

คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป

Maxima

wxMaxima

**CALCULUS
LINEAR ALGEBRA
NUMBER THEORY
DIFFERENTIAL EQUATIONS
PROBABILITY AND STATISTICS**

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป

Maxima

wxMaxima

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป Maxima และ wxMaxima

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : พฤษภาคม พ.ศ. 2561

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-468-445-4

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

GPL license

Computational Software

Maxima & wxMaxima

 Download ได้ที่

 andrejv.github.io/wxmaxima/index.html

wxmaxima

wxmaxima is a document based interface for the computer algebra system [Maxima](#). wxMaxima provides menus and dialogs for many common maxima commands, autocompletion, inline plots and simple animations. wxMaxima is distributed under the [GPL license](#).

คำนำ

โปรแกรม Maxima และ wxMaxima เป็นโปรแกรมคำนวณที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานทางด้านการเรียนการสอนหลายวิชาเช่น Calculus, Differential Equation, Probability and Statistics, Numerical Analysis, Linear Algebra และ Number Theory

ในหนังสือเล่มนี้จะแนะนำความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม Maxima และ wxMaxima ต่อไปจึงเป็นการใช้งานเบื้องต้นของโปรแกรม การเขียนกราฟและการปรับแต่งภาพให้สวยงาม การใช้ฟังก์ชันสำเร็จรูปของโปรแกรม Maxima และ wxMaxima การเขียนโปรแกรมโดยใช้คำสั่งของ Maxima และ wxMaxima และประยุกต์ใช้งานคำนวณทั้งระดับมัธยมศึกษาและระดับอุดมศึกษา

การใช้คู่มือเล่มนี้เพื่อศึกษาการใช้งานโปรแกรม Maxima และ wxMaxima แนะนำให้ฝึกพิมพ์คำสั่งตามตัวอย่างเมื่อได้ผลถูกต้องตามหนังสือแล้วจึงดัดแปลงสูตรหรือตัวแปรเพื่อให้เข้าใจมากขึ้น

โปรแกรม Maxima และ wxMaxima download ได้ที่

<http://andrejv.github.io/wxmaxima/download.html>

ตัวอย่างโปรแกรมคำนวณในหนังสือเล่มนี้ download ได้ที่

http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/2301286/datasps/Maxima_book.rar

สุดท้ายนี้หวังว่าผู้อ่านทุกท่านจะได้รับประโยชน์จากหนังสือเล่มนี้ และสามารถนำโปรแกรม Maxima และ wxMaxima ไปประยุกต์ใช้งานในสาขาต้องการได้

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1 ความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม Maxima และ wxMaxima 1 – 56

1.1	การคำนวณเบื้องต้น บวก ลบ คูณ หาร และเลขยกกำลัง	2
1.2	สามารถกำหนดการแสดงผลการคำนวณให้เป็นทศนิยมได้หลายตำแหน่ง	3
1.3	มีฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	4
1.4	มีความสามารถในการกำหนดสูตรของฟังก์ชันเพื่อใช้งานได้	6
1.5	สามารถกำหนดเซตของจำนวนและคำนวณสมาชิกภายในเซตได้	7
1.6	สามารถเปลี่ยนหน่วยการคำนวณเป็นองศาและเรเดียน	8
1.7	หาผลเฉลี่ยของสมการ mod n และระบบสมการ modulo	9
1.8	สามารถเขียนกราฟได้หลายรูปแบบ	10
1.9	การคำนวณในรูปแบบเลขฐาน 10 ฐาน 2, 4, 8, 16	21
1.10	การคำนวณในรูปแบบเวกเตอร์	22
1.11	การคำนวณในรูปแบบเมทริกซ์	24
1.12	การคำนวณจำนวนเชิงซ้อน	25
1.13	การหาผลบวกอนุกรม อนุกรมกำลัง และผลคูณของลำดับ	26
1.14	การคำนวณค่าสถิติเบื้องต้น	27
1.15	กราฟ Box plot Histogram, Stem and leaf, pie chart และการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลในรูปแบบ $y = a + bx$	28
1.16	สามารถจัดรูปพีชคณิต แยกตัวประกอบ และกระจายพหุนาม	35
1.17	สามารถหาอนุพันธ์และอนุพันธ์ย่อย	36
1.18	สามารถหาอินทิกรัลจำกัดเขตและอินทิกรัลไม่จำกัดเขต	37
1.19	สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้	38
1.20	สามารถนำคำสั่งต่าง ๆ มาเขียนเป็นโปรแกรมได้	39
1.21	สามารถหารากของสมการ $f(x) = 0$	40
1.22	สามารถหาผลเฉลี่ยของระบบสมการ	41
1.23	สามารถหาผลเฉลี่ยของสมการเชิงอนุพันธ์	42
1.24	มีฟังก์ชันเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เช่น ห.ร.ม. ค.ร.น. และแยกตัวประกอบ	44
1.25	สามารถหาผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงลาปลาซผกผันได้	45

1.26 สามารถหาอนุกรมกำลังที่มีผลบวกเป็น $f(x)$ ได้	46
1.27 สามารถหาอนุสเกี้ยนของฟังก์ชัน	47
1.28 การแจกแจงปกติมาตรฐานและการแจกแจงทวินาม	48
1.29 ทดสอบสมมติฐานและหาช่วงความเชื่อมั่น	50
1.30 สามารถหาเกรเดียนท์ เคลร์ และไดเวอร์เจนต์ของฟังก์ชันได้	51
1.31 การติดตั้งโปรแกรม Maxima และ wxMaxima	53

บทที่ 2	การใช้โปรแกรม Maxima และ wxMaxima	57 – 114
----------------	--	-----------------

2.1 การเรียกโปรแกรม Maxima และ wxMaxima ขึ้นมาใช้งาน	57
2.2 การคำนวณโดยใช้โปรแกรม Maxima และ wxMaxima	66
2.3 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน	72
2.4 การกำหนดค่าและการคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์	76
2.5 การกำหนดค่าและการคำนวณเกี่ยวกับเวกเตอร์	79
2.6 การหาค่าสถิติเบื้องต้น	81
2.7 การเขียนแผนภาพการกระจายและหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน	84
2.8 การคำนวณค่าเกี่ยวกับผลบวกในรูปแบบ $\sum$	87
2.9 การคำนวณค่าอินทิกรัล $\int_a^b f(x) dx$ และ $\int f(x) dx$ และอินทิกรัลซ้อน	88
2.10 การคำนวณค่าอนุพันธ์ $\frac{d}{dx} f(x)$, $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ และอนุพันธ์ย่อย	89
2.11 การกำหนดหน่วยองศาให้กับฟังก์ชันตรีโกณมิติ	90
2.12 การคำนวณในรูปแบบของเลขฐาน	91
2.13 การหาผลบวกในรูปแบบ $\sum_{i=1}^n x_i$, $\sum_{i=1}^n y_i$, $\sum_{i=1}^n x_i^2$, $\sum_{i=1}^n y_i^2$, $\sum_{i=1}^n x_i y_i$	92
2.14 การสร้างตารางฟังก์ชัน	94
2.15 การคำนวณค่าเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน	96
2.16 การหารากของ $f(x) = 0$	97
2.17 การหาผลเฉลยของระบบสมการ	98
2.18 การคำนวณค่า ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ และ ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	99

2.19 การคำนวณที่ให้ผลลัพธ์เป็นสูตร สัญลักษณ์ หรือเศษส่วนอย่างต่ำ	100
2.20 การหาพหุนามเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน	103
2.21 การหาผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงลาปลาซผกผัน	104
2.22 การคำนวณเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม	105
2.23 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์และระบบสมการเชิงอนุพันธ์	108
2.24 ฟังก์ชันเกี่ยวกับจำนวนเต็มเช่น ห.ร.ม. ค.ร.น. การแยกตัวประกอบ	112
2.25 สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการ mod n	113

บทที่ 3	การเขียนกราฟ	115 – 208
----------------	---------------------	------------------

3.1 การเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ	121
3.2 การเขียนกราฟของแผนภาพการกระจายของข้อมูล	123
3.3 การเขียนกราฟของสมการพาราเมตริก	134
3.4 การเขียนกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว	137
3.5 การเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ	141
3.6 การเขียนกราฟของฟังก์ชันที่นิยามสูตรต่างกันในแต่ละช่วง	153
3.7 คำสั่งที่ใช้ในการปรับปรุงรูปแบบของกราฟ	156
3.8 การเขียนกราฟของฟังก์ชันที่นิยามโดยนัยหรือกราฟของความสัมพันธ์	189
3.9 การเขียนกราฟของสมการและการแรเงาในบริเวณที่ต้องการ	193
3.10 การเขียนกราฟของพื้นผิว	199
3.11 กราฟของการแจกแจงความถี่ของข้อมูล	204

บทที่ 4	คำสั่งและการใช้งานเบื้องต้น	209 – 264
----------------	------------------------------------	------------------

4.1 การกำหนดผลการคำนวณให้แสดงผลลัพธ์ตามที่ต้องการ	209
4.2 การนำผลการคำนวณจาก Line Output เก้ามาใช้ใน Line Input ใหม่	212
4.3 การ copy สูตร และ การ paste สูตร	213
4.4 การบันทึกแฟ้ม Maxima	218
4.5 การเปิดแฟ้ม Maxima ชนิด *.wxmx	212
4.6 ฟังก์ชันสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์	228

บทที่ 5	การเขียนโปรแกรม	265 – 290
5.1	การหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อกำหนดความยาวของด้าน a, b, c	266
5.2	การหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อกำหนดพิกัดจุดยอด 3 จุด	272
5.3	การหารากของสมการ $f(x) = 0$	286
5.4	การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีของออยเลอร์	290
บทที่ 6	การคำนวณระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย	291 – 358
6.1	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 1	291
6.2	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 2	298
6.3	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 3	321
6.4	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 4	339
6.5	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 5	342
6.6	เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 6	351
6.7	Maxima กับการเฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์	357
บทที่ 7	การคำนวณระดับอุดมศึกษา	359 – 456
7.1	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับแคลคูลัส	359
7.2	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์	389
7.3	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลข	393
7.4	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้น	4000
7.5	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับความน่าจะเป็นและสถิติ	404
7.6	เสริมการคำนวณเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ขั้นสูง	445
บทที่ 8	การวิเคราะห์ข้อมูลทางด้านสถิติ	457 – 510
8.1	สถิติเบื้องต้น	551
8.2	การหาช่วงความเชื่อมั่นของค่าพารามิเตอร์	459
8.3	การทดสอบสมมติฐาน	488
8.4	สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์และการถดถอยเชิงเส้น	501

บทที่ 1

ความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม

Maxima และ wxMaxima

โปรแกรม Maxima และ wxMaxima เป็นโปรแกรมช่วยในการคำนวณ สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้ในการเรียนการสอนหลายวิชาเช่น Calculus Probability and Statistics Linear Algebra Differential Equations ในบทนี้จะนำความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม Maxima ที่คำนวณได้มาให้ดูก่อนเพื่อผู้อ่านจะได้เห็นความสามารถทางการคำนวณที่สำคัญของโปรแกรม Maxima ส่วนของการพิมพ์คำสั่ง การเข้าสู่โปรแกรม Maxima และ wxMaxima และการประยุกต์ใช้งานจะกล่าวในบทต่อไป

เนื่องจากลักษณะการทำงานของโปรแกรม Maxima และ wxMaxima มีบรรทัดของคำสั่งที่เราต้องพิมพ์คำสั่งของการคำนวณเข้าไปเรียกว่า Line Input (%ik) ...

โปรแกรม Maxima และ wxMaxima จึงจะแสดงผลการคำนวณในบรรทัดถัดไปเรียกว่า Line Output (%ok)

ดังนั้นการยกตัวอย่างความสามารถของโปรแกรมจึงขอแสดงผลการคำนวณที่ปรากฏบนจอภาพซึ่งมีทั้งบรรทัด

Line Input (%ik)

และ Line Output (%ok)

มาให้เห็นพร้อมกัน ตัวอย่างเช่น

(%i1)	1+2;
(%o1)	3
(%i2)	(7+4)·(7-4);
(%o2)	33
(%i3)	sqrt(6.25);
(%o3)	2.5
(%i4)	2.5^2;
(%o4)	6.25

1.1 การคำนวณเบื้องต้น บวก ลบ คูณ หาร และเลขยกกำลัง

(%i1) $3.25+16.5;$

(%o1) 19.75

(%i2) $7.5-3.25;$

(%o2) 4.25

(%i3) $12\cdot3;$

(%o3) 36

(%i4) $3.5/2;$

(%o4) 1.75

(%i5) $2.5^2;$

(%o5) 6.25

(%i6) $(2^2+3\cdot4)^{0.5};$

(%o6) 4.0

(%i7) $22/7;$

(%o7) $\frac{22}{7}$

(%i8) $22.0/7;$

(%o8) 3.142857142857143

(%i9) $(2^3)^4;$

(%o9) 4096

(%i10) $((3/7)+(4/13))/(2/3+4/11);$

(%o10) $\frac{2211}{3094}$

หมายเหตุ

1. ตัวเลขในสูตรคำนวณเป็นจำนวนเต็ม การแสดงผลจะแสดงค่าเป็นรูปแบบเศษส่วนอย่างต่ำ
2. ตัวเลขในสูตรคำนวณเป็นจำนวนจริง (ตัวเลขแบบมีทศนิยม) การแสดงผลจะแสดงค่าเป็นเลขทศนิยม

1.2 สามารถกำหนดการแสดงผลการคำนวณให้เป็นทศนิยมได้หลายตำแหน่ง

(%i1)	22.0/7;	
(%o1)	3.142857142857143	(%i1) แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 16 ตัว
(%i2)	fpprintprec:10;	
(fpprintprec)	10	(%i2) กำหนดให้แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 10 ตัว
(%i3)	22.0/7;	
(%o3)	3.142857143	(%o3) แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 10 ตัว
(%i4)	fpprintprec:4;	
(fpprintprec)	4	(%i4) กำหนดให้แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 4 ตัว
(%i5)	22.0/7;	
(%o5)	3.143	(%o5) แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 4 ตัว
(%i6)	fpprintprec:16;	
(fpprintprec)	16	(%i6) กำหนดให้แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 16 ตัว
(%i7)	20^15.5;	
(%o7)	1.465429509734267 10 ²⁰	(%o7) แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 16 ตัว
(%i8)	fpprintprec:12;	
(fpprintprec)	12	(%i8) กำหนดให้แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 12 ตัว
(%i9)	20^15.5;	
(%o9)	1.46542950973 10 ²⁰	(%o9) แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 12 ตัว
(%i10)	fpprintprec:4;	
(fpprintprec)	4	(%i10) กำหนดให้แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 4 ตัว
(%i11)	20^15.5;	
(%o11)	1.465 10 ²⁰	(%o11) แสดงตัวเลขนัยสำคัญ 4 ตัว

หมายเหตุ เปิดเครื่องครั้งแรกโปรแกรม Maxima จะแสดงตัวเลขนัยสำคัญ 16 ตัว

1.3 มีฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันลอการิทึม และฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

(%i1)	<code>numer:false;</code>	
(numer)	false	(%i1) กำหนดให้การแสดงผลเป็นสูตรหรือสัญลักษณ์
(%i2)	<code>%pi;</code>	
(%o2)	π	(%o2) %pi คือค่า π
(%i3)	<code>numer:true;</code>	
(numer)	true	(%i3) กำหนดให้การแสดงผลเป็นเลขทศนิยม
(%i4)	<code>%pi;</code>	
(%o4)	3.141592653589793	(%o4) แสดงผลเป็นเลขทศนิยม ซึ่งเป็นผลจาก (%i3)
(%i5)	<code>sin(%pi/4);</code>	
(%o5)	0.7071067811865475	(%o5) แสดงผลเป็นเลขทศนิยม ซึ่งเป็นผลจาก (%i3)
(%i6)	<code>numer:false;</code>	
(numer)	false	(%i6) กำหนดให้การแสดงผลเป็นสูตรหรือสัญลักษณ์
(%i7)	<code>sin(%pi/4);</code>	
(%o7)	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	(%o7) แสดงผลเป็นสัญลักษณ์ ซึ่งเป็นผลจาก (%i6)
(%i8)	<code>cos(%pi/6);</code>	
(%o8)	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	(%o8) แสดงผลเป็นสัญลักษณ์ ซึ่งเป็นผลจาก (%i6)
(%i9)	<code>numer:true;</code>	
(numer)	true	(%i9) กำหนดให้การแสดงผลเป็นเลขทศนิยม
(%i10)	<code>cos(%pi/6);</code>	
(%o10)	0.8660254037844387	(%o10) แสดงผลเป็นเลขทศนิยม ซึ่งเป็นผลจาก (%i9)

หมายเหตุ

1. %pi คือ π
2. numer:true กำหนดให้แสดงผลเป็นจำนวนทศนิยม
3. numer:false กำหนดให้แสดงผลเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ หรือ สูตร หรือ สัญลักษณ์

(%i1) `numer:false;`

(numer) `false`

(%i1) กำหนดให้การแสดงผลเป็นสูตรหรือสัญลักษณ์

(%i2) `%e;`

(%o2) `%e`

(%i3) `%e^2;`

(%o3) `%e2`

(%i4) `numer:true;`

(numer) `true`

(%i4) กำหนดให้การแสดงผลเป็นเลขทศนิยม

(%i5) `%e^1;`

(%o5) `2.718281828459045`

(%i6) `%e^2;`

(%o6) `7.38905609893065`

(%i7) `exp(1);`

(%o7) `2.718281828459045`

(%i8) `exp(2);`

(%o8) `7.38905609893065`

(%i9) `log(2);`

(%o9) `0.6931471805599453`

(%i10) `log(10);`

(%o10) `2.302585092994046`

(%i11) `log(%e);`

(%o11) `1.0`

หมายเหตุ

1. `%e` คือจำนวน $e = 2.718281828459045$
2. `exp(x)` คือ e^x
3. `log(x)` คือลอการิทึมฐาน e ของ x

1.4 มีความสามารถในการกำหนดสูตรของฟังก์ชันเพื่อใช้งานได้

```
(%i1)  f(x):=4+2·x+x^2;
(%o1)  f(x) := 4 + 2 x + x^2

(%i2)  f(1);
(%o2)  7

(%i3)  for x:0 thru 4 do print(x," ",f(x));
0      4
1      7
2      12
3      19
4      28
(%o3)  done

(%i4)  C(n,r):=n!/(r!·(n-r)!);
(%o4)  C(n,r) := 
$$\frac{n!}{r! (n-r)!}$$


(%i5)  C(5,2);
(%o5)  10

(%i6)  b(x,n,p):=(n!/(x!·(n-x)!))·p^x·(1-p)^(n-x);
(%o6)  b(x,n,p) := 
$$\frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$


(%i7)  b(0,5,0.25);
(%o7)  0.2373046875

(%i9)  print("x"," ", "P(X = x)")$
      for x:0 thru 5 do print(x," ",b(x,5,0.25));
x      P(X = x)
0      0.2373046875
1      0.3955078125
2      0.263671875
3      0.087890625
4      0.0146484375
5      9.765625 10-4
(%o9)  done
```

หมายเหตุ $f(x) := \dots$ ใช้กำหนดสูตรของฟังก์ชัน

1.5 สามารถกำหนดเซตของจำนวนและคำนวณสมาชิกภายในเซตได้

(%i1) $x:[2,5,7,12];$

(x) $[2, 5, 7, 12]$

(%i2) $x^2;$

(%o2) $[4, 25, 49, 144]$

(%i3) $x^3;$

(%o3) $[8, 125, 343, 1728]$

(%i4) $2 \cdot x + 1;$

(%o4) $[5, 11, 15, 25]$

(%i5) $y:[1/2, 1/3, 1/4];$

(y) $[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}]$

(%i6) $y, \text{numer};$

(%o6) $[0.5, 0.3333333333333333, 0.25]$

(%i7) $8 \cdot y + 4;$

(%o7) $[8, \frac{20}{3}, 6]$

(%i8) $8 \cdot y + 4, \text{numer};$

(%o8) $[8.0, 6.666666666666666, 6.0]$

(%i9) $w:[2,5,7,10];$

(w) $[2, 5, 7, 10]$

(%i10) $2^w;$

(%o10) $[4, 32, 128, 1024]$

หมายเหตุ เซตของตัวเลขเป็นชนิดของตัวแปรแบบหนึ่งใน Maxima ซึ่งเรียกว่าตัวแปรแบบ List

สำหรับตัวแปรแบบ List การคำนวณต่าง ๆ จะมีผลกับสมาชิกทุกตัวในตัวแปร List และเราสามารถ

อ้างอิงสมาชิกของตัวแปรใน List ได้

(%i11) $x:[3,7,12,15,29];$

(x) $[3, 7, 12, 15, 29]$

(%i12) $x[1];$

(%o12) 3

1.6 สามารถเปลี่ยนหน่วยการคำนวณเป็นองศาและเรเดียน

```
(%i1) numer:false;
(%) false

(%i2) sin(60);
(%) sin(60)

(%i3) degree:%pi/180;
(%)  $\frac{\pi}{180}$ 

(%i4) sin(60*degree);
(%)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 

(%i5) cos(60*degree);
(%)  $\frac{1}{2}$ 

(%i6) tan(45*degree);
(%) 1

(%i7) atan(1);
(%)  $\frac{\pi}{4}$ 

(%i8) atan(1)/degree;
(%) 45

(%i9) asin(-1);
(%)  $-\frac{\pi}{2}$ 

(%i10) asin(-1)/degree;
(%) -90
```

หมายเหตุ 1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติใน Maxima จะใช้หน่วยของมุมเป็นเรเดียน

2. degree มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{180}$ ช่วยในการเปลี่ยนหน่วยของมุมระหว่างเรเดียนกับองศา

3. การเปลี่ยนหน่วยของ Input ให้พิมพ์ *degree ต่อท้ายตัวเลขหรือสูตรที่ต้องการคำนวณ

4. การเปลี่ยนหน่วยของ Output ให้พิมพ์ /degree ต่อท้ายตัวเลขหรือสูตรที่ต้องการคำนวณ

1.7 หาผลเฉลยของสมการ mod n และระบบสมการ modulo

```
(%i1) mod(12,5);
```

```
(%o1) 2
```

```
(%i2) chinese([2],[5]);
```

```
(%o2) 2
```

```
(%i3) chinese([1,1],[2,3]);
```

```
(%o3) 1
```

```
(%i4) chinese([2,3,4],[5,7,13]);
```

```
(%o4) 17
```

```
(%i5) chinese([1,2,3,4],[5,7,13,17]);
```

```
(%o5) 1381
```

หมายเหตุ $\text{mod}(a, n)$ = เศษเหลือจากการหาร a ด้วย n

(%i1-%o1) เศษเหลือจากการหาร 12 ด้วย 5 คือ 2

(%i2-%o2) ผลเฉลยของ $x \equiv 2 \pmod{5}$ คือ $x = 2$

(%i3-%o3) ผลเฉลยของระบบสมการ $x \equiv 1 \pmod{2}$

$$x \equiv 1 \pmod{3}$$

คือ $x = 1$

(%i4-%o4) ผลเฉลยของระบบสมการ $x \equiv 2 \pmod{5}$

$$x \equiv 3 \pmod{7}$$

$$x \equiv 4 \pmod{13}$$

คือ $x = 17$

(%i5-%o5) ผลเฉลยของระบบสมการ $x \equiv 1 \pmod{5}$

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

$$x \equiv 3 \pmod{13}$$

$$x \equiv 4 \pmod{17}$$

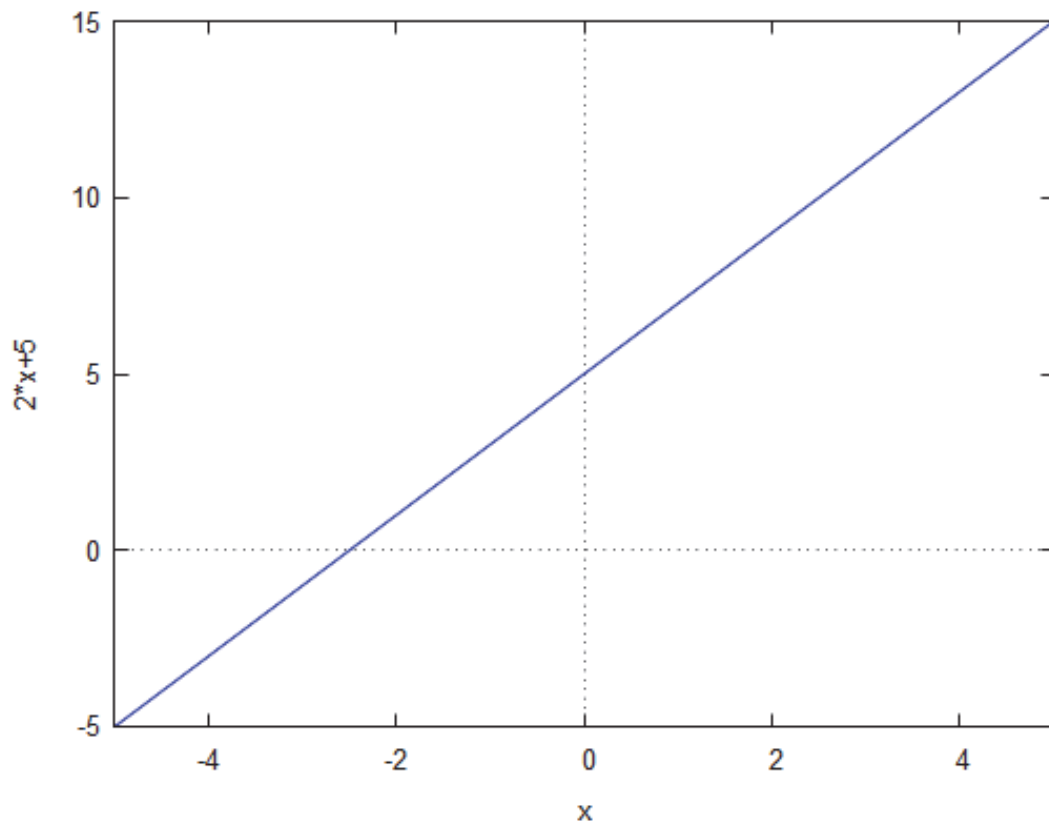
คือ $x = 1381$

1.8 สามารถเขียนกราฟได้หลายรูปแบบ

1.8.1 กราฟในระบบพิกัดฉาก

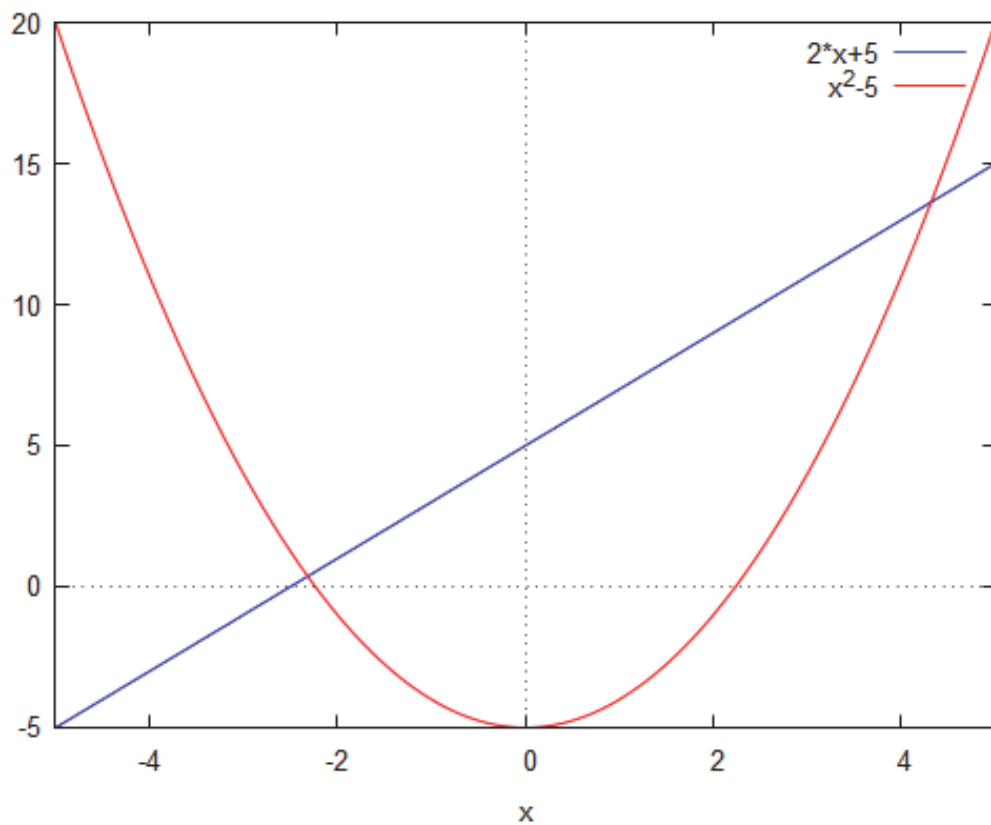
(%i1) `wxplot2d([2*x+5],[x,-5,5]);`

(%t1)



(%i2) `wxplot2d([2*x+5,x^2-5],[x,-5,5]);`

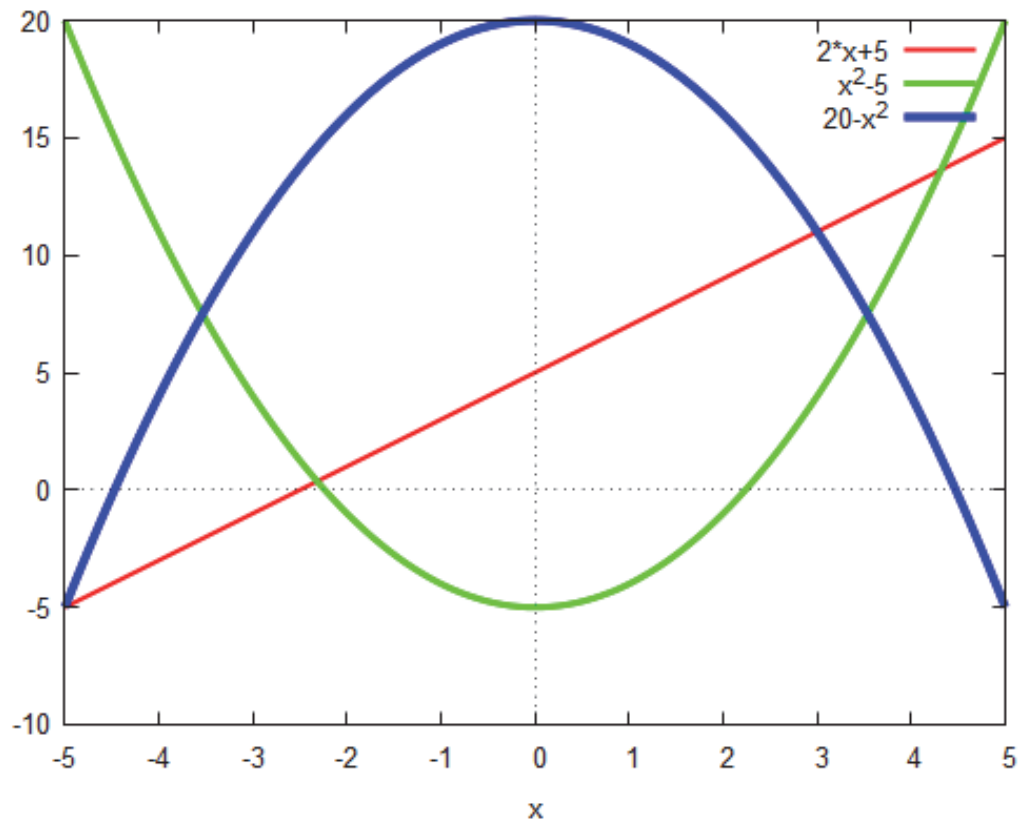
(%t2)



การเขียนกราฟโดยใช้คำสั่ง wxplot2d พร้อมการปรับแต่ง

```
(%i3) wxplot2d([2*x+5,x^2-5,20-x^2],[x,-5,5],[y,-10,20],  
[xtics,1],[ytics,5],  
[color,red,green,blue],  
[style,[lines,2],[lines,3],[lines,4]],  
[axes,true]  
);
```

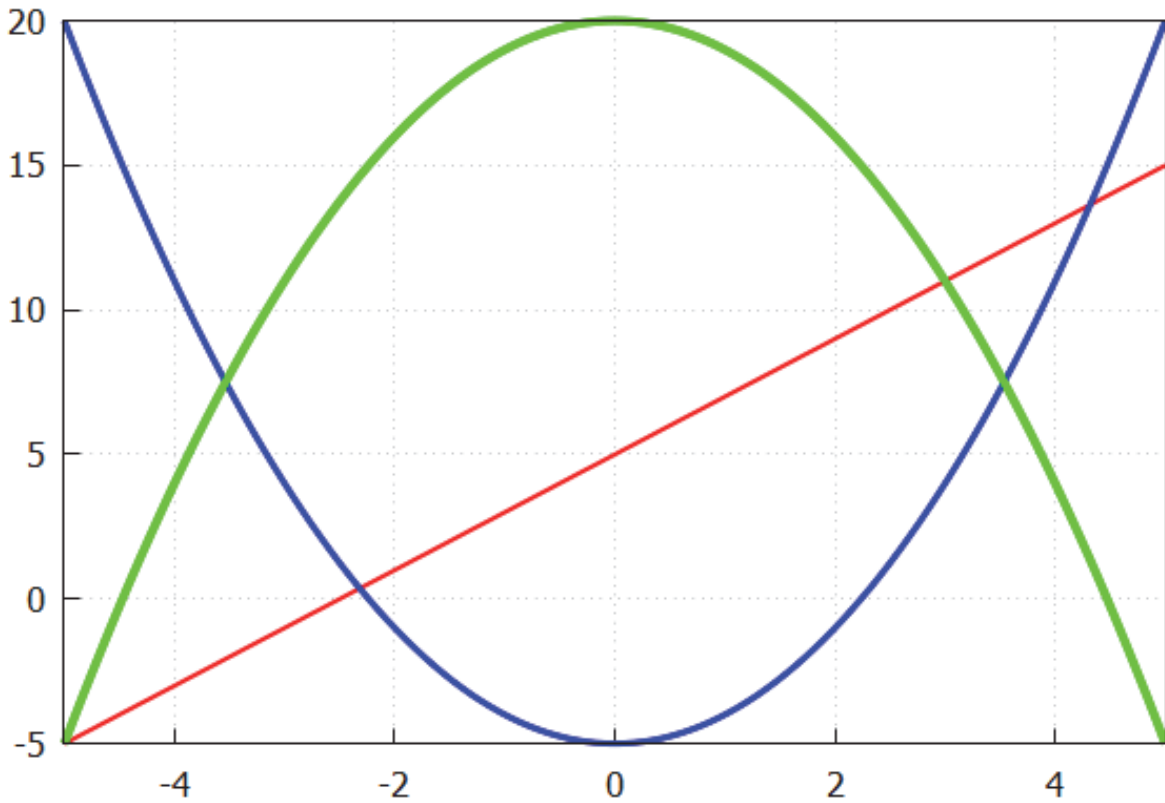
(%t3)



การเขียนกราฟโดยใช้คำสั่ง wxdraw2d

```
(%i5) wxdraw2d(grid=true,  
  line_width=2,color=red,explicit(2·x+5,x,-5,5),  
  line_width=3,color=blue,explicit(x^2-5,x,-5,5),  
  line_width=4,color=green,explicit(20-x^2,x,-5,5)  
)$
```

(%t5)



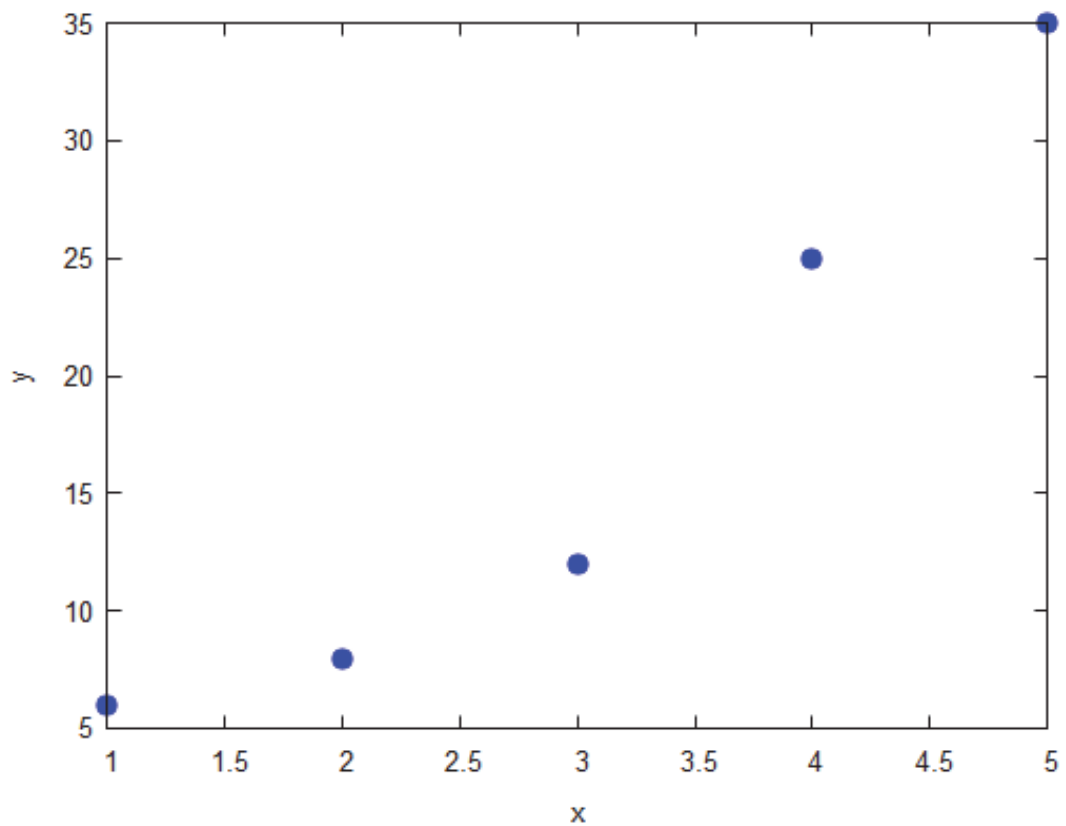
1.8.2 กราฟแผนภาพการกระจายของข้อมูล

```
(%i1) XY:[[1,6],[2,8],[3,12],[4,25],[5,35]];
```

```
(XY) [[1,6],[2,8],[3,12],[4,25],[5,35]]
```

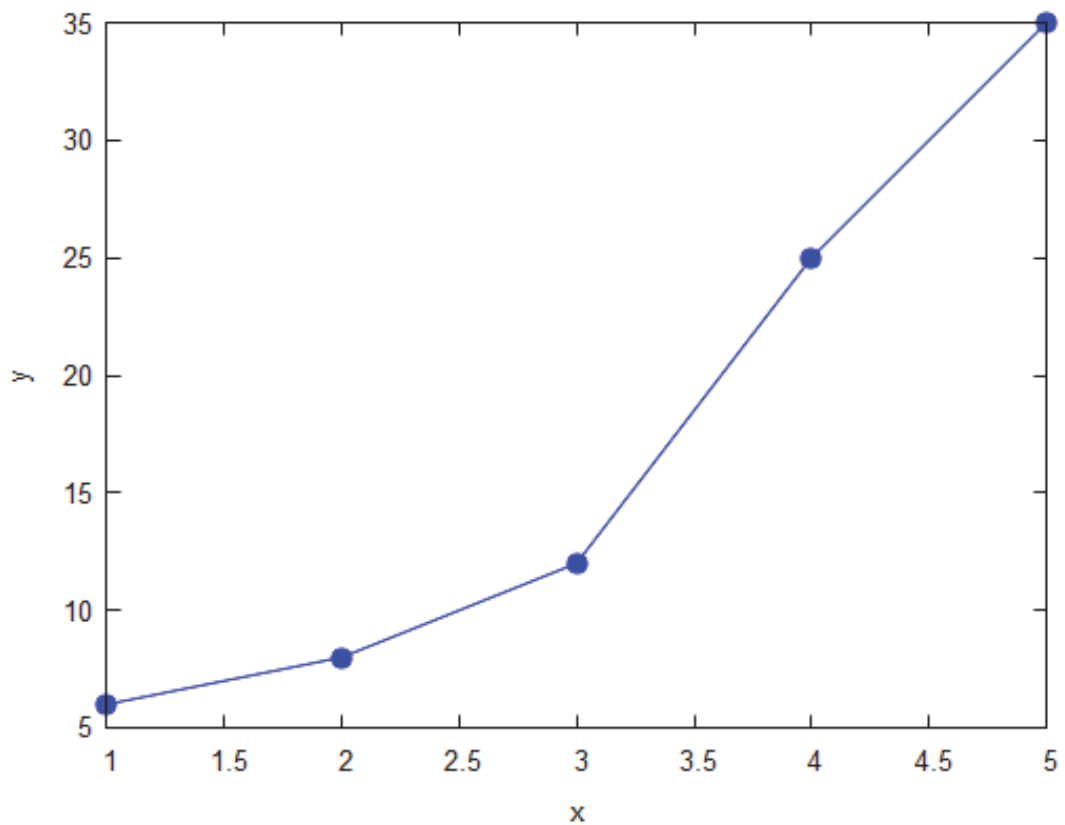
```
(%i2) wxplot2d([discrete,XY],[style,points]);
```

(%t2)



```
(%i3) wxplot2d([discrete,XY],[style,linespoints]);
```

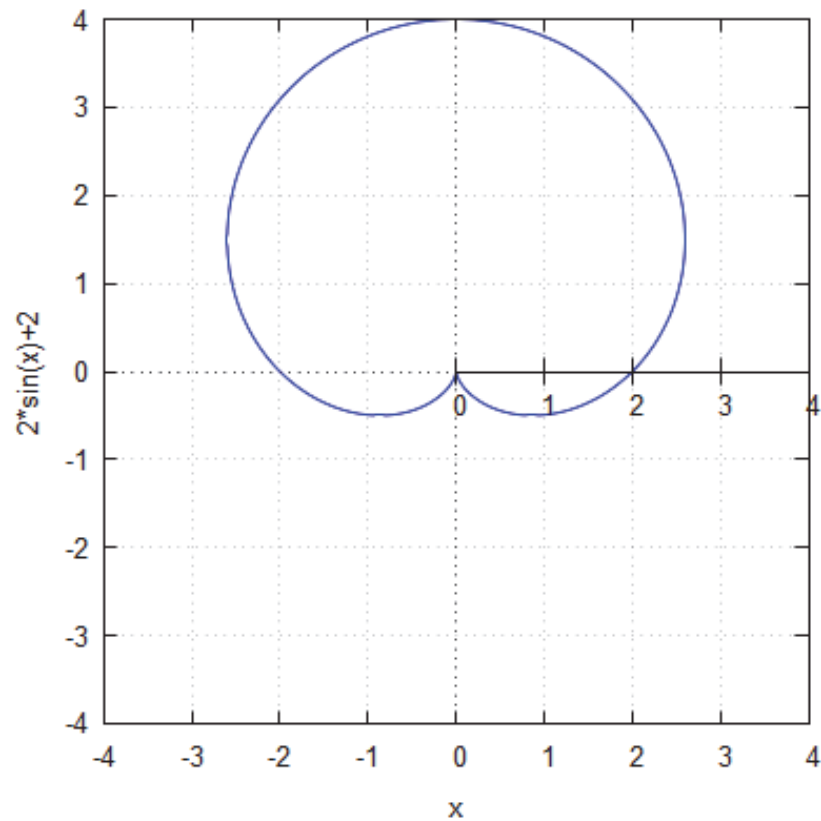
(%t3)



1.8.3 กราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว เช่น $r = 2 + 2 \sin x$, $r = \sin(2x)$

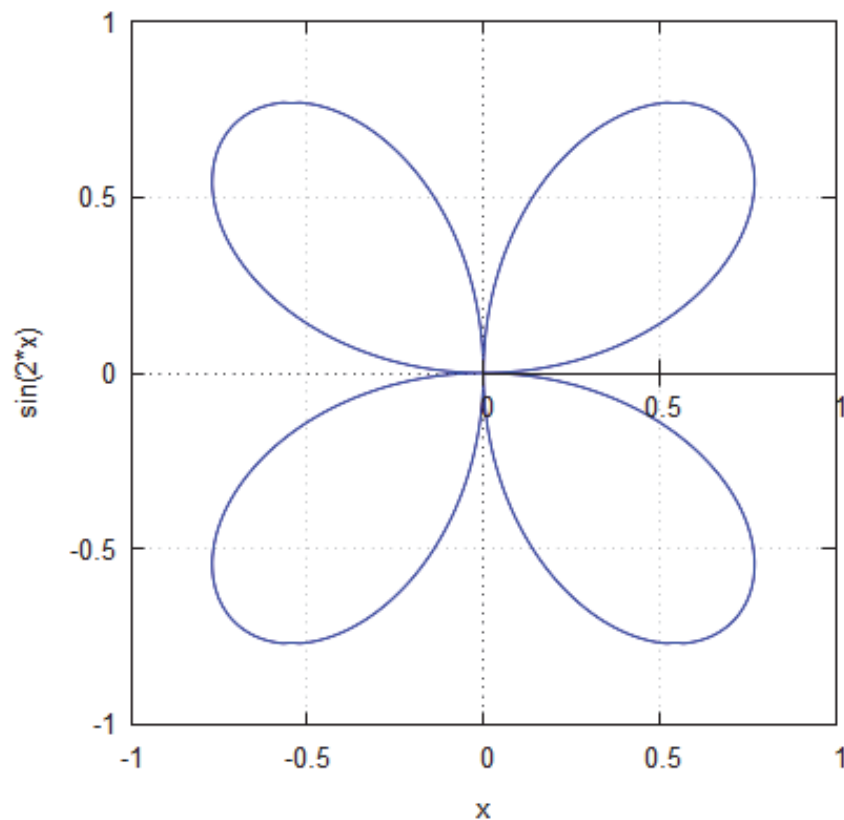
```
(%i1) wxplot2d([2+2*sin(x)],[x,0,2*%pi],
[y,-4,4],[yx_ratio,1/1],
[gnuplot_postamble, "set grid;set polar"]);
```

(%t1)



```
(%i2) wxplot2d([sin(2*x)],[x,0,2*%pi],
[y,-1,1],[yx_ratio,1/1],
[gnuplot_postamble, "set grid;set polar"]);
```

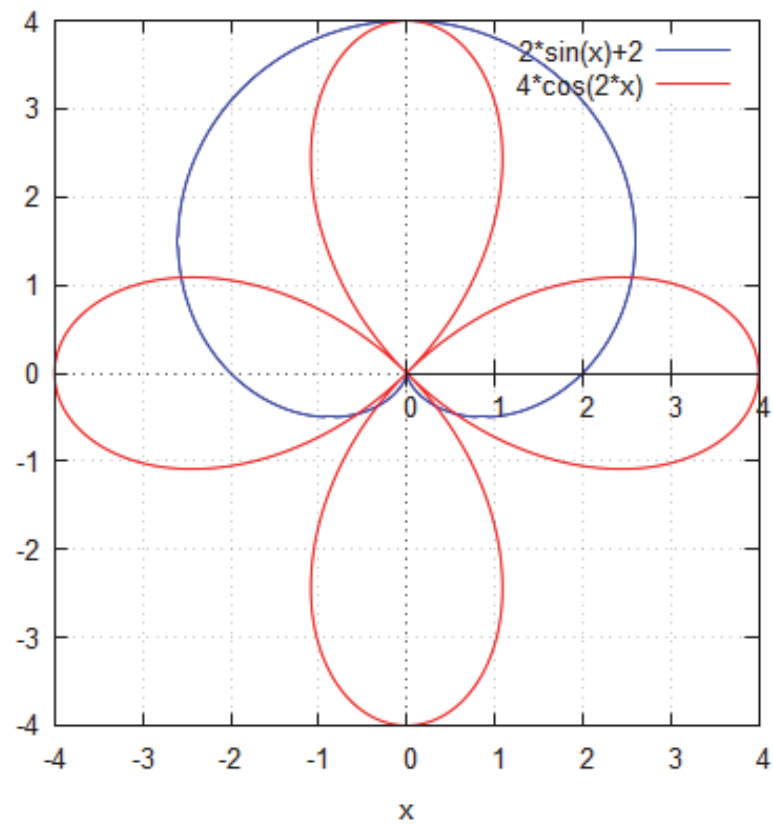
(%t2)



กราฟของ $r = 2 + 2 \sin x$ และ $r = 4 \cos(2x)$

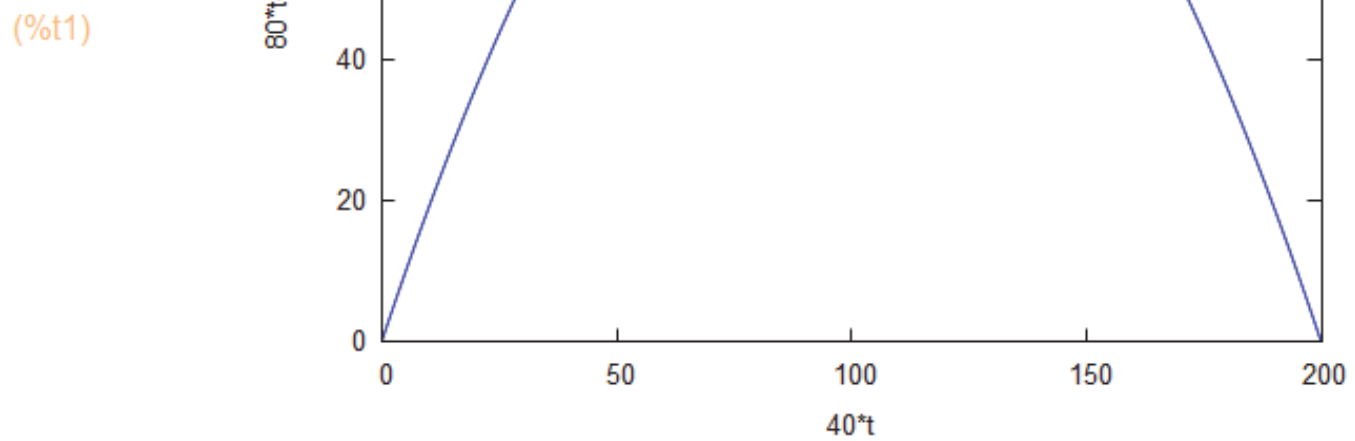
```
(%i3) wxplot2d([2+2*sin(x),4*cos(2*x)],[x,0,2-%pi],  
[y,-4,4],  
[yx_ratio,1/1],  
[gnuplot_postamble,"set grid;set polar"]);
```

(%t3)

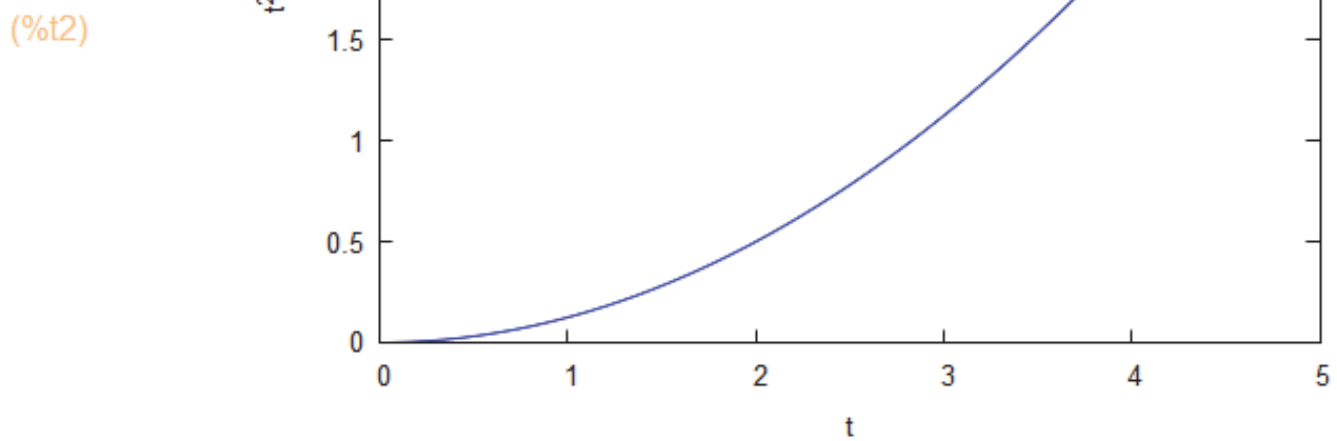


1.8.4 กราฟของสมการพาราเมตริก เช่นการเคลื่อนที่เป็นวงกลม การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์

(%i1) `wxplot2d([parametric, 40*t, -16*t^2+80*t, [t, 0,5]]);`



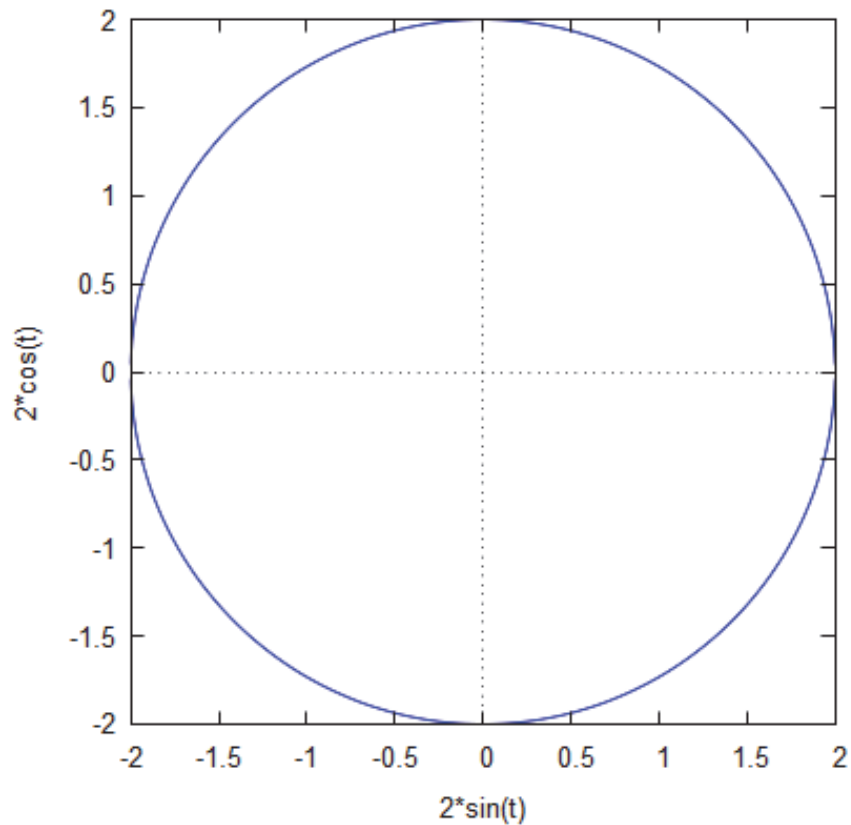
(%i2) `wxplot2d([parametric,t,t^2/8,[t, 0,5]]);`



กราฟของวงกลม $r(t) = (2 \sin(t), 2 \cos(t))$ และวงรี $r(t) = (4 \sin(t), 3 \cos(t))$

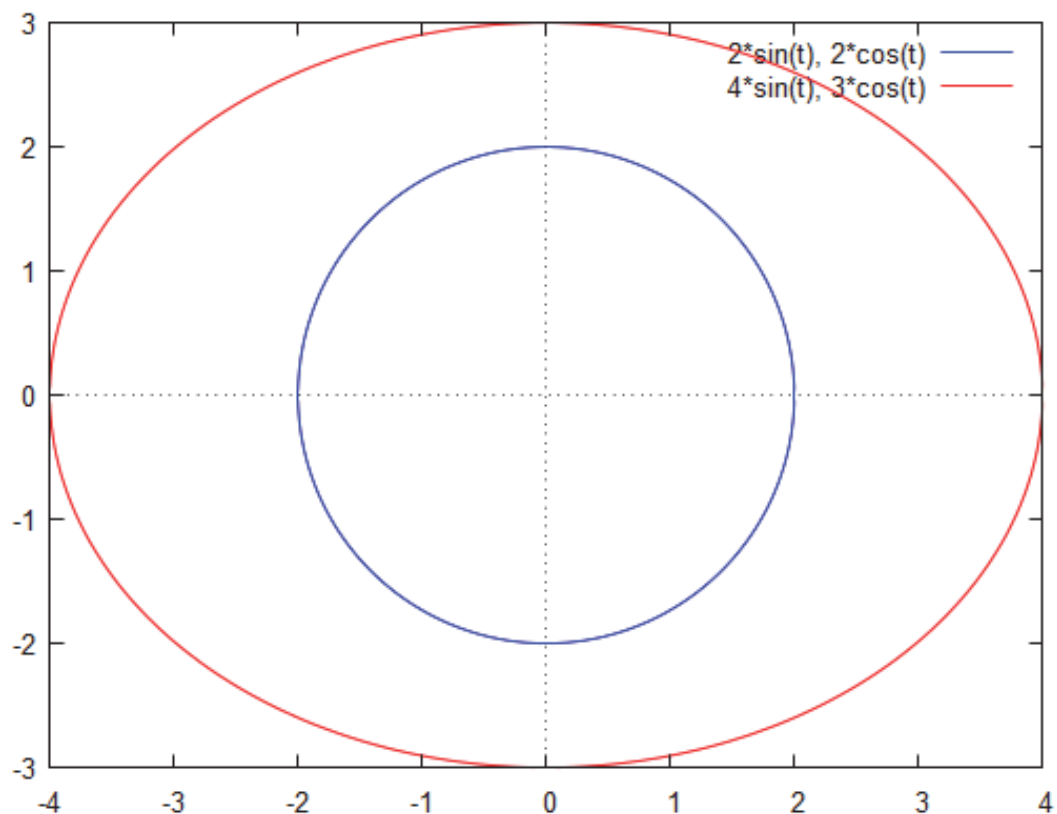
(%i3) `wxplot2d([parametric,2*sin(t),2*cos(t),[t,0,2-%pi]],[yx_ratio,1/1]);`

(%t3)



(%i4) `wxplot2d([[parametric,2*sin(t),2*cos(t),[t,0,2-%pi]],
[parametric,4*sin(t),3*cos(t),[t,0,2-%pi]]],
[x,-4,4],[y,-3,3],[xtics,1],[ytics,1],[yx_ratio,6/8]);`

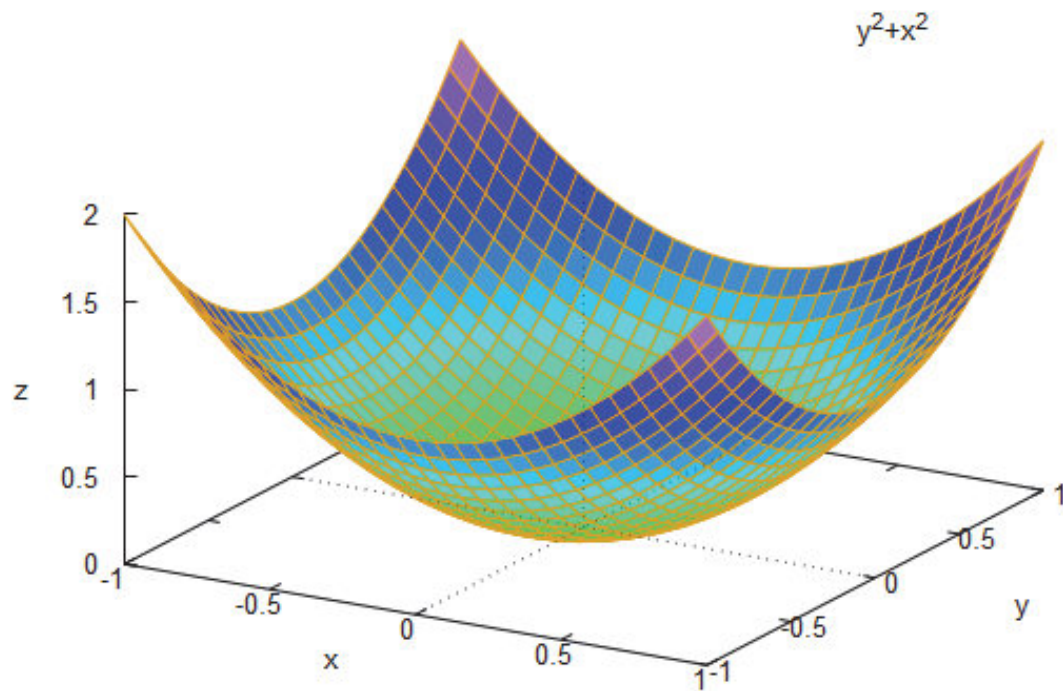
(%t4)



1.8.5 กราฟพื้นผิวใน 3 มิติ

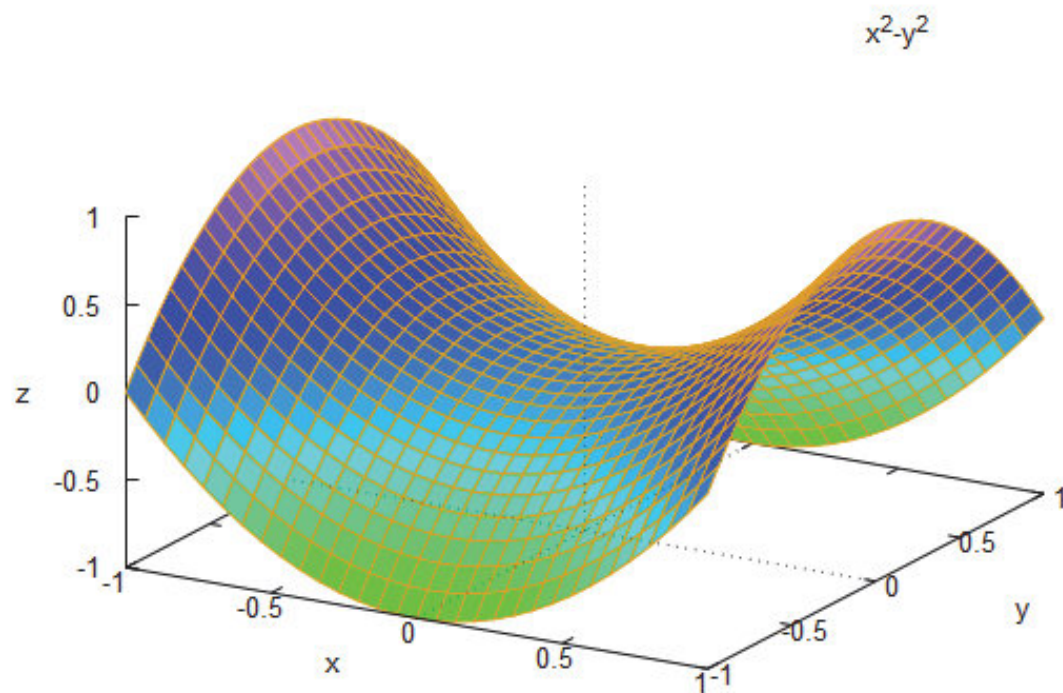
(%i1) `wxplot3d(x^2+y^2,[x,-1,1],[y,-1,1]);`

(%t1)



(%i2) `wxplot3d(x^2-y^2,[x,-1,1],[y,-1,1]);`

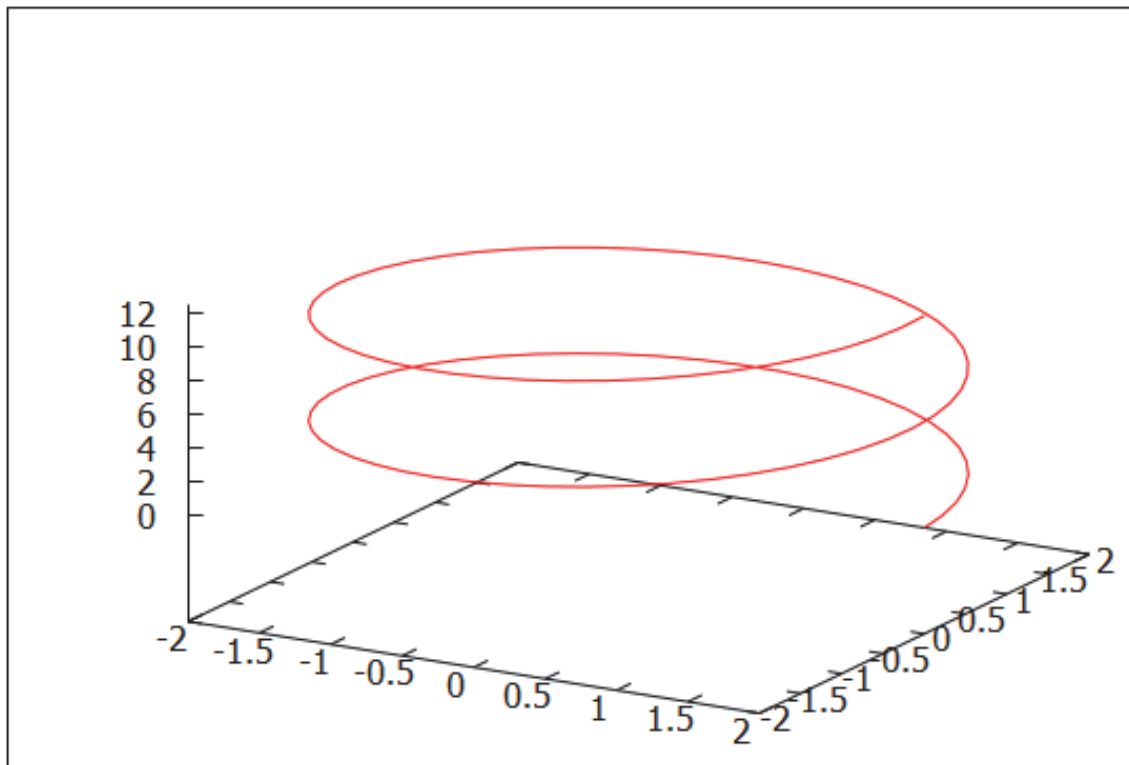
(%t2)



1.8.6 กราฟของสมการพาราเมตริกใน 3 มิติ เช่นการเคลื่อนที่แบบบันไดเวียน หรือ สปริง หรือ Helix

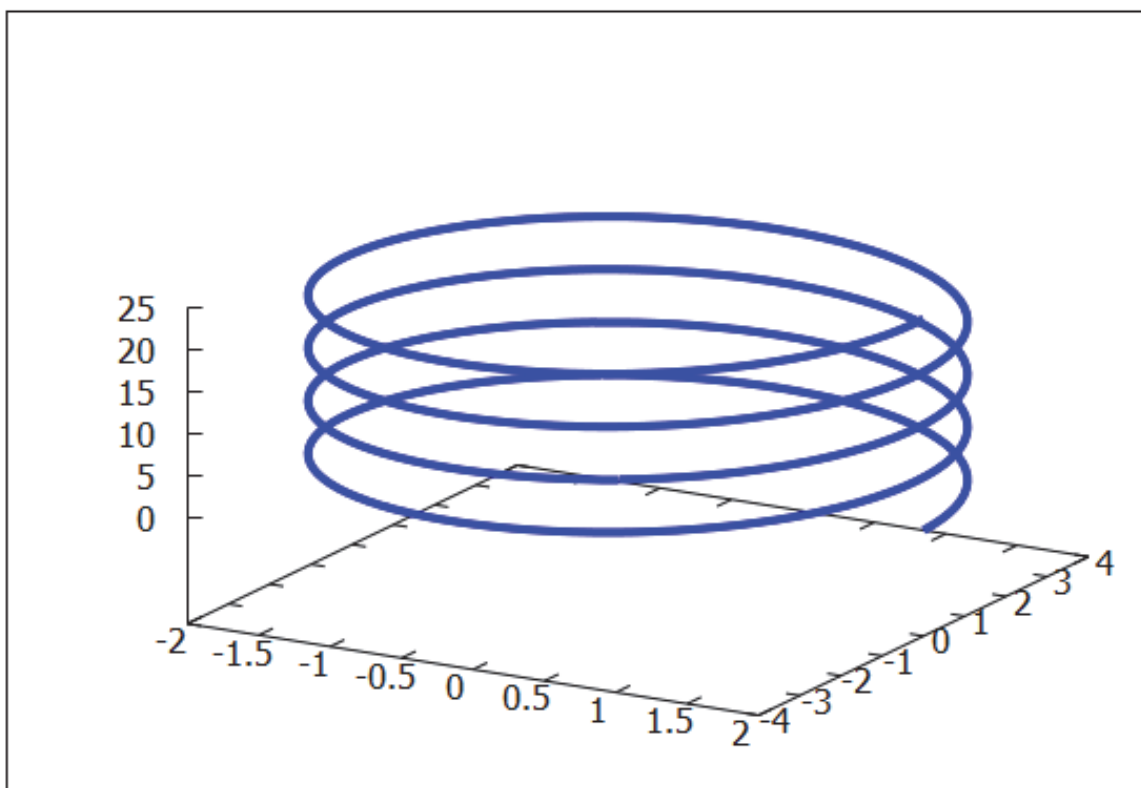
(%i2) `wxdraw3d(nticks = 100,color=red,parametric(2*cos(t),2*sin(t),t,t,0,4*%pi));`

(%t2)



(%i3) `wxdraw3d(nticks = 400,line_width=4,parametric(2*cos(t),4*sin(t),t,t,0,8*%pi));`

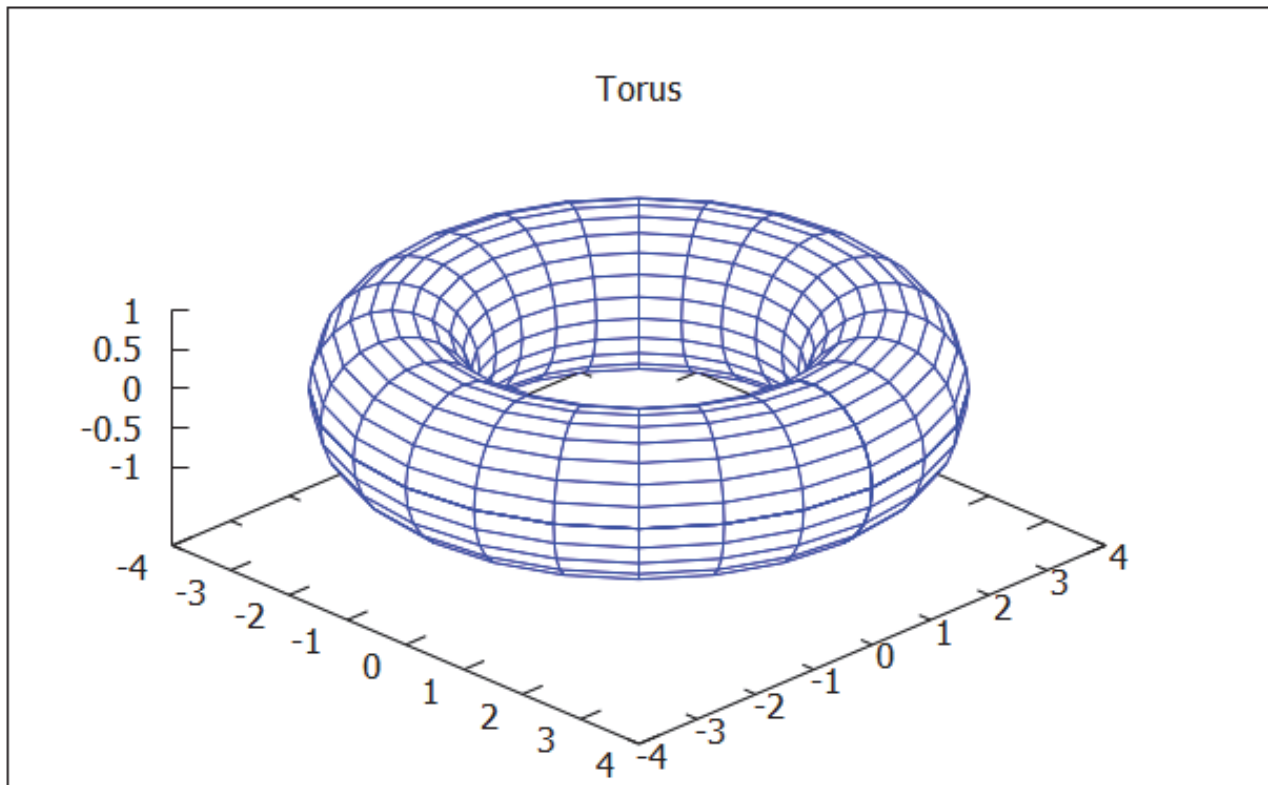
(%t3)



1.8.7 กราฟพื้นผิวใน 3 มิติของสมการอิงตัวแปรเสริม

```
(%i2) wxdraw3d(title="Torus",xu_grid=25,yv_grid=25,view=[40,45],surface_hide=true,
parametric_surface(cos(u)·(3+cos(v)),sin(u)·(3+cos(v)),sin(v),u,0,2·%pi,v,0,2·%pi),
xrange=[-4,4],yrange=[-4,4],zrange=[-1,1]);
```

(%t2)

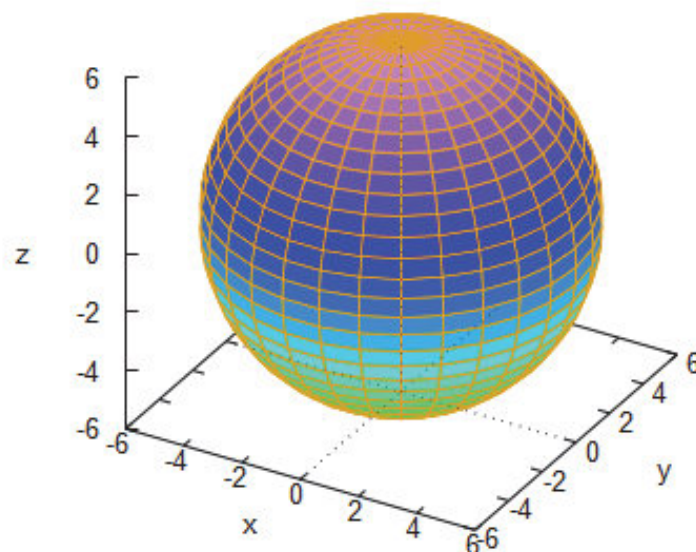


(%i3)

```
wxplot3d(6,[theta,0,%pi],[phi,0,2·%pi],same_xyz,[transform_xy,spherical_to_xyz]);
```

6

(%t3)



1.9 การคำนวณในรูปแบบเลขฐาน 10 ฐาน 2, 4, 8, 16

(%i1)	obase;	
(%o1)	10	(%i1) ขณะนี้การแสดงผลจะแสดงผลเป็นฐาน 10
(%i2)	ibase;	
(%o2)	10	(%i2) ขณะนี้การรับค่าจะรับค่าเป็นฐาน 10
(%i3)	ibase:16;	
(ibase)	16	(%3) กำหนดการรับค่าเป็นฐาน 16
(%i4)	10+1;	(%i4) – (%o4) ผลจากข้อกำหนด (%i3) ข้างต้น
(%o4)	17	จะได้ $(10)_{16} + (1)_{16} = (16)_{10} + (1)_{10} = 17$
(%i5)	ibase:8;	
(ibase)	8	(%5) กำหนดการรับค่าเป็นฐาน 8
(%i6)	10+1;	(%i6) – (%o6) ผลจากข้อกำหนด (%i5) ข้างต้น
(%o6)	9	จะได้ $(10)_8 + (1)_8 = (8)_{10} + (1)_{10} = 9$
(%i7)	ibase:4;	
(ibase)	4	(%i7) กำหนดการรับค่าเป็นฐาน 4
(%i8)	10+1;	(%i8) – (%o8) ผลจากข้อกำหนด (%i7) ข้างต้น
(%o8)	5	จะได้ $(10)_4 + (1)_4 = (4)_{10} + (1)_{10} = 5$
(%i9)	ibase:2;	
(ibase)	2	(%i9) กำหนดการรับค่าเป็นฐาน 2
(%i10)	10+1;	(%i10) – (%o10) ผลจากข้อกำหนด (%i9) ข้างต้น
(%o10)	3	จะได้ $(10)_2 + (1)_2 = (2)_{10} + (1)_{10} = 3$

1.10 การคำนวณในรูปแบบเวกเตอร์

กำหนดเวกเตอร์แบบที่ 1 ใช้คำสั่ง matrix

```
(%i1) u: matrix ([2,3,6]);
```

```
(u) [2 3 6]
```

```
(%i2) v:matrix([2,-3,-1]);
```

```
(v) [2 -3 -1]
```

```
(%i3) u+v;
```

```
(%o3) [4 0 5]
```

```
(%i4) u.v;
```

```
(%o4) -11
```

(%i4) พิมพ์ u จุดทศนิยม v

(%o4) ค่าที่ได้คือ u dot v

```
(%i5) u-v;
```

```
(%o5) [4 -9 -6]
```

(%i5) พิมพ์ u*v

(%o5) ค่าที่ได้คือตำแหน่งที่ตรงกันคูณกัน

```
(%i6) 4-v;
```

```
(%o6) [8 -12 -4]
```

```
(%i7) w:u-2-v;
```

```
(w) [-2 9 8]
```

```
(%i8) load("eigen");
```

```
(%o8) C:\maxima-5.41.0\share\maxima\5.41.0\share\matrix\eigen.mac
```

```
(%i9) unitvector(w);
```

```
(%o9) [ - 2 / sqrt(149)  9 / sqrt(149)  8 / sqrt(149) ]
```

```
(%i10) uvect(w);
```

```
(%o10) [ - 2 / sqrt(149)  9 / sqrt(149)  8 / sqrt(149) ]
```

หมายเหตุ unitvector(w) หรือ uvect(w) คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง w

กำหนดเวกเตอร์แบบที่ 2 ใช้รูปแบบของลำดับ

```
(%i1) u:[2,3,6];
```

```
(u) [2,3,6]
```

```
(%i2) v:[2,-3,-1];
```

```
(v) [2,-3,-1]
```

```
(%i3) u+v;
```

```
(%o3) [4,0,5]
```

```
(%i4) u.v;
```

```
(%o4) -11
```

(%i4) พิมพ์ u จุดทศนิยม v

(%o4) ค่าที่ได้คือ u dot v

```
(%i5) u-v;
```

```
(%o5) [4,-9,-6]
```

(%i5) พิมพ์ u*v

```
(%i6) 4.v;
```

```
(%o6) [8,-12,-4]
```

(%o5) ค่าที่ได้คือตำแหน่งที่ตรงกันคูณกัน

```
(%i7) w:u-2.v;
```

```
(w) [-2,9,8]
```

```
(%i8) load("vect");
```

```
(%o8) C:\maxima-5.41.0\share\maxima\5.41.0\share\vector\vect.mac
```

```
(%i9) u~v;
```

```
(%o9) -[2,-3,-1]~[2,3,6]
```

```
(%i10) express(u~v);
```

```
(%o10) [15,14,-12]
```

```
(%i12) u_cross_v:u~v$
```

```
express(u_cross_v);
```

```
(%o12) [15,14,-12]
```

หมายเหตุ สัญลักษณ์ cross product (~) พิมพ์โดยการกด Alt + 126 (กดปุ่ม Alt ค้างไว้ แล้วกด 126)

สัญลักษณ์ dot product (.) ใช้จุดทศนิยม

1.11 การคำนวณในรูปแบบเมทริกซ์

(%i1) `A: matrix ([1, 2], [3,5]);`

(A)
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i2) `B: matrix ([2,0], [0,4]);`

(B)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(%i3) `A+B;`

(%o3)
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

(%i4) `A·B;`

(%o4)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$$

(%i4) พิมพ์ A*B

(%o4) ค่าที่ได้คือตำแหน่งที่ตรงกันคูณกัน

(%i5) `A.B;`

(%o5)
$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$$

(%i5) พิมพ์ A จุดทศนิยม B

(%o5) ผลที่ได้เป็นการคูณแบบเมทริกซ์

(%i6) `4·A;`

(%o6)
$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$$

(%i7) `A-1;`

(%o7)
$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(%i7) อินเวอร์สเมทริกซ์

(%i8) `transpose(A);`

(%o8)
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

(%i9) `determinant(A);`

(%o9)
$$-1$$

1.12 การคำนวณจำนวนเชิงซ้อน

(%i1)	<code>z:3+4*%i;</code>	สัญลักษณ์ %i คือ $\sqrt{-1}$
(%o1)	<code>4 %i + 3</code>	(%i1) – (%o1) กำหนดค่า $z = 3 + 4i$
(%i2)	<code>w:5+12*%i;</code>	
(%o2)	<code>12 %i + 5</code>	(%i2) – (%o2) กำหนดค่า $w = 5 + 12i$
(%i3)	<code>z*w;</code>	
(%o3)	<code>(4 %i + 3) (12 %i + 5)</code>	
(%i4)	<code>expand(z*w);</code>	
(%o4)	<code>56 %i - 33</code>	
(%i5)	<code>realpart(z);</code>	
(%o5)	<code>3</code>	
(%i6)	<code>imagpart(z);</code>	
(%o6)	<code>4</code>	
(%i7)	<code>cabs(z);</code>	(%i7) – (%o7) ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
(%o7)	<code>5</code>	
(%i8)	<code>w:2+2*%i;</code>	
(%o8)	<code>2 %i + 2</code>	
(%i9)	<code>carg(w);</code>	(%i9) – (%o9) อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน
(%o9)	<code>$\frac{\pi}{4}$</code>	
(%i10)	<code>conjugate(w);</code>	(%i10) – (%o10) ค่าสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน
(%o10)	<code>2 - 2 %i</code>	
(%i11)	<code>v:polarform(w);</code>	(%i11) เปลี่ยนรูปแบบคาร์ทีเซียน $x + iy$ เป็นรูปแบบเชิงขั้ว $re^{i\theta}$
(%o11)	<code>$2^{3/2} \%e^{\frac{\%i \pi}{4}}$</code>	
(%i12)	<code>rectform(v);</code>	(%i12) เปลี่ยนรูปแบบเชิงขั้ว $re^{i\theta}$ เป็นรูปแบบคาร์ทีเซียน
(%o12)	<code>2 %i + 2</code>	

1.13 การหาผลบวกอนุกรม อนุกรมกำลัง และผลคูณของลำดับ

(%i1) `sum(i,i,1,10);`

(%o1) 55

(%i2) `sum(i^2,i,1,10);`

(%o2) 385

(%i3) `f(x):=x+x^2;`

(%o3) $f(x) := x + x^2$

(%i4) `sum(f(x),x,1,10);`

(%o4) 440

(%i5) `sum(i,i,1,n),simpsum;`

(%o5) $\frac{n^2 + n}{2}$

(%i6) `sum(i^2,i,1,n),simpsum;`

(%o6) $\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

(%i7) `sum(1/k^2,k,1,inf),simpsum;`

(%o7) $\frac{\pi^2}{6}$

(%i8) `product(i,i,1,10);`

(%o8) 3628800

(%i9) `10!;`

(%o9) 3628800

(%i10) `20!;`

(%o10) 2432902008176640000

(%i11) `factor(20!);`

(%o11) $2^{18} 3^8 5^4 7^2 11 13 17 19$

หมายเหตุ `factor(n)` เป็นคำสั่งแสดงผลคูณของจำนวนเฉพาะที่มีค่าเท่ากับ n

1.14 การคำนวณค่าสถิติเบื้องต้น

```
(%i2) load("descriptive");
(%o2) C:\maxima-5.41.0\share\maxima\5.41.0\share\descriptive\descriptive.mac

(%i3) x:[1,2,3,6];
(x) [1,2,3,6]

(%i4) mean(x);
(%o4) 3

(%i5) var(x);
(%o5)  $\frac{7}{2}$ 

(%i6) std(x);
(%o6)  $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ 

(%i8) var1(x);
(%o8)  $\frac{14}{3}$ 

(%i9) std1(x);
(%o9)  $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}}$ 

(%i10) sum(x[i]^2,i,1,4);
(%o10) 50

(%i11) sum((x[i]-mean(x))^2,i,1,4)/4;
(%o11)  $\frac{7}{2}$ 

(%i12) sum((x[i]-mean(x))^2,i,1,4)/3,numer;
(%o12) 4.666666666666667
```

หมายเหตุ $\text{var}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}$ และ $\text{std}(x)$ คือความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ประชากร)

$\text{var1}(x) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ และ $\text{std1}(x)$ คือความแปรปรวนและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ตัวอย่าง)

1.15 กราฟ Box plot Histogram, Stem and leaf, pie chart และการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลในรูปแบบ $y = a + bx$

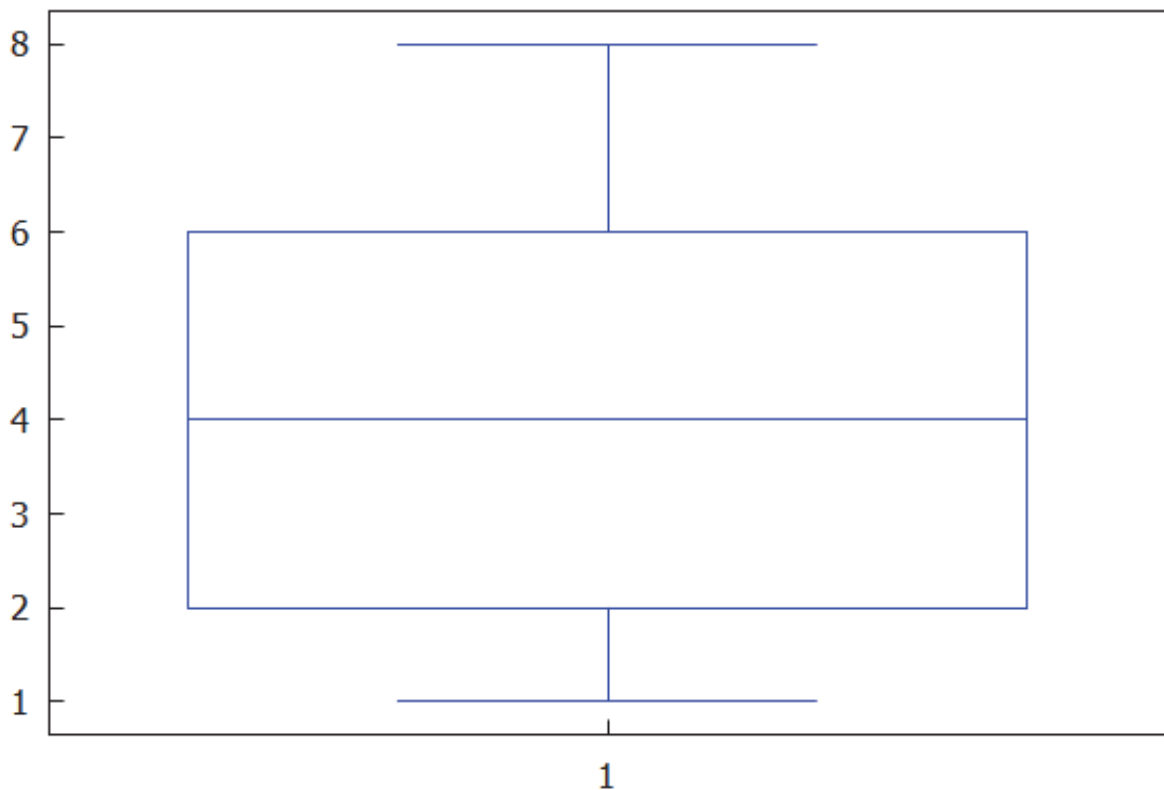
1.15.1 การเขียนกราฟแบบ Boxplot

```
(%i2) load("descriptive");
(%o2) C:\maxima-5.41.0\share\maxima\5.41.0\share\descriptive\descriptive.mac

(%i3) A:[1,1,2,3,2,5,4,3,2,2,3,5,6,4,6,2,4,8,6,4,6,4,3,2,8,8,8];
(A) [1,1,2,3,2,5,4,3,2,2,3,5,6,4,6,2,4,8,6,4,6,4,3,2,8,8,8]

(%i4) wxboxplot(A);
```

(%t4)



1.15.2 การเขียนกราฟแบบ Histogram

```
(%i2) load("descriptive");
```

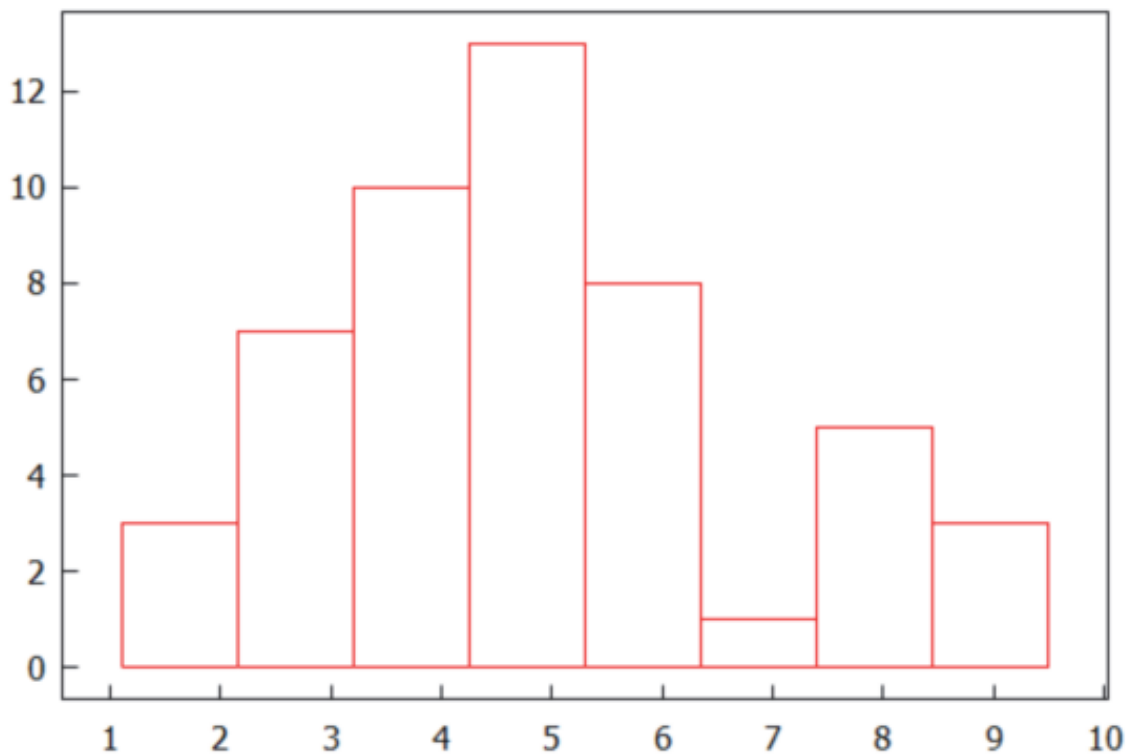
```
(%o2) C:\maxima-5.41.0\share\maxima\5.41.0\share\descriptive\descriptive.mac
```

```
(%i3) x:[1.1,2.2,3.2,8.1,7.5,9.2,3.2,4.5,6.1,9.5,  
4.2,7.5,6.2,6.3,4.1,4.5,5.7,4.9,5.2,4.4,  
4.5,4.6,4.1,5.2,7.5,8.6,6.3,2.2,6.1,5.5,  
2.1,1.4,4.3,3.3,5.1,4.9,5.8,2.4,3.7,4.2,  
5.2,5.1,6.5,7.8,3.9,3.2,3.5,3.6,3.4,2.5];
```

```
(x) [1.1,2.2,3.2,8.1,7.5,9.2,3.2,4.5,6.1,9.5,4.2,7.5,6.2,6.3,4.1,4.5,5.7,  
4.9,5.2,4.4,4.5,4.6,4.1,5.2,7.5,8.6,6.3,2.2,6.1,5.5,2.1,1.4,4.3,3.3,5.1,4.9,5.8,  
2.4,3.7,4.2,5.2,5.1,6.5,7.8,3.9,3.2,3.5,3.6,3.4,2.5]
```

```
(%i4) wxhistogram(x,nclasses=8);
```

```
(%t4)
```



1.15.3 การเขียนกราฟแบบ Stem&leaf

```
(%i2) load("descriptive");
(%o2) C:\maxima-5.41.0\share\maxima\5.41.0\share\descriptive\descriptive.mac

(%i3) x:[11,22,32,81,75,92,32,45,61,95,42,75,62,63,41,45,57,49,45,51,
        52,44,45,46,41,52,75,86,63,22,61,55,21,14,43,43,33,51,49,66,
        58,24,37,42,52,51,65,78,39,32,35,36,34,25,83,74,49,27,55,64];

(x) [11,22,32,81,75,92,32,45,61,95,42,75,62,63,41,45,57,49,45,51,52,44
,45,46,41,52,75,86,63,22,61,55,21,14,43,43,33,51,49,66,58,24,37,42,52,51,65
,78,39,32,35,36,34,25,83,74,49,27,55,64]

(%i4) length(x);
(%o4) 60

(%i5) stemplot(x);
1|14
2|122457
3|222345679
4|112233455556999
5|1112225578
6|11233456
7|45558
8|136
9|25
key: 6|3 = 63
(%o5) done
```

หมายเหตุ การแปลความหมาย

1|14 หมายถึง มีข้อมูล 11, 14

2|122457 หมายถึง มีข้อมูล 21, 22, 22, 24, 25, 27

1.15.4 การเขียนกราฟแบบ Piechart

```
(%i2) load("descriptive");
```

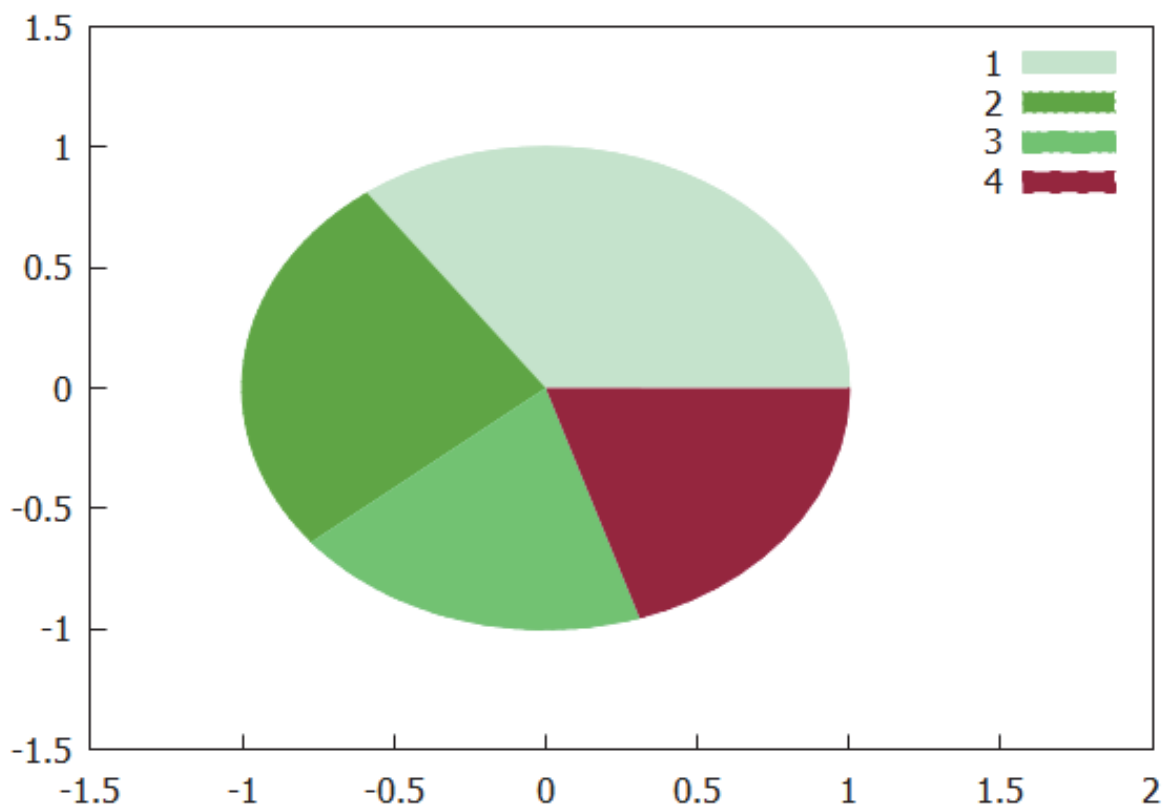
```
(%o2) C:\maxima-5.41.0\share\maxima\5.41.0\share\descriptive\descriptive.mac
```

```
(%i3) x:[1,1,2,2,3,2,4,1,3,1,1,2,3,2,4,1,2,1,1,1,
4,2,3,1,2,2,2,3,4,1,4,1,1,3,4,1,1,2,4,4,
4,1,4,2,4,1,1,2,3,1,4,2,2,3,2,2,2,1,1,1,
2,1,1,4,4,3,3,3,1,1,4,1,1,4,2,4,3,3,4,2,
1,2,1,1,2,1,3,4,3,1,3,2,3,1,3,2,3,4,2,1];
```

```
(x) [1,1,2,2,3,2,4,1,3,1,1,2,3,2,4,1,2,1,1,1,4,2,3,1,2,2,2,3,4,1,4,1,1,
3,4,1,1,2,4,4,4,1,4,2,4,1,1,2,3,1,4,2,2,3,2,2,2,1,1,1,2,1,1,4,4,3,3,3,1,1,4,
1,1,4,2,4,3,3,4,2,1,2,1,1,2,1,3,4,3,1,3,2,3,1,3,2,3,4,2,1]
```

```
(%i4) wxpiechart(x,xrange=[-1.5,2],yrange=[-1.5,1.5]);
```

```
(%t4)
```



1.15.5 แผนภาพการกระจายของข้อมูลและสมการเส้นถดถอยเชิงเส้นตรง

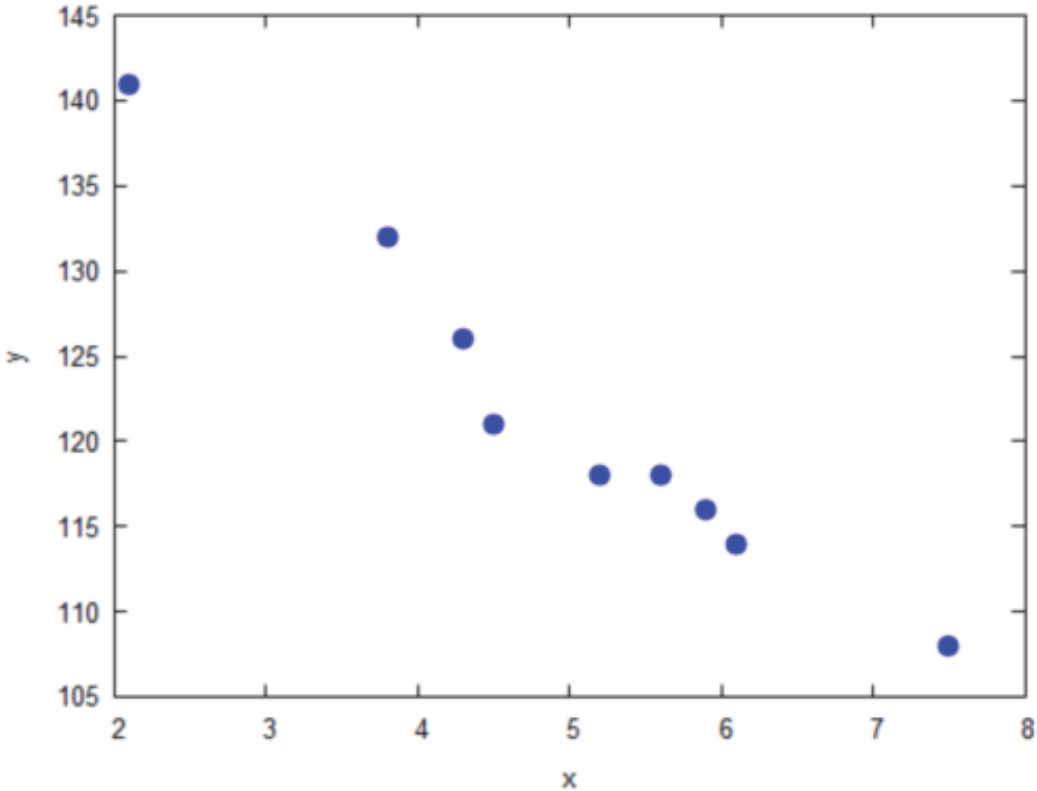
x	y
4.3	126
4.5	121
5.9	116
5.6	118
6.1	114
5.2	118
3.8	132
2.1	141
7.5	108

```
(%i1) data:[[4.3,126],[4.5,121],[5.9,116],[5.6,118],[6.1,114],[5.2,118],[3.8,132],
           [2.1,141],[7.5,108]];

(data) [[4.3, 126],[4.5, 121],[5.9, 116],[5.6, 118],[6.1, 114],[5.2, 118],[3.8, 132]
, [2.1, 141],[7.5, 108]]

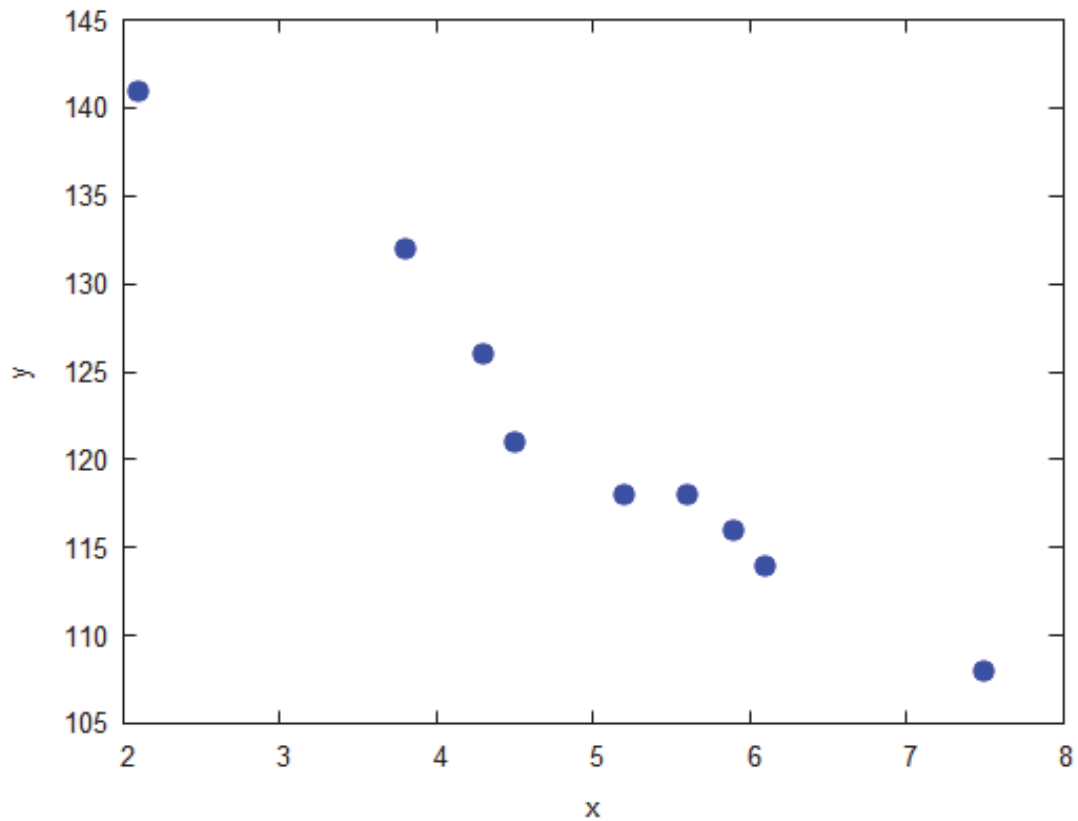
(%i2) wxplot2d([discrete,data],[style,points]);

(%t2)
```



1.15.6 การหาสมการเส้นถดถอยเชิงเส้นตรง

```
(%i5)  x:[4.3,4.5,5.9,5.6,6.1,5.2,3.8,2.1,7.5]$
       y:[126,121,116,118,114,118,132,141,108]$
       n:length(x)$
       data:makelist([x[i],y[i]],i,1,n)$
       wxplot2d([discrete,data],[style,points]);
```



(%o5)

```
(%i7)  xy:transpose(matrix(x,y))$
       xy;
```

(%o7)

4.3	126
4.5	121
5.9	116
5.6	118
6.1	114
5.2	118
3.8	132
2.1	141
7.5	108

```
(%i14) kill(x,y);
load("plsquares")$
plsquares(xy,[x,y],y),numer;
```

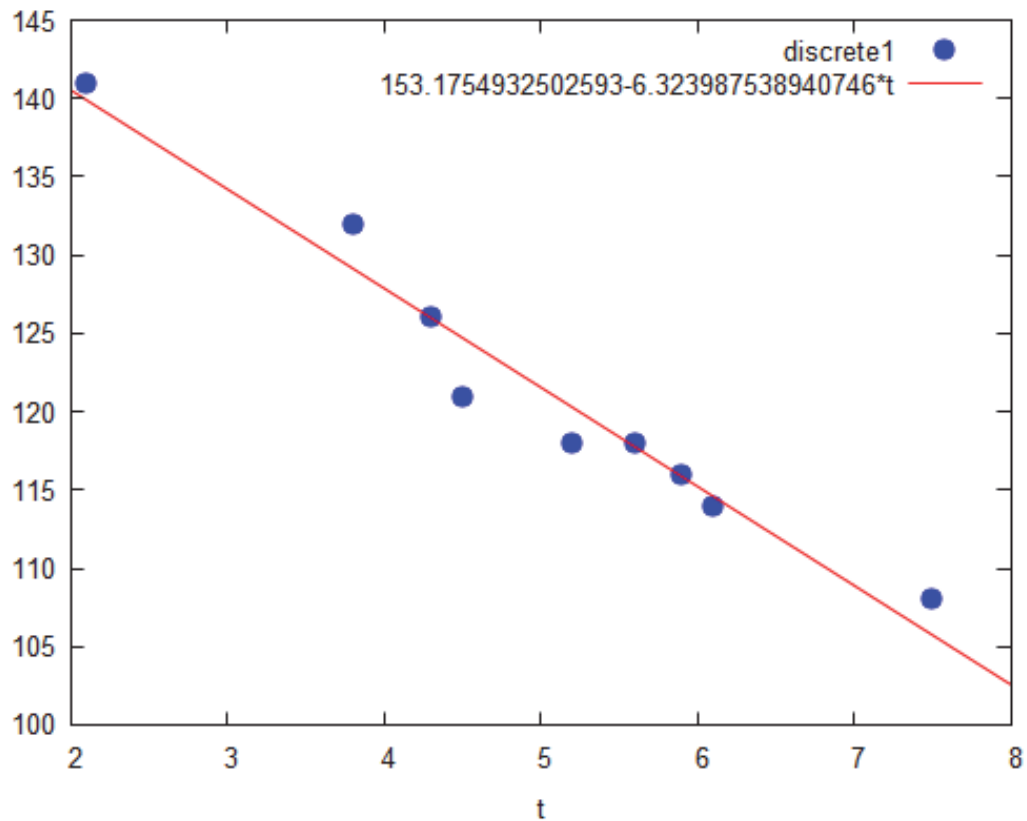
```
(%o12) done
```

Determination Coefficient for $y = 0.957772194002039$

```
(%o14)  $y = 153.1754932502593 - 6.323987538940746 x$ 
```

```
(%i16) ycap(t):=153.1754932502593-6.323987538940746*t$
wxplot2d([discrete,data],ycap(t)),[t,2,8],
[style,points,lines]);
```

```
(%t16)
```



1.16 สามารถจัดรูปพีชคณิต แยกตัวประกอบ และกระจายพหุนาม

(%i1) `expand((x+y)^4);`

(%o1) $y^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4$

(%i2) `factor(x^2-4*x+3);`

(%o2) $(x-3)(x-1)$

(%i3) `simplify(x^2+4*x^2+x*(x^2-4));`

(%o3) $\text{simplify}(5x^2 + x(x^2 - 4))$

(%i4) `expand(x^2+4*x^2+x*(x^2-4));`

(%o4) $x^3 + 5x^2 - 4x$

(%i5) `trigexpand(sin(4*x));`

(%o5) $4\cos(x)^3\sin(x) - 4\cos(x)\sin(x)^3$

(%i6) `trigexpand(cos(3*x));`

(%o6) $\cos(x)^3 - 3\cos(x)\sin(x)^2$

(%i7) `ratsimp(((x+2)/(x^2+1))+1/(x+2));`

(%o7)
$$\frac{2x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$$

(%i8) `ratexpand(%);`

(%i8) % คือผลการคำนวณล่าสุดจากข้างต้น

(%o8)
$$\frac{2x^2}{x^3 + 2x^2 + x + 2} + \frac{4x}{x^3 + 2x^2 + x + 2} + \frac{5}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$$

(%i9) `fullratsimp(%);`

(%o9)
$$\frac{2x^2 + 4x + 5}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$$

(%i9) % คือผลการคำนวณล่าสุดจากข้างต้น

(%i10) `partfrac(1/(x^2-4),x);`

(%o10)
$$\frac{1}{4(x-2)} - \frac{1}{4(x+2)}$$

(%i10) การแยกเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย

1.17 สามารถหาอนุพันธ์และอนุพันธ์ย่อย

```
(%i1) f(x):=x^4+2·x+4;
(%o1) f(x):=x^4+2x+4

(%i2) diff(f(x),x);
(%o2) 4x^3+2

(%i3) diff(f(x),x,1);
(%o3) 4x^3+2

(%i4) diff(f(x),x,2);
(%o4) 12x^2

(%i5) f(x,y):=y^5·x^2+x^3·y^4;
(%o5) f(x,y):=y^5x^2+x^3y^4

(%i6) diff(f(x,y),x);
(%o6) 2xy^5+3x^2y^4

(%i7) diff(f(x,y),x,2);
(%o7) 2y^5+6xy^4

(%i8) diff(diff(f(x,y),x,2),y,1);
(%o8) 10y^4+24xy^3

(%i9) diff(diff(f(x,y),x),y);
(%o9) 10xy^4+12x^2y^3

(%i10) diff(diff(f(x,y),x,2),y,1);
(%o10) 10y^4+24xy^3

(%i11) diff(diff(exp(x)·x·y^2,x),y);
(%o11) 2x %e^x y+2 %e^x y
```

หมายเหตุ $\text{diff}(f(x), x)$ คือ $\frac{d}{dx}f(x)$ และ $\text{diff}(f(x), x, n)$ คือ $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$ และ $\text{diff}(f(x, y), x)$ คือ $\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)$

1.18 สามารถหาอินทิกรัลจำกัดเขตและอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

(%i1) `integrate(x^3+1,x);`

(%o1) $\frac{x^4}{4} + x$

(%i2) `integrate(x^3+1,x,0,2);`

(%o2) 6

(%i3) `integrate(integrate(x^3-y, x),y);`

(%o3) $\frac{x^4 y^2}{8}$

(%i4) `integrate(integrate(x^3-y, x,0,2),y,0,1);`

(%o4) 2

(%i5) `f(x):=exp(x)*x^2;`

(%o5) $f(x) := \exp(x) x^2$

(%i6) `integrate(f(x),x);`

(%o6) $(x^2 - 2x + 2) e^x$

(%i7) `integrate(f(x),x,a,b);`

(%o7) $(b^2 - 2b + 2) e^b - (a^2 - 2a + 2) e^a$

(%i8) `integrate(f(x),x,0,2);`

(%o8) $2 e^2 - 2$

(%i9) `integrate(6*x^2+2*x+5,x,1+t,1-t);`

(%o9) $-4 t^3 - 26 t$

(%i10) `integrate(sin(x)=cos(x)+2*x+4,x);`

(%o10) $-\cos(x) = \sin(x) + x^2 + 4x + \%c1$

อินทิเกรตทั้งสองด้านของสมการ

(%i11) `integrate(exp(x)+4*x^3=8*x^7+6*x,x);`

(%o11) $\%e^x + x^4 = x^8 + 3x^2 + \%c2$

อินทิเกรตทั้งสองด้านของสมการ

1.19 สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันได้

(%i1) $f(x) := x^2 + x + 1;$ (%o1) $f(x) := x^2 + x + 1$ (%i2) $\text{limit}(f(x), x, 1);$

(%o2) 3

(%i2) – (%o2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

(%i3) $\text{limit}(f(x), x, 2-k);$ (%o3) $4k^2 + 2k + 1$ (%i4) $\text{limit}(\sin(x)/x, x, 0);$

(%o4) 1

(%i4) – (%o4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

(%i5) $f(x) := x/\text{abs}(x);$ (%o5) $f(x) := \frac{x}{|x|}$ (%i6) $\text{limit}(f(x), x, 0, \text{minus});$

(%o6) -1

(%i6) – (%o6) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$

(%i7) $\text{limit}(f(x), x, 0, \text{plus});$

(%o7) 1

(%i7) – (%o7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$

(%i8) $\text{limit}((x^2+x+2)/(3-4x^2), x, \text{inf});$ (%o8) $-\frac{1}{4}$

(%i8) – (%o8) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 2}{3 - 4x^2} = -\frac{1}{4}$

(%i9) $\text{limit}((3-4x+4x^2)/(5x^2+2x+4), x, -\text{inf});$ (%o9) $\frac{4}{5}$ (%i10) $f(x) := (1+2x)^{(5/x)};$ (%o10) $f(x) := (1 + 2x)^{5/x}$ (%i11) $\text{limit}(f(x), x, 0);$ (%o11) e^{10}

(%i11) – (%o11) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{5}{x}} = e^{10}$

หมายเหตุ $\text{limit}(f(x), x, a)$ คือ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\text{limit}(f(x), x, a, \text{minus})$ คือ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ $\text{limit}(f(x), x, a, \text{plus})$ คือ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

1.21 สามารถหารากของสมการ $f(x) = 0$

```
(%i1) solve(x^2-2=0,x);
(%o1) [x = -sqrt(2), x = sqrt(2)]

(%i2) %,numer;
(%o2) [x = -1.414213562373095, x = 1.414213562373095]

(%i3) find_root(sin(x)-cos(x)=0,x,0.1,%pi);
(%o3) 0.7853981633974483

(%i4) %pi/4.0,numer;
(%o4) 0.7853981633974483

(%i5) solve(x^3-8=0,x);
(%o5) [x = sqrt(3)%i-1, x = -sqrt(3)%i-1, x = 2]

(%i6) solve(x^4-16=0,x);
(%o6) [x = 2%i, x = -2, x = -2%i, x = 2]

(%i7) realroots(x^3-8=0,10^-10);
(%o7) [x = 2]

(%i8) realroots(x^4-16=0,10^-10);
(%o8) [x = -2, x = 2]

(%i9) realroots(x^6-64=0,10^-10);
(%o9) [x = -2, x = 2]

(%i13) eq1:x+y+z=10$
eq2:x-y+z=4$
eq3:x+y-z=0$
solve([eq1,eq2,eq3]);
(%o13) [[z = 5, y = 3, x = 2]]

(%i16) eq1:x^2+y^2=4$
eq2:x-y=2$
solve([eq1,eq2]);
(%o16) [[y = -2, x = 0], [y = 0, x = 2]]
```

1.22 สามารถหาผลเฉลยของระบบสมการ

ตัวอย่างเช่น การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $2x + y = 4$

$$9x - 4y = 1$$

และการหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น $x^2 + y^2 = 1$

$$x - y = 0$$

(%i1) `solve([2·x+y=4,9·x-4·y=1],[x,y]);`(%o1) `[[x = 1, y = 2]]`(%i2) `linsolve([2·x+y=4,9·x-4·y=1],[x,y]);`(%o2) `[x = 1, y = 2]`(%i3) `solve([2·x+y=sqrt(5),9·x-4·y=sqrt(7)],[x,y]);`(%o3) `[[x =  $\frac{\sqrt{7} + 4\sqrt{5}}{17}$ , y =  $\frac{9\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}{17}$ ]]`(%i4) `%,numer;`(%o4) `[[x = 0.6817660718272793, y = 0.8725358338452309]]`(%i5) `solve(a·x^2+b·x+c=0,x);`(%o5) `[x =  $-\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} + b}{2a}$ , x =  $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac} - b}{2a}$ ]`(%i6) `linsolve([x+y+z=10,
x+y-z=0,
x-y+z=4],
[x,y,z]);`(%o6) `[x = 2, y = 3, z = 5]`(%i7) `solve([x^2+y^2=1,
x-y=0],
[x,y]);`(%o7) `[[x = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, y = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$], [x = $\frac{1}{\sqrt{2}}$, y = $\frac{1}{\sqrt{2}}$]]`

1.23 สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

การหาผลเฉลย $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ $y' = x^2$ และ $y(0) = 4$

```
(%i1) kill(all);
```

```
(%o0) done
```

kill(all) ใช้ขจัดตัวแปรที่อาจมีอยู่ก่อนหน้านี้

```
(%i1) desolve(diff(y(x),x,1)=x^2,y(x));
```

```
(%o1) y(x) = \frac{x^3}{3} + y(0)
```

```
(%i3) atvalue(y(x),x=0,4)$  
desolve(diff(y(x),x,1)=x^2,y(x));
```

```
(%o3) y(x) = \frac{x^3}{3} + 4
```

การหาผลเฉลย $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์

$y'' + y = 0$, $y(0) = 4$ และ $y'(0) = -3$

```
(%i5) kill(x,y)$  
desolve(diff(y(x),x,2)+y(x)=0,y(x));
```

```
(%o5) y(x) = sin(x) \left( \frac{d}{dx} y(x) \Big|_{x=0} \right) + y(0) cos(x)
```

หมายเหตุ

ใน %i3 มีการกำหนดค่า x และ y ค้างไว้ จึงต้องขจัดค่าทิ้งก่อน

```
(%i9) kill(x,y)$  
atvalue(y(x),x=0,4)$  
atvalue(diff(y(x),x,1),x=0,-3)$  
desolve(diff(y(x),x,2)+y(x)=0,y(x));
```

```
(%o9) y(x) = 4 cos(x) - 3 sin(x)
```

การหาผลเฉลย $y(x)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

$$y'' + y = x^2, y'(0) = -1 \text{ และ } y(0) = 2$$

```
(%i11) kill(x,y)$
desolve(diff(y(x),x,2)+y(x)=x^2,y(x));
```

```
(%o11) y(x) = sin(x) \left( \frac{d}{dx} y(x) \Big|_{x=0} \right) + (y(0) + 2) \cos(x) + x^2 - 2
```

```
(%i15) kill(x,y)$
atvalue(y(x),x=0,2)$
atvalue(diff(y(x),x,1),x=0,-1)$
desolve(diff(y(x),x,2)+y(x)=x^2,y(x));
```

```
(%o15) y(x) = -sin(x) + 4 cos(x) + x^2 - 2
```

การหาผลเฉลย $x(t)$ และ $y(t)$ ของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$x' = x - y + 2$$

$$y' = -x + y - 5$$

$$x(0) = 1 \text{ และ } y(0) = -1$$

```
(%i17) kill(x,y,t)$
desolve( [diff(x(t),t,1)=x(t)-y(t)+2,
diff(y(t),t,1)=-x(t)+y(t)-5],
[x(t),y(t)]
);
```

```
(%o17) [x(t) = - \frac{(2 y(0) - 2 x(0) - 7) \%e^{2t}}{4} - \frac{3t}{2} + \frac{2 y(0) + 2 x(0) - 7}{4},
y(t) = \frac{(2 y(0) - 2 x(0) - 7) \%e^{2t}}{4} - \frac{3t}{2} + \frac{2 y(0) + 2 x(0) + 7}{4}]
```

```
(%i21) kill(x,y,t)$
atvalue(x(t),t=0,1)$
atvalue(y(t),t=0,-1)$
desolve( [diff(x(t),t,1)=x(t)-y(t)+2,
diff(y(t),t,1)=-x(t)+y(t)-5],
[x(t),y(t)]
);
```

```
(%o21) [x(t) = \frac{11 \%e^{2t}}{4} - \frac{3t}{2} - \frac{7}{4}, y(t) = - \frac{11 \%e^{2t}}{4} - \frac{3t}{2} + \frac{7}{4}]
```