คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 26

คู่มือตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ม.4 ฉบับสมบูรณ์

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 26

คู่มือตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ม. 4. ฉบับสมบูรณ์

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 26 คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม. 4. ฉบับสมบูรณ์
ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
พิมพ์ครั้งที่ : 1
เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : เมษายน พ.ศ. 2562
เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์
ISBN (e-book) : 978-616-485-665-3
พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

หนังสือ **คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 26 คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ ม. 4. ฉบับสมบูรณ์** เป็นหนังสือที่จัดทำในรูปแบบของการสรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 4 และสรุปเทคนิคการตัดตัวเลือกในการทำข้อสอบ โดยมีเนื้อหาคณิตศาสตร์ต่างๆ เช่น เซต ระบบจำนวนจริง ตรรกศาสตร์ ความสัมพันธ์ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ภาคตัดกรวย ฟังก์ชัน ฟังก์ชันตรีโกณมิติ สถิติเบื้องต้น โดยแต่ละบทเรียบเรียงเนื้อหาในรูปแบบ

สรุปเนื้อหาแต่ละเรื่อง

เทคนิคการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมตามเนื้อหา

ตัวอย่างการทำโจทย์ข้อสอบโดยใช้วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ปัญหาถูกหรือผิดของเนื้อหาในแต่ละบท

โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

นอกจากนั้นยังมีเนื้อหาเสริมสำหรับคณิตศาสตร์หลักสูตรใหม่เช่น อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น ภายในเล่มมีโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือกมากกว่า 800 ข้อ เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกหัดทำ ตัวอย่างข้อสอบต่างๆ รวบรวมมาจากข้อสอบ Entrance ระบบใหม่ คณิตศาสตร์ ๑ คณิตศาสตร์ ๒ คณิตศาสตร์ ก คณิตศาสตร์ กข. และ ข้อสอบแข่งขันต่าง ๆ

หนังสือเล่มนี้จะมีประโยชน์มากที่สุดนักเรียนต้องดู วิธีจริง และ วิธีตัดตัวเลือก ทั้งสองวิธีให้เข้าใจ เพราะว่า การตัดตัวเลือกจะช่วยให้ทำข้อสอบได้คะแนนเร็วขึ้น แต่วิธีจริงจะช่วยให้นักเรียนสามารถทำข้อสอบแบบเติมคำตอบ และ ข้อสอบแบบอัตนัย นอกจากนั้นวิธีจริงจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจหลักการและการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาซึ่งจะมีประโยชน์ในการเรียนระดับสูงต่อไป

สำหรับนักเรียนที่สนในเทคนิคการตัดตัวเลือก ขอแนะนำหนังสือ **คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 25 คู่มือการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย** ซึ่งรวบรวมเทคนิคการตัดตัวเลือกที่ใช้ในการทำข้อสอบ Entrance และข้อสอบแข่งขันต่าง ๆ

สวัสดีครับ

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

บทที่ 1	เซต	1 – 22
บทที่ 2	ระบบจำนวนจริง	23 – 52
บทที่ 3	ตรรกศาสตร์	53 – 78
บทที่ 4	ความสัมพันธ์	79 – 102
บทที่ 5	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์	103 – 138
บทที่ 6	ภาคตัดกรวย	139 – 180
บทที่ 7	ฟังก์ชัน	181 – 210
บทที่ 8	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	211 – 244
บทที่ 9	สถิติเบื้องต้น	245 – 268
ภาคผนวกที่ 1	อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	269 – 286
ภาคผนวกที่ 2	ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	287 – 310
ภาคผนวกที่ 3	ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น	311 – 326
โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 1		327 – 350
โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 2		351 – 374
โจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก		375 – 400

บทที่ 1
เซต

1.1 สรุปเนื้อหา

1. **เซต** หมายถึงกลุ่มของสิ่งของต่าง ๆ เช่น
   เซตของแต้มลูกเต๋า = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   เซตของพยัญชนะไทย = {ก, ข, ค, ... , ฮ}
   เซตของตัวเลขหนึ่งหลัก = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

2. **สมาชิก** ของเซตหมายถึงสิ่งที่อยู่ในเซต เช่น
   4 เป็นสมาชิกของเซตของแต้มลูกเต๋า
   ก เป็นสมาชิกของเซตของพยัญชนะไทย

3. การเขียนเซตทำได้ 2 วิธี
   3.1 การเขียนแบบแจงสมาชิก
   3.2 การเขียนแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกของเซต
   ตัวอย่าง $\{x \mid x \text{ เป็นแต้มลูกเต๋า}\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   $\{x \mid x \text{ เป็นสระของภาษาอังกฤษ}\} = \{A, E, I, O, U\}$
   $\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}\} = \{1, 2, 3, ...\}$

4. **เซตว่าง** หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิก เราใช้สัญลักษณ์แทนเซตว่างด้วย $\varnothing$ หรือ $\{\}$

5. **เซตจำกัด** หมายถึง เซตที่มีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น
{1, 2, 3}, {1, 2, 3, 4}, $\varnothing$ เป็นเซตจำกัด

6. A เป็นเซตจำกัด n(A) หมายถึงจำนวนสมาชิกในเซต A
ตัวอย่าง $n(\varnothing) = 0$
$A = \{1, 2, 4\}$, $n(A) = 3$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $n(B) = 4$

7. **เซตอนันต์** หมายถึงเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด
ตัวอย่าง {1, 2, 3, 4, ...}
$\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ 3 หาร x ลงตัว$\} = \{3, 6, 9, ...\}$
$\{x \mid x$ เป็นจำนวนตรรกยะ$\}$

8. A เป็น **สับเซต** ของ B ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของ A ต้องเป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$
ตัวอย่าง $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ $A \subset B$
$A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c, ..., z\}$ $A \subset B$

ข้อควรจำ เซตว่างเป็นสับเซตทุกเซต

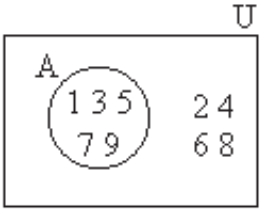
9. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

10. P(A) เรียกว่า **เพาเวอร์เซตของ A** หมายถึงเซตของสับเซตของ A
ตัวอย่าง $A = \{1\}$ $P(A) = \{\varnothing, \{1\}\}$
$B = \{a, b\}$ $P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

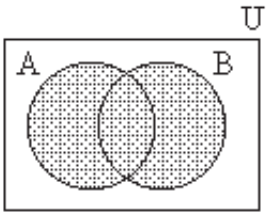
11. เมื่อ A เป็นเซตจำกัด จำนวนสมาชิกของ P(A) เท่ากับ $2^{n(A)}$

ข้อควรจำ จำนวนสมาชิกของ P(A) ต้องเป็นเลขคู่เสมอ เราสามารถใช้เหตุผลนี้ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

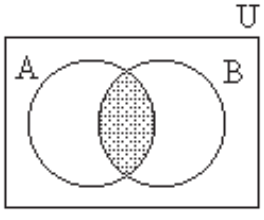
12. แผนภาพที่ใช้เขียนเซตเรียกว่า **แผนภาพของเวนน์ – ออยเลอร์**
แทนเอกภพสัมพัทธ์ U ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า
แทนเซต A, B, ... ด้วยวงกลม วงรีปิด หรือบริเวณปิดอื่น ๆ
ตัวอย่าง $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ คือ



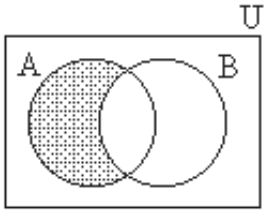
13. $A \cup B$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรือ B
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$
ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$



14. $A \cap B$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และ B
$A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$
ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2\}$



15. $A - B$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และไม่อยู่ใน B



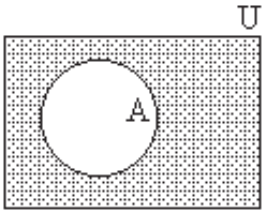
$A - B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$

ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

$A - B = \{1, 3\}$

$B - A = \{4, 6, 8\}$

16. A' หมายถึงเซต $U - A$ เมื่อ U คือเอกภพสัมพัทธ์



ตัวอย่าง $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

$A' = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

17. คุณสมบัติเกี่ยวกับเซตที่สำคัญ

ให้ A, B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U

(1) $\varnothing \subset A$ และ $A \subset U$

(2) $A \subset A \cup B$ และ $B \subset A \cup B$

(3) $A \cap B \subset A$ และ $A \cap B \subset A$

(4) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

(5) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$

(6) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = A \cap B$

(7) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

(8) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A' = B'$

(9) $A \cap B = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$

(10) $A \cup B = U$ ก็ต่อเมื่อ $A' \subset B$

(11) $A \cup B = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $A = \varnothing$ และ $B = \varnothing$

(12) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

(13) ถ้า $A \subset B$ และ $C \subset D$ แล้ว $A \cup C \subset B \cup D$

(14) ถ้า $A \subset B$ และ $C \subset D$ แล้ว $A \cap C \subset B \cap D$

(15) $A \cup A = A$

(16) $A \cap A = A$

(17) $A \cup \varnothing = A$

(18) $A \cap \varnothing = \varnothing$

(19) $A \cup U = U$

(20) $A \cap U = A$

(21) $A \cup B = B \cup A$

(22) $A \cap B = B \cap A$

(23) $A \cup A' = U$

(24) $A \cap A' = \varnothing$

(25) $(A')' = A$

(26) $U' = \varnothing$

(27) $\varnothing' = U$

(28) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(29) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(30) $A - B = A \cap B'$

(31) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(32) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(33) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(34) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(35) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

(36) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(37) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

(38) $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$

(39) $A - B \subset A$ และ $B - A \subset B$

(40) $(A \cap B \cap C)' = A' \cup B' \cup C'$ และ $(A \cup B \cup C)' = A' \cap B' \cap C'$

18. คุณสมบัติเกี่ยวกับเพาเวอร์เซต กำหนดให้ A, B เป็นเซตจำกัด

(1) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$

(2) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

(3) $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

(4) $n(P(A)) = 2^{n(A)}$

(5) $P(A) - P(B) \subset P(A - B)$

(6) $n(P(\varnothing)) = 1$

(7) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $n(P(A) - P(B)) = n(P(A)) - n(P(B))$

(8) $n(P(A \cup B) - P(A \cap B)) = n(P(A \cup B)) - n(P(A \cap B))$

19. คุณสมบัติเกี่ยวกับจำนวนสมาชิกในเซต กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(2) $n(A \cup B \cup C)$

$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(3) ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ $A \subset B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์

(4) ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $B \subset A$ แล้ว B เป็นเซตจำกัด

(5) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $n(A) \leq n(B)$

(6) $n(\varnothing) = 0$

(7) $n(A) - n(B) \leq n(A - B)$

(8) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

(9) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $n(B - A) = n(B) - n(A)$

(10) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

1.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. จำนวนสมาชิกของ P(A) ต้องอยู่ในรูป 2^n เมื่อ n = 0, 1, 2, 3, ...

ตัวอย่าง A = {1, 2, 3, 4}, B = {2, 3, 5} จำนวนสมาชิกของ $P(A \cap B)$ เท่ากับเท่าใด

1. 2 2. 3
3. 4 4. 5

การตัดตัวเลือก เพราะว่าจำนวนสมาชิกของ $P(A \cap B)$ ต้องเป็นเลขคู่ หรือ 1
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $P(A \cap B) = P(\{2, 3\}) = 2^2 = 4$

2. ยกตัวอย่างให้สอดคล้องกับโจทย์แล้วดูว่าตัวเลือกถูกหรือผิด

ตัวอย่าง กำหนดให้ A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A - B = B'$ 2. $A - B = A$
3. $A \cap B = A$ 4. $A \cap B = B$

การตัดตัวเลือก เลือกตัวอย่าง A, B และ U ดังนี้ U = {1, 2, 3}, A = {1}, B = {2}
จะได้ว่า A, B สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์

1. $A - B = \{1\} \neq \{1, 3\} = B'$ 2. $A - B = \{1\} = A$
3. $A \cap B = \varnothing \neq A$ 4. $A \cap B = \varnothing \neq B$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4.

วิธีจริง เพราะว่า A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน เพราะฉะนั้น $A - B = A$

3. ใช้วิธีสมมติสมาชิกใส่ในแผนภาพของเวนน์ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

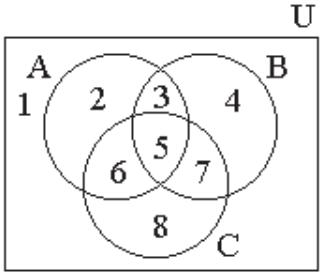
ตัวอย่าง เซต $(A - B) \cap C$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ 2. $(A \cap C) - B$
3. $(A - B) \cap B$ 4. $(A \cap B) - C$

การตัดตัวเลือก สมมติสมาชิกใส่ในแผนภาพของเวนน์ดังนี้

เลือก U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

A = {2, 3, 5, 6}, B = {3, 4, 5, 7}, C = {5, 6, 7, 8}



เซตของโจทย์คือ $(A - B) \cap C = \{6\}$

เซตในแต่ละตัวเลือกคือ

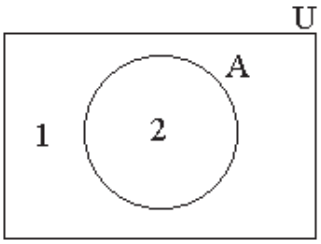
1. $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7\}$ 2. $(A \cap C) - B = \{6\}$
3. $(A - C) \cap B = \{3\}$ 4. $(A \cap B) - C = \{3\}$

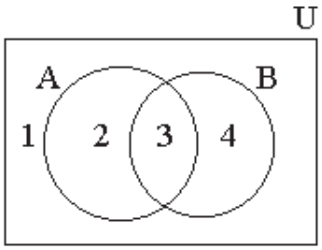
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4.

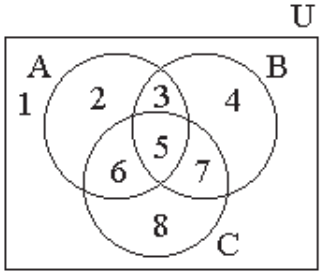
วิธีจริง $(A - B) \cap C = (A \cap B') \cap C$

$= (A \cap C) \cap B' = (A \cap C) - B$

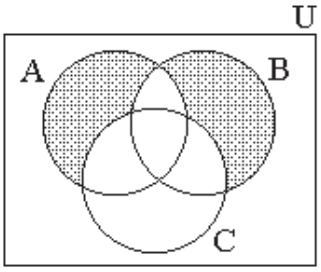
4. ข้อสอบเกี่ยวกับ การกำหนดแผนภาพเวนน์ สูตร เอกลักษณ์ หรือ สมการในเทอมของเซต เราสามารถตัดตัวเลือกได้โดยใช้แผนภาพของเวนน์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้





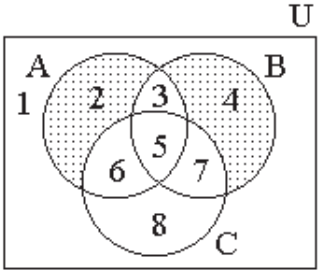


ตัวอย่าง ส่วนที่แรเงาในแผนภาพเวนน์คือเซตในตัวเลือกใด



1. $(A \cup B) - C$
2. $(A \cup B \cup C) - (A \cap B)$
3. $(A - C) \cap (B - C)$
4. $((A - C) \cup (B - C)) - (A \cap B)$

การตัดตัวเลือก เลือก $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$



$A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$, $C = \{5, 6, 7, 8\}$

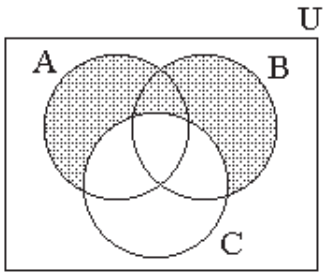
บริเวณที่แรเงาคือเซต $\{2, 4\}$ และเซตในแต่ละตัวเลือกคือ

1. $(A \cup B) - C = \{2, 3, 4\}$
2. $(A \cup B \cup C) - (A \cap B) = \{2, 4, 6, 7, 8\}$
3. $(A - C) \cap (B - C) = \{3\}$
4. $((A - C) \cup (B - C)) - (A \cap B) = \{2, 4\}$

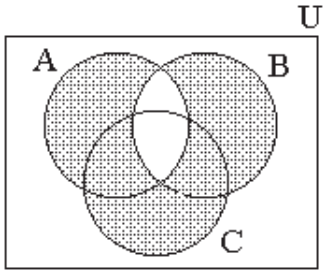
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

วิธีจริง เขียนแผนภาพเวนน์ของแต่ละตัวเลือกแล้วดูว่าตัวเลือกใดตรงกับภาพของโจทย์

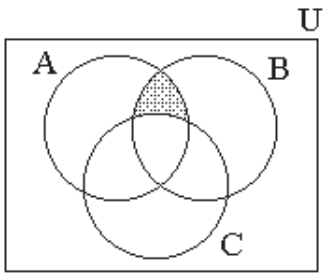
1. $(A \cup B) - C$



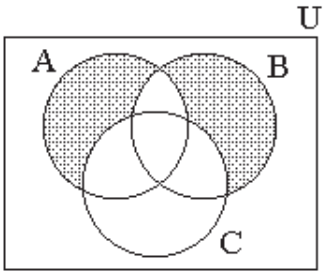
2. $(A \cup B \cup C) - (A \cap B)$



3. $(A - C) \cap (B - C)$



4. $((A - C) \cup (B - C)) - (A \cap B)$



เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบ

1.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

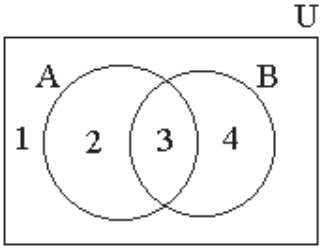
ตัวอย่างที่ 1.1 เซต $(A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(A \cap B)'$
2. $(A' \cup B')'$
3. A
4. $(A' \cap B')'$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เลือก $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3\}$ และ $B = \{3, 4\}$

เพราะฉะนั้น $A - B = \{2\}$, $B - A = \{4\}$, $A \cap B = \{3\}$



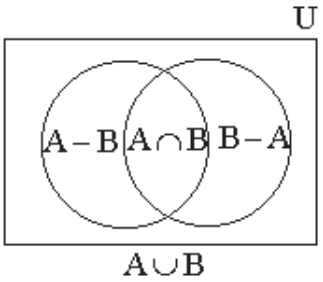
และ $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\} = \{2, 3, 4\}$

แทนค่า U, A และ B ในตัวเลือกเพื่อดูว่าเท่ากับ $\{2, 3, 4\}$ หรือไม่

ตัวเลือก 1. $(A \cap B)' = \{2\}' = \{1, 2, 4\} \neq \{2, 3, 4\}$

ตัวเลือก 2. $(A' \cup B')' = (\{2, 3\}' \cup \{3, 4\}')' = (\{1, 4\} \cup \{1, 2\})' = \{1, 2, 4\}'$

$= \{3\} \neq \{2, 3, 4\}$



ตัวเลือก 3. $A = \{2, 3\} \neq \{2, 3, 4\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

วิธีจริง แบบที่ 1. โดยใช้แผนภาพของเวนน์จากแผนภาพจะได้ว่า

$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B = (A' \cap B')'$

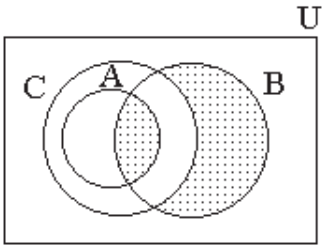
แบบที่ 2. ใช้สูตรของเซต $A - B = A \cap B'$ และ $B - A = B \cap A'$

$(B - A) \cup (A \cap B) = (B \cap A') \cup (A \cap B) = B \cap (A' \cup A) = B \cap U = B$

$(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = (A - B) \cup B = (A \cap B') \cup B = (A \cup B) \cap (B' \cup B)$

$= (A \cup B) \cap U = A \cup B = (A' \cap B')'$

ตัวอย่างที่ 1.2 เซตส่วนที่แรเงาจากแผนภาพเวนน์ที่กำหนดให้ตรงกับเซตในข้อใดต่อไปนี้

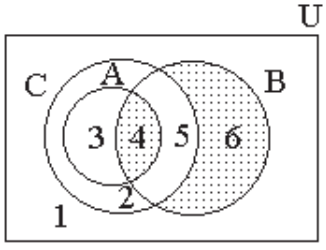


1. $(A \cap B) \cup (B - A)$
2. $(A \cap B \cap C) \cup (C - B)$
3. $(A \cap B \cap C) \cup (B \cap C')$
4. $(A \cap B) \cup (B - (C \cap A))$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่าสมาชิกในแต่ละส่วนของแผนภาพดังรูป ส่วนแรเงาคือ $\{4, 6\}$

จากแผนภาพเวนน์จะได้เซตในแต่ละตัวเลือกคือ



1. $A \cap B = \{4\}$, $B - A = \{5, 6\}$

   $(A \cap B) \cup (B - A) = \{4, 5, 6\} \neq \{4, 6\}$

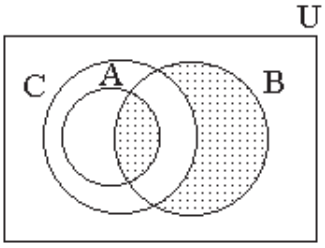
2. $A \cap B \cap C = \{4\}$, $C - B = \{2, 3\}$

   $(A \cap B \cap C) \cup (C - B) = \{2, 3, 4\} \neq \{4, 6\}$

3. $B \cap C' = B - C = \{6\}$, $(A \cap B \cap C) \cup (B \cap C') = \{4, 6\}$

4. $C \cap A = A = \{3, 4\}$, $B - (C \cap A) = \{5, 6\}$

$(A \cap B) \cup (B - (C \cap A)) = \{4, 5, 6\} \neq \{4, 6\}$



เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

วิธีจริง จากแผนภาพของเวนน์ในโจทย์จะเห็นว่าส่วนของเซตที่แรเงามี 2 ส่วน

ส่วนที่ 1 คือส่วนที่ A ตัดกับ B คือ $A \cap B$

ส่วนที่ 2 คือส่วนที่อยู่ใน B และไม่อยู่ใน C และไม่อยู่ใน A ตรงกับ $B - C$

เพราะฉะนั้นส่วนแรเงาทั้ง 2 รวมกันคือ $(A \cap B) \cup (B - C)$ ต่อไปต้องจัดรูปให้ตรงกับตัวเลือก

เพราะว่า $A \subset C$ เพราะฉะนั้น $A \cap B \subset C$ และ $A \cap B = A \cap B \cap C$

เพราะว่า $B - C = B \cap C'$

เพราะฉะนั้น $(A \cap B) \cup (B - C) = (A \cap B \cap C) \cup (B \cap C')$ ตรงกับตัวเลือก 3.

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดให้ A และ B มีสมาชิกเท่ากัน

ถ้า $A \cup B$ มี 5 สมาชิก และ $A \cap B$ มี 3 สมาชิก แล้ว $P(A - B)$ จะมีสมาชิกกี่ตัว

1. 1 ตัว
2. 2 ตัว
3. 3 ตัว
4. 4 ตัว

ตอบ 2.

แนวคิด วิธีจริง แบบที่ 1. เพราะว่า $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

และ $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $n(A \cup B) = n((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A))$

$$5 = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \quad \text{... (1)}$$

สมมติ $n(A) = k = n(B)$ เพราะว่า $n(A \cap B) = 3$

เพราะฉะนั้น

$$n(A) = n((A - B) \cup (A \cap B)) = n(A - B) + n(A \cap B)$$
$$k = n(A - B) + 3$$
$$n(A - B) = k - 3$$
$$n(B) = n((B - A) \cup (A \cap B))$$
$$k = n(B - A) + n(A \cap B) = n(B - A) + 3$$
$$n(B - A) = k - 3$$

แทนค่าในสมการ (1) จะได้ $5 = (k - 3) + 3 + (k - 3) = 2k + 3$

เพราะฉะนั้น $k = 1$ เพราะฉะนั้น $n(A - B) = 1$ เพราะฉะนั้น $n(P(A - B)) = 2^1 = 2$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $n(P(A - B))$ ต้องอยู่ในรูปของ 2 ยกกำลังจำนวนเต็มบวกหรือ 0

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. เพราะว่า $n(A \cup B) = 5$ และ $n(A \cap B) = 3$ เพราะฉะนั้น $A - B \neq \varnothing$

เพราะฉะนั้น $n(P(A - B)) \neq 2^0 = 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง แบบที่ 2. สมมติ $A - B \neq \varnothing$ เพราะฉะนั้น $A \subset B$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = A$ และ $A \cup B = B$ ซึ่งจะได้ว่า $n(A) = 3$, $n(B) = 5$

เพราะฉะนั้น $n(A) \neq n(B)$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดว่า $n(A) = n(B)$ เพราะฉะนั้น $A - B \neq \varnothing$

จากตัวเลือก 2. และ ตัวเลือก 4. ที่เหลือ $n(P(A - B)) = 2$ หรือ $n(P(A - B)) = 4$
เพราะฉะนั้น $n(A - B) = 1$ หรือ $n(A - B) = 2$
สมมติ $n(A - B) = 2$ จาก
$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) \\ 5 &= 2 + 3 + n(B - A) \\ n(B - A) &= 0 \\ B - A &= \varnothing \end{aligned}$$
เพราะฉะนั้น $B \subset A$
เพราะฉะนั้น $A \cap B = B$ และ $A \cup B = A$ ทำให้ $n(B) = n(A \cap B) = 3$ และ $n(A) = n(A \cup B) = 5$
ขัดแย้งกับ $n(A) = n(B)$ เพราะฉะนั้น $n(A - B) \neq 2$ เพราะฉะนั้น $n(A - B) = 1$ และ $n(P(A - B)) = 2$

ตัวอย่างที่ 1.4 ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{x \mid x^3 + x^2 - 6x = 0\}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A \cup B = \{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $(A \cap B)' = \{0, 2\}$
3. $B - A = \{-3\}$
4. $A' \cap B' = \{6, 7\}$

ตอบ 4.
แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $A \subset U$, $B \subset U$ และ $-3 \notin U$
เพราะฉะนั้น $-3 \notin A \cup B$ และ $-3 \notin B - A$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.
วิธีจริง พิจารณาเซต B
$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - 6x &= 0 \\ x(x^2 + x - 6) &= 0 \\ x(x + 3)(x - 2) &= 0 \\ x &= 0, 2, -3 \end{aligned}$$
เพราะว่า $B \subset U$ เพราะฉะนั้น $B = \{0, 2\}$
เพราะฉะนั้น $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B - A = \varnothing$
$A \cap B = \{0, 2\}$, $(A \cap B)' = \{1, 3, 4, 5\} \neq \{0, 2\}$
$A' = \{6, 7\}$, $B' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A' \cap B' = \{6, 7\}$
เพราะฉะนั้นตัวเลือกที่ถูกต้องคือตัวเลือก 4.

ตัวอย่างที่ 1.5 กำหนด A, B เป็นเซตใด ๆ ตัวเลือกใดต่อไปนี้ผิด

1. $A \cup B = A \cap B$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$
2. $(A \cap B) \cap (A - B)$ เป็นเซตว่าง
3. $A \in P(A)$ และ $B \in P(B)$
4. $(A \cap B) \subset (A - B)$

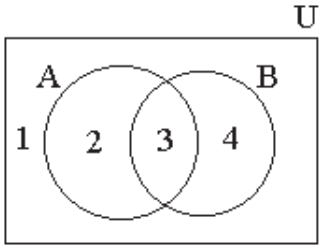
ตอบ 4.
แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1. คำถามและตัวเลือกแบบนี้ขอแนะนำให้ลองแทนค่า เช่นจากแผนภาพของเวนน์จะได้ว่า

$A = \{2, 3\}$

$B = \{3, 4\}$

$A \cap B = \{3\}$

$A - B = \{2\}$



เพราะฉะนั้น $(A \cap B) \not\subset (A - B)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2. เพราะว่า $A \in P(A)$ และ $B \in P(B)$ เป็นจริงเสมอ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง ตัวเลือก 1. เป็นจริง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

$A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$ เพราะฉะนั้น $A \subset B$

$B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$ เพราะฉะนั้น $B \subset A$ เพราะฉะนั้น $A = B$

ตัวเลือก 2. เป็นจริงแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้ เพราะว่า $A - B = A \cap B'$

เพราะฉะนั้น $(A \cap B) \cap (A - B) = (A \cap B) \cap (A \cap B') = A \cap (B \cap B')$

$= A \cap \varnothing = \varnothing$

ตัวอย่างที่ 1.6 ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องที่สุด

1. ถ้า A, B เป็นเซตจำกัด และ $A \cap B \neq \varnothing$ แล้ว $P(A \cup B) \subset P(A) \cup P(B)$
2. $((A \cap B) \cup (B \cap C))' \subset (B' \cup (A' \cap C'))$
3. ถ้า $A - B = \varnothing$ แล้ว $A = B$
4. ถ้า $A \cap B' = \varnothing$ แล้ว $A \cup B' = B'$

ตอบ 2.

แนวคิด วิธีจริงและการตัดตัวเลือกเหมือนกัน คำถามแบบนี้ถ้าทำตามวิธีจริงจะยาก เพราะว่าต้องคิดว่าข้อความในตัวเลือกใดน่าจะถูกต้องแล้วจึงแสดงข้อพิสูจน์ และข้อใดคาดว่าน่าจะเป็นเท็จก็ยกตัวอย่างแสดงว่าข้อความนั้นเป็นเท็จ อย่างไรก็ตามการยกตัวอย่างสำหรับคำถามแบบนี้เป็นวิธีที่ดีที่สุดเพราะว่าจะตัดตัวเลือกทิ้งได้ ตัวอย่างเช่นกำหนด $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

เลือก $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ จะได้ว่า $A - B = \varnothing$ แต่ $A \neq B$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

เพราะว่า $B' = \{5\}$ และ $A \cap B' = \varnothing$ แต่ $A \cup B' = \{1, 2, 3, 5\} \neq B'$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

เลือก $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ จะได้ว่า $A \cup B = \{1, 2\}$

เพราะว่า $\{1, 2\} \in P(A \cup B)$ แต่ $\{1, 2\} \notin (P(A) \cup P(B))$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) \not\subset P(A) \cup P(B)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $n(A) = 3$, $n(B) = 7$, $n(A \cap B) = 2$, $n(U) = 10$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $n(A - B) = 1$
2. $n((A \cap B)') = 8$
3. $n((A \cup B)') = 2$
4. $n(A' \cup B) = 7$

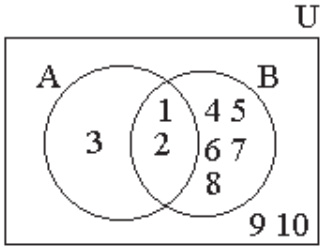
ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เลือกเซตที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ เช่น

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \cap B = \{1, 2\}$



จะได้ $n(A) = 3$, $n(B) = 7$, $n(A \cap B) = 2$, $n(U) = 10$ และ

$A - B = \{3\}$ $n(A - B) = 1$

$(A \cap B)' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $n((A \cap B)') = 8$

$(A \cup B)' = \{9, 10\}$ $n((A \cup B)') = 2$

$A' \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $n(A' \cup B) = 9$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ผิด

วิธีจริง การหาคำตอบใช้แผนภาพเวนน์ดีที่สุด

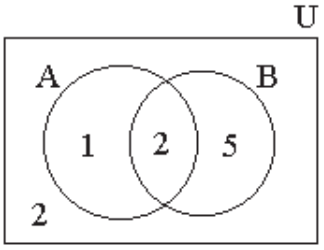
หมายเหตุ แผนภาพแสดงจำนวนสมาชิกในแต่ละบริเวณเหมาะสำหรับทำโจทย์ข้อนี้

จากแผนภาพ $n(A - B) = 1$

$n((A \cap B)') = 8$

$n((A \cup B)') = 2$

$n(A' \cup B) = 9$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ผิด



ตัวอย่างที่ 1.8 กำหนด A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงพิจารณาว่าตัวเลือกใดต่อไปนี้ผิด

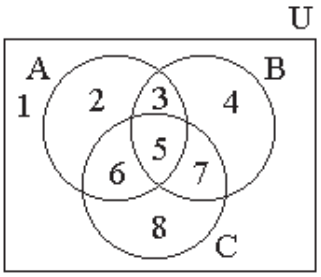
1. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
2. $((A \cup B) \cap (C \cup B))' = ((A' \cup C') \cap B)$
3. ถ้า $A \subset C$ และ $C \subset A$ แล้ว $A = C$
4. ถ้า $A \subset C$ แล้ว $C' \subset A'$

ตอบ 2.

แนวคิด วิธีจริงและการตัดตัวเลือกเหมือนกัน คำถามข้อนี้จะว่าง่ายก็ได้ เพราะว่าตัวเลือก 1., 3. และ 4. เป็นคุณสมบัติเกี่ยวกับเซต จะว่ายากก็ได้เพราะว่าการจะแสดงว่า ตัวเลือก 1. และ 4. ถูกต้องนั้นต้องใช้วิธีพิสูจน์ ส่วนตัวเลือก 3. เป็นบทนิยามของเซตเท่ากัน อย่างไรก็ตามขอแนะนำการยกตัวอย่างของเซตดังนี้

เลือก $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 5, 7\}$ และ $C = \{5, 6, 7, 8\}$



เพราะฉะนั้น $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$(A \cup B) \cap (C \cup B) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$((A \cup B) \cap (C \cup B))' = \{1, 2, 8\}$ ... (1)

$A' = \{1, 4, 7, 8\}$, $C' = \{1, 2, 3, 4\}$, $A' \cup C' = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, \}$

เพราะฉะนั้น $(A' \cup C') \cap B = \{3, 4, 7\} \neq \{1, 2, 8\}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ผิด

หมายเหตุ จาก (1) ใช้เหตุผลว่า $1 \notin B$ เพราะฉะนั้น $((A \cup B) \cap (C \cup B)') \neq ((A' \cup C') \cap B)$ แน่นอน จะเห็นได้ว่าการตัดตัวเลือกนั้นต้องสังเกตที่ตัวเลือกด้วย และ ด้วยเหตุผลเล็ก ๆ น้อย ๆ จะทำให้เราคิดเลขน้อยลง

ตัวอย่างที่ 1.9 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ข้อใดผิด

1. $P(\{\varnothing\}) - P(\varnothing) = P(\{\varnothing\})$
2. ถ้า $A - B = \varnothing$ แล้ว $P(A) - P(B) = \varnothing$
3. ถ้า $A \cap B = \varnothing$ และ $A \cap C = \varnothing$ แล้ว $A \cap (B \cup C) = \varnothing$
4. ถ้า $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ และ $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $A' - B' = B$

ตอบ 1.

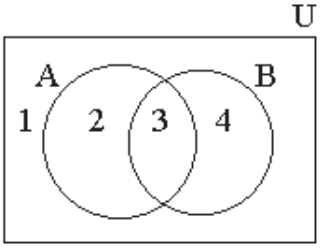
แนวคิด วิธีจริง ตัวเลือก 1. ผิด เพราะว่า $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$
เพราะฉะนั้น $P(\{\varnothing\}) - P(\varnothing) = \{\{\varnothing\}\} \neq P(\{\varnothing\})$
ตัวเลือก 2. ถูกต้อง ถ้า $A - B = \varnothing$ จะได้ $A \subset B$ และ $P(A) \subset P(B)$ เพราะฉะนั้น $P(A) - P(B) = \varnothing$
ตัวเลือก 3. ถูกต้อง ถ้า $A \cap B = \varnothing$ และ $A \cap C = \varnothing$
เพราะฉะนั้น $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$
ตัวเลือก 4. ถูกต้อง เพราะว่า $A \cap B = \varnothing$ เพราะฉะนั้น $B \subset A'$ และ $A \subset B'$
เพราะฉะนั้น $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B$
การตัดตัวเลือก เหตุผลที่จะใช้ในการตัดตัวเลือกคือ ทุกเซต A, B จะได้ว่า $\varnothing \in P(A)$ และ $\varnothing \in P(B)$
เพราะฉะนั้น $\varnothing \notin P(A) - P(B)$ เพราะฉะนั้น $P(A) - P(B) \neq P(A)$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1 ผิด

ตัวอย่างที่ 1.10 ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ A, B เป็นสับเซตของ U แล้ว $(A')' - B'$ จะเท่ากับเซตใด

1. $B' - A$
2. $(B')' \cap A'$
3. $U - (A' \cup B')$
4. $\varnothing' - A'$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เราจะใช้การแทนค่าเซต $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{2, 3\}$ และ $B = \{3, 4\}$
เพราะฉะนั้น $(A')' - B' = \{2, 3\} - \{1, 2\} = \{3\}$



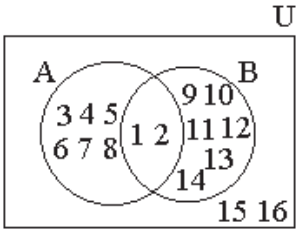
ตัวเลือก 1.$B' - A = \{1, 2\} - \{2, 3\} = \{1\}$
ตัวเลือก 2.$(B')' \cap A' = \{3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{4\}$
ตัวเลือก 3.$U - (A' \cup B') = \{1, 2, 3, 4\} - (\{1, 4\} \cup \{1, 2\}) = \{3\}$
ตัวเลือก 4.$\varnothing' - A' = U - \{1, 4\} = \{2, 3\}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.
วิธีจริง $(A')' - B' = A - B' = A \cap (B')' = A \cap B = (A' \cup B')' = U - (A' \cup B')$
ดูจากวิธีทำจะเห็นว่าเราต้องรู้ว่าควรจะจัดสูตรของเซตให้ไปตรงกับตัวเลือกใด จึงจะได้สูตรที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดให้ $n(A) = n(B) = 8$, $n(A \cap B) = 2$ และ $n(U) = 16$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

1. $n(A - B) = n(B - A)$
2. $n((A \cap B)') = 14$
3. $n(A \cup B) = 14$
4. $n(A' \cup B) = 12$

ตอบ 4

แนวคิด การตัดตัวเลือก สมมติเซต A, B, U ให้สอดคล้องกับโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้ เช่น



U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16}

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} และ B = {1, 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14}

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{1, 2\}$

เพราะฉะนั้น $n(A) = n(B) = 8$, $n(A \cap B) = 2$ และ $n(U) = 16$

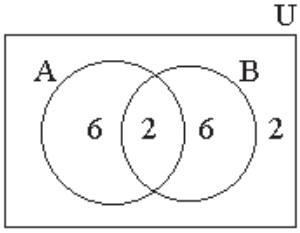
เพราะว่า $A - B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $A \cap B = \{1, 2\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ $(A \cup B)' = \{15, 16\}$

$A' = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

เพราะฉะนั้น $A' \cup B = \{1, 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ มีสมาชิก 10 ตัว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

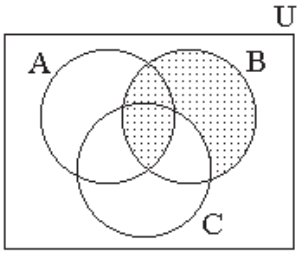


วิธีจริง จากโจทย์ $n(A) = n(B) = 8$, $n(A \cap B) = 2$ และ $n(U) = 16$

ใช้แผนภาพเวนน์แสดงจำนวนสมาชิกในแต่ละบริเวณได้ดังนี้

1. $n(A - B) = n(B - A) = 6$ ถูกต้อง
2. $n((A \cap B)') = 14$ ถูกต้อง
3. $n(A \cup B) = 14$ ถูกต้อง
4. $n(A' \cup B) = 12$ ผิด

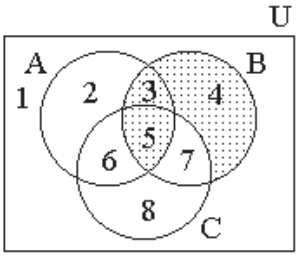
ตัวอย่างที่ 1.12 ส่วนที่แรเงารูปหมายถึงเซตใด



1. $(C - A)' \cap B$
2. $C' \cap (A \cup B)$
3. $(A - C) \cup B$
4. $A - (B \cup C)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ใช้การสมมติสมาชิกแต่ละบริเวณช่วยในการตัดตัวเลือกดีกว่าใส่สมาชิกของแต่ละบริเวณดังรูป เพราะฉะนั้นส่วนแรเงาคือเซต {3, 4, 5}



ตัวเลือก 1. $(C - A)' \cap B = \{7, 8\}' \cap \{3, 4, 5, 7\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 7\} = \{3, 4, 5\}$

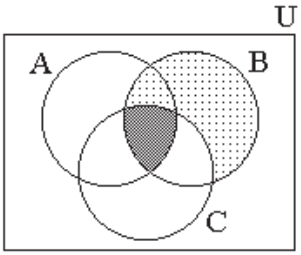
ตัวเลือก 2. $C' \cap (A \cup B) = \{5, 6, 7, 8\}' \cap (\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 4\}$

ตัวเลือก 3. $(A - C) \cup B = \{2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 7\}$

ตัวเลือก 4. $A - (B \cup C) = \{2\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.



วิธีจริง **แบบที่ 1.** วาดรูปแผนภาพของเวนน์แสดงเซตของแต่ละตัวเลือก

แบบที่ 2. จัดรูปทางพีชคณิต จากรูปของโจทย์จะได้

เซตในส่วนแรเงา $= (B - C) \cup (A \cap B \cap C)$ ... (*)

$= (B \cap C') \cup (A \cap B)$ (ดูจากรูป)

$= (A \cap B) \cup (C' \cap B) = (A \cup C') \cap B = (A' \cap C)' \cap B = (C - A)' \cap B$

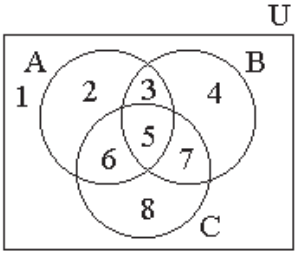
หมายเหตุ แบบที่ 2. จะยากตรงที่ไม่รู้ว่าจะเริ่มต้นสูตร (*) อย่างไร และต้องจัดรูปไปหาตัวเลือกใด

ตัวอย่างที่ 1.13 ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สำหรับผู้ที่จำสูตรเกี่ยวกับเซตได้จะรู้ได้ทันทีว่าตัวเลือก 1., 3. และ 4. ถูกต้อง แต่หากจำสูตรไม่ได้การแทนค่าสมาชิกดังรูปก็สามารถตัดตัวเลือกได้ จากรูป



$(A - C) \cap (B - C) = \{2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$

$(A \cap B) - C = \{3, 5\} - \{5, 6, 7, 8\} = \{3\}$

$A - (B \cap C) = \{2, 3, 5, 6\} - \{5, 7\} = \{2, 3, 6\}$

$(A - B) \cap (A - C) = \{2, 6\} \cap \{2, 3\} = \{2\}$

เพราะฉะนั้น $A - (B \cap C) \neq (A - B) \cap (A - C)$ เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบ

วิธีจริง นักเรียนต้องจำสูตร หรือ ต้องแสดงข้อพิสูจน์เกี่ยวกับเซตเป็น

ตัวอย่างที่ 1.14 ถ้า $A = \{0, 1, \{0\}\}$ และ $B = \{\varnothing, 0\}$ แล้ว $P(B) - P(A)$ เท่ากับข้อใด

1. $\varnothing$
2. $\{\varnothing\}$
3. $\{\varnothing, 0\}$
4. $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, 0\}\}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $A \not\subset B$ เพราะฉะนั้น $P(A) \not\subset P(B)$

เพราะฉะนั้น $P(A) - P(B) \neq \varnothing$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

เพราะว่า $\varnothing \in P(A)$ และ $\varnothing \in P(B)$ เพราะฉะนั้น $\varnothing \notin P(A) - P(B)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

วิธีจริง $A = \{0, 1, \{0\}\}$ $P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{\{0\}\}, \{0, 1\}, \{0, \{0\}\}, \{1, \{0\}\}, A\}$

$B = \{\varnothing, 0\}$ $P(B) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{0\}, \{\varnothing, 0\}\}$

$P(B) - P(A) = \{\{\varnothing\}, \{\varnothing, 0\}\}$

ตัวอย่างที่ 1.15 กำหนดให้ $A = \{0, \varnothing\}$ ข้อใดถูกต้อง

1. $P(A) = \{A, \{0\}, \varnothing\}$
2. $\{\varnothing\} \in P(A)$
3. $A \subset P(A)$
4. $\varnothing \notin P(A)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าจำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตต้องเป็นเลขคู่หรือ 1 เท่านั้น

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ผิด เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

เพราะว่า $\varnothing$ เป็นสมาชิกของเพาเวอร์เซตเสมอ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง เพราะว่า $\varnothing \in A$ เพราะฉะนั้น $\{\varnothing\} \in P(A)$ ถูกต้อง

หมายเหตุ เพราะว่า $P(A) = \{\varnothing, \{0\}, \{\varnothing\}, \{0, \varnothing\}\}$ เพราะฉะนั้น $A \not\subset P(A)$

ตัวอย่างที่ 1.16 กำหนด A = {1, {1}, 2, {1, 2}, 3, {1, 2, 3}}และ P(A) แทนเพาเวอร์เซตของ A จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\{1, 2, 3\} \in P(A)$
2. $\varnothing \in P(A)$ และ $\{\varnothing\} \subset P(A)$
3. $A \subset P(A)$ และ $\{A\} \in P(A)$
4. $\{\{\{1, 2\}, 3\}\} \subset P(A)$

ตอบ 3.

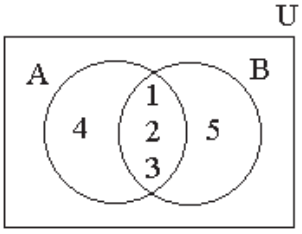
แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ควรอ่านตัวเลือกทุกตัวก่อนแล้วดูว่าตัวเลือกใดคิดง่ายกว่า ตัวอย่างเช่น $\varnothing \in P(A)$ และ ถ้า $x \in X$ แล้ว $\{x\} \subset X$ เสมอ
เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้อง เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.
เพราะว่า $1, 2, 3 \in A$ เพราะฉะนั้น $\{1, 2, 3\} \subset A$ และ $\{1, 2, 3\} \in P(A)$
เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ถูกต้อง เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.
เพราะว่า $3 \in A$ และ $\{1, 2\} \in A$ เพราะฉะนั้น $\{\{1, 2\}, 3\} \subset A$ และ $\{\{1, 2\}, 3\} \in P(A)$
เพราะฉะนั้น $\{\{\{1, 2\}, 3\}\} \subset P(A)$ ถูกต้อง เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.
วิธีจริง $1 \notin P(A)$ เพราะฉะนั้น $A \subset P(A)$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

ตัวอย่างที่ 1.17 ถ้า $A \cup B$ มีสมาชิก 5 ตัว และ $A \cap B$ มีสมาชิก 3 ตัวแล้ว $P(A - B)$ จะมีสมาชิกกี่ตัว เมื่อ A และ B มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

1. 2
2. 3
3. 4
4. 5

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $n(P(X))$ ต้องเป็นเลขคู่ หรือ 1 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.
ต่อไปสมมติสมาชิกของ A และ B ให้สอดคล้องกับโจทย์เช่น



$A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$ และ $A - B = \{4\}$
เพราะว่า $P(A - B) = \{\varnothing, \{4\}\}$ มีสมาชิก 2 ตัว เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.
วิธีจริง เพราะว่า $n(A - B) = n(A) - n(B \cap A) = n(A) - 3$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = n(B) - 3 = n(A) - 3$$

และ
$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$
$$5 = n(A) - 3 + 3 + n(A) - 3$$

เพราะฉะนั้น $n(A) = 4$ เพราะฉะนั้น $n(A - B) = 1$ และ $n(P(A - B)) = 2$

ตัวอย่างที่ 1.18 ถ้า U เป็นเซตที่มีสมาชิก 50 ตัว เซต A มีสมาชิก 12 ตัว เซต B มีสมาชิก 15 ตัว และ $A \cup B$ มีสมาชิก 22 ตัว แล้ว $P(A \cap B)$ มีสมาชิกกี่ตัว

1. 2^5
2. 2^3
3. 2^2
4. 2

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สมมติสมาชิกของ A, B ให้สอดคล้องกับโจทย์ก็ตัดตัวเลือกได้ เช่น

$U = \{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20, 21, 22\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ $B = \{22, 21, 20, \ldots, 13, 12, 11, 10, 9, 8\}$

เพราะฉะนั้น $n(A \cup B) = 22$, $n(A) = 12$, $n(B) = 15$

เพราะว่า $A \cap B = \{12, 11, 10, 9, 8\}$ เพราะฉะนั้น $n(P(A \cap B)) = 2^5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

วิธีจริง จากสูตร $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$22 = 12 + 15 - n(A \cap B)$

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = 5$ และ $n(P(A \cap B)) = 2^5$

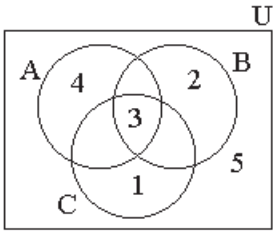
ตัวอย่างที่ 1.19 กำหนด $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 3\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4\}$, $B \cup C = \{1, 2, 3\}$ และ $A \cap B = \{3\}$ เซต $(A - C) \cup (C - A)$ ตรงกับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{1, 4\}$
2. $\{2, 4\}$
3. $\{1, 3\}$
4. $\{1, 5\}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก การหาคำตอบของคำถามแบบนี้ควรใช้แผนภาพของเวนน์ และใส่สมาชิกตามข้อกำหนดของโจทย์จะได้ $(A - C) \cup (C - A) = \{4\} \cup \{1\} = \{1, 4\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.



วิธีจริง $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ เพราะว่า $A \cup B = \{2, 3, 4\}$ และ $A \cap B = \{3\}$

เพราะฉะนั้น $A = \{3, 4\}$ และ $B = \{2, 3\}$

เพราะว่า $C = \{1, 3\}$ เพราะฉะนั้น $(A - C) \cup (C - A) = \{4\} \cup \{1\} = \{1, 4\}$

ตัวอย่างที่ 1.20 กำหนด $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap C = \{0, 1\}$ $B \cap C = \{0, 1, 5\}$ และ $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ เซต $(B \cup C) - A$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $\{4\}$
2. $\{5\}$
3. $\{4, 5\}$
4. $\varnothing$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $B \cap C = \{0, 1, 5\}$ เพราะฉะนั้น $5 \in B$

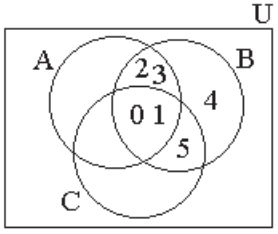
เพราะว่า $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$ เพราะฉะนั้น $5 \notin A$

เพราะฉะนั้น $5 \in (B \cup C) - A$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

เพราะว่า $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ เพราะฉะนั้น $4 \notin A$ และ $4 \notin C$

เพราะว่า $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ แต่ $4 \notin A$ เพราะฉะนั้น $4 \in B$

เพราะฉะนั้น $4 \in (B \cup C) - A$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.



วิธีจริง ใช้แผนภาพของเวนน์และใส่สมาชิกตามข้อกำหนดของโจทย์จากแผนภาพที่สอดคล้องกับโจทย์

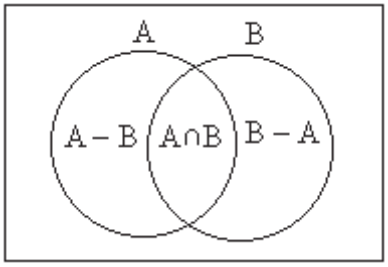
เพราะฉะนั้น $(B \cup C) - A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} - \{0, 1, 2, 3\} = \{4, 5\}$

1.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับเซต

1. ถ้า $n(A \cap B') = n(A' \cap B)$ แล้ว $n(A) = n(B)$
2. ถ้า $n(P(A - B)) = n(P(B - A))$ แล้ว $A = B$
3. ถ้า $A \cap B \subset A \cap C$ แล้ว $A \subset C$
4. ถ้า $A \cap B \neq \varnothing$ แล้ว $n(A - B) \leq n(B)$
5. $A - B = A - B$ ก็ต่อเมื่อ $A = B$
6. ถ้า $n(A) = n(P(A))$ แล้ว A เป็นเซตอนันต์
7. ถ้า $P(A) \cup P(B) = P(A) \cap P(B)$ แล้ว $A = B$
8. ถ้า $n(P(A)) = n(P(B))$ แล้ว $A = B$
9. เมื่อ A, B, C เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่เป็นเซตว่าง $A - (B - C) = (A - B) - C$
10. ถ้า $P(A) \cap P(B) = \{\varnothing\}$ แล้ว $A \cap B = \varnothing$
11. ถ้า $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ แล้ว $A \subset P(A)$
12. $\{\varnothing\} \subset P(A) - P(B)$
13. ถ้า $A - B = A$ แล้ว $B = \varnothing$
14. ถ้า $A - B = A$ แล้ว $A \cap B = \varnothing$ เมื่อ A, B เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง
15. ถ้า $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ แล้ว $A \cap B = \varnothing$
16. $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$
17. ทุกเซต A จะมีเซต B ที่ทำให้ $P(A) - P(B) = P(A)$
18. เมื่อ A, B เป็นเซตจำกัดและไม่เป็นเซตว่าง
    ถ้า $n(P(A \cup B)) = n(P(A))n(P(B))$ แล้ว $A \cap B = \varnothing$
19. ถ้า $A \cap B = A \cap C$ แล้ว $A \cup B = A \cup C$
20. ถ้า $n(A \cap B) = n(A \cup B)$ แล้ว $A = B$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับเซต

1. **ถูกต้อง** เพราะว่า $n(A \cap B') = n(A - B)$



และ $n(A \cap B') = n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B - A)$

เพราะฉะนั้น $n(A - B) = n(B - A)$

$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

เพราะฉะนั้น $n(A) = n(B - A) + n(A \cap B) = n(B)$

2. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \{1\}, B = \{2\}$

$A - B = \{1\}, B - A = \{2\}$

$n(P(A - B)) = 2^1 = 2$

$n(P(B - A)) = 2^1 = 2$

เพราะฉะนั้น $n(P(A - B)) = n(P(B - A))$ แต่ $A \neq B$

3. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}$ และ $C = \{1, 2, 4\}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{1\}$ และ $A \cap C = \{1, 2\}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B \subset A \cap C$ แต่ $B \not\subset C$

4. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1\}, A - B = \{2, 3\}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{1\} \neq \varnothing$ แต่ $n(A - B) = 2 \circlearrowright 1 = n(B)$

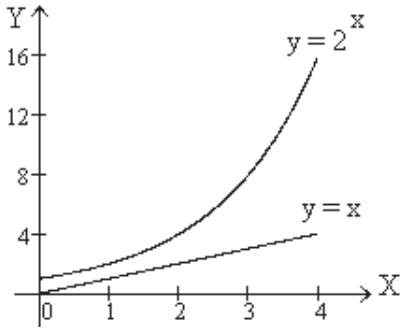
5. **ถูกต้อง** สมมติ $A \neq B$ เพราะว่ามี $x \in A$ และ $x \notin B$ ... (1)

เพราะฉะนั้น $x \in A - B$

เพราะว่า $A - B = B - A$ เพราะฉะนั้น $x \in B - A$ เพราะฉะนั้น $x \in B$ และ $x \notin A$ ขัดแย้งกับ (1)

เพราะฉะนั้น $A = B$

6. **ถูกต้อง** กำหนด $n(A) = n(P(A))$ เพราะฉะนั้น $n(A) = 2^{n(A)}$



สมมติ A เป็นเซตจำกัด เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม x ที่ทำให้ $n(A) = x$

เพราะฉะนั้น $x = 2^x$

เพราะว่า กราฟของ $y = x$ และ $y = 2^x$ ไม่ตัดกัน

เพราะฉะนั้นไม่มีจำนวนเต็มบวก x ที่ทำให้ $x = 2^x$

เพราะฉะนั้น A ต้องไม่เป็นเซตจำกัด เพราะฉะนั้น A เป็นเซตอนันต์

7. **ถูกต้อง** เพราะว่า $P(A) \subset P(A) \cup P(B) = P(A) \cap P(B) \subset P(B)$

และ $P(B) \subset P(A) \cup P(B) = P(A) \cap P(B) \subset P(A)$

เพราะฉะนั้น $P(A) \subset P(B)$ และ $P(B) \subset P(A)$

เพราะฉะนั้น $P(A) = P(B)$

เพราะฉะนั้น $A = B$

8. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2\}$, $n(P(A)) = 2^2 = 4$

$B = \{3, 4\}$, $n(P(B)) = 2^2 = 4$ แต่ $A \neq B$

9. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{0, 1, 2, 4\}$

$C = \{2, 3, 5\}$

เพราะว่า $B - C = \{0, 1, 4\}$ และ $A - (B - C) = \{1, 3\}$

$A - B = \{3\}$ และ $(A - B) - C = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $A - (B - C) \neq (A - B) - C$

10. **ถูกต้อง** กำหนด $P(A) \cap P(B) = \{\varnothing\}$ ... (*)

สมมติ $A \cap B \neq \varnothing$

เพราะฉะนั้น มี $x \in A \cap B$

เพราะฉะนั้น $x \in A$ และ $x \in B$

$\{x\} \in P(A)$ และ $\{x\} \in P(B)$

เพราะฉะนั้น $\{x\} \in P(A) \cap P(B)$

เพราะฉะนั้น $P(A) \cap P(B) \neq \{\varnothing\}$ ขัดแย้งกับข้อสมมติ (*)

เพราะฉะนั้น ถ้า $P(A) \cap P(B) = \{\varnothing\}$ แล้ว $A \cap B = \varnothing$

11. **ถูกต้อง** เพราะว่า เมื่อ $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

จะได้ว่า $P(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$

เพราะฉะนั้น $A \subset P(A)$

12. **ผิด** เพราะว่า $\varnothing \in P(A)$, $\varnothing \in P(B)$

เพราะฉะนั้น $\varnothing \notin P(A) - P(B)$

เพราะฉะนั้น $\{\varnothing\} \not\subset P(A) - P(B)$

13. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{3\}$

เพราะฉะนั้น $A - B = \{1, 2\} = A$ แต่ $B \neq \varnothing$

14. **ถูกต้อง** กำหนด $A - B = A$ ... (*)

สมมติ $A \cap B \neq \varnothing$

เพราะฉะนั้น มี $x \in A \cap B$

เพราะฉะนั้น $x \in A$ และ $x \in B$

เพราะฉะนั้น $x \notin A - B$

เพราะฉะนั้น $A - B \neq A$ ขัดแย้งกับ (*)

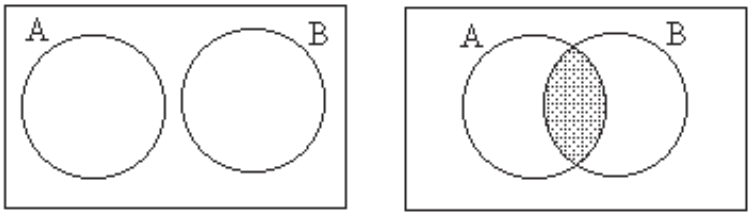
เพราะฉะนั้น ถ้า $A - B = A$ แล้ว $A \cap B = \varnothing$

15. **ถูกต้อง** กำหนด $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

เพราะว่า $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = 0$ เพราะฉะนั้น $A \cap B = \varnothing$

16. **ถูกต้อง** ความเป็นไปได้ของเซต A และ B คือมีสมาชิกร่วมกัน หรือ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน



เพราะว่า $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

เพราะฉะนั้น $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

17. **ผิด** เพราะว่าทุกเซต A และ B จะต้องมี $\varnothing \in P(A)$ และ $\varnothing \in P(B)$

เพราะฉะนั้น $\varnothing \notin P(A) - P(B)$

เพราะฉะนั้นเป็นไปไม่ได้ที่จะมี A และ B ที่ทำให้ $P(A) - P(B) = P(A)$

18. **ถูกต้อง** กำหนดให้ $n(A) = x$ และ $n(B) = y$

สมมติ $n(A \cap B) = z$

เพราะว่า $n(P(A))n(P(B)) = (2^x)(2^y) = 2^{x+y}$

และ $n(P(A \cup B)) = 2^{n(A \cup B)} = 2^{n(A)+n(B)-n(A \cap B)} = 2^{x+y-z}$

เพราะฉะนั้น $2^{x+y} = 2^{x+y-z}$

$1 = 2^{-z}$

เพราะฉะนั้น $z = 0$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \varnothing$

19. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \{1\}, B = \{2, 3\}, C = \{4, 5\}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \varnothing$ และ $A \cap C = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = A \cap C$ แต่ $B \neq C$

$A \cup B = \{1, 2, 3] \neq \{1, 4, 5\} = A \cup C$

20. **ถูกต้อง** สมมติ $n(A \cap B) = n(A \cup B)$

เพราะว่า $A \cap B \subset A \cup B$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = A \cup B$ เพราะฉะนั้น $A = B$

1.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. กำหนดให้ $A = \{-5, -3, -1, 0, 1, 5, 10\}$, $B = \{-6, -3, 1, 3, 6\}$, $C = \{-4, -3, -2, 1, 2, 4\}$ เซต $A \cap (B \cup C)$ เท่ากับเซตใด

   1. $\{x \in R \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$
   2. $\{x \in R \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$
   3. $\{x \in N \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$
   4. $\{x \in N \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$

2. กำหนดให้ $U = \{0, 1, 2, \{2\}, \{1, 2\}\}$, $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2, \{2\}\}$ ตัวเลือกในข้อใดถูกต้อง

   1. $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$
   2. $(A' \cap B') - A = B'$
   3. $A - (A \cap B) = A - B$
   4. $P(A) \subset P(B)$

3. A, B, C เป็นเซตใด ๆ และ $A \cap B = B \cap C$ แล้วข้อใดถูกต้อง

   1. $A - C = C - B$
   2. $A \cup C = B \cup C$
   3. $A - C = B - C$
   4. $(A \cap B) - C = (B \cap C) - A$

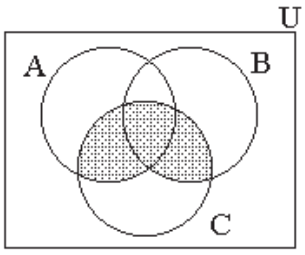
4. กำหนด A, B เป็นเซตใด ๆ ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $A - B = B - (B \cup A)$
   2. $A - B = A - (B - A)$
   3. $A - B = A - (A \cup B)$
   4. $A - B = A - (A \cap B)$

5. กำหนดให้ $n(P(A \cap B)) = 4$, $n(P(A \cup B)) = 64$
   ถ้า $n(P(A)) = n(P(B))$ แล้ว $n(A - B)$ เท่ากับเท่าใด

   1. 2
   2. 8
   3. 16
   4. 24

6. จากแผนภาพที่กำหนดให้ส่วนที่แรเงาคือเซตใด

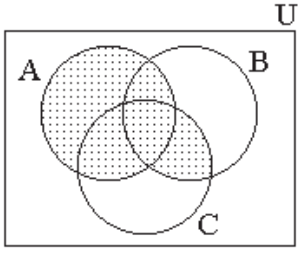


   1. $(A' \cup B') \cap C$
   2. $(A \cap B) \cap C$
   3. $(A \cup B) \cap C$
   4. $(A \cup B) \cup C$

7. กำหนดให้ A, B, C เป็นเซตและไม่เป็นเซตว่าง ตัวเลือกใดไม่ถูกต้อง

   1. $A - (A \cap B') = A \cap B$
   2. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
   3. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
   4. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

8. จากแผนภาพที่กำหนดให้ ส่วนที่แรเงาคือเซตในตัวเลือกใด



   1. $A \cap (B \cup C)$
   2. $(A \cap B) \cap (B \cap C)$
   3. $A \cup (B \cap C)$
   4. $(A \cup B) \cap (B \cap C)$

9. กำหนดให้ A, B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $A - B = B - A$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

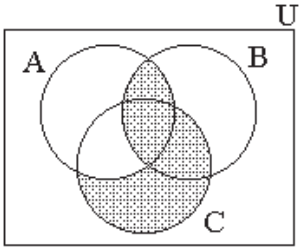
1. $A \cup B \neq A \cap B$
2. $A \cap B' \neq \varnothing$
3. $A \cup B = B$
4. $A - B = A$

10. A, B, C เป็นเซตใด ๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์

กำหนดให้ $A \bullet B = A' \cup B$ ตัวเลือกใดไม่ถูกต้อง

1. $U \bullet U = \varnothing \bullet \varnothing$
2. $B \cup (A \bullet \varnothing) = A' \cup B$
3. $(A \bullet B) \bullet C = (A \cup C) \cap (B \bullet C)$
4. $A' \bullet B \neq B' \bullet A$

11. จากแผนภาพที่กำหนดให้ ส่วนที่แรเงาคือเซตในตัวเลือกใด

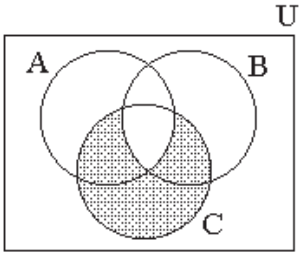


1. $A \cup (B \cap C)$
2. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$
3. $(C - A) \cup (A \cap B)$
4. $(A - B) \cap (B - C)$

12. กำหนดให้ A, B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $A - B = \varnothing$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A \cup B = A \cap B$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. $A \cup B = B$
4. $B - A = A - B$

13. จากแผนภาพที่กำหนดให้ ส่วนที่แรเงาคือเซตในตัวเลือกใด

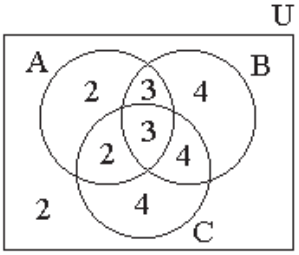


1. $C - (A \cap B)$
2. $C - (A \cup B)$
3. $C - (A - B)$
4. $C - (B - A)$

14. กำหนดให้ A, B เป็นเซตที่ไม่เป็นเซตว่าง และ $A - B = A$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A \cup B = A$
2. $A \cap B = \varnothing$
3. $A \cup B = B$
4. $B - A = A - B$

15. กำหนดแผนภาพแสดงจำนวนสมาชิกในแต่ละบริเวณ ดังรูป



จำนวนสมาชิกของ $P((A \cup B) - C))$ เท่ากับเท่าใด

1. 8
2. 9
3. 512
4. 1024

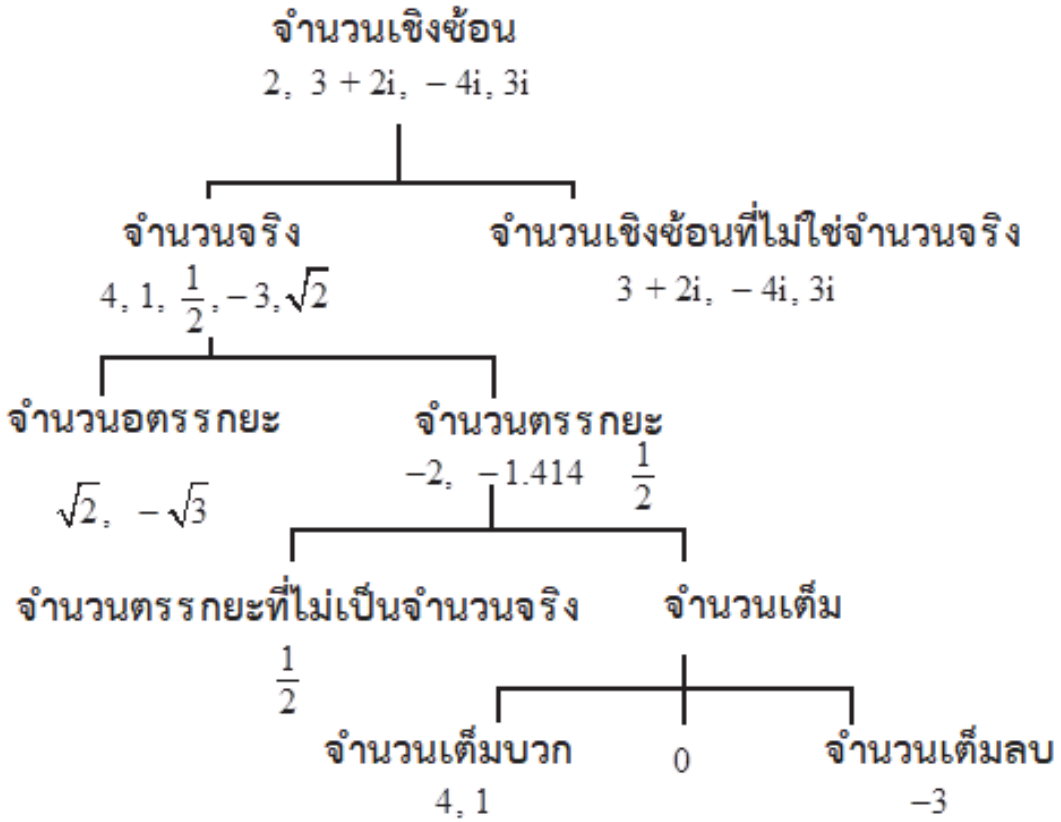
เฉลย 1. (1) 2. (3) 3. (4) 4. (4) 5. (1)
6. (3) 7. (2) 8. (3) 9. (3) 10. (4)
11. (3) 12. (3) 13. (1) 14. (2) 15. (3)

บทที่ 2
ระบบจำนวนจริง

2.1 สรุปเนื้อหา

1. โครงสร้างระบบจำนวน

จำนวนเลขต่างๆ ที่เราศึกษากันประกอบด้วย ระบบจำนวนเชิงซ้อน ระบบจำนวนจริง ระบบจำนวนตรรกยะ ระบบจำนวนอตรรกยะ ระบบจำนวนเต็ม โดยมีโครงสร้างที่สำคัญพอสรุปได้ดังนี้



หมายเหตุ เซตของจำนวนจริงแทนด้วย $R = (-\infty, \infty)$

เซตของจำนวนเต็มแทนด้วย $I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

เซตของจำนวนนับ หรือ จำนวนเต็มบวก แทนด้วย $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

2. สมบัติของจำนวนจริง ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

สมบัติ	การบวก	การคูณ
ปิด	$a + b \in R$	$ab \in R$
การสลับที่	$a + b = b + a$	$ab = ba$
การเปลี่ยนกลุ่ม	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
การมีเอกลักษณ์	มี 0 เป็นเอกลักษณ์ โดยที่ $a + 0 = 0 + a = a$	มี 1 เป็นเอกลักษณ์ โดยที่ $1 \times a = a \times 1 = a$
การมีอินเวอร์ส	อินเวอร์สของจำนวนจริง a คือ $-a$ โดยที่ $a + (-a) = (-a) + a = 0$	อินเวอร์สของจำนวนจริง $a \neq 0$ คือ $\frac{1}{a}$ โดยที่ $a\,(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a})a = 1$
การแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

3. สมบัติที่สำคัญของอสมการ ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
3. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
4. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
5. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
6. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - d < b - c$
7. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$
8. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$
9. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
10. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$

4. **ค่าสัมบูรณ์**

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง x คือ $|x|$ โดยที่ $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

ตัวอย่าง $|4| = 4, |-3| = 3, |0| = 0$

5. สมบัติของค่าสัมบูรณ์ ให้ a, b เป็นจำนวนจริง

1. $|a| \geq 0$
2. $|a| \geq a$

3. $|a| = |-a|$

4. $|ab| = |a||b|$

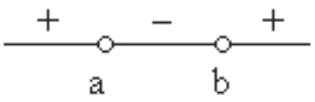
5. $\sqrt{a^2} = |a|$

6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ เมื่อ $b \neq 0$

7. $|a + b| \leq |a| + |b|$

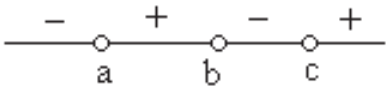
8. $|a - b| \geq |a| - |b|$

6. เซตคำตอบของอสมการ $(x - a)(x - b) < 0$ เมื่อ $a < b$



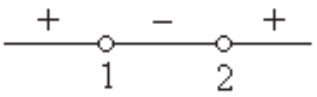
$$\{x \mid (x - a)(x - b) < 0\} = (a, b)$$

$(x - a)(x - b)(x - c) < 0$ เมื่อ $a < b < c$

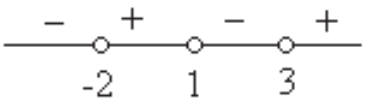


$$\{x \mid (x - a)(x - b)(x - c) < 0\} = (-\infty, a) \cup (b, c)$$

ตัวอย่าง $\{x \mid (x - 1)(x - 2) < 0\} = (1, 2)$



$$\{x \mid \frac{(x-1)(x+2)}{x-3} < 0\}$$



$$\{x \mid \frac{(x-1)(x+2)}{x-3} < 0\} = (-\infty, -2) \cup (1, 3)$$

ข้อสังเกต เครื่องหมายของ $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e)$ ... เมื่อ $a < b < c < d < e <$ ... จะมีเครื่องหมาย + ขึ้นต้นทางขวามือแล้วสลับกันระหว่างบวกกับลบไปเรื่อยๆ ตามจำนวนวงเล็บ

7. รากของสมการพหุนาม $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

ทฤษฎีบท $x - a$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ $p(a)$

ตัวอย่าง $p(x) = x^2 - 4x + 3$ จะได้ว่า $x - 2$ หาร $x^2 - 4x + 3$ เหลือเศษ $p(2) = -1$

ทฤษฎีบท $x - a$ หาร $p(x)$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $p(a) = 0$

ตัวอย่าง เมื่อ $p(x) = x^2 - 4x + 3$ จะได้ $p(3) = 9 - 12 + 3 = 0$

เพราะฉะนั้น $x - 3$ หาร $x^2 - 4x + 3$ ลงตัว

8. สมบัติของรากสมการพหุนาม

ทฤษฎีบท ถ้า r_1, r_2 เป็นรากของสมการ $x^2 + Ax + B = 0$ แล้ว $r_1 r_2 = B$ และ $r_1 + r_2 = -A$

ทฤษฎีบท ถ้า r_1, r_2, r_3 เป็นรากของสมการ $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$

จะได้ว่า $r_1 r_2 r_3 = -C$

$r_1 + r_2 + r_3 = -A$

$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 = B$

หมายเหตุ กรณีทั่วไป $r_1, r_2, \ldots, r_n$ เป็นรากสมการ $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$

จะได้ว่า $r_1 r_2 r_3 \ldots r_n = (-1)^n a_0$ และ $r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n = -a_{n-1}$

9. การแยกตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

ให้ $p(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

ขั้นที่ 1. จำแนกตัวประกอบ 8 ได้เป็น $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

ขั้นที่ 2. ลองแทนค่า x จากตัวประกอบของ 8 เพื่อดูว่า $p(x) = 0$ หรือไม่

เพราะว่า $p(2) = 8 - 20 + 4 + 8 = 0$ เพราะฉะนั้น $x - 2$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

ขั้นที่ 3. แทนค่า $p(x)$ ต่อไปด้วยบางค่าของ x หรือทำการตั้งหารยาว

เมื่อทำการตั้งหารยาวจะได้ $\frac{p(x)}{x-2} = x^2 - 3x - 4$

เพราะฉะนั้น $p(x) = (x - 2)(x^2 - 3x - 4) = (x - 2)(x + 1)(x - 4)$

เพราะฉะนั้นรากของสมการ $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$ คือ $x = -1, 2, 4$

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 = 0$

ให้ $p(x) = 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$

ขั้นที่ 1. จำแนกตัวประกอบ 12 ได้เป็น $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

จำแนกตัวประกอบ 3 ได้เป็น $\pm 1, \pm 3$

ขั้นที่ 2. ลองแทนค่า $x = \frac{\text{ตัวประกอบของ } 12}{\text{ตัวประกอบของ } 3}$ ตัวอย่างเช่น $x = \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \ldots$

ในสมการ $p(x)$ ซึ่งต้องอาศัยความโชคดี จึงจะได้ $p(x) = 0$ ตัวอย่างเช่น

เพราะว่า $p(\frac{1}{2}) = 12(\frac{1}{8}) + 16(\frac{1}{4}) - 5(\frac{1}{2}) - 3 = 0$

เพราะฉะนั้น $2x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ ต่อไปแนะนำการตั้งหารยาวดีกว่า

โดยการหารยาวจะได้ $\frac{12x^3+16x^2-5x-3}{2x-1} = 6x^2 + 11x + 3$

เพราะฉะนั้น $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 = (2x - 1)(6x^2 + 11x + 3) = (2x - 1)(3x + 1)(2x + 3)$

เพราะฉะนั้นรากของสมการ $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 = 0$ คือ $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}$

ข้อสังเกต เพราะว่า $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 = 0$

หารตลอดด้วย 12 จะได้ $x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{5}{12}x - \frac{1}{4} = 0$

เพราะฉะนั้น ผลบวกราก $\frac{1}{2} + (-\frac{1}{3}) + (-\frac{3}{2}) = -\frac{4}{3}$ และ ผลคูณราก $(\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$ สอดคล้องเงื่อนไขทฤษฎีในข้อ 8

10. ขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

10.1 u เป็น **ขอบเขตบน** ของเซต A ก็ต่อเมื่อ $x \le u$ ทุกค่า $x \in A$

10.2 ℓ เป็น **ขอบเขตล่าง** ของเซต A ก็ต่อเมื่อ $\ell \le x$ ทุกค่า $x \in A$

หมายเหตุ 1. ขอบเขตบน u และ ขอบเขตล่าง ℓ ของ A มีได้หลายตัว

2. ขอบเขตบน u และ ขอบเขตล่าง ℓ ของ A อาจเป็นสมาชิกของ A หรือไม่ก็ได้

ตัวอย่าง $A = (1, 4)$ มี 4, 5, 6 และจำนวนจริงทุกค่าที่มากกว่า 4 เป็นขอบเขตบน

$A = (1, 4)$ มี 1, 0, −1 และจำนวนจริงทุกค่าที่น้อยกว่า 1 เป็นขอบเขตล่าง

10.3 u เป็น **ขอบเขตบนค่าน้อยสุด** ของ Aก็ต่อเมื่อ (1) u เป็นขอบเขตบนของ A

และ (2) ถ้า w เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $u \le w$

10.4 ℓ เป็น **ขอบเขตล่างค่ามากสุด** ของ A ก็ต่อเมื่อ (1) ℓ เป็นขอบเขตล่างของ A

และ (2) ถ้า m เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $m \le \ell$

ตัวอย่าง $A = (-4, 3]$ มี 3 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด และมี −4 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด

11. สมบัติของจำนวนเต็ม

ข้อตกลง m หาร n ลงตัว แทนด้วย $m \mid n$

1. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (b + c)$
2. m หาร n ลงตัว ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $n = mk$
3. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$
4. ถ้า a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a \mid b$ แล้ว $a \le b$
5. กำหนดให้ p เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $p \ne 0$ และ$p \ne 1$

   p เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ มี 1, −1, p, −p เท่านั้นที่หาร p ลงตัว

   ตัวอย่าง จำนวนเฉพาะเช่น 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...
6. **ขั้นตอนการหาร**

   m, n เป็นจำนวนเต็ม $n \ne 0$ จะมี q และ r ชุดเดียวที่ทำให้ $m = nq + r$ โดย $0 \le r \le |n|$

   q เรียกว่า **ผลหาร**, r เรียกว่า **เศษเหลือ**

   ตัวอย่าง $10 = (4)(2) + 2$

   $-12 = (-4)(4) + 3$
7. กำหนด $a^2 + b^2 \ne 0$

   d เป็น **ตัวหารร่วมมาก**(ห.ร.ม.) ของ a, b ก็ต่อเมื่อ

   (1) $d \mid a$ และ $d \mid b$

   และ (2) ถ้า $c \mid a$ และ $c \mid b$ แล้ว $c \mid d$

   ข้อตกลง เราใช้สัญลักษณ์ (a, b) แทน ห.ร.ม. ของ a และ b

กำหนด $a^2 + b^2 \neq 0$

c เป็น **ตัวคูณร่วมน้อย** (ค.ร.น) ของ a, b ก็ต่อเมื่อ

(1) $a \mid c$ และ $b \mid c$

และ (2) ถ้า $a \mid x$ และ $b \mid x$ แล้ว $c \mid x$

ข้อตกลง เราใช้สัญลักษณ์ [a, b] แทน ค.ร.น. ของ a และ b

ตัวอย่าง ห.ร.ม. (10, 12) = 2 ห.ร.ม. (100, 120) = 20

ค.ร.น. (10, 12) = 60 ค.ร.น. (100, 120) = 600

หมายเหตุ (ค.ร.น. (a, b))(ห.ร.ม. (a, b)) = [a, b](a, b)= ab

การหา ห.ร.ม. (a, b) โดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่าง การหา ห.ร.ม. (100, 120)

เพราะว่า 100 = (2)(2)(5)(5)

และ 120 = (2)(2)(2)(3)(5)

เพราะฉะนั้นเลือกเฉพาะตัวที่ซ้ำมา ห.ร.ม.(100, 120) = (2)(2)(5) = 20

8. ขั้นตอนวิธียุคลิดในการหา ห.ร.ม. ของ m และ n (เมื่อกำหนดให้ $m \geq n$)

ถ้า $m = nq + r$; $0 < r < |n|$

$n = rq_1 + r_1$; $0 < r_1 < r$

$r = r_1 q_2 + r_2$; $0 < r_2 < r_1$

$r_1 = r_2 q_3 + r_3$; $0 < r_3 < r_2$

:

$r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k$; $0 < r_k < r_{k-1}$

$r_{k-1} = r_k q_{k+1}$

แล้ว ห.ร.ม. ของ m และ n มีค่าเท่ากับ r_k

ตัวอย่าง 120 = (1)(100) + 20

100 = (20)(5)

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม. (120, 100) = 20

9. ถ้า ห.ร.ม. (m, n) = 1 แล้ว m, n เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

10. ถ้า d = ห.ร.ม. (m, n) แล้วต้องมี x, y ที่ d = xm + yn

ตัวอย่าง ห.ร.ม. (120, 100) = 20 จะได้ว่า 20 = (120)(1) + (−1)(100)

11. ถ้า d = ห.ร.ม.(m, n) และ m = ad, n = bd แล้ว ห.ร.ม. (a, b) = 1

12. ห.ร.ม.(m, n) ≤ ค.ร.น.(m, n) ทุกค่าจำนวนเต็มบวก m และ n

13. ห.ร.ม.(m, n) ≤ min{m, n} ทุกค่าจำนวนเต็มบวก m และ n

14. max{m, n} ≤ ค.ร.น.(m, n) ทุกค่าจำนวนเต็มบวก m และ n

2.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. เทคนิคแรกคือ เซตคำตอบคือตัวเลือกใด ให้นำคำตอบในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ตัวอย่าง เซตคำตอบของอสมการ $-2x - 9 \le |x + 3|$ คือข้อใด

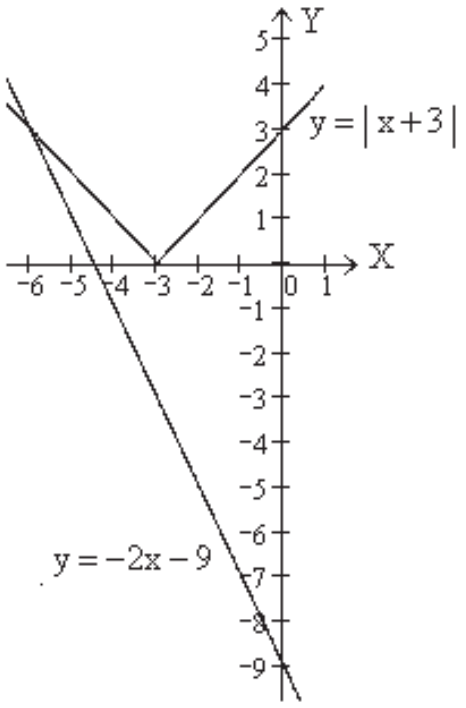
1. $[-6, -3]$ 2. $[-6, -4]$
3. $[-6, \infty)$ 4. $[-4, \infty)$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 1$ ในโจทย์จะได้ว่า $-2(1) - 9 \le |-1 + 3|$

เพราะว่า $x = 1$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

แทนค่า $x = -6$ ในโจทย์ $-2(-6) - 9 = 3 \le 3 = |-6 + 3|$

เพราะว่า $x = -6$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.



วิธีจริง $-2x - 9 \le |x + 3|$

กรณี 1 $x \le -3$

$$-2x - 9 \le |x + 3|$$
$$-2x - 9 \le -(x + 3)$$
$$-6 \le x$$

เพราะว่า $x \le -3$ และ $-6 \le x$ เพราะฉะนั้น $-6 \le x \le -3$

กรณี 2 $x > -3$

$$-2x - 9 \le |x + 3|$$
$$-2x - 9 \le x + 3$$
$$-3x \le 12$$
$$x \ge -4$$

เพราะว่า $x > -3$ และ $x \ge -4$เพราะฉะนั้น $x > -3$

เพราะฉะนั้นจากทั้ง 2 กรณี เซตคำตอบของอสมการ $-2x - 9 \le |x + 3|$ คือ $[-6, \infty)$

2. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรใช้การแทนค่าบางค่าช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่าง เซตของเศษที่เป็นไปได้ในการหาร $a^4 + b^4$ ด้วย 8 เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็มคือข้อใด

1. $\{0, 1, 2\}$ 2. $\{0, 1, 2, 3\}$
3. $\{0, 1, 4, 5\}$ 4. $\{0, 1, 3, 7\}$

การตัดตัวเลือก แทนค่า a, b บางค่าแล้วค่อย ๆ ตัดตัวเลือก

เลือก $a = 1, b = 1$

เพราะว่า $a^4 + b^4 = 2$ เพราะฉะนั้น $a^4 + b^4$ หารด้วย 8 เหลือเศษ 2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง พิจารณารูปแบบของจำนวนเต็มยกกำลัง 4 ทั้งกรณีจำนวนเต็มคู่และจำนวนเต็มคี่

เพราะว่า $(2n)^4 = 16n^4$ และ $(2n+1)^4 = 16n^4 + 24n^3 + 32n^2 + 8n + 1$

เพราะฉะนั้นทุกจำนวนเต็ม x จะได้ว่า 8 หาร x^4 เหลือเศษ 0 หรือ 1

เพราะฉะนั้น 8 หาร $a^4 + b^4$ หรือเศษ 0, 1 หรือ 2 เท่านั้น

3. เลือกตัวเลขที่เหมาะสมในโจทย์หรือตัวเลือกแทนค่าในสมการของโจทย์หรือตัวเลือกเพื่อช่วยตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง $\{-1\} \cup [1, \infty)$ เป็นเซตคำตอบของอสมการในข้อใด

1. $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ 2. $x^3 + x^2 \geq 0$

3. $(x+1)^2(1-x) \leq 0$ 4. $2 - x \leq \big|\,|x - 2| + 2\,\big|$

การตัดตัวเลือก จากเงื่อนไขตัวเลือก 1. $x^2 - 2x + 2 \geq 0$ พบว่า $x = 0$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

จากเงื่อนไขตัวเลือก 2. $x^3 + x^2 \geq 0$ พบว่า $x = 0$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

จากเงื่อนไขตัวเลือก 4. $2 - x \leq \big|\,|x - 2| + 2\,\big|$ พบว่า $x = 0$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง การทำข้อสอบจริงนักเรียนอาจโชคไม่ดี เพราะว่าต้องเสียเวลากับตัวเลือก 1. และ 2.

การหาเซตคำตอบของตัวเลือก 3. ทำได้ดังนี้ $(x + 1)^2(1 - x) \leq 0$

เมื่อ $x \neq -1$, $(x + 1)^2 \neq 0$; $1 - x \leq 0$

$1 \leq x$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid (x+1)^2(1-x) < 0\} = \{-1\} \cup [1, \infty)$

4. นำค่าที่โจทย์กำหนดไปแทนค่าในตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนด $|x + 4| < 5$ และ $|y - 5| < 4$ ข้อความใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $0 \leq |x + y| < 10$ 2. $0 < |x - y| < 18$

3. $0 \leq |x - y^2| < 90$ 4. $\left|\frac{x^2}{y^2}\right| < 1$

การตัดตัวเลือก เลือก $x = -8$ จะได้ว่า $|-8 + 4| = 4 < 5$ จริง

แทนค่า $x = -8$ ในทุกตัวเลือกจะได้ค่าตัวเลือกในเทอมของ y ดังนี้

1. $0 \leq |-8 + y| < 10$ 2. $0 < |-8 - y| < 18$

3. $0 \leq |-8 - y^2| < 90$ 4. $\left|\frac{64}{y^2}\right| < 1$

เมื่อ $y = 2$ จะได้ $|2 - 5| < 4$ จริง แต่ $\left|\frac{64}{y^2}\right| < 1$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น $x = -8$ และ $y = 2$ ทำให้เงื่อนไขของโจทย์เป็นจริงแต่ตัวเลือก 4. เป็นเท็จ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

วิธีจริง $|x + 4| < 5$ และ $|y - 5| < 4$

$-5 < x + 4 < 5$ และ $-4 < y - 5 < 4$

$-9 < x < 1$ และ $1 < y < 9$

เพราะฉะนั้น $-8 < x + y < 10$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. $0 \leq |x + y| < 10$ ถูกต้อง

เพราะว่า $-9 < x < 1$ และ $-9 < -y < -1$ เพราะฉะนั้น $-18 < x - y < 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. $0 < |x - y| < 18$ ถูกต้อง

เพราะว่า $-9 < x < 1$ และ $-81 < -y^2 < -1$ เพราะฉะนั้น $-90 \leq x - y^2 < 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. $0 \leq |x - y^2| < 90$ ถูกต้อง

2.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 2.1 อินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการคูณของ $p - \frac{1}{q}$ ตามลำดับคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1-pq}{q}$; $\frac{-q}{1-pq}$
2. $p + \frac{1}{q}$; $\frac{1}{p} - q$
3. $\frac{pq-1}{q}$; $\frac{q}{pq-1}$
4. $\frac{1-pq}{q}$; $\frac{q}{1-pq}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้อยู่ในรูปแบบโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร
เพราะฉะนั้นใช้การแทนค่าดีกว่า เลือกแทนค่า $p = 3, q = 1$ จะได้ $p - \frac{1}{q} = 3 - \frac{1}{1} = 2$
เพราะว่า 2 มีอินเวอร์สการบวกเป็น -2 และอินเวอร์สการคูณเป็น $\frac{1}{2}$
เพราะฉะนั้น แทนค่า $p = 3$ และ $q = 1$ ในตัวเลือกแต่ละตัวจะได้ว่า

1. $\frac{1-pq}{q} = \frac{1-(3)(1)}{(1)} = -2$ และ $\frac{-q}{1-pq} = \frac{-(1)}{1-(3)(1)} = \frac{1}{2}$

หมายเหตุ ขณะนี้ยังไม่ถือว่าตัวเลือก 1. เป็นคำตอบ เพราะว่าอาจจะเป็นจริงเมื่อ $p = 3$ และ $q = 1$ เท่านั้น

2. $p + \frac{1}{q} = 3 + \frac{1}{1} = 4 \neq -2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.
3. $\frac{pq-1}{q} = \frac{(3)(1)-1}{1} = 2 \neq -2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.
4. $\frac{1-pq}{q} = \frac{1-(3)(1)}{1} = -2$ และ $\frac{q}{1-pq} = \frac{1}{1-(3)(1)} = -\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง อินเวอร์สการบวกของ $p - \frac{1}{q}$ คือ $-(p - \frac{1}{q}) = \frac{1}{q} - p = \frac{1-pq}{q}$

อินเวอร์สการคูณของ $p - \frac{1}{q}$ คือ $(p-\frac{1}{q})^{-1} = (\frac{pq-1}{q})^{-1} = \frac{q}{pq-1} = \frac{-q}{1-pq}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ถูกต้อง

หมายเหตุ วิธีจริงยุ่งยากเพราะว่าเมื่อได้อินเวอร์สการบวกและการคูณแล้วต้องจัดรูปให้ตรงกับตัวเลือกอีก

ตัวอย่างที่ 2.2 เซตคำตอบของอสมการ $x^4 + x^3 - 6x^2 < 0$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $\{x \mid -3 < x < 2\}$
2. $\{x \mid -3 < x < 2$ และ $x \neq 0\}$
3. $\{x \mid x < -3$ หรือ $x > 2\}$
4. $\{x \mid -3 \leq x \leq 2$ และ $x \neq 0\}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ใช้วิธีเลือกค่า x ที่คิดเลขได้ง่าย ๆ และจำแนกตัวเลือกได้ก็จะทำให้ตัดตัวเลือกได้เร็วขึ้น เช่นจากโจทย์ $x = 0$ ไม่ได้ แต่ 0 อยู่ในเซตของตัวเลือก 1. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.
เพราะว่า $x = 1$ จะได้ $1 + 1 - 6 = -4 < 0$ เพราะฉะนั้น 1 ต้องอยู่ในเซตคำตอบ
เพราะว่า $x = 1$ ไม่อยู่ในตัวเลือก 3. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.
เลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือกได้ เช่นดูจากตัวเลือก 2. และ 4. จะเห็นว่า $x = 2$ จำแนกตัวเลือกได้
เพราะว่า $2^4 + 2^3 - 6(2^2) = 16 + 8 - 24 = 0 \odot 0$

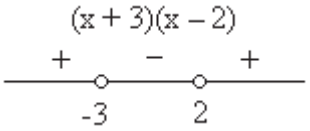
เพราะฉะนั้น 2 ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง $x^4 + x^3 - 6x^2 < 0$

$x^2(x^2 + x - 6) < 0$

$x^2(x + 3)(x - 2) < 0$

เพราะฉะนั้น $x^2 \neq 0$



เพราะฉะนั้น $(x + 3)(x - 2) < 0$

$-3 < x < 2$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบคือ $\{x \mid -3 < x < 2 \text{ และ } x \neq 0\}$

ตัวอย่างที่ 2.3 อสมการ $-14 < x - 1 < -2$ สามารถเขียนในรูปค่าสัมบูรณ์ได้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $|x + 7| < 6$
2. $|x + 7| > 6$
3. $|x - 7| < 6$
4. $|x - 7| > 6$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้วิธีแทนค่า x บางค่าที่เป็นจริงตามเงื่อนไขของโจทย์ เช่น $x = -2$ จะได้ $-14 < -2 - 1 = -3 < -2$ เพราะฉะนั้นเงื่อนไขของโจทย์ $x = -2$ ได้

แทนค่า $x = -2$ ในตัวเลือก

1. $|-2 + 7| = 5 _ 6$ เพราะฉะนั้น $x = -2$ ได้
2. $|-2 + 7| = 5 > 6$ เพราะฉะนั้น $x = -2$ ไม่ได้
3. $|-2 - 7| = 9 \not< 6$ เพราะฉะนั้น $x = -2$ ไม่ได้
4. $|-2 - 7| = 9 > 6$ เพราะฉะนั้น $x = -2$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

ต่อไปลองแทนค่าแบบย้อนกลับดูบ้างเช่นจากตัวเลือก 4. พบว่า $x = 20$ ทำให้ $|20 - 7| = 13 > 6$

แสดงว่า $x = 20$ เป็นสมาชิกของเซตในตัวเลือก 4. แต่ $20 - 1 = 19 \not< -2$

เพราะฉะนั้นในอสมการของโจทย์ $x = 20$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

หมายเหตุ คำถามของโจทย์ข้อนี้ความหมายที่แท้จริงคือเซตคำตอบของอสมการ $-14 < x - 1 < -2$ ตรงกับตัวเลือกใด เพราะว่า $-14 < x - 1 < -2$

$-13 < x < -1$

$x \in (-13, -1)$

จากตัวเลือก 1. $|x + 7| < 6$

$-6 < x + 7 < 6$

$-13 < x < -1$

$x \in (-13, -1)$

เพราะฉะนั้นการจำแนกคำถามจะทำให้ได้คำตอบเร็วขึ้น

วิธีจริง เพราะว่าตัวเลือกเป็นสิ่งที่แนะนำหรือชี้นำการคำนวณ เพราะฉะนั้นเราจึงจัดพจน์ของ $x - 1$ เป็น $x + 7$ หรือ $x - 7$ เท่านั้น จากอสมการ $-14 < x - 1 < -2$

เพราะฉะนั้น $-14 + 8 < x - 1 + 8 < -2 + 8$

$-6 < x + 7 < 6$

เพราะฉะนั้น $|x + 7| < 6$ ตรงกับตัวเลือก 1.

ตัวอย่างที่ 2.4 เซตคำตอบของอสมการ $||12 - x| - 4| < 2$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $(6, 10)$
2. $(14, 18)$
3. $[5, 8] \cup (15, 18)$
4. $(6, 10) \cup (14, 18)$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สำหรับข้อสอบที่ถามแบบนี้จะใช้วิธีทำโดยการนำค่าในตัวเลือกมาแทนในโจทย์ หรือนำค่า x ที่สอดคล้องกับโจทย์ไปตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างเช่น $x = 7 \in (6, 10)$ ทำให้ $||12 - 7| - 4| = ||5| - 4| = 1 < 2$

แสดงว่า $x = 7$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

หมายเหตุ ถ้าเราคิดถึงค่า x ที่จำแนกตัวเลือกได้ด้วยก็จะให้ได้คำตอบเร็วขึ้น

เช่น $x = 9$ จะได้ว่า $||12 - 9| - 4| = ||3| - 4| = 1 < 2$ แสดงว่า 9 ต้องอยู่ในเซตคำตอบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

ต่อไปต้องเลือกให้ดี ๆ เช่น $15 \notin (6, 10)$ แต่ $15 \in (6, 10) \cup (14, 18)$

เพราะฉะนั้นลองแทนค่า $x = 15$ ในโจทย์ดีกว่า $||12 - 15| - 4| = ||-3| - 4| = 1 < 2$

แสดงว่าเซตคำตอบต้องมี $x = 15$ เป็นสมาชิก

เพราะว่า 15 ไม่เป็นสมาชิกของตัวเลือก 1. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง $||12 - x| - 4| < 2$

$-2 < |12 - x| - 4 < 2$

$2 < |12 - x| < 6$

กรณีที่ 1. $x < 12$ จะได้ว่า $|12 - x| = 12 - x$

เพราะฉะนั้น $2 < |12 - x| < 6$

$2 < 12 - x < 6$

$-10 < -x < -6$

$6 < x < 10$

เพราะฉะนั้น $x \in (-\infty, 12) \cap (6, 10) = (6, 10)$

กรณีที่ 2. $x \geq 12$ จะได้ว่า $|12 - x| = -(12 - x)$

เพราะฉะนั้น $2 < |12 - x| < 6$

$2 < -(12 - x) < 6$

$$2 < -12 + x < 6$$

$$14 < x < 18$$

เพราะฉะนั้น $x \in [12, \infty) \cap (14, 18) = (14, 18)$

เพราะฉะนั้นจากทั้ง 2 กรณีจะได้เซตคำตอบของอสมการ $\big|\,|12 - x| - 4\,\big| < 2$ คือ $(6, 10) \cup (14, 18)$

ตัวอย่างที่ 2.5 เซตคำตอบของสมการ $|10 + 3x - x^2| = x^2 - 3x - 10$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $(-\infty, -2] \cup [5, \infty)$
2. $(-2, 5)$
3. $[-2, 5]$
4. $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก นำค่าที่จำแนกตัวเลือกได้เช่น $x = 5$ แทนค่าในสมการของโจทย์จะได้

$|10 + 3(5) - 5^2| = |10 + 15 - 25| = 0$ และ $5^2 - 3(5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 5$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ แต่ตัวเลือก 2. และ ตัวเลือก 4. ไม่มี 5 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ต่อไปเลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือก 1. และ 3. ได้เช่น $x = 0$

แทนค่า $x = 0$ ในสมการ $|10 + 3x - x^2| = x^2 - 3x - 10$

เพราะว่า $|10 + 3(0) - (0)^2| = 10$

แต่ $(0)^2 - 3(0) - 10 = -10$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ ไม่ได้ เพราะว่าตัวเลือก 3. มี 0 เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง จากเหตุผลของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า $|y| = -y$ ก็ต่อเมื่อ $y \le 0$

ให้ $y = 10 + 3x - x^2$ เพราะฉะนั้น $-y = x^2 - 3x - 10$

เพราะว่า $|10 + 3x - x^2| = x^2 - 3x - 10 = -(10 + 3x - x^2)$ เพราะฉะนั้น $|y| = -y$

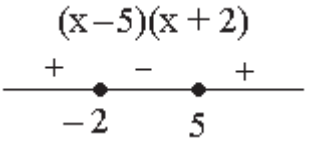
เพราะฉะนั้น $y \le 0$

เพราะฉะนั้น $10 + 3x - x^2 \le 0$

$$x^2 - 3x - 10 \ge 0$$

$$(x - 5)(x + 2) \ge 0$$

$$x \in (-\infty, -2] \cup [5, \infty)$$



เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของอสมการ $|10 + 3x - x^2| = x^2 - 3x - 10$ คือ $(-\infty, -2] \cup [5, \infty)$

ตัวอย่างที่ 2.6 ถ้า $|x - 7| < 8$ และ $|y - 7| < 5$ แล้วตัวเลือกใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $|x - y| > 3$
2. $|x - y| > 13$
3. $|x - y| < 13$
4. $|x - y| < 3$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เลือกตัวเลขที่ให้คิดเลขได้ง่าย ๆ เช่น ลองแทนค่า $x = 7$ และ $y = 7$ ทำให้

$|x - 7| = |7 - 7| = 0 < 8$ และ $|y - 7| = |7 - 7| = 0 < 5$

เพราะฉะนั้น $|x - y| = |7 - 7| = 0$ ได้ แต่จากตัวเลือก 1. $|x - y| = |7 - 7| = 0$ ไม่มากกว่า 3

และตัวเลือก 2. $|x - y| = |7 - 7| = 0$ ไม่มากกว่า 13
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

ต่อไปใช้เหตุผลทางด้านตรรกศาสตร์พบว่า ถ้า $|x - y| < 3$ แล้ว $|x - y| < 13$
เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

แต่ถ้ายังไม่มั่นใจลองเลือก $x = 1, y = 6$ จะได้ว่า $|1 - 7| = 6 < 8$ และ $|6 - 7| = 1 < 5$

เพราะว่า $|x - y| = |1 - 6| = 5$ ไม่น้อยกว่า 3 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

หมายเหตุ ถ้านักเรียนโชคดีเลือก $x = 1, y = 6$ ตั้งแต่แรกก็จะตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง

$$|x - 7| < 8 \quad \text{และ} \quad |y - 7| < 5$$
$$-8 < x - 7 < 8 \quad \text{และ} \quad -5 < y - 7 < 5$$
$$-1 < x < 15 \quad \text{และ} \quad 2 < y < 12$$
$$-1 < x < 15 \quad \text{และ} \quad -12 < -y < -2$$

เพราะฉะนั้น
$$(-1) + (-12) < x - y < (15) + (-2)$$
$$-13 < x - y < 13$$

เพราะฉะนั้น
$$|x - y| < 13$$

ตัวอย่างที่ 2.7 เซตคำตอบของอสมการ $|x - 1||x - 2| \geq |x + 2|$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$
2. $(0, 4)$
3. $[-4, 5)$
4. $(0, \infty) \cup (-5, -4)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากโจทย์ $x = 0$ ทำให้ $|0 - 1||0 - 2| = 2 \geq |0 + 2|$
เพราะฉะนั้น $x = 0$ ได้ แต่เมื่อดูจากตัวเลือก 2. และ 4. จะเห็นว่า
ตัวเลือก 2. $0 \notin (0, 4)$ และ ตัวเลือก 4. $0 \notin (0, \infty) \cup (-5, -4)$
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.
ต่อไปเลือก $x = 1$ เพื่อจะจำแนกตัวเลือก 1. และ 3. ได้
เพราะว่า $|1 - 1||1 - 2| = 0 \neq 3 = |1 + 2|$
เพราะฉะนั้นเงื่อนไขของโจทย์ $x = 1$ ไม่ได้
เพราะฉะนั้น $x = 1$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ เพราะว่า $1 \in [-4, 5)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง โดยการแจกแจงกรณีตามค่าของ x

กรณีที่ 1. $-\infty < x \leq -2$ จากอสมการ $|x - 1||x - 2| \geq |x + 2|$

$$(-(x - 1))(-(x - 2)) \geq -(x + 2)$$
$$(x - 1)(x - 2) \geq -x - 2$$
$$x^2 - 3x + 2 \geq -x - 2$$
$$x^2 - 2x + 4 \geq 0$$