q \wedge \sim r = “ a = b \text{ และ } a \not< b \text{ และ } a \not> b ” \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 3. ไม่เป็นนิเสธของข้อความ “ ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a < b$ หรือ $a > b$ ”

คณิตศาสตร์ กข. 2532 ข้อ 32.

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} c & -1 \\ 1 & -c \end{bmatrix}$ และ $\det(2A)^2 + (1 - c^2)^3 \det(A^{-1})^t = 45$

จงหาจำนวนจริง c ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับสมการข้างต้นอยู่ในเซตใดต่อไปนี้

1. $\{-3, -2, \sqrt{5}\}$
2. $\{2, 3, -\sqrt{5}\}$
3. $\{-\sqrt{2}, 2, 3\}$
4. $\{\sqrt{2}, -2, 2\}$

ตอบ ไม่มีตัวเลือกใดถูกต้อง

แนวคิด $\det A = -c^2 + 1 = 1 - c^2$, $\det(2A)^2 = (2^2 \det A)^2 = 16(\det A)^2 = 16(1 - c^2)^2$

$$\text{และ } \det(A^{-1})^t = \det(A^{-1}) = \frac{1}{1 - c^2}$$

เพราะว่า $\det(2A)^2 + (1 - c^2)^3 \det(A^{-1})^t = 45$

$$16(1 - c^2)^2 + (1 - c^2)^3 \left(\frac{1}{1 - c^2} \right) = 45$$

$$16(1 - c^2)^2 + (1 - c^2)^2 = 45$$

$$17(1 - c^2)^2 = 45$$

$$(1 - c^2)^2 = \frac{45}{17}$$

เพราะฉะนั้น $1 - c^2 = \pm \sqrt{\frac{45}{17}}$ ทำให้ $c^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{45}{17}}$ และ $c = \pm \sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{45}{17}}}$

หมายเหตุ ความไม่สมบูรณ์ของข้อสอบนี้น่าจะมาจากการพิมพ์ผิดระหว่าง $\det(2A)^2$ กับ $\det(2A^2)$

ถ้าแก้ไขโจทย์เป็น $\det(2A^2) + (1 - c^2)^3 \det(A^{-1})^t = 45$

จะได้ $4(1 - c^2)^2 + (1 - c^2)^3 \left(\frac{1}{1 - c^2}\right) = 45$

$$5(1 - c^2)^2 = 45$$

$$1 - c^2 = \pm 3$$

เพราะฉะนั้น $c^2 = 1 \pm 3$ เพราะฉะนั้น $c^2 = 4$ เพราะฉะนั้น $c = -2, 2$

คณิตศาสตร์ ก. 2534 ข้อ 4.

ให้ $f = \{(x, y) \mid y = x^2\}$ และ $g = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x+1}\}$

โดเมนและเรนจ์ของ $f + g$ ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid x \neq -1\}$ และ $\{y \mid y \geq 0\}$
2. $\{x \mid x \neq -1\}$ และ $\{y \mid y > 0\}$
3. $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ และ $\{y \mid y \neq 0\}$
4. $\{x \mid x \in \mathbb{R}\}$ และ $\{y \mid y \in \mathbb{R}\}$

ตอบ ไม่มีตัวเลือกใดถูกต้อง

แนวคิด เพราะว่า $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ เพราะฉะนั้น $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{x \mid x \neq -1\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

ให้ $y = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \frac{1}{x+1}$ เพราะฉะนั้น $yx + y = x^3 + x^2 + 1$

และ $x^3 + x^2 - yx - y + 1 = 0$

เพราะว่าทุกจำนวนจริง y จะมีจำนวนจริง x ที่ทำให้พหุนามดีกรี 3 $x^3 + x^2 - yx - y + 1 = 0$ มีราก

เพราะฉะนั้นทุกจำนวนจริง y จะมีจำนวนจริง x ที่ทำให้ $(f + g)(x) = y$

เพราะฉะนั้น $R_{f+g} = \mathbb{R}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 2. ผิด

คณิตศาสตร์ กข. 2534 ข้อ 16.

จำนวนจริง x ทั้งหมดในช่วง $[0, 2\pi]$ ซึ่งสอดคล้องสมการ $2 \sin^2 x + 1 = -\sin x + 2 \sqrt{2 \sin^2 x + \sin x}$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[0, \pi]$
2. $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
3. $[\pi, 2\pi]$
4. $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

ตอบ ไม่มีตัวเลือกใดถูกต้อง

แนวคิด $2 \sin^2 x + 1 = -\sin x + 2 \sqrt{2 \sin^2 x + \sin x}$

$$2 \sin^2 x + \sin x + 1 = 2 \sqrt{2 \sin^2 x + \sin x}$$

แทนค่า $k = 2 \sin^2 x + \sin x$ เพราะฉะนั้น $k + 1 = 2 \sqrt{k}$

$$k^2 + 2k + 1 = 4k$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0$$

$$k = 1$$

เพราะฉะนั้น $2 \sin^2 x + \sin x = 1$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}, 1$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ เพราะฉะนั้นไม่มีตัวเลือกที่ทำให้ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ เป็นสมาชิกพร้อมกัน

คณิตศาสตร์ กข. 2534 ข้อ 22.

คำตอบของอสมการ $e^{x^2 \ln 2} < 2^x$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, \frac{\ln 2}{\ln 3})$

2. $(0, \frac{\ln 2}{\ln 3})$

3. $(\frac{\ln 3}{\ln 2}, \infty)$

4. $(0, \frac{\ln 3}{\ln 2})$

ตอบ ไม่มีตัวเลือกใดถูกต้อง

แนวคิด เพราะว่า $e^{x^2 \ln 2} < 2^x$ เพราะฉะนั้น $\ln(e^{x^2 \ln 2}) < \ln(2^x)$

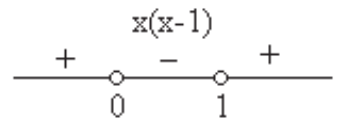
$$x^2 \ln 2 \ln e < x \ln 2$$

$$x^2 \ln 2 < x \ln 2$$

$$x^2 < x$$

$$x^2 - x < 0$$

$$x(x-1) < 0$$



เพราะฉะนั้น $0 < x < 1$ เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของอสมการ $e^{x^2 \ln 2} < 2^x$ คือ $(0, 1)$

คณิตศาสตร์ ก. 2535 ข้อ 27.

ให้ $A = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ ฟังก์ชันใดเป็นฟังก์ชันลดบนเซต A

1. $\sin x$

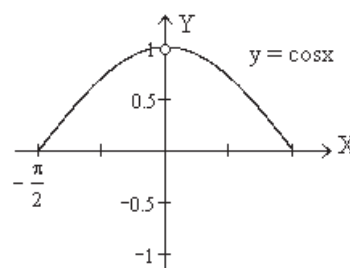
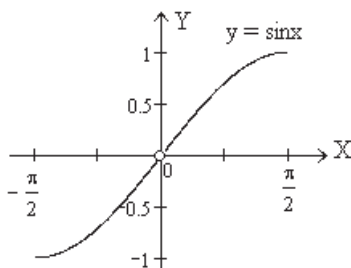
2. $\cos x$

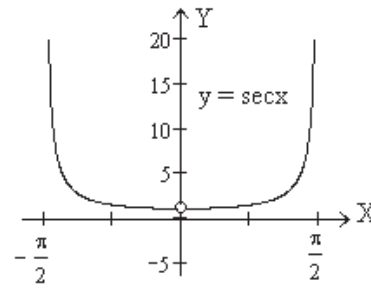
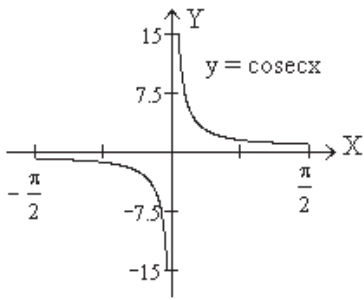
3. $\operatorname{cosec} x$

4. $\sec x$

ตอบ ไม่มีตัวเลือกใดถูกต้อง

แนวคิด กราฟของ $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{cosec} x$ และ $y = \sec x$ บนช่วง $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ คือ





เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$ และ $\sec x$ ไม่เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$

คณิตศาสตร์ กข. 2536 ข้อ 17.

กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB ยาว $\sqrt{12}$ หน่วย ด้าน AC ยาว $\sqrt{8}$ หน่วย มุม $B = 45^\circ$
พื้นที่สามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$
2. $2(\sqrt{3} + 1)$
3. $\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$
4. $\sqrt{3} + 1$

ตอบ 3.

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์เกิดจากสามเหลี่ยม ABC ตามเงื่อนไขของโจทย์มีได้ 2 รูป และมี 2 คำตอบ คือ $\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$ หรือ $\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$ นักเรียนที่รู้ 2 คำตอบอาจจะสับสนไม่กล้าเลือกตัวเลือก 3.

เพราะว่า $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$, $\sin B = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $b = AC = \sqrt{8}$

และ $c = AB = \sqrt{12}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sin C}{\sqrt{12}}$

เพราะฉะนั้น $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เพราะฉะนั้น $C = 60^\circ$ หรือ 120°

ลาก AD ตั้งฉากกับ AC เพราะฉะนั้น ABD เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก

เพราะว่า $\sin B = \frac{AD}{AB}$ เพราะฉะนั้น $AD = AB \sin B = \sqrt{12} \sin 45^\circ = \sqrt{12} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{6}$

เพราะว่า $AD = BD$ เพราะฉะนั้น $BD = \sqrt{6}$

สามเหลี่ยม ACD มีมุม $\hat{A}DC = 60^\circ$ เพราะฉะนั้น $DC = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$

กรณีที่ 1. $C = 60^\circ$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2}(BC)(AD) = \frac{1}{2}(BD + DC)(AD) = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6}) = \sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$

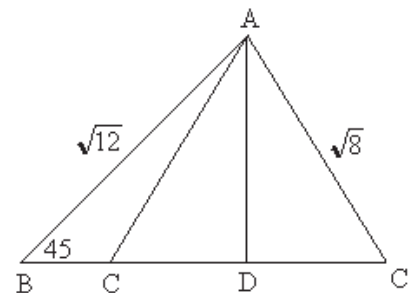
กรณีที่ 2. $C = 120^\circ$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2}(BC)(AD) = \frac{1}{2}(BD - DC)(AD) = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6}) = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$

คณิตศาสตร์ ก. 2537 ข้อ 7.

กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $|x - y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$



$$2. |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

$$3. \text{ ถ้า } (x - 1)^2 > |y|^2 \text{ แล้ว } x > |y| + 1 \text{ หรือ } x < 1 - |y|$$

$$4. \text{ ถ้า } (x - 1)^2 < |y|^2 \text{ แล้ว } x > |y| - 1 \text{ หรือ } x < |y| + 1$$

ตอบ 3. และ 4.

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์เกิดจากมีตัวเลือกที่ถูกต้องมากกว่า 1 ตัวเลือก

$$1. \text{ ผิด ตัวอย่างเช่น } x = 1 \text{ และ } y = -1 \text{ จะได้ } |1 - (-1)| = 2 > 0 = |1 + (-1)|$$

$$2. \text{ ผิด ตัวอย่างเช่น } x = 1 \text{ และ } y = -1 \text{ จะได้ } |1 + (-1)|^2 = 0 \neq 2 = |1|^2 + |-1|^2$$

$$3. \text{ ถูกต้อง เพราะว่า } (x - 1)^2 > |y|^2$$

$$|x - 1| > |y|$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x - 1 > |y| \text{ หรือ } x - 1 < -|y|$$

$$x > 1 + |y| \text{ หรือ } x < 1 - |y|$$

$$4. \text{ ถูกต้อง เพราะว่า } (x - 1)^2 < |y|^2$$

$$|x - 1| < |y|$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } -|y| < x - 1 < |y|$$

$$-|y| < x - 1 \text{ และ } x - 1 < |y|$$

$$-|y| < x - 1 \text{ และ } x < |y| + 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x < |y| + 1$$

(เพราะว่า $p \wedge q \rightarrow q$ เป็นจริง)

$$\text{เพราะฉะนั้น } x > |y| - 1 \text{ หรือ } x < |y| + 1$$

(เพราะว่า $q \rightarrow r \vee q$ เป็นจริง)

คณิตศาสตร์ ก. 2537 ข้อ 10.

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ที่กำหนดโดย

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } x^2 + xy + y^2 = 75\} \text{ แล้วโดเมนของ } r \text{ คือข้อใดต่อไปนี้}$$

$$1. \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$2. \{-5, -4, -3, \dots, 3, 4, 5\}$$

$$3. \{-10, -9, -8, \dots, 8, 9, 10\}$$

$$4. \{-15, -14, -13, \dots, 13, 14, 15\}$$

ตอบ ไม่มีตัวเลือก

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าสมาชิกของโดเมนของความสัมพันธ์ r ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือกได้ทุกตัวเลือก

$$\text{วิธีจริง กำหนด } r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } x^2 + xy + y^2 = 75\}$$

$$\text{พิจารณาสมการ } x^2 + xy + y^2 = 75 \text{ เพราะฉะนั้น } y^2 + xy + (x^2 - 75) = 0$$

$$\text{สูตร } y \text{ ในพจน์ของ } x \text{ คือ } y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 75)}}{2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } y \in \mathbb{R} \text{ ก็ต่อเมื่อ } x^2 - 4(x^2 - 75) \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $-3x^2 + 300 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x^2 \leq 100$ เพราะฉะนั้นค่าของจำนวนเต็มบวก x ที่เป็นไปได้คือ $1 \leq x \leq 10$

เพราะฉะนั้น $D_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

คณิตศาสตร์ กข. 2537 ข้อ 27.

ถ้าความชันของเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใด ๆ เป็น $2 - 2x$ และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้จากจุด $x = 0$ และ $x = 3$ เท่ากับ 9 แล้วเส้นโค้งผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(3, 0)$
2. $(1, 0)$
3. $(0, -3)$
4. $(0, -1)$

ตอบ 1. และ 3.

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์คือมีคำตอบถูก 2 ตัวเลือกเป็นผลมาจาก คำว่า พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้จากจุด $x = 0$ และ $x = 3$ เท่ากับ 9 โดยที่โจทย์ไม่ได้กำหนดว่าเส้นโค้งอยู่เหนือแกน X หรือใต้แกน X

จากโจทย์ $\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$ เพราะฉะนั้น $y = \int (\frac{dy}{dx})dx = 2x - x^2 + k$

เพราะว่าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้จากจุด $x = 0$ และ $x = 3$ เท่ากับ 9

$$\text{เพราะฉะนั้น } \int_0^3 (2x - x^2 + k)dx = 9 \quad \text{หรือ} \quad \int_0^3 (2x - x^2 + k)dx = -9$$

$$\left(x^2 - \frac{x^3}{3} + kx \right) \bigg|_0^3 = 9 \quad \text{หรือ} \quad \left(x^2 - \frac{x^3}{3} + kx \right) \bigg|_0^3 = -9$$

$$3k = 9 \quad \text{หรือ} \quad 3k = -9$$

$$k = 3 \quad \text{หรือ} \quad k = -3$$

กรณีที่ 1. $k = 3, y = 2x - x^2 + 3$ ผ่านจุด $(3, 0)$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ถูกต้อง

กรณีที่ 2. $k = -3, y = 2x - x^2 - 3$ ผ่านจุด $(0, -3)$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ถูกต้อง

คณิตศาสตร์ กข. 2537 ข้อ 33.

กำหนดให้ $z = 3x_1 - 5x_2$ โดยที่ $x_1 - 2x_2 \leq 4$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 6$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

แล้วจุด (x_1, x_2) ที่ให้ค่าสูงสุดของ z คือจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

$$1. \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \quad 2. \frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$$

$$3. x = 3 \quad 4. y = 4$$

ตอบ ไม่มีตัวเลือก

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์ที่เห็นชัดเจนคือโจทย์กำหนดในเทอมของตัวแปร x_1, x_2 แต่ตัวเลือกกำหนดในเทอมของตัวแปร x, y

หมายเหตุ ถึงแม้นักเรียนจะแทน $x = x_1$ และแทน $y = x_2$ ก็ยังไม่มีคำตอบ

เขียนกราฟอาณาบริเวณผลเฉลยและหาจุดมุม

โดยการแก้สมการจะได้จุดมุมคือ $(0, 2)$, $(3, 0)$ และ $(4, 0)$

จุดมุม $(x_1, x_2) = (0, 2)$ ได้ค่า $z = 3x_1 - 5x_2 = -10$

จุดมุม $(x_1, x_2) = (3, 0)$ ได้ค่า $z = 3x_1 - 5x_2 = 9$

จุดมุม $(x_1, x_2) = (4, 0)$ ได้ค่า $z = 3x_1 - 5x_2 = 12$

จากจุดมุมทั้ง 3 จุด จะได้ $z = 12$ เป็นค่าสูงสุดและ $(4, 0)$

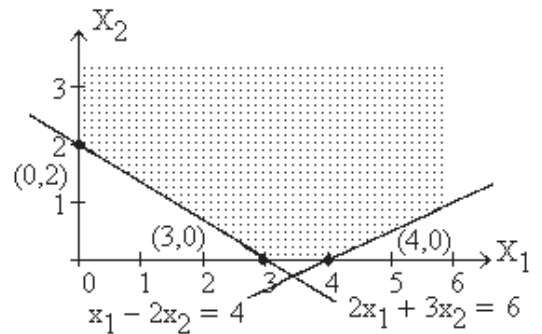
สอดคล้องเงื่อนไขตัวเลือก 2. $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$

แต่ข้อสอบนี้ก็ถือว่าไม่มีค่าสูงสุด ด้วยเหตุผลดังนี้

ถ้า $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$ และ สมมติ $x = x_1$ และแทน $y = x_2$ เพราะฉะนั้น $x_2 = \frac{x_1 - 4}{2}$

เพราะฉะนั้น $z = 3x_1 - 5x_2 = 3x_1 - 5(\frac{x_1 - 4}{2}) = \frac{x_1}{2} + 10 = \frac{x}{2} + 10$

เพราะฉะนั้น z มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ เมื่อ x มีค่ามากขึ้นบนเส้นตรง $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$



คณิตศาสตร์ กข. 2538 ข้อ 30.

ตารางต่อไปนี้แสดงราคาสินค้าของร้านอาทิตย์

ใน พ.ศ. 2530 และ พ.ศ. 2536

ในการคิดดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม เมื่อใช้

พ.ศ. 2530 เป็นปีฐานจะได้ 109.97% ถ้า

เปลี่ยนเฉพาะหน่วยของสบู่มาก่อน เป็น โหล

โดยมีราคาต่อก่อนเท่าเดิมแล้ว ดัชนีราคาแบบ

ใช้ราคารวม (เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน)

เมื่อราคาต่อหน่วยของสบู่อีกคือราคาต่อโหล จะมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 108.97%

2. 109.97%

3. 111.63%

4. 112.22%

ตอบ 4.

แนวคิด การหาคำตอบข้อนี้ทำการคำนวณ

ตามตัวเลขที่เปลี่ยนไป โดยไม่สนใจว่าหน่วย

ของสินค้าทั้ง 4 ชนิดจะสอดคล้องหรือ

สัมพันธ์กันหรือไม่ เพราะฉะนั้น เมื่อเปลี่ยน

เฉพาะหน่วยของสบู่มาก่อน เป็น โหล โดย

มีราคาต่อก่อนเท่าเดิม จะได้ข้อมูลดังนี้

	ราคาต่อหน่วย (บาท)	
รายการสินค้า	พ.ศ. 2530	พ.ศ.2536
สบู่ (ก้อน)	11	13
ยาย้อมผม (หลอด)	190	210
แชมพู (ขวด)	75	80
ยาสีฟัน (หลอด)	45	50

	ราคาต่อหน่วย (บาท)	
รายการสินค้า	พ.ศ. 2530	พ.ศ.2536
สบู่ (โหล)	132	156
ยาย้อมผม (หลอด)	190	210
แชมพู (ขวด)	75	80
ยาสีฟัน (หลอด)	45	50

จากข้อมูลในตารางที่ได้มาใหม่ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม (เมื่อใช้พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน)

$$= \left(\frac{156 + 210 + 80 + 50}{132 + 190 + 75 + 45} \right) \times 100 = \left(\frac{496}{442} \right) \times 100 = 112.22$$

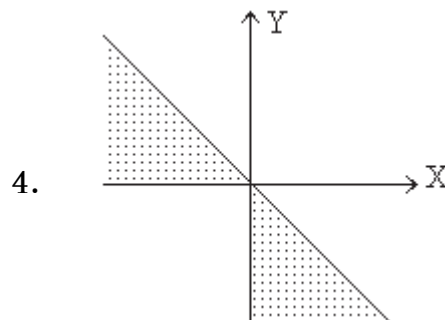
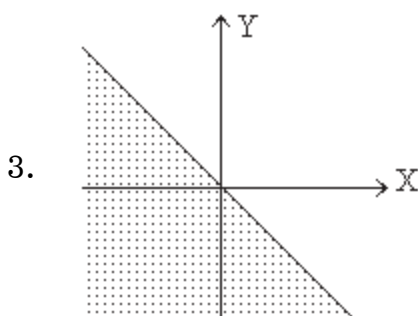
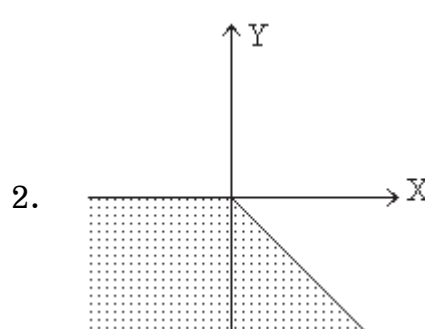
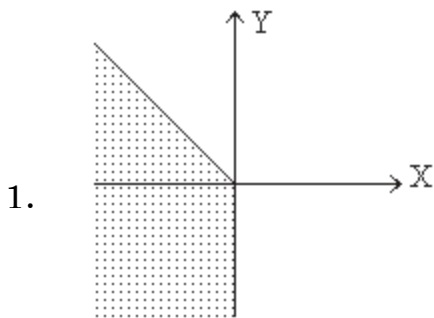
หมายเหตุ ความไม่สมบูรณ์ของโจทย์ เกิดจากปัญหาเกี่ยวกับ ดัชนี หน่วยของสินค้าควรมีลักษณะพื้นฐานตาม

การใช้งานจริง หรือสินค้าที่นำมาคิดดัชนีควรมีหน่วยที่สอดคล้องกันหรือใกล้เคียงกัน ไม่ควรนำปัญหาดัชนี มาถามในรูปแบบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่จะทดลองเปลี่ยนหน่วยการคำนวณตามใจชอบ เช่นเปลี่ยนหน่วยของ สบู่เป็นจาก ก้อน เป็น โหล ส่วนสินค้ากลุ่มอื่นไม่เปลี่ยนหน่วย จะทำให้การแปลความหมายของดัชนีแบบราคารวมผิดไป หากคนที่ไม่เข้าใจความหมายและการใช้งานของดัชนีเพียงพอ คิดว่าการหาดัชนีสามารถเปลี่ยนหน่วยบางตัวได้ตามใจชอบ เกิดมีกรรมการออกข้อสอบบางคนให้เปลี่ยนเฉพาะราคาสบู่จากหน่วยของเงินจาก บาท เป็น US ดอลลาร์ ก็จะทำให้ข้อสอบไม่สมบูรณ์อย่างชัดเจนมากขึ้น

คณิตศาสตร์ ก. 2538 ข้อ 34.

ถ้า $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |y| \geq x\}$ และ $B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| \geq y\}$

แล้วส่วนที่แรเงาในกราฟในข้อใดต่อไปนี้แทนเซต $A \cap B$



ตอบ ไม่มีคำตอบในตัวเลือกที่ให้มา

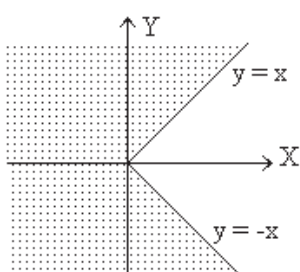
แนวคิด $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |y| \geq x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x \text{ หรือ } -y \geq x\}$

$= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -y \geq x\}$

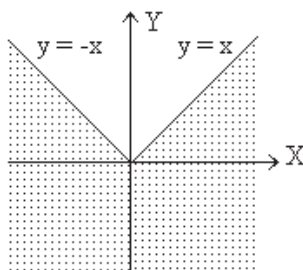
$B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| \geq y\} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y \text{ หรือ } -x \geq y\}$

$= \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq y\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -x \geq y\}$

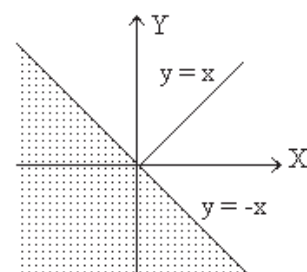
กราฟของ A



กราฟของ B



กราฟของ $A \cap B$



หมายเหตุ ลองคิดง่าย ๆ ก็ได้ $(1, 1) \in A$, $(1, 1) \in B$ เพราะฉะนั้น $(1, 1) \in A \cap B$
 เพราะว่าทุกตัวเลือก $(1, 1)$ ไม่อยู่ในส่วนของการแรเงา

คณิตศาสตร์ กข. 2538 ข้อ 54.

สมชายเตรียมตัวเดินทางไปท่องเที่ยวต่างประเทศ ความน่าจะเป็นที่เขาจะไปเที่ยวประเทศอังกฤษเท่ากับ 0.5
 ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมันเท่ากับ 0.8
 ความน่าจะเป็นที่เขาจะไปท่องเที่ยวทั้งสองประเทศเท่ากับ 0.6
 ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ไปเที่ยวประเทศอังกฤษและไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--------|--------|
| 1. 0.4 | 2. 0.5 |
| 3. 0.7 | 4. 0.9 |

ตอบ 1. หรือไม่มีคำตอบ

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์ขึ้นอยู่กับ การแปล ภาษาไทย เป็น ภาษาคณิตศาสตร์

ให้ E = เหตุการณ์ที่สมชายจะ ไป เที่ยวประเทศอังกฤษ เพราะฉะนั้น $P(E) = 0.5$
 E' = เหตุการณ์ที่สมชายจะ ไม่ไป เที่ยวประเทศอังกฤษ เพราะฉะนั้น $P(E') = 0.5$
 G' = เหตุการณ์ที่สมชายจะ ไม่ไป เที่ยวประเทศเยอรมัน เพราะฉะนั้น $P(G') = 0.8$
 G = เหตุการณ์ที่สมชายจะ ไป เที่ยวประเทศเยอรมัน เพราะฉะนั้น $P(G) = 0.2$

การแปลภาษาไทยแบบที่ 1. เหตุการณ์ที่เขาจะไปท่องเที่ยวทั้งสองประเทศ คือ $E \cup G$
 เพราะว่าความน่าจะเป็นที่เขาจะไปท่องเที่ยวทั้งสองประเทศเท่ากับ 0.6 เพราะฉะนั้น $P(E \cup G) = 0.6$
 ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ไปเที่ยวประเทศอังกฤษและไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมัน $= P(E' \cap G')$
 $= P((E \cup G)') = 1 - P(E \cup G) = 1 - 0.6 = 0.4$

การแปลภาษาไทยแบบที่ 2. เหตุการณ์ที่เขาจะไปท่องเที่ยวทั้งสองประเทศ คือ $E \cap G$
 เพราะว่าความน่าจะเป็นที่เขาจะไปท่องเที่ยวทั้งสองประเทศเท่ากับ 0.6 เพราะฉะนั้น $P(E \cap G) = 0.6$
 เพราะว่า $E \cap G \subset E$ เพราะฉะนั้น $P(E \cap G) \leq P(E)$
 $0.6 \leq 0.5$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

คณิตศาสตร์ ก. 2539 ข้อ 50.

สมศรีต้องการเรียงกระถางต้นไม้ไว้บนระเบียงบ้านให้เป็นแนวเส้นตรง โดยมีต้นกุหลาบ 3 ต้น โป๊ยเซียน 2 ต้น และมะลิ 4 ต้น จำนวนวิธีที่จะเรียงต้นไม้ทั้งหมด โดยให้ต้นมะลิทุกต้นอยู่ติดกันเสมอ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--------|---------|
| 1. 36 | 2. 60 |
| 3. 720 | 4. 1260 |

ตอบ 2. หรือ 3. หรือ ไม่มีคำตอบที่ถูกต้องให้มา

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์ของข้อนี้เกิดจากโจทย์ไม่กำหนดให้ชัดเจน ตัวอย่างเช่น

กรณีที่ 1. ต้นกุหลาบ 3 ต้นเหมือนกัน โป๊ยเซียน 2 ต้นเหมือนกัน และมะลิ 4 ต้นเหมือนกัน ทุกประการ
 ขั้นที่ 1. มัดกระถางมะลิติดกันทำได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 2. จัดลำดับของ 6 สิ่งที่มีการซ้ำเป็นกลุ่ม คือ ต้นกุหลาบ 3 ต้นเหมือนกัน

โป๊ยเซียน 2 ต้นเหมือนกัน และมะลิ 1 กลุ่มที่มัดติดกัน ทำได้ $\frac{6!}{3!2!1!} = 60$ วิธี

โดยกฎเกณฑ์การนับเบื้องต้น จำนวนวิธีทั้งหมดในกรณีที่ 1. เท่ากับ 60 วิธี

กรณีที่ 2. ต้นกุหลาบ 3 ต้นต่างกันทุกต้น โป๊ยเซียน 2 ต้นต่างกันทุกต้น และมะลิ 4 ต้นต่างกันทุกต้น

ขั้นที่ 1. มัดกระถางมะลิติดกันทำได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 2. จัดลำดับของ 6 สิ่งที่แตกต่างกัน ทำได้ $6! = 720$

ขั้นที่ 3. ต้นมะลิสลับที่กันภายในกลุ่มที่ติดกัน ทำได้ $4! = 24$ วิธี

โดยกฎเกณฑ์การนับเบื้องต้น จำนวนวิธีทั้งหมดในกรณีที่ 2. เท่ากับ $(720)(24) = 17280$ วิธี

กรณีที่ 3. ต้นกุหลาบ 3 ต้นต่างกันทุกต้น โป๊ยเซียน 2 ต้นต่างกันทุกต้น และมะลิ 4 ต้นต่างกันทุกต้น

ขั้นที่ 1. มัดกระถางมะลิติดกันทำได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 2. จัดลำดับของ 6 สิ่งที่มีการซ้ำต่างกัน ทำได้ $6! = 720$

ขั้นที่ 3. ต้นมะลียูติดกันโดยไม่สนใจลำดับภายในกลุ่มจัดได้ 1 วิธี

โดยกฎเกณฑ์การนับเบื้องต้น จำนวนวิธีทั้งหมดในกรณีที่ 3. เท่ากับ 720 วิธี

คณิตศาสตร์ ก. 2540 ข้อ 20.

กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 3x-6, & x < 2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$

3. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

4. ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่อง $x = 2$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ความไม่สมบูรณ์ของข้อสอบเกิดจากตัวเลือก 3. และ 4. เป็นตัวเลือกที่มีลักษณะตรงกันข้าม เพราะฉะนั้นตัวใดถูกต้อง อีกตัวหนึ่งต้องผิด คำตอบต้องอยู่ที่สองตัวเลือกนี้แน่นอน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ลองใช้เหตุผลต่ออีกนิด เพราะว่า ถ้าตัวเลือก 3. ถูกต้อง แล้วจะมีผลทำให้ตัวเลือก 1. หรือ 2. ผิดตามไปด้วยอย่างน้อยหนึ่งตัว ทำให้ข้อสอบข้อนี้จะเป็นข้อสอบที่ผิดอีก เพราะฉะนั้นตัวเลือกแบบข้อสอบข้อนี้ไม่ต้องคำนวณค่าลิมิตเลยก็ได้คะแนน

วิธีจริง เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x - 6 = 0$ (เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ถูก)

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 1 = 1$ (เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ถูก)

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ (เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ถูก)

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

คณิตศาสตร์ ก. 2540 ข้อ 30.

พิจารณาข้อความเกี่ยวกับดัชนี ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. เลขดัชนีราคาผู้บริโภคมีความสำคัญต่อการครองชีพของประชาชนมากที่สุด

2. เลขดัชนีปริมาณมีความสำคัญต่อการครองชีพของประชาชนมากที่สุด
3. เลขดัชนีมูลค่ามีความสำคัญต่อการครองชีพของประชาชนมากที่สุด
4. เลขดัชนีทั้ง 3 ชนิดมีความสำคัญต่อผู้ผลิตเท่านั้น

ตอบ ไม่ควรมีคำถามแบบนี้ในการสอบ ENTRANCE

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์ของข้อนี้เกิดจาก ในทางคณิตศาสตร์สูตรที่ใช้คำนวณค่า เลขดัชนีราคาผู้บริโภค เลขดัชนีปริมาณ เลขดัชนีมูลค่า มีตัวแปรต่าง ๆ เกี่ยวข้องกัน ดังนั้นเป็นเรื่องที่ระบุได้ยากมาก ที่จะสรุปว่าดัชนีใดมีความสำคัญต่อการครองชีพของประชาชนมากที่สุด ข้อสอบข้อนี้ถือว่าเป็นคำถามที่ตอบยากมาก

การตัดตัวเลือก คำว่า เลขดัชนีทั้ง 3 ชนิดมีความสำคัญต่อผู้ผลิตเท่านั้น ไม่จริง

เพราะว่าดัชนีทั้ง 3 ชนิดมีความสำคัญต่อผู้บริโภคด้วย เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

เลขดัชนีราคาผู้บริโภค เลขดัชนีปริมาณ เลขดัชนีมูลค่า มีความสำคัญต่อการครองชีพของประชาชนทั้งนั้น เมื่อถึงคราวจำเป็นต้องเลือกเพื่อให้ได้คะแนนต้องเลือกตัวเลือก 1.

คณิตศาสตร์ กข. 2540 ข้อ 1.

กำหนดให้ $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$
2. $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, \{a\}, \{b\}\}$
3. $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{\{b, c\}\}$
4. $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{b, c\}$

ตอบ 1.

แนวคิด ข้อสอบข้อนี้ถูกต้อง แต่เป็นการนำข้อสอบเก่าจากคณิตศาสตร์ ก. 2536 ข้อ 7. มาใช้ซ้ำซึ่งเป็นหลักฐานที่ยืนยันว่ามีการนำข้อสอบเก่ามาออกสอบใหม่

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $b \notin \{a, \{a\}, \{b\}\}$ และ $b \in (A - \{b, c\}) \cup \{b\}$

เพราะฉะนั้น $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} \neq \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า $\{a\} \in (A - \{a, \{b\}\}) - \{a\}$ แต่ $\{a\} \notin \{\{b, c\}\}$ และ $\{a\} \notin \{b, c\}$

เพราะฉะนั้น $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} \neq \{\{b, c\}\}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

เพราะฉะนั้น $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} \neq \{b, c\}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง เพราะว่า $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ เพราะฉะนั้น $A - \{b, c\} = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$

เพราะฉะนั้น $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ถูกต้อง

คณิตศาสตร์ กข. 2540 ข้อ 2.

ถ้าเซต A มีสมาชิก 8 จำนวน เซต B มีจำนวนสมาชิก 6 จำนวน และ A กับ B มีสมาชิกร่วมกัน 3 จำนวน แล้วฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากเซต $(B - A)$ ไปยังเซต $(A - B)$ มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 5
3. 10
4. 2.0

ตอบ คำตอบที่ถูกต้องไม่มีในตัวเลือกที่ให้มา

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของจำนวนสมาชิก

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{a, b, c\}$ และ $B - A = \{6, 7, 8\}$ และ $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

โดยกฎเกณฑ์การนับเบื้องต้น **ขั้นที่ 1.** $f(6)$ เลือกส่งค่าได้ 5 วิธี

ขั้นที่ 2. $f(7)$ เลือกส่งค่าได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 3. $f(8)$ เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

คณิตศาสตร์ กข. 2540 ข้อ 19.

1. $f(1) = 8, f(-1) = 0$

2. $f(1) = 0, f(-1) = 8$

3. $f(1) = 4, f(-1) = 0$

4. $f(1) = 0, f(-1) = 4$

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์ของข้อนี้เกิดจากไม่กำหนดให้ชัดเจนว่า a, b เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน

เพราะว่า $2 + i$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $f(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $2(2 + i)^3 + a(2 + i)^2 + b(2 + i) + 10 = 0$

$$2(8 + 12i + 6i^2 + i^3) + a(4 + 4i + i^2) + b(2 + i) + 10 = 0$$

$$2(2 + 11i) + a(3 + 4i) + b(2 + i) + 10 = 0$$

$$(3a + 2b + 14) + (22 + 4a + b)i = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$3a + 2b + 14 = 0 \quad \dots (1)$$

ແລະ

$$4a + b + 22 = 0 \quad \dots (2)$$

$$2(2); \quad 8a + 2b + 44 = 0 \quad \dots (3)$$

$$(3)-(1); \quad 5a + 30 = 0$$

เพราะฉะนั้น $a = -6$ และ $b = -22 - 4a = 2$

เพราะฉะนั้น $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 10$ และ $f(1) = 2 - 6 + 2 + 10 = 8$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. โดยไม่ต้องหาค่า $f(-1) = -2 - 6 - 2 + 10 = 0$

ข้อสังเกต ข้อสอบข้อนี้เป็นตัวอย่างที่ดีของการทำงานไป และ สังเกตตัวเลือกไปด้วยจะได้คำตอบที่ต้องการ โดยไม่จำเป็นต้องทำงานให้ครบทั้งหมดของข้อนั้น

หมายเหตุ หากครูท่านใดจะนำข้อสอบนี้ไปใช้อีกควรระบุให้ชัดเจนและรัดกุมด้วยว่า a, b เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน มิเช่นนั้น f อาจมีได้หลายฟังก์ชัน ตัวอย่างเช่น $f(x) = 2x^3 + 10ix^2 - 26ix + 10$

ซึ่งจะได้ว่า $f(2 + i) = 0$ แต่ $f(1) = 12 - 16i \neq 8$ และ $f(-1) = 8 + 36i \neq 0$

โชคคิดเป็นของนักเรียนที่ข้อสอบข้อนี้ไม่ได้เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ

หมายเหตุ ถ้าโจทย์กำหนดว่า a และ b เป็นจำนวนจริง เราสามารถอ้างได้ว่า

$2 - i$ เป็นรากของ $f(x) = 0$ ด้วย เพราะฉะนั้น $(x - (2 + i))(x - (2 - i))$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$

เพราะว่า $(x - (2 + i))(x - (2 - i)) = x^2 - 4x + 5$

เพราะฉะนั้น $(x^2 - 4x + 5)(2x + 2) = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 10$
 $2x^3 - 6x^2 + 2x + 10 = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 10$
 เพราะฉะนั้นเราได้ $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 10$ เหมือนกัน

คณิตศาสตร์ กข. 2540 ข้อ 28.

พิจารณาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y ดังรูป



สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y อยู่ในรูปแบบใดต่อไปนี้

1. $y = x - 1$
2. $y = a - bx, a, b > 0$
3. $y = a - bx^2, a, b > 0$
4. $y = a + bx, a, b > 0$

ตอบ ความเห็นของผู้เขียนคือไม่ควรนำคำถามนี้มาเป็นข้อสอบ ENTRANCE

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์ของข้อนี้เกิดจากเหตุผลต่าง ๆ ดังนี้

1. ข้อบกพร่องของโจทย์คือไม่รู้ค่าของ x และ y ที่เป็นข้อมูล
 2. สัมพันธ์ระหว่าง x และ y จะใช้เส้นตรง หรือ พาราโบลา บางครั้งการอธิบายความสัมพันธ์ด้วยรูปแบบพาราโบลาดีกว่ารูปแบบเส้นตรง การใช้รูปแบบใดดีกว่ากันเป็นเรื่องที่เกินหลักสูตรระดับ ม. ปลาย
- ความเห็นของผู้เขียน

1. ผู้ออกข้อสอบควรจะบอกว่าจากลักษณะของกราฟ แกน X และ Y มีสเกลเหมือนกัน
 2. ถ้าความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง จะต้องมีความชันเป็นลบ
- เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 4. จึงไม่ใช่คำตอบของผู้ออกข้อสอบ
3. คำตอบสุดท้าย ต้องถามผู้ออกข้อสอบว่าตัวเลือกที่เหลือข้อใดถูกต้องด้วยเหตุผลใด

คณิตศาสตร์ กข. 2540 ข้อ 44.

กำหนดสมการจุดประสงค์ $P = 1500 - 8x - 10y$ โดยมีสมการข้อจำกัดดังนี้

$$\begin{aligned} x + y &\geq 40 \\ x + y &\leq 100 \\ 0 &\leq x \leq 80 \\ 0 &\leq y \leq 70 \end{aligned}$$

ค่าสูงสุดของ P เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

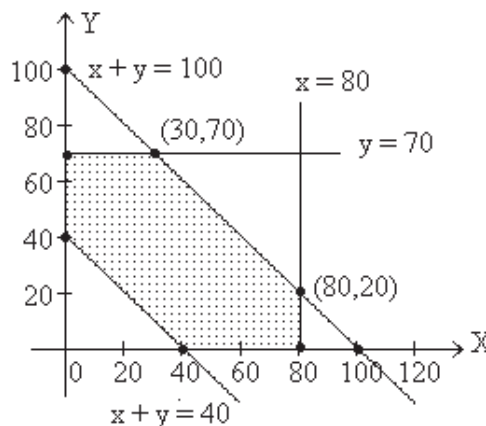
1. 60
2. 160
3. 560
4. 660

ตอบ ค่าสูงสุดของ $P = 1180$ เมื่อ $x = 40$ และ $y = 0$ ไม่มีในตัวเลือก

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์กำหนดและหาจุดตัดของเส้นตรง เพื่อหาจุดมุม

จุดมุมคือ $(40, 0)$, $(80, 0)$, $(80, 20)$, $(30, 70)$, $(0, 70)$ และ $(0, 40)$

จุดมุม (x, y)	$P = 1500 - 8x - 10y$
$(40, 0)$	1180
$(80, 0)$	860
$(80, 20)$	660
$(30, 70)$	560
$(0, 70)$	800
$(0, 40)$	1100



เพราะฉะนั้น P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 560 เมื่อ $x = 30$ และ $y = 70$

P มีค่าสูงสุดเท่ากับ 1180 เมื่อ $x = 40$ และ $y = 0$

คณิตศาสตร์ ก. 2541 ข้อ 55.

สมศรีผ่านการคัดเลือกเข้าทำงานใน
บริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งมีสาขาอยู่ที่จังหวัด
เชียงใหม่และสงขลา บริษัทได้เสนอ
เงินเดือนดังตารางข้างล่าง
ถ้าพิจารณาจากเงินเดือนที่ได้รับสมศรีจะ
เลือกทำงานในจังหวัดใดต่อไปนี้

จังหวัด	เงินเดือน(บาท)	ดัชนีราคาผู้บริโภค
กทม.	54,000	120
เชียงใหม่	49,000	90
สงขลา	52,000	110

1. กทม.

2. เชียงใหม่

3. สงขลา

4. จังหวัดใดก็ได้

ตอบ 1. หรือ 2.

ความไม่สมบูรณ์ของข้อสอบ ผู้ออกข้อสอบควรจะกำหนดให้ชัดเจนว่า จากคำพูดที่ว่า “ ถ้าพิจารณาจาก
เงินเดือนที่ได้รับ ” มีความหมายอย่างไร

1. เปรียบเทียบค่าตัวเลขของเงินเดือนที่เทียบกับดัชนีราคาผู้บริโภคแล้ว

2. เปรียบเทียบตัวเงินเดือนจริงที่ได้รับ

แนวคิด แบบที่ 1. คิดเงินเดือนที่ได้รับจริง

จังหวัด	เงินเดือน(บาท)	รายได้จริง	ดัชนีราคาผู้บริโภค
กทม.	54,000	$\frac{54000}{120} \times 100 = 45,000$	120
เชียงใหม่	49,000	$\frac{49000}{90} \times 100 = 54,444.44$	90
สงขลา	52,000	$\frac{52000}{110} \times 100 = 47,272.73$	110

เมื่อคิดเงินเดือนภายใต้เงื่อนไขที่ปรับเป็นรายได้จริงตามค่าดัชนีผู้บริโภคของแต่ละจังหวัด แล้วสมศรีควรจะ
เลือกทำงานที่จังหวัดเชียงใหม่

แนวคิด แบบที่ 2. เพราะว่า โจทย์เน้นว่าให้พิจารณาจากเงินเดือนที่สมศรีได้รับ

เพราะฉะนั้น สมศรีควรจะเลือกทำงานในจังหวัด กทม. เพราะว่าได้เงินเดือนมากที่สุด

คณิตศาสตร์ ก. 2541 ข้อ 30.

ดัชนีราคาผู้บริโภคของนครกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2537 – 2540 เป็นดังนี้

พ.ศ. : 2537 2538 2539 2540

ดัชนี : 100 107 116 138

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าครองชีพของนครกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 19

ข. ค่าครองชีพของนครกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2538 ร้อยละ 31

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. ถูกทั้งคู่

2. ก. ถูก ข. ผิด

3. ก. ผิด ข. ถูก

4. ก. และ ข. ผิดทั้งคู่

ตอบ ไม่สามารถสรุปคำตอบได้ เพราะว่าข้อกำหนดของโจทย์ไม่ชัดเจน

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์เกิดจากข้อสอบไม่กำหนดว่าปีฐานในการคำนวณเป็นปีใด

พ.ศ. : 2539 2540

ดัชนี : 116 138

ดัชนีแบบที่ 1 : 100 $\frac{138}{116}(100) = 118.9655$ (2539 เป็นปีฐาน)

ดัชนีแบบที่ 2 : $\frac{116}{138}(100) = 84.05797$ 100 (2540 เป็นปีฐาน)

คำถามแบบนี้ไม่สามารถตัดสินใจได้ เพราะว่าจากข้อความ ก.

“ ค่าครองชีพของนครกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 19 ”

ความสับสนของนักเรียนคือไม่รู้ว่าควรจะคำนวณโดยใช้ปีใดเป็นปีฐาน

หากกำหนด พ.ศ. 2537 เป็นปีฐาน

ค่าครองชีพของนครกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 22

หากกำหนด พ.ศ. 2539 เป็นปีฐาน

ค่าครองชีพของนครกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 18.9655

หากกำหนด พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน

ค่าครองชีพของนครกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 15.9420

ในทำนองเดียวกันข้อความ ข. ก็สรุปไม่ได้

คณิตศาสตร์ กข. 2541 ตอน 3. ข้อ 1.

สำหรับ $x \in (-1, 1)$ ให้ $S(x)$ เป็นผลบวกของอนุกรม $1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

จงหาค่าขอบเขตบนของเซต A เมื่อ $A = \left\{ \frac{1}{S(x)} \mid x \in (-1, 1) \right\}$

ตอบ มีคำตอบมากจนคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการตรวจข้อสอบไม่สามารถนับได้

แนวคิด $S(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{x+1}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{S(x)} = x + 1$

$$A = \left\{ \frac{1}{S(x)} \mid x \in (-1, 1) \right\} = \{x + 1 \mid x \in (-1, 1)\} = (0, 2)$$

ขอบเขตบนของเซต A เมื่อ $A = \left\{ \frac{1}{S(x)} \mid x \in (-1, 1) \right\}$ คือ จำนวนจริง k ทุกค่า $k \in [2, \infty)$

เพราะว่าข้อนี้เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ เพราะฉะนั้นคงจะลำบากมากที่จะให้คอมพิวเตอร์ตรวจข้อสอบข้อนี้

คณิตศาสตร์ 1. ตุลาคม 2542 ข้อ 24.

ในปี พ.ศ. 2540 สุเมธมีรายได้เดือนละ 15,000 บาท โดยที่รายได้ต่อเดือนที่แท้จริงของเขาเป็น 12,500 บาทเมื่อเทียบกับปี พ.ศ. 2538 ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคในปี พ.ศ. 2541 สูงกว่าปี พ.ศ. 2540 อยู่ 5% แล้วค่าครองชีพในปี พ.ศ. 2541 สูงกว่าปี พ.ศ. 2538 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (โดยคิดจากดัชนีราคาผู้บริโภคเมื่อใช้ปี พ.ศ. 2538 เป็นปีฐาน)

- | | |
|--------|--------|
| 1. 20% | 2. 25% |
| 3. 26% | 4. 30% |

ตอบ 2. หรือ 3.

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์ของโจทย์ข้อนี้เกิดจากการคิดปีฐานของการคิดดัชนีแตกต่างกัน จะทำให้ได้คำตอบต่างกันและตัวเลือกก็มีคำตอบบอให้นักเรียนเลือกทั้งสองกรณี

ดัชนีราคาผู้บริโภคใช้ปี พ.ศ. 2538 เป็นปีฐาน

เพราะฉะนั้นดัชนีราคาผู้บริโภคปี พ.ศ. 2538 เท่ากับ 100

สมมติ ดัชนีราคาผู้บริโภคปี พ.ศ. 2540 เท่ากับ x

ในปี พ.ศ. 2540 สุเมธมีรายได้เดือนละ 15000 บาท

รายได้ต่อเดือนที่แท้จริงของเขาเป็น 12500 บาทเมื่อเทียบกับปี พ.ศ. 2538

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } 12500 &= \frac{\text{รายได้}}{\text{ดัชนีผู้บริโภคของปี 2540}} \times 100 \\ &= \frac{15000}{x} \times 100 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{15000}{12500} \times 100 = 120 \text{ เพราะฉะนั้นดัชนีราคาผู้บริโภคปี พ.ศ. 2540 เท่ากับ 120}$$

คำว่า “ ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี พ.ศ. 2541 สูงกว่าปี พ.ศ. 2540 อยู่ 5% ” ค่า 5% คิดเทียบจากอะไร

ความคิดของผู้เขียน อาจมีความหมายได้ 2 แบบคือ

แบบที่ 1. เพราะว่าดัชนีราคาผู้บริโภคปี พ.ศ. 2540 เท่ากับ 120

ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี พ.ศ. 2541 สูงกว่าปี พ.ศ. 2540 อยู่ 5%

ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี พ.ศ. 2541 เท่ากับ 125

เพราะฉะนั้นค่าครองชีพในปี พ.ศ. 2541 สูงกว่าปี พ.ศ. 2538 = 25%

แบบที่ 2. ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี พ.ศ. 2540 เท่ากับ 125

ถ้าดัชนีปี พ.ศ. 2540 เท่ากับ 100 แล้วดัชนีปี พ.ศ. 2541 เท่ากับ 105

$$\text{ถ้าดัชนีปี พ.ศ. 2540 เท่ากับ 120 แล้วดัชนีปี พ.ศ. 2541 เท่ากับ } \frac{105 \times 120}{100} = 126$$

เพราะฉะนั้นค่าครองชีพในปี พ.ศ. 2541 สูงกว่าปี พ.ศ. 2538 = 26%

คณิตศาสตร์ 1. มีนาคม 2543 ข้อ 23.

ถ้าต้องการเขียนจำนวนที่มี 7 หลัก โดยใช้ตัวเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และให้มี เลขโดด 3, 4, 5 อยู่ติดกันตรงกลางระหว่างเลขโดดคู่และเลขโดดคี่ โดยแต่ละจำนวนไม่มีเลขซ้ำ แล้วจะเขียนได้ทั้งหมดเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8
2. 16
3. 24
4. 48

ตอบ 4. หรือไม่มีคำตอบ

แนวคิด ความไม่สมบูรณ์ของโจทย์ข้อนี้เกิดจากการตีความหมายของภาษาไทย

คำว่า “เลขโดด 3, 4, 5 อยู่ติดกันตรงกลางระหว่างเลขโดดคู่และเลขโดดคี่” อาจมีความหมาย 2 แบบคือ

แบบที่ 1. “เลขโดด 3, 4, 5 อยู่ติดกันตรงกลางระหว่าง(กลุ่ม)เลขโดดคู่และ(กลุ่ม)เลขโดดคี่”

แบบที่ 2. “เลขโดด 3, 4, 5 อยู่ติดกันตรงกลางระหว่างเลขโดดคู่(1 ตัว) และ เลขโดดคี่(1 ตัว)”

การนับจำนวนวิธีตามแบบที่ 1.

ขั้นที่ 1. สามตัวตรงกลางจัดลำดับจาก {3, 4, 5} ทำได้ $3! = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2. กลุ่มของ {1, 7} ไว้ทางซ้ายหรือขวาทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3. จัดลำดับ 1 และ 7 ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 4. จัดลำดับ 2 และ 6 ทำได้ 2 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด = $(6)(2)(2)(2) = 48$ วิธี

การนับจำนวนวิธีตามแบบที่ 2.

ขั้นที่ 1. สามตัวตรงกลางจัดลำดับจาก {3, 4, 5} ทำได้ $3! = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2. ตำแหน่ง A เลือกเป็นเลขคู่หรือเลขคี่ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3. จากขั้นตอนที่สองไม่ว่าจะเป็นเลขคู่หรือเลขคี่ ตำแหน่ง A เลือกตัวเลขได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 4. ตำแหน่ง B เลือกเลขคู่หรือเลขคี่ให้ต่างจากตำแหน่ง A ได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 5. ตำแหน่ง C และ D จัดลำดับจากเลขที่เหลือได้ 2 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด = $(6)(2)(2)(2)(2) = 96$ วิธี

หมายเหตุ ถ้ามีการออกข้อสอบคนใหม่นำข้อสอบข้อเก่าข้อนี้ไปใช้อีกกรุณาอย่าให้มีทั้งสองคำตอบและไม่ควรอย่างยิ่งที่จะใช้คำถามข้อนี้เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ

คณิตศาสตร์ 1. มีนาคม 2544 ข้อ 9.

กำหนดให้ $f(x) = 2 \sin \frac{x}{2}$ และ $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ เซต $(R_f \cap D_g) - R_{g \circ f}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-1, 1\}$
2. $\{-2, 2\}$
3. $[2, -\sqrt{3}] \cup [1, 2]$
4. $[-2, -1] \cup (\sqrt{3}, 2]$

ตอบ 4.

ความไม่สมบูรณ์ของข้อสอบเกิดที่ตัวเลือก 3. $[2, -\sqrt{3}] \cup [1, 2]$ มีข้อสงสัยว่าผู้ออกข้อสอบมีเจตนาเขียนช่วง $[2, -\sqrt{3}]$ เพื่อให้นักเรียนตีความเอาเองว่าเป็นเซต $\emptyset$ หรือว่าเป็นการพิมพ์ข้อสอบผิดพลาด กติกาการเขียนช่วงของจำนวนจริง $[a, b]$ ในหนังสือ ค 011 กำหนดว่า a ต้องน้อยกว่า b

ถาม โจทย์พิมพ์ผิดกติกาคณิตศาสตร์ที่ตกลงกันไว้ตามหลักสูตร หรือไม่

ตอบ ข้อสอบพิมพ์ผิด หรือมีเช่นนั้น ผู้ออกข้อสอบเคยชินกับกติกาที่ว่า $[2, -\sqrt{3}] = \emptyset$ โดยไม่ได้ดูกติกาคณิตศาสตร์ ม. ปลาย จากหนังสือ ค 011

แนวคิด การตัดตัวเลือก $f(x) = 2\sin \frac{x}{2}$ และ $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$$\text{เพราะว่า } (g \circ f)\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - 1} = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1} = \sqrt{2 - 1} = 1$$

เพราะฉะนั้น $1 \in R_{g \circ f}$ และ $1 \notin (R_f \cap D_g) - R_{g \circ f}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

$$\text{เพราะว่า } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2 - 1} = \sqrt{4\sin^2 \frac{x}{2} - 1} \geq 0$$

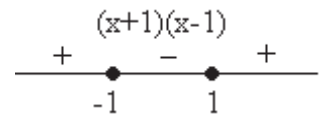
เพราะฉะนั้น $-1 \notin R_{g \circ f}$ เพราะฉะนั้น $-1 \in R_f \cap D_g - R_{g \circ f}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

$$\text{เพราะว่า } (g \circ f)(\pi) = g(f(\pi)) = \sqrt{(f(\pi))^2 - 1} = \sqrt{4\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1} = \sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{3} \in R_{g \circ f}$ และ $\sqrt{3} \notin R_f \cap D_g - R_{g \circ f}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง $f(x) = 2\sin \frac{x}{2}$, $D_f = \mathbb{R}$ และ $R_f = [-2, 2]$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$



$$D_g = \{x \mid x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \mid (x+1)(x-1) \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \text{ และ } R_g = [0, \infty)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } R_f \cap D_g = [-2, -1] \cup [1, 2]$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{(f(x))^2 - 1} = \sqrt{4\sin^2 \frac{x}{2} - 1}$$

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq \sin^2 \frac{x}{2} \leq 1$$

$$0 \leq 4 \sin^2 \frac{x}{2} \leq 4$$

$$0 \leq 4 \sin^2 \frac{x}{2} - 1 \leq 3$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0 \leq \sqrt{4 \sin^2 \frac{x}{2} - 1} \leq \sqrt{3}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } R_{g \circ f} = [0, \sqrt{3}]$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } R_f \cap D_g - R_{g \circ f} = [-2, -1] \cup (\sqrt{3}, 2]$$

คณิตศาสตร์ 2. มีนาคม 2545 ข้อ 20.

ถ้า x, y เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $x + y = 10$ และ xy^2 มีค่ามากที่สุด แล้วค่าของ x, y อยู่ในช่วงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $x \in (0, 2)$ และ $y \in (7, 9)$

2. $x \in (1, 3)$ และ $y \in (6, 8)$

3. $x \in (2, 4)$ และ $y \in (5, 7)$

4. $x \in (3, 5)$ และ $y \in (4, 6)$

ตอบ ไม่มีคำตอบที่ถูกต้อง