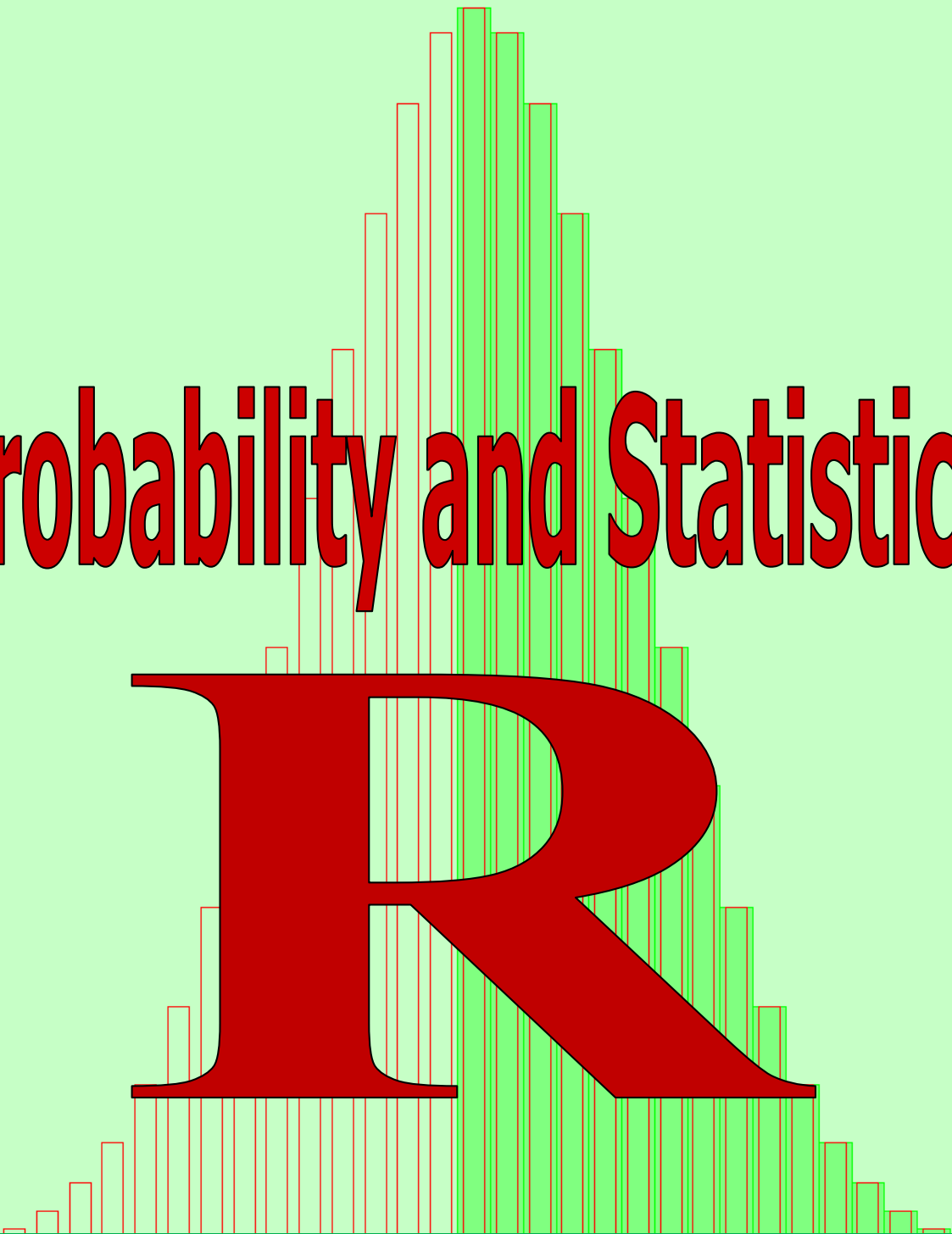


ความน่าจะเป็นและสถิติ
เสริมการคำนวณด้วยโปรแกรม R



Probability and Statistics

R

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ความน่าจะเป็นและสถิติ

เสริมการคำนวณด้วยโปรแกรม R

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : ความน่าจะเป็นและสถิติ เสริมการคำนวณด้วยโปรแกรม R

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : เมษายน พ.ศ. 2561

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-455-364-4

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

หนังสือ ความน่าจะเป็นและสถิติ เสริมการคำนวณด้วยโปรแกรม R มีเนื้อหาเหมาะสำหรับหลักสูตรปริญญาตรีที่ต้องเรียนวิชาความน่าจะเป็นและสถิติ มีเนื้อหาเกี่ยวกับการนับจำนวนวิธี ความน่าจะเป็น ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ค่าคาดหวัง ความแปรปรวน ความแปรปรวนร่วม การแจกแจงทวินาม การแจกแจงปัวส์ซอง การแจกแจงปกติ การแจกแจงปกติมาตรฐาน การแจกแจงไคสแควร์ การแจกแจงที การแจกแจงเอฟ การแจกแจงค่าสถิติจากตัวอย่าง ประมาณค่าและการหาช่วงความเชื่อมั่น การทดสอบสมมติฐาน การสุ่มเพื่อยอมรับคุณภาพของผลิตภัณฑ์ โค้งปฏิบัติการ (OC-curve) การถดถอยเชิงเส้นและสหสัมพันธ์ การวิเคราะห์ความแปรปรวน (ANOVA) พร้อมเสริมการคำนวณด้วยโปรแกรม R

โปรแกรม R Download ได้ที่

<https://cran.r-project.org/bin/windows/base/>

โปรแกรม RStudio Download ได้ที่

<https://www.rstudio.com/products/rstudio/download/>

ตัวอย่าง R Script ของหนังสือ Download ได้ที่

<http://pioneer.netse.chula.ac.th/~tdumrong/2301286data/ProbStatR.rar>

หวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้เรียนและผู้สอนวิชาความน่าจะเป็นและสถิติทุกท่าน

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

หน้า

บทที่ 1 ความน่าจะเป็นและสถิติ 1 – 40

1.1 ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space)	1
1.2 การนับจำนวนจุดตัวอย่าง	6
1.3 ความน่าจะเป็น (Probability)	23
1.4 กฎของความน่าจะเป็น	26
1.5 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)	29
1.6 กฎของเบส์ (Bayes' Rule)	39

บทที่ 2 ตัวแปรสุ่ม 41 – 78

2.1 ตัวแปรสุ่ม (Random Variables)	42
2.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นไม่ต่อเนื่อง (Discrete Probability Distributions)	44
2.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นต่อเนื่อง (Continuous Probability Distributions)	53
2.4 ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม	56
2.5 กฎของการคาดคะเน	61
2.6 ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม	63
2.7 การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกัน (Joint Probability Distributions)	66
2.8 คุณสมบัติของความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม	77

บทที่ 3 การแจกแจงความน่าจะเป็นไม่ต่อเนื่อง 79 – 170

3.1 การแจกแจงยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution)	79
3.2 การแจกแจงแบร์นูลลี (Bernoulli Distribution)	81
3.3 การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)	83
3.4 การแจกแจงเรขาคณิต (Geometric Distribution)	95
3.5 การแจกแจงทวินามลบ (Negative Binomial Distribution)	106
3.6 การแจกแจงพหุนาม (Multinomial Distribution)	117
3.7 การแจกแจงไฮเพอร์จีโอเมตริก (Hypergeometric Distribution)	119
3.8 การแจกแจงปัวส์ซอง (Poisson Distribution)	135
3.9 การสุ่มเพื่อยอมรับคุณภาพของผลิตภัณฑ์	147

บทที่ 4	การแจกแจงความน่าจะเป็นต่อเนื่อง	171 – 236
	4.1 การแจกแจงยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution)	171
	4.2 การแจกแจงปกติ (Normal Distribution)	173
	4.3 การประมาณการแจกแจงทวินามโดยใช้การแจกแจงปกติ	193
	4.4 การแจกแจงแกมมา (Gamma Distribution)	197
	4.5 การแจกแจงเอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential Distribution)	202
	4.6 การแจกแจงไคสแควร์ (Chi-square Distribution)	206
	4.7 การแจกแจงที (t – Distribution)	216
	4.8 การแจกแจงเอฟ (F – distribution)	227
บทที่ 5	การแจกแจงค่าสถิติจากตัวอย่าง	237 – 280
	5.1 ประชากร (Population) และตัวอย่าง (Sample)	237
	5.2 การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง $\bar{X}$ (Sampling Distribution of Means)	240
	5.3 การแจกแจงของผลต่างของค่าเฉลี่ยของตัวอย่าง $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ กรณีประชากรเป็นอิสระต่อกัน (Sampling Distribution of Differences of Means)	252
	5.4 การแจกแจงของค่าเฉลี่ยของผลต่างของตัวอย่าง $\bar{D}$ กรณีประชากรไม่เป็นอิสระต่อกัน (ข้อมูลเป็นคู่)	262
	5.5 การแจกแจงของสัดส่วนผลสำเร็จของตัวอย่าง $\hat{P}$ (Sampling Distribution of Proportions)	265
	5.6 การแจกแจงของผลต่างของสัดส่วนผลสำเร็จของตัวอย่าง $\hat{P}_1 - \hat{P}_2$	268
	5.7 การแจกแจงของความแปรปรวนของตัวอย่าง S^2	273
	5.8 การแจกแจงของค่าอัตราส่วนความแปรปรวนของตัวอย่าง $\frac{S_1^2}{S_2^2}$	278
บทที่ 6	การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยค่าสถิติ	281 – 354
	6.1 การประมาณค่าแบบจุด (Point Estimation)	281
	6.2 การประมาณค่าแบบช่วง (Interval Estimation)	283
	6.3 การประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร μ	284
	6.4 การประมาณค่าผลต่างของค่าเฉลี่ยของประชากรสองชุด	292
	6.5 การประมาณค่าสัดส่วนผลสำเร็จ	319

6.6 การประมาณค่าผลต่างของสัดส่วนผลสำเร็จของประชากรสองชุด	326
6.7 การประมาณค่าความแปรปรวน	330
6.8 การประมาณค่าอัตราส่วนของความแปรปรวนของประชากรสองชุด	334
6.9 การกำหนดขนาดตัวอย่างเพื่อประมาณค่าเฉลี่ย μ ด้วย $\bar{x}$	345
6.10 การกำหนดขนาดตัวอย่างเพื่อประมาณค่าสัดส่วนผลสำเร็จ p ด้วย $\hat{p}$	350

บทที่ 7	การทดสอบสมมติฐาน	355 – 550
----------------	-------------------------	------------------

7.1 สมมติฐานสถิติ (Statistical Hypothesis)	355
7.2 ความผิดพลาดประเภทที่ 1 และ ความผิดพลาดประเภทที่ 2 (Type 1 and Type 2 Errors)	356
7.3 การทดสอบข้างเดียวและสองข้าง (One-tailed Test, Two-tailed Tests)	360
7.4 การทดสอบสมมติฐานค่าสัดส่วนผลสำเร็จของประชากร	361
7.5 การทดสอบสมมติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์	368
7.6 การทดสอบสมมติฐานค่าเฉลี่ย $H_0 : \mu = \mu_0$	382
7.7 การทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = d_0$ กรณีประชากร 2 ชุดเป็นอิสระต่อกัน	403
7.8 การทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \mu_D = d_0$ กรณีประชากร 2 ชุดไม่เป็นอิสระต่อกัน (ข้อมูลเป็นคู่)	459
7.9 การทดสอบสมมติฐานความแปรปรวนประชากร $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$	482
7.10 การทดสอบสมมติฐาน $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$	493
7.11 การทดสอบสมมติฐานค่าสัดส่วนผลสำเร็จ $H_0 : p = p_0$ กรณี $n < 30$	505
7.12 การทดสอบสมมติฐานค่าสัดส่วนผลสำเร็จ $H_0 : p = p_0$ กรณี $n \geq 30$	517
7.13 การทดสอบสมมติฐาน $H_0 : p_1 - p_2 = d_0$	533

บทที่ 8	การทดสอบความเหมาะสมของการแจกแจงและความเป็นอิสระ	551 – 630
----------------	--	------------------

8.1 การทดสอบความเหมาะสมของการแจกแจง (Test of Goodness of Fit)	551
8.2 การทดสอบความเป็นอิสระต่อกัน (Test for Independence)	605

บทที่ 9	การถดถอยและสหสัมพันธ์	631 – 800
----------------	------------------------------	------------------

9.1 การหาสมการเส้นถดถอยเชิงเส้นตรงเชิงเดียว (Simple Linear Regression)	633
9.2 การถดถอยเชิงเส้นตรง (Simple Linear Regression)	637

9.3 ช่วงความเชื่อมั่นของระยะตัดแกน สัมประสิทธิ์การถดถอย และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์	658
9.4 การทดสอบสมมติฐาน ระยะตัดแกน สัมประสิทธิ์การถดถอย และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์	676
9.5 การเลือกรูปแบบความสัมพันธ์ที่ดีที่สุดสำหรับข้อมูล	729
9.6 การถดถอยพหุคูณและสหสัมพันธ์พหุคูณ (Multiple Correlation)	751

บทที่ 10	การวิเคราะห์ความแปรปรวน	801 – 886
-----------------	--------------------------------	------------------

10.1 การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบจำแนกทางเดียว (1-Way ANOVA ; one-way classification)	814
10.2 การวิเคราะห์ความแปรปรวนแบบที่มีการสุ่มอย่างสมบูรณ์ในแต่ละกลุ่ม (2-Way ANOVA ; Randomized Complete Block Designs : RCB)	846

ตารางสถิติ	887 – 909
-------------------	------------------

บทที่ 1

ความน่าจะเป็น

1.1 ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space)

บทนิยาม 1.1.1 เซตที่มีสมาชิก (element) เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองอย่างหนึ่ง เรียกว่า **ปริภูมิตัวอย่าง** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ S

บทนิยาม 1.1.2 สมาชิกตัวหนึ่งของปริภูมิตัวอย่าง เรียกว่า **จุดตัวอย่าง** (sample point)

ตัวอย่าง 1.1.1 ในการทอดลูกเต๋าทิ้งตรง 1 ลูก เพื่อดูแต้มที่ปรากฏ

ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6

เพราะฉะนั้นปริภูมิตัวอย่างคือ $S_1 = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

แต่ถ้าสนใจว่าขึ้นแต้มคู่หรือคี่ ปริภูมิตัวอย่างคือ $S_2 = \{ \text{คู่, คี่} \}$ □

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นว่า ในการทดลองเดียวกันนั้นอาจจะมีเซตของปริภูมิตัวอย่างมากกว่าหนึ่งเซตได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับความสนใจของผู้ทำการทดลอง เมื่อพิจารณาจะเห็นว่า S_1 ให้รายละเอียดมากกว่า S_2

การหยิบไพ่หนึ่งใบออกจากสำรับ ปริภูมิตัวอย่างมีได้หลายแบบเช่น

$S_1 = \{ (1, \text{โพดำ}), (2, \text{โพดำ}), (3, \text{โพดำ}), \dots, (J, \text{ดอกจิก}), (Q, \text{ดอกจิก}), (K, \text{ดอกจิก}) \}$

$S_2 = \{ 1, 2, 3, 4, \dots, 10, J, K, Q \}$

$S_3 = \{ \text{โพดำ, โพแดง, ข้าวหลามตัด, ดอกจิก} \}$

กล่าวคือ ถ้าทราบสมาชิกตัวใดที่เกิดขึ้นใน S_1 จะบอกได้ว่าสมาชิกตัวนั้นเป็นสมาชิกตัวใดใน S_2 และ S_3 แต่ถ้าทราบสมาชิกตัวใด ๆ ใน S_2 เราไม่สามารถจะบอกได้ว่าสมาชิกตัวนั้นเป็นสมาชิกตัวใดใน S_1 โดยทั่วไปเรามักจะใช้ปริภูมิตัวอย่างซึ่งให้รายละเอียดมากที่สุดเกี่ยวกับผลลัพธ์ที่ได้จากการทดลอง

ตัวอย่าง 1.1.2 ในการปาเป้า 2 ครั้ง ถ้าให้ H แทนการปาถูกเป้า และให้ M แทนการปาผิดเป้า ปริภูมิตัวอย่างที่ให้รายละเอียดมากที่สุดปริภูมิตัวอย่างคือ $S_1 = \{ H H, H M, M H, M M \}$

ถ้าเราสนใจจำนวนครั้งที่ปาถูกเป้าจะได้ปริภูมิตัวอย่าง $S_2 = \{ 0, 1, 2 \}$ □

ตัวอย่าง 1.1.3 ในการตรวจสอบสินค้าที่ผลิตโดยเครื่องจักรของโรงงานแห่งหนึ่ง ได้หยิบสินค้ามา 3 ชิ้น โดยวิธีสุ่ม (random) แล้วตรวจสอบสภาพทีละชิ้นว่าดีหรือชำรุด ให้สินค้าที่ตรวจแล้วมีสภาพดีแทนด้วย N และสินค้าที่ตรวจแล้วมีสภาพชำรุดแทนด้วย D ปริภูมิตัวอย่างที่ให้รายละเอียดมากที่สุดคือ

$$S_1 = \{ N N N, N N D, N D N, N D D, D N N, D N D, D D N, D D D \}$$

ถ้าสนใจจำนวนสินค้าที่ชำรุดจากสินค้าที่หยิบมา 3 ชิ้น ปริภูมิตัวอย่างคือ $S_2 = \{ 0, 1, 2, 3 \}$ □

เหตุการณ์ (Event)

บทนิยาม 1.1.3 เหตุการณ์ (Event) คือสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง

จากบทนิยามจะได้ S และ $\emptyset$ เป็นเหตุการณ์ด้วย

ตัวอย่าง 1.1.4 ในการตรวจสอบสภาพสินค้าตามตัวอย่าง 1.1.3 ปริภูมิตัวอย่างคือ

$$S = \{ N N N, N N D, N D N, D N N, N D D, D N D, D D N, D D D \}$$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่พบจำนวนของชำรุดมากกว่า 1 ชิ้น จะได้ $B = \{ N D D, D N D, D D N, D D D \}$

ซึ่งจะเห็นว่า B เป็นสับเซตของ S □

ตัวอย่าง 1.1.5 ในการตรวจสอบอายุการใช้งานของหลอดภาพโทรทัศน์

ให้ t แทนอายุการใช้งานของหลอดภาพมีหน่วยเป็นปี

ปริภูมิตัวอย่างคือ $S = \{ t \mid t \geq 0 \}$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่หลอดภาพชำรุดก่อนครบ 5 ปี

เพราะฉะนั้น $E = \{ t \mid 0 \leq t < 5 \}$ □

บทนิยาม 1.1.4 เหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างเพียง 1 ตัว เราเรียกว่า **เหตุการณ์เชิงเดียว** (simple event)

เหตุการณ์เชิงประกอบ (compound event) คือเซตที่สามารถเขียนได้เป็นยูเนียน (union) ของเหตุการณ์เชิงเดียว

ตัวอย่าง 1.1.6 ในการหยิบไฟ 1 ใบ จากไฟสำหรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ

ถ้าสนใจชุดของไฟ แล้ว ปริภูมิตัวอย่างคือ $S = \{ \text{โพล่า, โพลแดง, ข้าวหลามตัด, ดอกจิก} \}$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไฟได้โพลแดง

และ B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบไฟได้โพลแดงหรือโพลดำ

เพราะฉะนั้น $A = \{ \text{โพลแดง} \}$

$B = \{ \text{โพลแดง} \} \cup \{ \text{โพลดำ} \} = \{ \text{โพลแดง, โพลดำ} \}$ □

จากตัวอย่างข้างต้น A เป็นเหตุการณ์เชิงเดียว และ B เป็นเหตุการณ์เชิงประกอบ เพราะฉะนั้นจะเห็นว่า เหตุการณ์เชิงประกอบก็เป็นสับเซตของปริภูมิตัวอย่างด้วย

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 1.1.6 กรณีสัมผัสตัวอย่างมีสมาชิก 52 ตัว

จะได้ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{ (1, \text{โพดำ}), (2, \text{โพดำ}), (3, \text{โพดำ}), (1, \text{โพดำ}), \dots, (Q, \text{ดอกจิก}), (K, \text{ดอกจิก}) \}$

เพราะว่าเหตุการณ์ $A = \{ (1, \text{โพแดง}), (2, \text{โพแดง}), (3, \text{โพแดง}), \dots, (J, \text{โพแดง}), (Q, \text{โพแดง}), (K, \text{โพแดง}) \}$

เพราะฉะนั้นเหตุการณ์ A เป็นเหตุการณ์เชิงประกอบ

เพราะฉะนั้นจึงใช้คำจำกัดความของเซตเพื่อหาเหตุการณ์ในลักษณะต่าง ๆ ดังนี้

1. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ ยูเนียนของเหตุการณ์ A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ A หรือสมาชิกของเหตุการณ์ B หรือสมาชิกของทั้งสองเหตุการณ์ เช่น ในการทอดลูกเต๋าเพียงตรง 1 ลูก 2 ครั้ง

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่จะได้แต้มเหมือนกันทั้งสองครั้ง

B เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของแต้มมากกว่า 10

จะได้ $A = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \}$

$B = \{ (5, 6), (6, 5), (6, 6) \}$

$A \cup B = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (5, 6), (6, 5) \}$

เพราะฉะนั้น $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ที่จะได้แต้มเหมือนกันทั้งสองครั้ง หรือได้ผลรวมของแต้มมากกว่า 10

2. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ อินเตอร์เซกชัน (intersection) ของเหตุการณ์ A และ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของทั้งเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เช่น ในการสอบคัดเลือกเข้าเรียนโรงเรียนนายร้อยตำรวจ

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องเป็นชาย

B เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องมีสัญชาติไทย

เพราะฉะนั้นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องเป็นชายและมีสัญชาติไทย คือ $A \cap B$

หรือจากตัวอย่างของการทอดลูกเต๋าคือในข้อ 1. ข้างต้น $A \cap B = \{ (6, 6) \}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ที่ได้แต้มเหมือนกันและผลรวมของแต้มมากกว่า 10

3. ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S แล้ว ส่วนเติมเต็ม (complement) ของเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A' คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ A เช่น ในการทอดลูกเต๋าเพียงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง ปริภูมิตัวอย่างคือ $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่จะได้แต้มอย่างน้อย 5 แล้ว $A = \{ 5, 6 \}$

เพราะฉะนั้นส่วนเติมเต็มของ A คือเหตุการณ์ที่จะได้แตมน้อยกว่า 5 เพราะฉะนั้น $A' = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

ข้อสังเกต $A \cup A' = S$ และ $A \cap A' = \emptyset$

4. ให้ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ n เหตุการณ์

$\bigcup_{i=1}^n A_i$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์อย่างน้อยที่สุดหนึ่งเหตุการณ์ในบรรดาเหตุการณ์

$A_i, i = 1, 2, \dots, n$

เช่น หยิบลูกบอล 3 ลูก จากกล่องซึ่งมีลูกบอลสีขาว 4 ลูก สีแดง 3 ลูก

ถ้า A_1, A_2 และ A_3 เป็นเหตุการณ์ที่จะได้ลูกบอลสีขาว 1 ลูก, 2 ลูก และ 3 ลูก ตามลำดับ

แล้วเหตุการณ์ที่จะหยิบลูกบอล 3 ลูก ได้สีขาวอย่างน้อย 1 ลูก คือ $A_1 \cup A_2 \cup A_3$

5. ให้ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ n เหตุการณ์

$\bigcap_{i=1}^n A_i$ คือเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกของทุกเหตุการณ์ในบรรดาเหตุการณ์ $A_i, i = 1, 2, \dots, n$

เช่น ในการสอบคัดเลือกเข้าเรียนโรงเรียนนายร้อยตำรวจ

ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องเป็นชาย

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องมีสัญชาติไทย

A_3 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องมีอายุไม่เกิน 18 ปี

A_4 เป็นเหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องจบการศึกษา ม. 4

เหตุการณ์ที่ผู้สมัครต้องเป็นชายสัญชาติไทยมีอายุไม่เกิน 18 ปี และจบการศึกษา ม. 4

คือ $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$

บทนิยาม 1.1.5 ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ เรากล่าวว่า เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive) ถ้า $A \cap B = \emptyset$

เราอาจกล่าวว่า เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ถ้าเหตุการณ์ทั้งสองไม่สามารถเกิดขึ้นในเวลาเดียวกัน

ตัวอย่าง 1.1.7 ทอดลูกเต๋าเพียงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้มคู่ และ B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋ารับแต้มคี่

เพราะฉะนั้น $A = \{ 2, 4, 6 \}$ และ $B = \{ 1, 3, 5 \}$ เพราะฉะนั้น $A \cap B = \emptyset$

เพราะฉะนั้น A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

ถ้าพิจารณาจากเหตุการณ์ทั้งสอง แล้วจะเห็นว่าในการทอดลูกเต๋าเพียงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง แต้มที่ขึ้นจะเป็นแต้มคู่และแต้มคี่ในเวลาเดียวกันไม่ได้ เพราะฉะนั้นเราจึงสามารถสรุปได้ว่าเหตุการณ์ทั้งสองเป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน โดยไม่จำเป็นต้องหาอินเตอร์เซกชันของเหตุการณ์

บทนิยาม 1.1.6 ในการทดลองที่ทำซ้ำกัน n ครั้ง **ความถี่สัมพัทธ์** (relative frequency) ของเหตุการณ์ A คือ $f_A = \frac{n(A)}{n}$ เมื่อ $n(A)$ คือจำนวนครั้งที่เกิดเหตุการณ์ A

คุณสมบัติที่สำคัญของความถี่สัมพัทธ์ มีดังนี้

1. $0 \leq f_A \leq 1$
2. ถ้าเหตุการณ์ A เกิดขึ้นทุก ๆ ครั้งที่ทำทดลองซ้ำกัน n ครั้ง แล้ว $f_A = 1$
3. ถ้าเหตุการณ์ A ไม่เกิดขึ้นเลย ในการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง แล้ว $f_A = 0$
4. ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

และ $f_{A \cup B}$ เป็นความถี่สัมพัทธ์ของเหตุการณ์ $A \cup B$

แล้ว $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

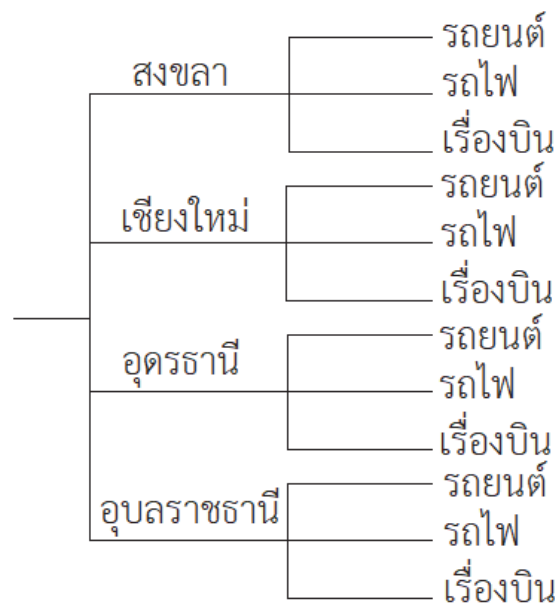
5. ถ้าทำการทดลองซ้ำกัน n ครั้ง แล้วค่าของ f_A ซึ่งเป็นฟังก์ชันของ n จะลู่เข้า (converge) สู่ค่าของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เมื่อ n มีค่ามาก

1.2 การนับจำนวนจุดตัวอย่าง

การหาจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง สามารถทำได้โดยการแจงนับจากสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง แต่อาจไม่สะดวกในการทำงาน ในหัวข้อนี้เราจะหาจำนวนจุดตัวอย่าง หรือหาจำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นได้ทั้งหมดในปริภูมิตัวอย่างโดยไม่ต้องแจงสมาชิกทุกตัวของปริภูมิตัวอย่าง

ตัวอย่าง 1.2.1 ชายคนหนึ่งต้องการเดินทางไปทัศนจรในระหว่างวันหยุดประจำปี เขาต้องการเดินทางไปยังจังหวัดใดจังหวัดหนึ่งใน 4 จังหวัด คือ สงขลา เชียงใหม่ อุดรธานี อุบลราชธานี โดยรถยนต์ หรือรถไฟ หรือเครื่องบิน จงหาวิธีต่าง ๆ กันที่เขาจะเลือกเดินทางไปทัศนจรครั้งนี้

วิธีทำ เพื่อความสะดวกอาจใช้แผนภาพต้นไม้ (tree diagram) ช่วยในการคิดได้ดังนี้



รูปที่ 1.1

เมื่อดูจากแผนภาพต้นไม้จะมีวิธีเลือกเดินทางต่าง ๆ กัน 12 วิธี

เราอาจจะคิดหาคำตอบสั้น ๆ ได้ดังนี้ มีวิธีเลือกจังหวัดที่จะไปได้ 4 วิธี

ในแต่ละวิธีที่เลือกจังหวัดจะมีวิธีเลือกการเดินทางได้ 3 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะเลือกเดินทางไปทัศนจร = $4 \times 3 = 12$ วิธี



โดยทั่วไปเราสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2.1 การทำงานชิ้นหนึ่งมีขั้นตอนการทำงาน 2 ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 มีทางเลือกในการทำงานได้ n_1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีทางเลือกในการทำงานได้ n_2 วิธี

จะได้จำนวนวิธีทำงานชิ้นนั้นเท่ากับ $n_1 n_2$ วิธี



ตัวอย่าง 1.2.2 ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน จงหาจำนวนจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่าง

วิธีทำ ในการทอดลูกเต๋า ลูกเต๋าแต่ละลูกอาจได้แต้มต่างกันได้คือ 1, 2, 3, 4, 5, 6

เพราะฉะนั้นลูกเต๋าลูกที่หนึ่งมีวิธีขึ้นได้ 6 วิธี ในแต่ละวิธีที่ลูกเต๋าลูกที่หนึ่งขึ้น ลูกเต๋าลูกที่ 2 ขึ้นได้ 6 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่ลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก จะขึ้นได้ $= 6 \times 6 = 36$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่าง $= 36$ จุด



ขยายทฤษฎีบท 1.2.1 ใ้กับการทำงานขึ้นหนึ่งที่มีขั้นตอนมากกว่า 2 ขั้นตอนขึ้นไป

จะได้ทฤษฎีทั่วไปสำหรับคำนวณหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะทำงาน k ขั้นตอนได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2.2 การทำงานขึ้นหนึ่งมีขั้นตอนการทำงาน k ขั้นตอน

ขั้นตอนที่ 1 มีทางเลือกในการทำงานได้ n_1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีทางเลือกในการทำงานได้ n_2 วิธี

:

ขั้นตอนที่ k มีทางเลือกในการทำงานได้ n_k วิธี

จะได้จำนวนวิธีทำงานขึ้นนั้นเท่ากับ $n_1 n_2 \dots n_k$ วิธี



ตัวอย่าง 1.2.3 เมื่อโยนเหรียญ 3 อัน พร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่เหรียญจะขึ้น

วิธีทำ ในการโยนเหรียญอันแรกมีวิธีขึ้นได้ 2 วิธี คือหัวหรือก้อย เพราะฉะนั้นเหรียญอันแรกมีวิธีขึ้นได้ 2 วิธี

ในแต่ละวิธีที่เหรียญอันแรกขึ้น เหรียญอันที่สองจะขึ้นได้ 2 วิธี

ในแต่ละวิธีที่เหรียญอันแรกและเหรียญอันที่สองขึ้น เหรียญอันที่สามจะขึ้นได้ 2 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่เหรียญ 3 อัน จะขึ้นได้ $= 2 \times 2 \times 2 = 8$ วิธี



หมายเหตุ โดยทั่วไป สรุปได้ดังนี้

1. โยนเหรียญเที่ยงตรง n อัน พร้อมกัน 1 ครั้ง (หรือโยนเหรียญ 1 อัน n ครั้ง)

จำนวนวิธีที่เหรียญจะขึ้น $= 2^n$

2. ทอดลูกเต๋ายุ่งตรง n ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง (หรือทอดลูกเต๋ายุ่งตรง 1 ลูก n ครั้ง)

จำนวนวิธีที่ลูกเต๋ายุ่งจะขึ้น $= 6^n$

ตัวอย่าง 1.2.4 ภัตตาคารแห่งหนึ่งจัดอาหารไว้บริการลูกค้า โดยจัดเครื่องดื่ม 6 ชนิด อาหารคาว 14 ชนิด และของหวาน 7 ชนิด จงหาจำนวนวิธีที่ลูกค้าจะสั่งอาหารและเครื่องดื่มซึ่งประกอบด้วยเครื่องดื่ม 1 ชนิด อาหารคาว 1 ชนิด และของหวาน 1 ชนิด

วิธีทำ มีวิธีเลือกเครื่องดื่มได้ 6 วิธี

ในแต่ละวิธีเลือกเครื่องดื่ม จะเลือกอาหารคาวได้ 14 วิธี

ในแต่ละวิธีที่เลือกเครื่องดื่มและอาหารคาว จะเลือกของหวานได้ 7 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกสั่งเครื่องดื่ม อาหารคาว และของหวาน $= 6 \times 14 \times 7 = 588$ วิธี □

ตัวอย่าง 1.2.5

ก. มีจำนวนซึ่งประกอบด้วยเลข 3 หลักต่าง ๆ กันกี่จำนวน ซึ่งจัดจากตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5 โดยให้เลขแต่ละตัวใช้ได้ครั้งเดียวเท่านั้น

ข. มีจำนวนกี่จำนวนตามที่กล่าวในข้อ ก. ที่เป็นจำนวนคี่

วิธีทำ

ก.

ขั้นที่ 1 ตัวเลขหลักร้อยเลือกได้ 5 วิธี คือตัวหนึ่งตัวใดในเซต { 1, 2, 3, 4, 5 }

ขั้นที่ 2 ในแต่ละวิธีที่จัดเลขหลักร้อย

เลขหลักสิบจัดได้ 5 วิธีจาก { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } – { เลขที่ถูกใช้แล้วในขั้นที่ 1 }

ขั้นที่ 3 ในแต่ละวิธีที่จัดเลขหลักร้อย และ เลขหลักสิบ แล้วเลือกเลขหลักหน่วยได้ 4 วิธี

จาก { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } – { เลขที่ถูกใช้แล้วในขั้นที่ 1, เลขที่ถูกใช้แล้วในขั้นที่ 2 }

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่จะได้เลข 3 หลักต่างกัน $= 5 \times 5 \times 4 = 100$ จำนวน

ข.

ขั้นที่ 1 ตัวเลขหลักหน่วยเลือกได้ 3 วิธีจาก { 1, 3, 5 }

ขั้นที่ 2 ตัวเลขหลักร้อยเลือกได้ 4 วิธีจาก { 1, 2, 3, 4, 5 } – { เลขคี่ที่ถูกใช้แล้วในขั้นที่ 1 }

ขั้นที่ 3 ตัวเลขหลักสิบเลือกได้ 4 วิธี

จาก { 0, 1, 2, 3, 4, 5 } – { เลขคี่ที่ถูกใช้แล้วในขั้นที่ 1, เลขที่ถูกใช้แล้วในขั้นที่ 2 }

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่จะได้เลขคี่ $= 3 \times 4 \times 4 = 48$ จำนวน □

วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation)

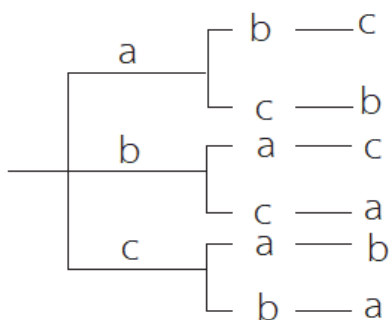
บทนิยาม 1.2.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนคือการเรียงลำดับของบางสิ่งหรือทุกสิ่งในเซตโดยคำนึงถึงลำดับที่

ตัวอย่างเช่น มีอักษร 3 ตัว a, b, c เรียงสับเปลี่ยนคราวละ 3 ตัว

จะได้ 6 วิธีต่างกันได้คือ (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)

ซึ่งการหาคำตอบอาจทำได้ 2 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ใช้แผนภาพต้นไม้



รูปที่ 1.2

วิธีที่ 2 ใช้ทฤษฎีบท 1.2.2 ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ 3 วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ 2 วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 และ 2 ตำแหน่งที่ 3 จัดได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด คือ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี



กรณีทั่วไป

ถ้ามีของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เรียงสับเปลี่ยนคราวละ n สิ่ง

แล้วจำนวนวิธีที่จะจัดได้ทั้งหมดคือ $n(n - 1)(n - 2) \dots (3)(2)(1)$

และแทนด้วยสัญลักษณ์ $n!$ ซึ่งอ่านว่า n แฟคทอเรียล (n-factorial)

บทนิยาม 1.2.2 n แฟคทอเรียล หมายถึงผลคูณของเลขจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 1 ถึง n

เพราะฉะนั้น $n! = n(n - 1)(n - 2) \dots (3)(2)(1)$

การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> prod(1:5)
[1] 120
> prod(1:10)
[1] 3628800
> factorial(5)
[1] 120
> factorial(10)
[1] 3628800
```

ทฤษฎีบท 1.2.3 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยนำมาเรียงสับเปลี่ยนทีละ n สิ่ง มีค่าเท่ากับ $n!$ วิธี

ข้อพิสูจน์ ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ n วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ $(n - 1)$ วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1, 2 ตำแหน่งที่ 3 จัดได้ $(n - 2)$ วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1, 2, 3 ตำแหน่งที่ 4 จัดได้ $(n - 3)$ วิธี

:

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1, 2, ..., $(n - 1)$ ตำแหน่งที่ n จัดได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด

จัดทีละ n สิ่ง = $n(n - 1)(n - 2) \dots (3)(2)(1) = n!$ วิธี □

ในกรณีที่ต้องการเรียงสับเปลี่ยนของเพียงบางส่วนจากของทั้งหมด เช่น มีอักษร 4 ตัว คือ a, b, c, d นำมาเรียงสับเปลี่ยนคราวละ 2 ตัว จะได้ 12 วิธี คือ

$ab \ ac \ ad$

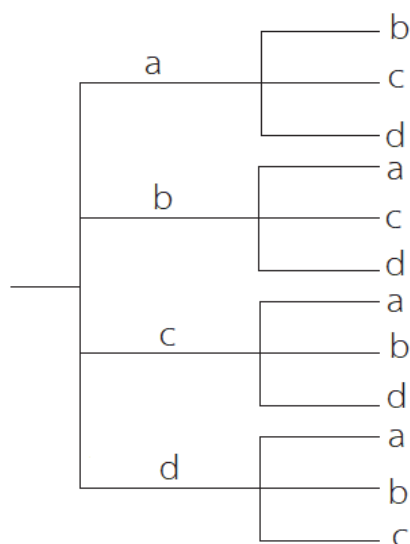
$ba \ bc \ bd$

$ca \ cb \ cd$

$da \ db \ dc$

ซึ่งการหาคำตอบอาจทำได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 โดยใช้แผนภาพต้นไม้



รูปที่ 1.3

วิธีที่ 2 โดยใช้ทฤษฎีบท 1.2.1 ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ 4 วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ 3 วิธี

เพราะฉะนั้นวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัวต่างกัน จัดคราวละ 2 ตัว = $4 \times 3 = 12$ วิธี □

ทฤษฎีบท 1.2.4 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด โดยเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง เมื่อ $r < n$ เท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

ข้อพิสูจน์ ตำแหน่งที่ 1 จัดได้ n วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งที่ 2 จัดได้ $(n-1)$ วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1, 2 ตำแหน่งที่ 3 จัดได้ $(n-2)$ วิธี

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1, 2, 3 ตำแหน่งที่ 4 จัดได้ $(n-3)$ วิธี

:

ในแต่ละวิธีของการจัดตำแหน่งที่ 1, 2, ..., $(r-1)$ ตำแหน่งที่ r จัดได้ $(n-(r-1))$ วิธี

เพราะฉะนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด นำมาเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง

$$= n(n-1)(n-2) \dots (n-(r-1))$$

$$= n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1)(n-r)(n-r-1)(n-r-2) \dots (3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2) \dots (3)(2)(1)}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$



ข้อตกลง ใช้สัญลักษณ์ ${}^n P_r$ หรือ nPr หรือ $(n)_r$ หรือ $P(n, r)$ หรือ $P_{n,r}$ แทนจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง

$${}^n P_r = n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}^n P_n = n(n-1)(n-2) \dots (3)(2)(1) = n!$$

$$\text{จาก } {}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ เพราะฉะนั้น } {}^n P_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}$$

$$\text{แต่ } {}^n P_n = n! \text{ เพราะฉะนั้น } n! = \frac{n!}{0!} \text{ ซึ่งจะเป็นได้ ก็ต่อเมื่อ } 0! = 1$$

บทนิยาม 1.2.3 กำหนดค่า $0! = 1$

การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> npr=function(n,r) factorial(n)/factorial(n-r)
> npr(5,2)
[1] 20
> npr(20,2)
[1] 380
> npr(10,4)
[1] 5040
> npr(12,4)
[1] 11880
```

ตัวอย่าง 1.2.6 จงหาจำนวนวิธีที่จะจับสลากรางวัลที่ 1 และรางวัลที่ 2 จากสลาก 20 ใบ

วิธีทำ แบบที่ 1 จำนวนวิธีจับสลาก 2 ใบ จาก 20 ใบ เพื่อให้ได้รางวัลที่ 1 และรางวัลที่ 2 คือ

ขั้นตอนที่ 1 มีทางเลือกเพื่อให้ได้รางวัลที่ 1 ทำได้ 20 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 มีทางเลือกเพื่อให้ได้รางวัลที่ 2 ทำได้ 19 วิธี

จะได้จำนวนวิธีจับสลากเท่ากับ $(20)(19) = 380$ วิธี

แบบที่ 2 จำนวนวิธีจับสลาก 2 ใบ จาก 20 ใบ เพื่อให้ได้รางวัลที่ 1 และรางวัลที่ 2 โดยใช้สูตร ${}^{20}P_2$

$$\text{จำนวนวิธีจับสลาก} = {}^{20}P_2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{(18!)(19)(20)}{18!} = (19)(20) = 380 \text{ วิธี}$$



ตัวอย่าง 1.2.7 ในการสัมมนาครูสอนคณิตศาสตร์ซึ่งจัดโดยสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยจัดให้มี 5 วัน คือวันจันทร์ถึงวันศุกร์สัปดาห์แรกของเดือนเมษายน สมาคมเชิญผู้ทรงคุณวุฒิ 3 คน มาบรรยายโดยให้บรรยายคนละวัน ถ้าผู้ทรงคุณวุฒิทั้งสามคนว่างทั้ง 5 วันนั้น จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดวันสำหรับผู้ทรงคุณวุฒิทั้งสามคน

วิธีทำ แบบที่ 1

ขั้นที่ 1 ผู้ทรงคุณวุฒิคนที่ 1 เลือกวันได้ 5 วัน (จันทร์ถึงศุกร์ของสัปดาห์)

ขั้นที่ 2 ผู้ทรงคุณวุฒิคนที่ 2 เลือกวันได้ 4 วัน

ขั้นที่ 3 ผู้ทรงคุณวุฒิคนที่ 3 เลือกวันได้ 3 วัน

จำนวนวิธีที่จะจัดวันให้ผู้ทรงคุณวุฒิทั้งสามคน $= 5 \times 4 \times 3 = 60$ วิธี

แบบที่ 2 พิจารณาการนับเป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ 3 สิ่ง (ผู้ทรงคุณวุฒิ) จาก 5 สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด

$$\text{จำนวนวิธีที่จะจัดวันให้ผู้ทรงคุณวุฒิทั้งสามคน} = {}^5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ วิธี}$$



ตัวอย่าง 1.2.8 ก. จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดให้นักเรียน 5 คน เข้าแถวเพื่อขึ้นรถโรงเรียน

ข. จากข้อ ก. ถ้ามีนักเรียนสองคนไม่ยอมยืนชิดกัน จงหาว่าจะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ

ก. จำนวนวิธีที่นักเรียน 5 คน จะเข้าแถว $= 5! = 120$ วิธี

ข. ถ้าจัดให้นักเรียน 2 คนนั้นยืนชิดกัน มีวิธีเข้าแถวได้ $2 \times 4!$ วิธี

เพราะว่าวิธีที่นักเรียนทั้ง 5 คน จะเข้าแถว $= 5!$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่นักเรียน 5 คน จะเข้าแถวโดยที่นักเรียน 2 คนนั้นไม่ยอมยืนชิดกัน

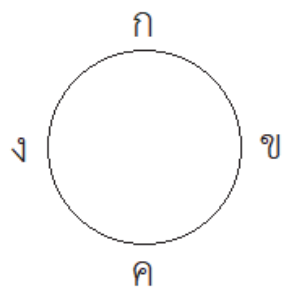
$$= 5! - 2(4!)$$

$$= 4!(5 - 2)$$

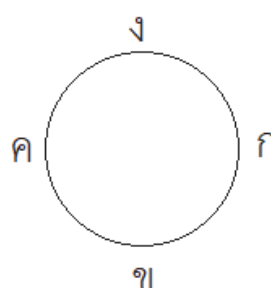
$$= 72 \text{ วิธี}$$



วิธีเรียงสับเปลี่ยนที่กล่าวมาแล้ว เป็นการเรียงสับเปลี่ยนในแนวนตรง ถ้าต้องการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะต่างจากการจัดเป็นแนวนตรง เช่นจัดให้ 4 คนนั่งเรียงแถวจะจัดได้ทั้งหมด $4! = 24$ วิธี แต่ถ้าจัดเป็นวงกลมเช่นนั่งรอบโต๊ะกลมซึ่งมี 4 ที่นั่ง จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนจะลดลงทั้งนี้เพราะการจัดเป็นวงกลมนั้น ถ้าให้แต่ละคนเลื่อนตำแหน่งที่นั่งไป 1 ที่ ก็ยังคงถือว่าเป็นวิธีเดิมอยู่ มิใช่วิธีใหม่ ดังรูปที่ 1.4 และรูปที่ 1.5 ซึ่งในเรื่องของการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมถือว่าไม่แตกต่างกัน

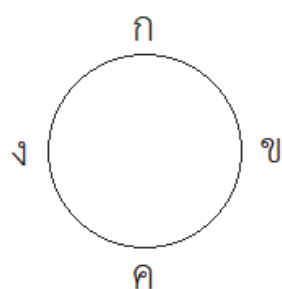


รูปที่ 1.4

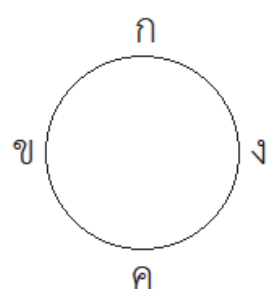


รูปที่ 1.5

การที่จะถือว่าเป็นวิธีแตกต่างกัน จะต้องเป็นดังรูปที่ 1.6 และรูปที่ 1.7



รูปที่ 1.6



รูปที่ 1.7

กล่าวคือจากรูปที่ 1.7 ถ้าดูในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ข ไม่ได้อยู่ถัดจาก ก หรือถ้าดูในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ง ไม่ได้อยู่ถัดจาก ก เหมือนที่เป็นไปในรูปที่ 1.6

ในการคิดวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลม มีหลักอยู่ว่าจะต้องให้สิ่งหนึ่งสิ่งใดอยู่กับที่ แล้วเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหลือ เช่น ให้ ก นั่งอยู่ในตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วจัดเรียงสับเปลี่ยนคนที่เหลือคือ ข, ค และ ง จะได้วิธีต่างกัน $3!$ หรือ 6 วิธี

เพราะฉะนั้นในการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n สิ่งเป็นวงกลม เมื่อให้ของสิ่งหนึ่งอยู่กับที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่งแล้วของที่เหลือ $n - 1$ สิ่ง จะจัดเรียงสับเปลี่ยนได้ $(n - 1)!$ วิธี

ทฤษฎีบท 1.2.5

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนแบบวงกลมของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด มีค่าเท่ากับ $(n - 1)!$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2.9

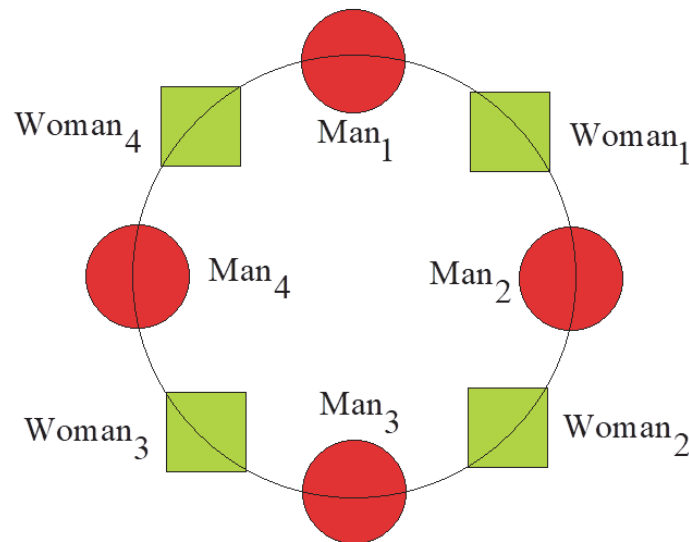
ก. จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดหญิง 4 คน และชาย 4 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลม

ข. จากข้อ ก. มีกี่วิธีที่ชายและหญิงจะนั่งสลับที่กัน

วิธีทำ

ก. จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนคน 8 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลม $= (8 - 1)! = 7! = 5040$ วิธี

ข. การหาจำนวนวิธีที่ชายและหญิงจะนั่งสลับที่กัน



ขั้นที่ 1 ให้ชาย 4 คนเข้าไปนั่งในแนววงกลม (ที่นั่งสีแดง) จัดได้ $(4 - 1)! = 3!$ วิธี

ขั้นที่ 2 ให้หญิง 4 คนเข้าไปนั่ง (ที่นั่งสีเขียว) จัดได้ 4! วิธี

หมายเหตุ เพราะว่ามีชาย 4 คนนั่งอยู่ในวงกลมแล้ว เมื่อหญิง 4 คนเข้าไปนั่งจึงมีวิธีที่แตกต่างกัน 4! วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนชาย 4 คน และหญิง 4 คน นั่งสลับที่เป็นวงกลม $= 3! \times 4! = 144$ วิธี



วิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งไม่ต่างกันทั้งหมด

เมื่อพิจารณาการจัดอักษรเรียงสับเปลี่ยนทีละ 3 ตัว คือ a, b, c เรียงสับเปลี่ยนทีละ 3 ตัว จะได้ 6 วิธี ดังนี้
 $(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), (a, c, b), (b, a, c), (c, b, a)$

ถ้า b และ c เหมือนกัน แล้ว สมมติให้ a และ b เป็น x เพราะฉะนั้น 6 วิธีที่จัดได้ครั้งแรกจะกลายเป็น
 $(a, x, x), (x, x, a), (x, a, x), (a, x, x), (x, a, x), (x, x, a)$

มีเพียง 3 วิธีที่แตกต่างกัน คือ $(a, x, x), (x, x, a), (x, a, x)$ ซึ่งคำนวณหาคำตอบได้ดังนี้

ให้ P เป็นจำนวนวิธีที่จัดได้

ถ้า b และ c ไม่เหมือนกัน แล้วในแต่ละวิธีที่จัด (ซึ่งมี P วิธี) สามารถสลับที่ b และ c ได้อีก $2!$ วิธี
 เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสำหรับกรณีดังกล่าวคือ $P \times 2!$ วิธี

แต่จัดของ 3 สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดทำได้ $3!$ วิธี เพราะฉะนั้น $2! \times P = 3!$ เพราะฉะนั้น $P = \frac{3!}{2!}$

ในกรณีที่อักษร 4 ตัวซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด จะจัดได้ $4! = 24$ วิธี

ถ้าให้ a และ b คือ x และให้ c และ d คือ y แล้วจะเหลือวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกันเพียง 6 วิธี ดังนี้
 $(x, x, y, y), (x, y, x, y), (y, x, x, y), (y, y, x, x), (x, y, y, x)$ และ (y, x, y, x)

ซึ่งคำนวณหาคำตอบได้ดังนี้ ให้ P เป็นจำนวนวิธีที่จัดได้

เพราะว่า ถ้า a และ b ไม่เหมือนกัน แล้วในแต่ละวิธีที่จัดได้ (ซึ่งมี P วิธี) สามารถสลับที่ได้ $2!$ วิธี

และ ถ้า c และ d ไม่เหมือนกัน แล้วในแต่ละวิธีที่จัดได้ (ซึ่งมี P วิธี) สามารถสลับที่ได้ $2!$ วิธี

เพราะฉะนั้น ถ้า a, b, c, d ไม่เหมือนกันทั้ง 4 ตัว แล้วจะจัดได้ $P \times 2! \times 2!$ วิธี

แต่การจัดของ 4 สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดสามารถจัดได้ $4!$ วิธี เพราะฉะนั้น $P \times 2! \times 2! = 4!$

เพราะฉะนั้น $P = \frac{4!}{2! 2!} = 6$

ในทำนองเดียวกัน (a, a, a, b, b, b) เรียงสับเปลี่ยนได้ $\frac{6!}{3! 3!} = 20$ วิธี

ทฤษฎีบท 1.2.6 การเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง ซึ่งมีการซ้ำกัน k ชนิด โดยที่

ชนิดที่ 1 มี n_1 สิ่งเหมือนกัน

ชนิดที่ 2 มี n_2 สิ่งเหมือนกัน

:

ชนิดที่ k มี n_k สิ่งเหมือนกัน จะได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเท่ากับ $\frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2.10 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเหลือง 4 หลอด และสีน้ำเงิน 2 หลอด เพื่อประดับรั้ว ถ้าสายไฟมีขั้วสำหรับใส่หลอดอยู่ 9 อัน

วิธีทำ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน = $\frac{9!}{3! 4! 2!} = 1260$ วิธี



การจัดหมู่ (Combination)

บทนิยาม 1.2.3 การจัดหมู่ของเซตของสิ่งของ คือการหาสับเซตใด ๆ ของเซต โดยไม่คำนึงถึงลำดับที่อยู่ในสับเซตนั้น จำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด จัดหมู่ทีละ r สิ่ง คือจำนวนสับเซตที่ได้จากเซตของ n สิ่ง แต่ละสับเซตประกอบด้วยของ r สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เช่น มีเซต $\{a, b, c\}$

สับเซตที่มีสมาชิก 2 ตัว คือ $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

เพราะฉะนั้นถ้ามีอักษร a, b, c เลือกมาทีละ 2 ตัว จะได้ 3 วิธี ดังนี้ $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$

เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนจะได้ว่าแต่ละวิธีที่จัดหมู่หรือเลือกมาสามารถนำมาสลับที่ได้อีก 2! วิธี

เพราะฉะนั้นจะจัดได้ 6 วิธี ดังนี้ ab, ac, bc, ba, ca, cb

ในการหาสูตรการเลือกของ r สิ่ง จาก n สิ่ง ทำได้ดังนี้

ให้ $\binom{n}{r}$ เป็นจำนวนวิธีเลือกของ r สิ่งจาก n สิ่งซึ่งแตกต่างกัน

ในแต่ละวิธีที่เลือกมาเมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนจะได้ $r!$ วิธี

เพราะฉะนั้น $\binom{n}{r} r! =$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดโดยเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่ง

$$= {}^n P_r$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \binom{n}{r} = \frac{{}^n P_r}{r!} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ ในตำราบางเล่มอาจแทนด้วย ${}^n C_r$ หรือ nCr หรือ $C(n, r)$

ทฤษฎีบท 1.2.7 จำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด จัดหมู่ทีละ r สิ่ง คือ $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$ วิธี

ทฤษฎีบทประกอบ 1.2.8 จำนวนวิธีจัดหมู่ของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด จัดหมู่ทีละ $n - r$ สิ่ง จะเท่ากับ

จำนวนวิธีจัดหมู่ของทีละ r สิ่ง คือ $\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = \binom{n}{r}$ วิธี

$$\text{ตัวอย่างเช่น } \binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126 \text{ และ } \binom{50}{5} = \binom{50}{45} = 2118760$$

การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> ncr=function(n,r) (factorial(n)/(factorial(r)*factorial(n-r)))
> ncr(9,4)
[1] 126
> ncr(9,5)
[1] 126
> ncr(50,5)
[1] 2118760
> ncr(50,45)
[1] 2118760
```

ตัวอย่าง 1.2.11 มีกี่วิธีในการเลือกกรรมการ 3 คน จากคู่สามีภรรยา 4 คู่

ก. ถ้าทุก ๆ คนมีโอกาสได้รับเลือกเท่ากัน

ข. ถ้ากรรมการต้องประกอบด้วยหญิง 2 คน ชาย 1 คน

ค. ถ้าเลือกทั้งสามีภรรยาจากคู่สมรสเดียวกันเป็นกรรมการทั้ง 2 คนพร้อมกันไม่ได้

วิธีทำ

ก. จำนวนวิธีเลือกกรรมการ = $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{(8)(7)(6)}{(3)(2)(1)} = 56$ วิธี

ข. ขั้นที่ 1 จำนวนวิธีที่จะเลือกผู้หญิง 2 คน = $\binom{4}{2}$ วิธี

ขั้นที่ 2 แต่ละวิธีที่เลือกผู้หญิง เลือกผู้ชาย 1 คน ได้ = $\binom{4}{1}$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่จะเลือกผู้หญิง 2 คน ผู้ชาย 1 คน เป็นกรรมการ = $\binom{4}{2} \binom{4}{1} = (6)(4) = 24$ วิธี

ค. ขั้นที่ 1 เพราะว่าทั้งสามีและภรรยาจากคู่เดียวกันเป็นกรรมการไม่ได้

เพราะฉะนั้นจึงเลือกคู่สมรส 3 คู่ จากคู่สมรสทั้งหมด 4 คู่ ทำได้ $\binom{4}{3}$ วิธี

ขั้นที่ 2 หลังจากเลือกคู่สมรส 3 คู่ในขั้นที่ 1 คู่สมรสคู่หนึ่งที่เลือกมาจะเลือกสามีหรือภรรยามาเป็นกรรมการได้อีก 2 วิธี คือเลือกสามีหรือภรรยา

ขั้นที่ 3 คู่สมรสคู่ที่สองเลือกสามีหรือภรรยามาเป็นกรรมการได้อีก 2 วิธี

ขั้นที่ 4 คู่สมรสคู่ที่สามเลือกสามีหรือภรรยามาเป็นกรรมการได้อีก 2 วิธี

เพราะฉะนั้น จำนวนวิธีที่จะเลือกกรรมการเมื่อทั้งสามีและภรรยาจากคู่เดียวกันเป็นกรรมการทั้งสองคนพร้อมกันไม่ได้คือ $\binom{4}{3} (2)(2)(2) = 32$ วิธี □

การแบ่งกลุ่ม (Partitioning)

ถ้าต้องการหาจำนวนของการแบ่งเซตที่มีของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด ออกเป็น r สับเซต ซึ่งเรียกว่ากลุ่ม เราไม่ถือว่า ลำดับในแต่ละกลุ่มมีความสำคัญ เช่น ต้องการแบ่งเซต $\{a, b, c\}$ เป็น 2 กลุ่ม ให้กลุ่มแรกมีจำนวนสมาชิกเป็น 2 กลุ่มที่สองมีจำนวนสมาชิกเป็น 1 จะได้วิธีแบ่งกลุ่มต่าง ๆ กันคือ

$\{a, b\}, \{c\}$

$\{a, c\}, \{b\}$

$\{b, c\}, \{a\}$

การหาจำนวนวิธีแบ่งกลุ่มทำได้ดังนี้ ให้จำนวนวิธีที่แบ่งกลุ่มแทนด้วยสัญลักษณ์ $\binom{3}{2, 1}$

การหาจำนวนวิธีแบ่งกลุ่มเหมือนกับเลือกของมา 2 สิ่ง จาก 3 สิ่ง

เพราะฉะนั้นกลุ่มที่เหลือจะมี 1 สิ่ง จำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม $= \frac{3!}{2! 1!} = 3$ วิธี

เพราะฉะนั้น $\binom{3}{2, 1} = \frac{3!}{2! 1!} = 3$ วิธี

โดยทั่วไปการแบ่งกลุ่มของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เป็น 2 กลุ่ม

กลุ่มแรกมี n_1 สิ่ง

กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง และ $n_1 \neq n_2$ จะได้จำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม $= \binom{n}{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1! n_2!}$ วิธี

หมายเหตุ กรณี $n_1 = n_2$ เช่น ต้องการแบ่ง $\{a, b, c, d\}$ ออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 2 เท่ากัน แบ่งได้ดังนี้

วิธีที่		
1	a, b	c, d
2	a, c	b, d
3	a, d	b, c
4	b, c	a, d
5	d, b	a, c
6	c, d	a, b

จะเห็นได้ว่าการแบ่งของโดยวิธีที่ 1 เหมือนกับวิธีที่ 6 คือได้ผลเหมือนกัน กลุ่มหนึ่งมี a b อีกกลุ่มหนึ่งมี c d เพราะฉะนั้น วิธีที่ 1 และวิธีที่ 6 จึงนับเป็นวิธีเดียวกัน และจะเห็นอีกว่า วิธีที่ 2 และวิธีที่ 5 เป็นวิธีเดียวกัน วิธีที่ 3 และวิธีที่ 4 เป็นวิธีเดียวกัน จึงสรุปว่ามีวิธีแบ่งกลุ่มที่แตกต่างกัน 3 วิธีเท่านั้น

จำนวนวิธีที่ซ้ำกันดังกล่าวเกิดจาก 2 กลุ่มที่มีจำนวนสิ่งของเท่ากัน สลับที่กันได้ $2!$ วิธี แต่การสลับที่นี้ไม่ทำให้เกิดวิธีใหม่ เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม $= \frac{6}{2!} = \frac{4!}{2! 2! 2!} = 3$ วิธี

เพราะฉะนั้น ถ้ามีของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดและต้องการแบ่งกลุ่มเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ n_1 สิ่งเท่ากัน แล้วจำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม = $\frac{n!}{n_1! n_1! (2!)}$ วิธี

การแบ่งกลุ่มของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดเป็น 3 กลุ่ม

กลุ่มที่หนึ่งมี n_1 สิ่ง

กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง

กลุ่มที่สามมี n_3 สิ่ง

และ $n_1 \neq n_2, n_1 \neq n_3, n_3 \neq n_2$ ทำได้ดังนี้

ขั้นที่ 1 แบ่งกลุ่มของ n สิ่ง เป็น 2 กลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งมีของ n_1 สิ่ง กลุ่มที่สองมี $n_2 + n_3$ สิ่ง

จำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม = $\frac{n!}{n_1! (n_2 + n_3)!}$ วิธี

ขั้นที่ 2 แบ่งกลุ่มของ $n_2 + n_3$ สิ่ง เป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ n_2 สิ่ง และ n_3 สิ่ง

จำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม = $\frac{(n_2 + n_3)!}{n_2! n_3!}$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีแบ่งกลุ่มของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด เป็น 3 กลุ่ม กลุ่มแรกมี n_1 สิ่ง กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง กลุ่มที่สามมี n_3 สิ่ง มีจำนวนวิธีเท่ากับ
$$\frac{n!}{n_1! (n_2 + n_3)!} \frac{(n_2 + n_3)!}{n_2! n_3!} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!}$$
 วิธี

โดยทั่วไปจะได้เป็นทฤษฎีดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2.9 จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดเป็น r กลุ่ม

กลุ่มที่หนึ่งมี n_1 สิ่ง

กลุ่มที่สองมี n_2 สิ่ง

:

กลุ่มที่ r มี n_r สิ่ง

เมื่อ $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ และ $n_i \neq n_j$ ทุกค่าของ $i \neq j$

จะได้จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มเท่ากับ
$$\left(n_1, n_2, \dots, n_r \right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}$$
 วิธี

ทฤษฎีบทประกอบ 1.2.10 จำนวนวิธีแบ่งกลุ่มของ n สิ่งซึ่งแตกต่างกันทั้งหมด ออกเป็น k กลุ่ม กลุ่มละ n_1 สิ่ง เป็นจำนวน k_1 กลุ่ม กลุ่มละ n_2 สิ่ง เป็นจำนวน k_2 กลุ่ม กลุ่มละ n_3 สิ่ง เป็นจำนวน k_3 กลุ่ม ... กลุ่มละ n_r สิ่ง k_r กลุ่ม มีจำนวนวิธีเท่ากับ
$$\frac{n!}{(n_1!)^{k_1} (n_2!)^{k_2} \dots (n_r!)^{k_r} (k_1!)(k_2!) \dots (k_r!)}$$
 วิธี

เมื่อ $n = k_1 n_1 + k_2 n_2 + \dots + k_r n_r$ และ $k = k_1 + k_2 + \dots + k_r$

$n_i \neq n_j$ ทุกค่าของ $i \neq j$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, r$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, r$

ตัวอย่าง 1.2.12 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดให้เด็กนักเรียน 10 คน นั่งรถยนต์ 3 คัน ถ้ารถยนต์แต่ละคันมีที่ว่างสำหรับเด็ก 5 คน 3 คน และ 2 คน ตามลำดับ

วิธีทำ จำนวนวิธีที่แบ่งกลุ่มเด็ก 10 คน เป็น 3 กลุ่ม ให้ขึ้นรถที่มีที่ว่างสำหรับเด็ก 5 คน 3 คน และ 2 คน

$$= \frac{10!}{3! 5! 2!} = 2520 \text{ วิธี}$$


ตัวอย่าง 1.2.13 ก. จงหาจำนวนวิธีที่จะแบ่งดินสอ 12 แท่งแตกต่างกันเป็น 4 มัด มัดละเท่า ๆ กัน

ข. จงหาจำนวนวิธีที่จะแจกดินสอ 12 แท่งแตกต่างกันให้เด็ก 4 คน คนละเท่า ๆ กัน

วิธีทำ ก. จำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม = $\frac{12!}{3! 3! 3! 3! 4!} = 15400 \text{ วิธี}$

ข. ใน 1 วิธี ที่แบ่งสามารถแจกให้เด็ก 4 คน ได้ 4! วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่จะแจกดินสอ 12 แท่งแตกต่างกันให้เด็ก 4 คน ๆ ละเท่า ๆ กัน

$$= \left(\frac{12!}{3! 3! 3! 3! 4!} \right) (4!) = 369600 \text{ วิธี}$$



ตัวอย่าง 1.2.14 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดผู้เข้าสัมมนาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นชาย 7 คน เข้าพักในโรงแรมแห่งหนึ่ง ซึ่งมีห้องว่าง 3 ห้อง เป็นห้องคู่ 2 ห้อง และห้อง 3 คน อีก 1 ห้อง

วิธีทำ ขั้นที่ 1 แบ่ง 7 คน เป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 3, 2, 2 ทำได้ = $\frac{7!}{3! 2! 2! 2!} \text{ วิธี}$

ขั้นที่ 2 ในแต่ละวิธีแบ่งกลุ่มจัดให้ 3 คนพักห้องสำหรับ 3 คนได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 3 ในแต่ละวิธีแบ่งกลุ่มจัดให้ 2 กลุ่ม กลุ่มละ 2 คนเข้าพัก 2 ห้องได้ 2! วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่จะจัดให้ 7 คน เข้าพัก 3 ห้อง = $\frac{7!}{3! 2! 2! 2!} (1)(2!) = 210 \text{ วิธี}$



สูตรทั่วไปของการเรียงสับเปลี่ยน หรือการจัดหมู่ของของ n สิ่ง จัดคราวละ r สิ่ง ที่กล่าวถึงข้างต้นนั้น ของทั้งหมดจะต้องต่างกัน ในกรณีที่ของ n สิ่งไม่แตกต่างกันทั้งหมด อาจทำได้โดยวิธีเดียวกับตัวอย่าง 1.2.15

ตัวอย่าง 1.2.15 จงหาจำนวนวิธี

ก. เลือกอักษร 4 ตัวจากอักษรของคำว่า “statistics”

ข. เรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัวจากอักษรของคำว่า “statistics”

วิธีทำ คำ “statistics” มีอักษร 10 ตัว แบ่งเป็นพวก ๆ ดังนี้ (s, s, s); (t, t, t); (i, i); a และ c

ก. ในการเลือกอักษรมา 4 ตัว จำแนกได้เป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 อักษร 3 ตัวเหมือนกัน และอีก 1 ตัว ต่างจาก 3 ตัวที่เหมือนกันนั้น (ได้อักษร 2 ชนิดต่างกัน)

กรณีที่ 2 อักษร 2 ตัวเหมือนกัน และอีก 2 ตัวก็เหมือนกัน (ซ้ำกันเป็นคู่ 2 คู่ ได้อักษร 2 ชนิดต่างกัน)

กรณีที่ 3 อักษร 2 ตัวเหมือนกัน แต่อีก 2 ตัวต่างกัน (ได้อักษร 3 ชนิดต่างกัน)

กรณีที่ 4 อักษรทั้ง 4 ตัวต่างกัน

การนับจำนวนวิธีแต่ละกรณี

กรณีที่ 1 อักษร 3 ตัวเหมือนกัน และอีก 1 ตัว ต่างจาก 3 ตัวที่เหมือนกันนั้น (ได้อักษร 2 ชนิดต่างกัน)

เช่น { s, s, s, o }, { s, s, s, i }, { t, t, t, s }

ขั้นที่ 1 เลือกชนิดอักษรที่ซ้ำ 3 ตัวได้ 2 วิธี คือ s 3 ตัว หรือ t 3 ตัว

ขั้นที่ 2 เลือกชนิดอักษร 1 ตัว ที่ต่างจากขั้นที่ 1 ทำได้ 4 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเลือกได้อักษร 3 ตัวเหมือนกันและอีก 1 ตัวต่างจาก 3 ตัวที่เหมือนกัน = $(2)(4) = 8$ วิธี

กรณีที่ 2 อักษร 2 ตัวเหมือนกันและอีก 2 ตัวก็เหมือนกัน (ซ้ำกันเป็นคู่ 2 คู่ ได้อักษร 2 ชนิดต่างกัน)

เช่น { s, s, t, t }, { s, s, i, i }, { t, t, i, i }

เลือกชนิดอักษร 2 ชนิด ทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี คือ { s, t } หรือ { s, i } หรือ { t, i }

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเลือกได้อักษร 2 ตัวเหมือนกันและอีก 2 ตัวก็เหมือนกัน = 3

กรณีที่ 3 อักษร 2 ตัวเหมือนกัน แต่อีก 2 ตัวต่างกัน (ได้อักษร 3 ชนิดต่างกัน) เช่น { s, s, t, i }, { i, i, a, c }

ขั้นที่ 1 เลือกชนิดอักษรที่ซ้ำ 2 ตัวได้ 3 วิธี คือ s 2 ตัว หรือ t 2 ตัว หรือ i 2 ตัว

ขั้นที่ 2 เลือกชนิดอักษร 2 ตัวต่างกันและต่างจากขั้นที่ 1 ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเลือกได้อักษร 2 ตัวเหมือนกัน แต่อีก 2 ตัวต่างกัน $(3)(6) = 18$ วิธี

กรณีที่ 4 อักษรทั้ง 4 ตัวต่างกัน

เลือกอักษรต่างกัน 4 ตัว จากชนิดอักษร s, t, i, a, c ทำได้ $\binom{5}{4} = 5$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่เลือกอักษรจาก 4 กรณีทำได้ = $8 + 3 + 18 + 5 = 34$ วิธี

ข. การหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 4 ตัวที่เลือกมาจำแนกเป็น 4 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 อักษร 3 ตัวเหมือนกัน และอีก 1 ตัว ต่างจาก 3 ตัวที่เหมือนกันนั้น (ได้อักษร 2 ชนิดต่างกัน)

กรณีที่ 2 อักษร 2 ตัวเหมือนกัน และอีก 2 ตัวก็เหมือนกัน (ซ้ำกันเป็นคู่ 2 คู่ ได้อักษร 2 ชนิดต่างกัน)

กรณีที่ 3 อักษร 2 ตัวเหมือนกัน แต่อีก 2 ตัวต่างกัน (ได้อักษร 3 ชนิดต่างกัน)

กรณีที่ 4 อักษรทั้ง 4 ตัวต่างกัน

การนับจำนวนวิธีแต่ละกรณี

กรณีที่ 1 อักษร 3 ตัวเหมือนกัน และอีก 1 ตัว ต่างจาก 3 ตัวที่เหมือนกันนั้น (ได้อักษร 2 ชนิดต่างกัน)

เช่น sssso, ssos, soss, osss, ttta, ttat, tatt, attt, ...

ขั้นที่ 1 เลือกชนิดอักษรที่ซ้ำ 3 ตัวได้ 2 วิธี คือ s 3 ตัว หรือ t 3 ตัว

ขั้นที่ 2 เลือกชนิดอักษร 1 ตัว ที่ต่างจากขั้นที่ 1 ทำได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 3 แต่ละวิธีข้างต้นนำมาเรียงสับเปลี่ยนซึ่งทำได้ $\frac{4!}{3! 1!} = 4$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 3 ตัวเหมือนกันและอีก 1 ตัวต่างจาก 3 ตัวที่เหมือนกัน
ทำได้ $= (2)(4)(4) = 32$ วิธี

กรณีที่ 2 อักษร 2 ตัวเหมือนกันและอีก 2 ตัวก็เหมือนกัน (ซ้ำกันเป็นคู่ 2 คู่ ได้อักษร 2 ชนิดต่างกัน)

เช่น ssst, stts, ttss, stst, tsts, tsst, ...

ขั้นที่ 1 เลือกชนิดอักษร 2 ชนิด ทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี คือ { s, t } หรือ { s, i } หรือ { t, i }

ขั้นที่ 2 แต่ละวิธีข้างต้นนำมาเรียงสับเปลี่ยนซึ่งทำได้ $\frac{4!}{2! 2!} = 6$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 2 ตัวเหมือนกันและอีก 2 ตัวก็เหมือนกันทำได้ $(3)(6) = 18$ วิธี

กรณีที่ 3 อักษร 2 ตัวเหมือนกันแต่อีก 2 ตัวต่างกัน (ได้อักษร 3 ชนิดต่างกัน) เช่น ssti, ssit, stis, sits, itss, tiss

ขั้นที่ 1 เลือกชนิดอักษรที่ซ้ำ 2 ตัวได้ 3 วิธี คือ s 2 ตัว หรือ t 2 ตัว หรือ i 2 ตัว

ขั้นที่ 2 เลือกชนิดอักษร 2 ตัวต่างกันและต่างจากขั้นที่ 1 ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นที่ 3 แต่ละวิธีข้างต้นนำมาเรียงสับเปลี่ยนซึ่งทำได้ $\frac{4!}{2! 1! 1!} = 12$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษร 2 ตัวเหมือนกัน แต่อีก 2 ตัวต่างกันทำได้ $(3)(6)(12) = 216$ วิธี

กรณีที่ 4 อักษรทั้ง 4 ตัวต่างกัน

ขั้นที่ 1 เลือกอักษรต่างกัน 4 ตัว จากชนิดอักษร s, t, i, a, c ทำได้ $\binom{5}{4} = 5$ วิธี

ขั้นที่ 2 แต่ละวิธีข้างต้นนำมาเรียงสับเปลี่ยนซึ่งทำได้ $4! = 24$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษรทั้ง 4 ตัวต่างกันทำได้ $(5)(24) = 120$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนอักษรจาก 4 กรณีทำได้ $= 32 + 18 + 216 + 120 = 386$ วิธี



1.3 ความน่าจะเป็น (Probability)

ในกรณีปริภูมิตัวอย่าง S เป็นเซตจำกัดที่สมาชิกทุกตัวมีโอกาสเกิดเท่ากัน และ A เป็นเหตุการณ์ เรากำหนดค่าความน่าจะเป็น $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$

ในกรณีปริภูมิตัวอย่าง S เป็นเซตจำกัดที่สมาชิกบางตัวมีโอกาสเกิดไม่เท่ากัน เราจะกำหนดค่าของ “น้ำหนัก” (weight) ให้แก่ทุก ๆ จุดตัวอย่าง ซึ่งผลบวกของน้ำหนักเหล่านี้มีค่าเท่ากับ 1 ถ้าเรามีเหตุผลที่จะเชื่อได้ว่า จุดตัวอย่างอันหนึ่งอันใดมีโอกาสเกิดขึ้นอย่างแน่นอนในการทดลอง ค่าน้ำหนักสำหรับจุดตัวอย่างนั้นควรมีค่าเท่ากับ 1 ในกรณีตรงข้าม ค่าน้ำหนักที่มีค่าใกล้ 0 จะถูกกำหนดให้สำหรับจุดตัวอย่างที่เกิดขึ้นได้ยาก หรือเกิดขึ้นน้อยมาก

ในการทดลองทั่ว ๆ ไป เช่น การโยนเหรียญเที่ยงตรงหรือทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง จุดตัวอย่างทั้งหมดมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน จะได้รับการกำหนดค่าน้ำหนักให้มีค่าเท่า ๆ กัน สำหรับกรณีที่จุดตัวอย่างอยู่นอกปริภูมิตัวอย่าง เช่น เหตุการณ์เชิงเดียวซึ่งไม่สามารถเกิดขึ้นได้ เรากำหนดค่าน้ำหนักให้มีค่าเป็น 0

ในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ สมมติว่าเป็นเหตุการณ์ A เราบวกค่าน้ำหนักทั้งหมดของจุดตัวอย่างในเหตุการณ์ A นั้น ผลบวกนี้เรียกว่า ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$ เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นของเซตว่างคือ $P(\emptyset)$ เท่ากับ 0 และความน่าจะเป็นของปริภูมิตัวอย่าง S เท่ากับ 1

บทนิยาม 1.3.1 ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง และ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือผลบวกของน้ำหนักของทุก ๆ จุดตัวอย่าง ในเหตุการณ์ A

เพราะฉะนั้น $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$ และ $P(S) = 1$

ตัวอย่าง 1.3.1 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัวอย่างน้อยหนึ่งครั้ง

วิธีทำ ปริภูมิตัวอย่างสำหรับการทดลองนี้ คือ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

เพราะว่าเหรียญเที่ยงตรง เพราะฉะนั้นผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นแต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน

เพราะฉะนั้นเรากำหนดน้ำหนัก “ w ” ให้แก่แต่ละจุดตัวอย่าง

เพราะว่าผลรวมของน้ำหนักของจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่างเท่ากับ 1

เพราะฉะนั้น $w + w + w + w = 1$

เพราะฉะนั้น $w = \frac{1}{4}$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง เพราะฉะนั้น $A = \{HH, HT, TH\}$

เพราะฉะนั้น $P(A) = 3w = \frac{3}{4}$



ตัวอย่าง 1.3.2 ลูกเต๋าลูกหนึ่งถูกล้วงน้ำหนักรandom โดยทำให้แต้มคู่มีโอกาสขึ้นเป็น 2 เท่าของแต้มคี่ ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่เมื่อทอดลูกเต๋านี้แล้วจะขึ้นแต้มน้อยกว่า 4

จงหา $P(E)$

วิธีทำ ปริภูมิตัวอย่างคือ $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

กำหนดค่า w ให้แก่จุดตัวอย่างที่เป็นจำนวนคี่ และกำหนดค่า $2w$ ให้แก่จุดตัวอย่างที่เป็นจำนวนคู่ เพราะฉะนั้น $w + 2w + w + 2w + w + 2w = 1$

เพราะฉะนั้น $w = \frac{1}{9}$

เพราะฉะนั้นเรากำหนดน้ำหนัก $\frac{1}{9}$ ให้แก่จุดตัวอย่างที่เป็นจำนวนคี่ และ $\frac{2}{9}$ ให้แก่จุดตัวอย่างที่เป็นจำนวนคู่

$E =$ เหตุการณ์ที่เมื่อทอดลูกเต๋านี้แล้วจะขึ้นแต้มน้อยกว่า 4 = $\{ 1, 2, 3 \}$

เพราะฉะนั้น $P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$



เราอาจจะคิดว่า น้ำหนัก คือความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เชิงเดียว ถ้าการทดลองเป็นไปตามธรรมชาติ เช่น ตัวอย่าง 1.3.1 เราสามารถสมมติค่าน้ำหนักของแต่ละจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่างให้เท่ากัน เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คืออัตราส่วนของจำนวนสมาชิกในเหตุการณ์ A ต่อจำนวนสมาชิกใน S

ทฤษฎีบท 1.3.1 การทดลองอย่างหนึ่งมีผลการทดลองเกิดขึ้นได้ N วิธีต่าง ๆ กัน แต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน ถ้า n เป็นจำนวนวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ A แล้วความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ $P(A) = \frac{n}{N}$

ตัวอย่าง 1.3.3 เมื่อดึงไพ่ 1 ใบ จากสำรับซึ่งมีไพ่ 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ไพ่ใบนั้นจะเป็นโพดำ

วิธีทำ ในการดึงไพ่ 1 ใบ ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้มี 52 วิธี ซึ่งแต่ละวิธีมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน

ใน 52 วิธีนั้น มี 13 วิธีที่จะดึงไพ่ได้โพดำ

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ดึงไพ่ได้โพดำ

เพราะฉะนั้น $P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$



ตัวอย่าง 1.3.4 ในการเล่นเกมบิลเลียด ต้องแจกไพ่ 52 ใบ ให้ผู้เล่น 4 คน คนละเท่า ๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นทุกคนได้ไพ่แต้ม “A”

วิธีทำ

ให้ S เป็นเหตุการณ์ที่ผู้เล่นทุกคนได้ไพ่คนละ 13 ใบ

การหาจำนวนวิธีแจกไพ่ให้ผู้เล่น 4 คน คนละ 13 ใบเท่า ๆ กัน

ขั้นที่ 1 แบ่งไพ่เป็น 4 กอง กองละ 13 ใบ ทำได้ $\frac{52!}{(13!)^4(4!)}$ วิธี

ขั้นที่ 2 แต่ละวิธีของขั้นที่ 1 เรียงสับเปลี่ยนไพ่ 4 กอง ให้ผู้เล่น 4 คน ทำได้ 4! วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่จะแจกไพ่ให้ผู้เล่น 4 คน คนละ 13 ใบเท่า ๆ กัน = $\frac{52!}{(13!)^4(4!)} (4!) = \frac{52!}{(13!)^4}$ วิธี

เพราะฉะนั้น $n(S) = \frac{52!}{(13!)^4}$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่ผู้เล่นทุกคนได้ไพ่แต้ม “A”

การหาจำนวนวิธีแจกไพ่ให้ผู้เล่น 4 คน คนละเท่า ๆ กัน และได้ไพ่แต้ม “A” คนละใบ

ขั้นที่ 1 แบ่งไพ่ 48 ใบ (เฉพาะส่วนที่ไม่มีไพ่แต้ม “A”) แบ่งไพ่เป็น 4 กอง กองละ 12 ใบ ทำได้ $\frac{48!}{(12!)^4(4!)}$ วิธี

ขั้นที่ 2 แต่ละวิธีของขั้นที่ 1 แบ่งไพ่แต้ม “A” 4 ใบให้แต่ละกอง กองละ 1 ใบ ทำได้ 4! วิธี

หมายเหตุ ขั้นที่ 1 และ ขั้นที่ 2 จะได้ไพ่ 4 กอง กองละ 13 ใบ และแต่ละกองมีไพ่แต้ม “A” อยู่ 1 ใบ
ขั้นตอนต่อไป

ขั้นที่ 3 เรียงสับเปลี่ยนไพ่ 4 กอง ให้ผู้เล่น 4 คน ทำได้ 4! วิธี

เพราะฉะนั้น $n(E) = \left(\frac{48!}{(12!)^4(4!)} \right) (4!) (4!) = \frac{48!}{(12!)^4} (4!)$

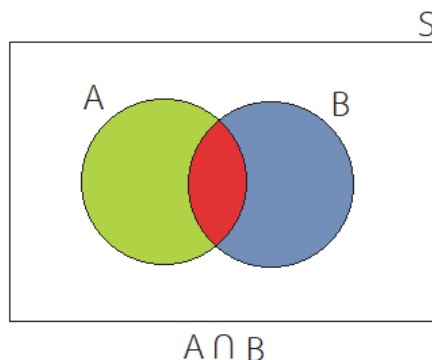
เพราะฉะนั้น $P(E) = \frac{\left(\frac{48!}{(12!)^4(4!)} \right) (4!) (4!)}{\frac{52!}{(13!)^4}} = \frac{(48!)(4!)(13)^4}{52!} = 0.1054982$



1.4 กฎของความน่าจะเป็น

ทฤษฎีบท 1.4.1 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

ข้อพิสูจน์ เมื่อพิจารณาแผนภาพเวนน์ (Venn diagram)



รูปที่ 1.8

$P(A \cup B)$ คือผลบวกของน้ำหนักของจุดตัวอย่างในเซต $A \cup B$ เพราะว่า $P(A) + P(B)$ คือผลบวกของน้ำหนักใน A และน้ำหนักใน B จะเห็นว่าเรานับน้ำหนักใน $A \cap B$ สองครั้ง

เพราะฉะนั้นจะต้องลบน้ำหนักดังกล่าวนี้ออกหนึ่งครั้งเพื่อจะได้ $P(A \cup B)$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ □

ทฤษฎีบทประกอบ 1.4.2 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ทฤษฎีบทประกอบ 1.4.2 หาได้จากทฤษฎีบท 1.4.1 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \emptyset$ ซึ่งจะทำให้ $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

ทฤษฎีบทประกอบ 1.4.3 ถ้า $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน แล้วจะได้

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

บทนิยาม 1.4.1 เซตของเหตุการณ์ $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ ประกอบกันขึ้นเป็น **ผลแบ่งกัน** (partition) ของปริภูมิตัวอย่าง S ถ้า

$$1. A_i \cap A_j = \emptyset \text{ ทุกค่า } i \neq j$$

$$2. \bigcup_{i=1}^n A_i = S$$

และ 3. $P(A_i) > 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$

หมายเหตุ ถ้า $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ เป็นผลแบ่งกันของปริภูมิตัวอย่าง S แล้วจะได้

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = P(S) = 1$$

ตัวอย่าง 1.4.1 ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งสอบคณิตศาสตร์ผ่านเท่ากับ $\frac{2}{3}$

ความน่าจะเป็นที่เขาสอบฟิสิกส์ผ่านเท่ากับ $\frac{5}{9}$ และความน่าจะเป็นที่เขาสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเท่ากับ $\frac{4}{5}$

จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชา

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่เขาสอบคณิตศาสตร์ผ่าน

B เป็นเหตุการณ์ที่เขาสอบฟิสิกส์ผ่าน

จากทฤษฎีบท 1.4.1 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{4}{5} = \frac{19}{45}$ □

ตัวอย่าง 1.4.2 การทดลองทอดลูกเต๋าทิ้งตรง 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 หรือ 11

วิธีทำ การทดลองทอดลูกเต๋าทิ้งตรง 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง

ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$

เพราะฉะนั้นจำนวนจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่าง = 36 จุด

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5

เพราะฉะนั้น $A = \{ (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2) \}$

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 11

เพราะฉะนั้น $B = \{ (5, 6), (6, 5) \}$

เพราะฉะนั้น $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ และ $P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

เพราะว่าทอดลูกเต๋าทิ้งตรง 2 ลูก พร้อมกัน

เพราะฉะนั้นจะได้ผลบวกของแต้มเป็น 5 และ 11 ในขณะเดียวกันไม่ได้

เพราะฉะนั้นเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$ □

ทฤษฎีบท 1.4.4 ถ้า A' เป็นส่วนเติมเต็มของเหตุการณ์ A แล้ว $P(A') = 1 - P(A)$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $A \cup A' = S$ และ $A \cap A' = \emptyset$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup A') = P(S)$

$$P(A) + P(A') = 1$$

เพราะฉะนั้น $P(A') = 1 - P(A)$ □

ตัวอย่าง 1.4.3 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 6 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

วิธีทำ การโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 6 ครั้ง

จำนวนจุดตัวอย่างในปริภูมิตัวอย่าง = $2^6 = 64$

ให้ E เป็นเหตุการณ์ที่โยนเหรียญ 1 อัน 6 ครั้งแล้วเหรียญขึ้นหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

เพราะฉะนั้น E' เป็นเหตุการณ์โยนเหรียญ 1 อัน 6 ครั้ง แล้วไม่ขึ้นหัวเลย

เพราะว่ามีเพียง 1 วิธีเท่านั้นที่ไม่ขึ้นหัวเลย คือขึ้นก้อยทั้ง 6 ครั้ง เพราะฉะนั้น $E' = \{TTTTTT\}$

เพราะฉะนั้น $P(E') = \frac{1}{64}$

เพราะฉะนั้น $P(E) = 1 - P(E') = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$



1.5 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (Conditional Probability)

พิจารณาความแตกต่างระหว่างการเลือกของมา 2 ชิ้น โดยวิธีสุ่มจากของรุ่ม (lot) หนึ่ง ซึ่งมีของ 100 ชิ้น ในจำนวนนี้มี 20 ชิ้นที่มีข้อบกพร่อง และที่เหลืออยู่ในสภาพดี สมมติเราหยิบของมาจากรุ่นนี้ 2 วิธี วิธีหนึ่งคือหยิบชิ้นแรกแล้ววางกลับที่เดิมก่อนหยิบชิ้นต่อไป (sampling with replacement) อีกวิธีหนึ่งหยิบชิ้นแรกมาแล้วไม่วางกลับที่เดิม (sampling without replacement) แต่หยิบชิ้นที่สองต่อไป

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบของชิ้นแรกแล้วพบของมีข้อบกพร่อง

B เป็นเหตุการณ์ที่หยิบของชิ้นที่สองแล้วพบของมีข้อบกพร่อง

ถ้าหยิบของชิ้นแรกแล้ววางกลับที่เดิมก่อนหยิบครั้งที่สอง $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

แต่ถ้าหยิบของชิ้นแรกมาแล้วไม่วางกลับที่เดิมก่อนหยิบชิ้นที่สอง $P(A) = \frac{1}{5}$ แต่ $P(B)$ อาจมีค่าไม่เท่ากับ $\frac{1}{5}$

ก่อนที่จะหา $P(B)$ เราจะต้องทราบว่าเมื่อหยิบของชิ้นที่สอง เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้วหรือไม่

ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B ที่เกิดขึ้นเมื่อเหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว เรียกว่า “ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข” และจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(B | A)$ ซึ่งอ่านว่า “ความน่าจะเป็นที่ B จะเกิดขึ้นเมื่อ A เกิดขึ้นแล้ว” หรือ “ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A ให้เกิดก่อน”

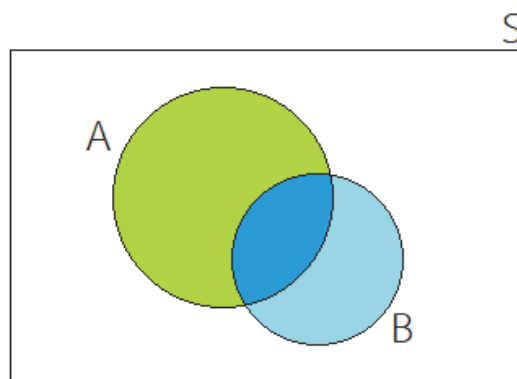
จากตัวอย่างข้างต้น $P(B | A) = \frac{19}{99}$

เพราะว่าครั้งแรกได้ของที่มีข้อบกพร่อง

เพราะฉะนั้นจะเหลือของที่มีข้อบกพร่องเพียง 19 ชิ้น จากที่เหลือทั้งสิ้น 99 ชิ้น

เมื่อไรก็ตามที่ต้องการหา $P(B | A)$ เราต้องหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เทียบกับปริภูมิตัวอย่างที่ลดลง (reduced sample space)

พิจารณาแผนภาพเวนน์ ถ้าต้องการหา $P(B)$ จะต้องหาเทียบกับปริภูมิตัวอย่าง S แต่ถ้าต้องการหา $P(B | A)$ ต้องหาเทียบกับ A ซึ่ง A คือปริภูมิตัวอย่างที่ลดลงจาก S มาเป็น A



รูปที่ 1.9

ก่อนที่จะให้นิยามของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข ขอให้พิจารณาตัวอย่างของการทอดลูกเต๋ายี่ตรง 2 ลูก
ปริภูมิตัวอย่าง คือ $S = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \text{ เป็นแต้มของลูกเต๋าลูกที่หนึ่ง, } x_2 \text{ เป็นแต้มของลูกเต๋าลูกที่สอง} \}$

$$= \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$

ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์

$$A = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 10 \}$$

$$B = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 > x_2 \}$$

เพราะฉะนั้น $A = \{ (5, 5), (4, 6), (6, 4) \}$ และ $P(A) = \frac{3}{36}$

$B = \{ (2, 1), (3, 1), (3, 2), \dots, (6, 5) \}$ และ $P(B) = \frac{15}{36}$

ในที่นี้เราสนใจเฉพาะเหตุการณ์ที่จะได้ผลรวมของแต้มเป็น 10 และต้องการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้แต้มของลูกที่หนึ่งมากกว่าลูกที่สอง

$$P(B \mid A) = \text{ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มของลูกเต๋าลูกที่หนึ่งมากกว่าลูกที่สอง เมื่อกำหนดให้ผลรวมของแต้มเท่ากับ 10 เกิดก่อน} \\ = \frac{1}{3}$$

ในทำนองเดียวกัน $P(A \mid B) = \frac{1}{15}$

เพราะว่า $A \cap B = \{ (6, 4) \}$ เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

เพราะฉะนั้น ถ้าพิจารณาการหา $P(B \mid A)$ และ $P(A \mid B)$ ในเทอมของความน่าจะเป็นโดยทั่วไป แล้วจะได้

$$P(B \mid A) = \frac{1}{3} = \frac{\left(\frac{1}{36}\right)}{\left(\frac{3}{36}\right)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{1}{15} = \frac{\left(\frac{1}{36}\right)}{\left(\frac{15}{36}\right)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

บทนิยาม 1.5.1 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดให้เหตุการณ์ A เกิดขึ้นแล้ว แทนด้วยสัญลักษณ์ $P(B \mid A)$ คือ $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ เมื่อ $P(A) \neq 0$

ข้อสังเกต มี 2 วิธีที่จะหาความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข $P(B \mid A)$ คือ

แบบที่ 1 หาโดยตรง โดยหาความน่าจะเป็นของ B เทียบกับปริภูมิตัวอย่างที่ลดลงคือ A

แบบที่ 2 ใช้บทนิยาม $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

เมื่อ $P(A \cap B)$ และ $P(A)$ หาจากปริภูมิตัวอย่างตอนเริ่มต้น (original sample space)

ตัวอย่าง 1.5.1 ในสำนักงานแห่งหนึ่งมีเครื่องคิดเลข 100 เครื่อง จำแนกเป็นเครื่องไฟฟ้า (E) และเครื่องที่ใช้มือหมุน (M) เครื่องใหม่ (N) และเครื่องใช้แล้ว (U) ตารางข้างล่างเป็นจำนวนเครื่องคิดเลขแยกตามสภาพ

ชนิด	เครื่องไฟฟ้า (E)	เครื่องที่ใช้มือหมุน (M)	รวม
สภาพ			
เครื่องใหม่ (N)	40	30	70
เครื่องใช้แล้ว (U)	20	10	30
รวม	60	40	100

ชายคนหนึ่งเลือกเครื่องคิดเลขเครื่องหนึ่งมาโดยวิธีสุ่มและพบว่าเป็นเครื่องใหม่

จงหาความน่าจะเป็นที่เครื่องคิดเลขนี้จะเป็นเครื่องไฟฟ้า

วิธีทำ เราต้องการหา $P(E \mid N)$

แบบที่ 1 หาจากปริภูมิตัวอย่างที่ลดลง (มีเครื่องใหม่ 70 เครื่อง)

$$P(E \mid N) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}$$

แบบที่ 2 หาโดยใช้คำจำกัดความของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$$P(E \mid N) = \frac{P(E \cap N)}{P(N)} = \frac{\left(\frac{40}{100}\right)}{\left(\frac{70}{100}\right)} = \frac{4}{7}$$



ข้อสังเกต จาก $P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ และ $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

จะได้ $P(A \cap B) = P(A) P(B \mid A)$ หรือ $P(A \cap B) = P(B) P(A \mid B)$

ทฤษฎีบท 1.5.1 ทฤษฎีการคูณของความน่าจะเป็น (Multiplication Theorem of Probability)

ในการทดลองครั้งหนึ่ง ถ้าเหตุการณ์ A และ B เกิดขึ้นทั้งสองเหตุการณ์ แล้วจะได้

$$P(A \cap B) = P(A) P(B \mid A) \text{ เมื่อ } P(A) \neq 0$$

$$P(A \cap B) = P(B) P(A \mid B) \text{ เมื่อ } P(B) \neq 0$$

ตัวอย่าง 1.5.2 สินค้ารุ่นหนึ่งประกอบด้วยสินค้าที่มีข้อบกพร่อง 20 ชิ้น และสินค้าที่มีสภาพดี 80 ชิ้น ถ้าเลือกของมา 2 ชิ้น ทีละชิ้นโดยวิธีสุ่ม โดยของชิ้นแรกที่ยิบมาและไม่ได้ใส่กลับคืนก่อนหยิบขึ้นที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่จะพบของที่มีข้อบกพร่องทั้ง 2 ชิ้น

วิธีทำ ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่พบของชิ้นแรกมีข้อบกพร่อง

B เป็นเหตุการณ์ที่พบของชิ้นที่สองมีข้อบกพร่อง

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะพบของที่มีข้อบกพร่องทั้ง 2 ชิ้น $= P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) P(B \mid A) = \left(\frac{20}{100}\right) \left(\frac{19}{99}\right) = \frac{19}{495}$$



จากตัวอย่าง 1.5.2 ถ้าหยิบของชิ้นแรกมาตรวจสอบสภาพแล้ววางกลับที่เดิม แล้วหยิบขึ้นที่สองมาโดยวิธีสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะพบของชิ้นที่สองมีข้อบกพร่อง $= \frac{20}{100}$

เพราะฉะนั้น $P(B \mid A) = P(B)$

ในกรณีนี้เรากล่าวว่า เหตุการณ์ B เป็นอิสระจากเหตุการณ์ A (event B is independent of event A)

บทนิยาม 1.5.2 เหตุการณ์ B เป็นอิสระจากเหตุการณ์ A ก็ต่อเมื่อ $P(B \mid A) = P(B)$

หรืออาจจะกล่าวว่า เหตุการณ์ B เป็นอิสระจากเหตุการณ์ A เมื่อการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ A ไม่มีผลต่อการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ B

จากบทนิยาม 1.5.2 จะได้ว่า

ถ้าเหตุการณ์ A เป็นอิสระจากเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ A จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ B' ด้วย

ถ้าเหตุการณ์ A เป็นอิสระจากเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ A' จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ B' ด้วย

ถ้าเหตุการณ์ A เป็นอิสระจากเหตุการณ์ B แล้ว เหตุการณ์ B จะเป็นอิสระจากเหตุการณ์ A ซึ่งในกรณีนี้เรากล่าวว่า เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน (event A and B are independent)

ทฤษฎีบท 1.5.2 ทฤษฎีการคูณของความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ ที่เป็นอิสระต่อกัน

เหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ $P(A \cap B) = P(A) P(B)$

ข้อพิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1.5.2 $P(A \cap B) = P(A) P(B | A)$

ถ้า A และ B เป็นอิสระต่อกัน แล้ว $P(B | A) = P(B)$

เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = P(A) P(B)$



ในกรณีที่มีเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน n เหตุการณ์

ให้ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน

เราสามารถขยายผลของทฤษฎีบท 1.5.2 ได้ดังนี้

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$$

ตัวอย่าง 1.5.3 หยิบไพ่ 3 ใบ จากสำรับซึ่งมี 52 ใบ โดยหยิบมาทีละใบ

จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ “A” ทั้ง 3 ใบ ถ้า

ก. หยิบไพ่แล้วใส่กลับคืนสำรับก่อนหยิบไพ่ใบต่อไป

ข. หยิบไพ่แล้วไม่ใส่กลับคืนสำรับก่อนหยิบไพ่ใบต่อไป

วิธีทำ

ให้ E_1, E_2 และ E_3 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ “A” ในการหยิบไพ่ครั้งแรก ครั้งที่สอง และครั้งที่สาม ตามลำดับ

ก. เมื่อหยิบไพ่แล้วใส่กลับคืนสำรับก่อนการหยิบไพ่ใบต่อไป

เพราะฉะนั้น E_1, E_2 และ E_3 เป็นอิสระต่อกัน

เพราะฉะนั้น $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) P(E_2) P(E_3)$

$$= \left(\frac{4}{52}\right) \left(\frac{4}{52}\right) \left(\frac{4}{52}\right)$$

$$= \frac{1}{2197}$$

ข. เมื่อหยิบไพ่แล้วไม่ใส่กลับคืนสำรับก่อนหยิบไพ่ใบต่อไป

เพราะฉะนั้น $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1) P(E_2 | E_1) P(E_3 | (E_1 \cap E_2))$

$$= \left(\frac{4}{52}\right) \left(\frac{3}{51}\right) \left(\frac{2}{50}\right)$$

$$= \frac{1}{5575}$$



ตัวอย่าง 1.5.4 ทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน สองครั้ง

จงหาความน่าจะเป็นที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 และ 11

หมายเหตุ การทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน ครั้งที่ 1 ผลบวกแต้มอาจมีค่าเป็น 2, 3, 4, ... , 12

การทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน ครั้งที่ 2 ผลบวกแต้มอาจมีค่าเป็น 2, 3, 4, ... , 12

การทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน สองครั้ง เหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 และ 11 คือ

ผลบวกแต้มของการทอดลูกเต๋าค้างที่ 1 เป็น 5 และ ผลบวกแต้มของการทอดลูกเต๋าค้างที่ 2 เป็น 11

หรือ ผลบวกแต้มของการทอดลูกเต๋าค้างที่ 1 เป็น 11 และ ผลบวกแต้มของการทอดลูกเต๋าค้างที่ 2 เป็น 5

วิธีทำ ตัวอย่างของผลการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน สองครั้ง เช่น

$((1, 1), (1, 1)), ((1, 1), (1, 2)), ((1, 1), (1, 3)), ((1, 1), (1, 4)), ((1, 1), (1, 5)), ((1, 1), (1, 6)), \dots$

ให้ A_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูก ครั้งที่หนึ่ง

ตัวอย่างสมาชิกของ A_1 เช่น $((1, 4), (1, 1)), ((2, 3), (1, 1)), ((3, 2), (1, 1)), ((1, 4), (1, 4)), \dots$

A_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูก ครั้งที่สอง

ตัวอย่างสมาชิกของ A_2 เช่น $((1, 1), (1, 4)), ((1, 1), (4, 1)), ((1, 1), (2, 3)), ((1, 4), (1, 4)), \dots$

B_1 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 11 ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูก ครั้งที่หนึ่ง

ตัวอย่างสมาชิกของ B_1 เช่น $((5, 6), (1, 1)), ((5, 6), (1, 2)), ((6, 5), (1, 3)), ((5, 6), (5, 6)), \dots$

B_2 เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 11 ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูก ครั้งที่สอง

ตัวอย่างสมาชิกของ B_2 เช่น $((1, 1), (5, 6)), ((1, 2), (5, 6)), ((1, 3), (5, 6)), ((5, 6), (5, 6)), \dots$

เหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มเป็น 5 และ 11 มี 2 เหตุการณ์คือ $A_1 \cap B_2$ หรือ $A_2 \cap B_1$

$$\text{และ } (A_1 \cap B_2) \cap (A_2 \cap B_1) = \emptyset \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะว่า เหตุการณ์ } A_1 \text{ และ } B_2 \text{ เป็นอิสระต่อกัน เพราะฉะนั้น } P(A_1 \cap B_2) = P(A_1) P(B_2) \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะว่า เหตุการณ์ } A_2 \text{ และ } B_1 \text{ เป็นอิสระต่อกัน เพราะฉะนั้น } P(A_2 \cap B_1) = P(A_2) P(B_1) \quad \dots (3)$$

ความน่าจะเป็นที่ได้ผลรวมของแต้มเป็น 5 และ 11 เท่ากับ

$$P((A_1 \cap B_2) \cup (A_2 \cap B_1))$$

$$= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) - P((A_1 \cap B_2) \cap (A_2 \cap B_1))$$

$$= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) - P(\emptyset) \quad (\text{จาก (1)})$$

$$= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1)$$

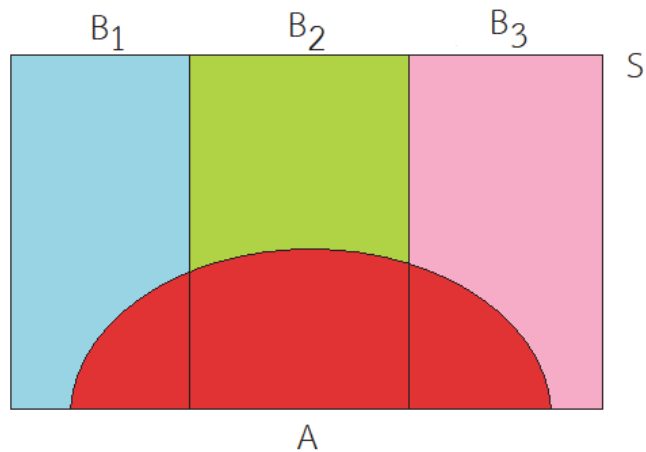
$$= P(A_1) P(B_2) + P(A_2) P(B_1) \quad (\text{จาก (2) และ (3)})$$

$$= \left(\frac{4}{36}\right) \left(\frac{2}{36}\right) + \left(\frac{4}{36}\right) \left(\frac{2}{36}\right)$$

$$= \frac{1}{81}$$



ให้ A เป็นเหตุการณ์ของปริภูมิตัวอย่าง S และ $\{ B_1, B_2, B_3 \}$ เป็นเซตของผลแบ่งกันของ S



รูปที่ 1.10

$$A = A \cap S$$

$$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3)$$

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3)$$

เพราะว่า $\{ B_1, B_2, B_3 \}$ เป็นเซตของผลแบ่งกันของ S

เพราะฉะนั้น $A \cap B_1, A \cap B_2, A \cap B_3$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นร่วมกันเป็นคู่ ๆ (pairwise mutually exclusive)

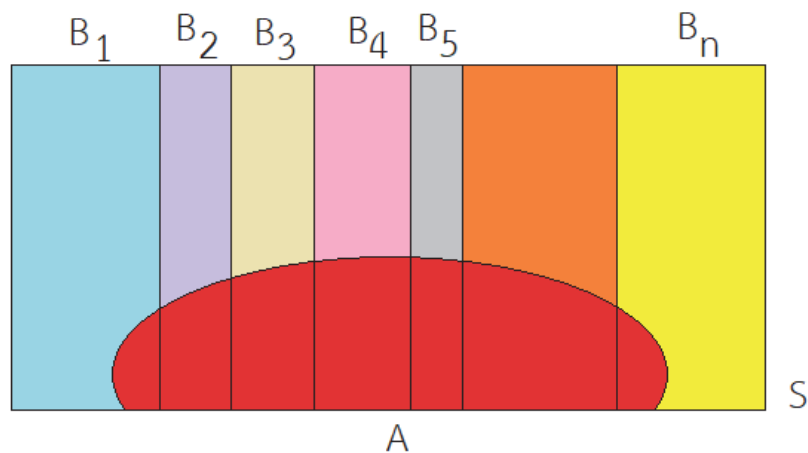
$$\text{เพราะฉะนั้น } P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$$

$$\text{เพราะว่า } P(A \cap B_j) = P(B_j) P(A | B_j) \text{ ทุกค่า } j = 1, 2, 3$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } P(A) = P(B_1) P(A | B_1) + P(B_2) P(A | B_2) + P(B_3) P(A | B_3)$$

กรณีทั่วไป

ให้ A เป็นเหตุการณ์ของปริภูมิตัวอย่าง S และ $\{ B_1, B_2, \dots, B_n \}$ เป็นเซตของผลแบ่งกันของ S



รูปที่ 1.11

เพราะว่า $A = A \cap S$

$$A = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n)$$

เพราะฉะนั้น $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n)$ ซึ่งบางเซต $A \cap B_i$ อาจเป็นเซตว่าง

เพราะว่า $\{ B_1, B_2, \dots, B_n \}$ เป็นเซตของผลแบ่งกันของ S

เพราะฉะนั้น $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดขึ้นร่วมกันเป็นคู่ ๆ (pairwise mutually exclusive)

$$\text{เพราะฉะนั้น } P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

$$\text{เพราะว่า } P(A \cap B_j) = P(B_j) P(A | B_j) \text{ ทุกค่า } j = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } P(A) = P(B_1) P(A | B_1) + P(B_2) P(A | B_2) + \dots + P(B_n) P(A | B_n)$$

สรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.5.3 ให้ $\{ B_1, B_2, \dots, B_n \}$ เป็นผลแบ่งกันของปริภูมิตัวอย่าง S

และ $P(B_i) \neq 0$ ทุก ๆ ค่าของ $i = 1, 2, \dots, n$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ของปริภูมิตัวอย่าง S

$$\text{แล้ว } P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P(A | B_i)$$

ตัวอย่าง 1.5.5 กล่องใบหนึ่งมีสินค้า 100 ชิ้น ประกอบด้วยสินค้าที่อยู่ในสภาพดี 80 ชิ้น และสินค้ามีข้อบกพร่อง 20 ชิ้น หยิบสินค้ามา 2 ชิ้น โดยวิธีสุ่มโดยไม่ใส่ของชิ้นแรกกลับที่เดิมก่อนหยิบชิ้นที่สอง ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ของชิ้นแรกที่ยิบมาตรวจพบว่ามีข้อบกพร่อง

B เป็นเหตุการณ์ที่ของชิ้นที่สองที่ยิบมาตรวจพบว่ามีข้อบกพร่อง

จงหา $P(B)$

วิธีทำ เพราะว่า $B = (B \cap A) \cup (B \cap A')$

เพราะฉะนั้น $P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap A'))$

$$= P(B \cap A) + P(B \cap A')$$

$$= P(A) P(B | A) + P(A') P(B | A')$$

$$= \left(\frac{20}{100}\right) \left(\frac{19}{99}\right) + \left(\frac{80}{100}\right) \left(\frac{20}{99}\right)$$

$$= \frac{1}{5}$$



ตัวอย่าง 1.5.6 โรงงานแห่งหนึ่งมีเครื่องจักร 3 เครื่อง A, B และ C ซึ่งสามารถผลิตสินค้าได้ 50%, 30% และ 20% ของปริมาณสินค้าทั้งหมดที่ผลิตจากโรงงานแห่งนี้ ตามลำดับ เปอร์เซ็นต์ของสินค้าที่พบข้อบกพร่องซึ่งผลิตโดยเครื่องจักรทั้งสามเครื่องคือ 3%, 4% และ 5% ตามลำดับ ถ้าเลือกสินค้าชิ้นหนึ่งโดยวิธีสุ่มแล้วตรวจสอบสภาพ จงหาความน่าจะเป็นที่ของชิ้นนี้จะมีข้อบกพร่อง

วิธีทำ ให้ A, B และ C เป็นเหตุการณ์ที่สินค้าผลิตจากเครื่องจักร A, B และ C ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น $\{A, B, C\}$ เป็นผลแบ่งกันของ S

ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่ตรวจพบว่าสินค้าที่หยิบมามีข้อบกพร่อง

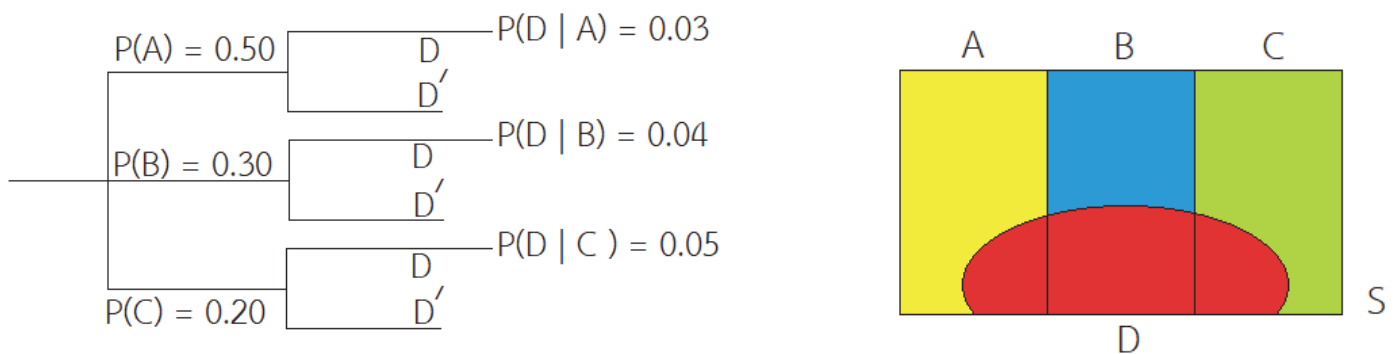
เพราะว่าเครื่อง A, B และ C ซึ่งสามารถผลิตสินค้าได้ 50%, 30% และ 20%

เพราะฉะนั้น $P(A) = 0.50$, $P(B) = 0.30$ และ $P(C) = 0.20$

เพราะว่าเปอร์เซ็นต์ของสินค้าที่พบข้อบกพร่องซึ่งผลิตโดยเครื่องจักร A, B และ C คือ 3%, 4% และ 5% ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น $P(D | A) = 0.03$, $P(D | B) = 0.04$ และ $P(D | C) = 0.05$

พิจารณาแผนภาพต้นไม้ของความน่าจะเป็นและแผนภาพของเวนนีได้ดังนี้



รูปที่ 1.12

เพราะว่า $S = A \cup B \cup C$ และ $D = (D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C)$

เพราะฉะนั้น $P(D) = P((D \cap A) \cup (D \cap B) \cup (D \cap C))$

$$= P(D \cap A) + P(D \cap B) + P(D \cap C)$$

$$= P(A) P(D | A) + P(B) P(D | B) + P(C) P(D | C)$$

$$= (0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05)$$

$$= 0.037$$



1.6 กฎของเบส์ (Bayes' Rule)

ทฤษฎีบท 1.6.1 (กฎของเบส์)

ให้ $\{ B_1, B_2, \dots, B_n \}$ เป็นผลแบ่งกันของปริภูมิตัวอย่าง S และ $P(B_i) \neq 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ของปริภูมิตัวอย่าง S และ $P(A) \neq 0$

$$\text{แล้ว } P(B_k | A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)} \quad \text{ทุกค่า } k = 1, 2, 3, \dots, n$$

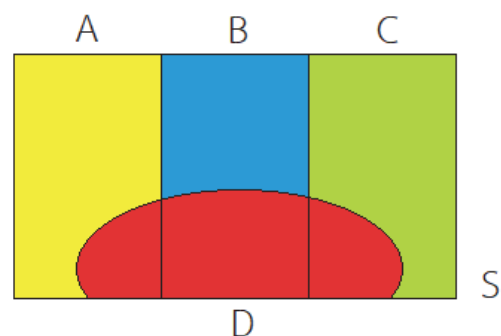
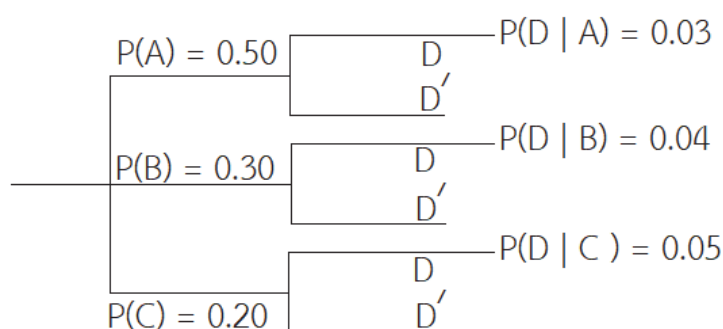
$$\text{ข้อพิสูจน์ } P(B_k | A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_k \cap A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i \cap A)}$$

$$= \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}$$

□

ตัวอย่าง 1.6.1 จากตัวอย่าง 1.5.6 ถ้าเลือกสินค้ามาชิ้นหนึ่งโดยวิธีสุ่ม และพบว่าสินค้าชิ้นนั้นมีข้อบกพร่อง จงหาความน่าจะเป็นที่สินค้าชิ้นนั้นผลิตโดยเครื่องจักร A



รูปที่ 1.13

$$\text{วิธีทำ } P(A | D) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)}$$

$$= \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)}$$

$$= \frac{(0.50)(0.03)}{(0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05)}$$

$$= \frac{15}{37}$$

□

ตัวอย่าง 1.6.2 ในเทศกาลปีใหม่ ร้านค้าแห่งหนึ่งจัดผู้ห่อของขวัญไว้ 3 คน คือ กันยา ขนิษฐา และพาณี กันยาห่อของขวัญ 40% ของของขวัญทั้งหมดและลืมหาป้ายติดราคาออกก่อนห่อของ 1 ใน 50 ครั้ง ขนิษฐาห่อของขวัญ 30% ของของขวัญทั้งหมดและลืมหาป้ายติดราคาออกก่อนห่อ 1 ใน 10 ครั้ง พาณีซึ่งห่อของขวัญที่เหลือและลืมหาป้ายติดราคาออกก่อนห่อ 1 ใน 20 ครั้ง สมมติมีลูกค้าคนหนึ่งมาต่อว่าที่ร้านว่าไม่ได้เอาป้ายติดราคาออกก่อนห่อของขวัญ จงหาความน่าจะเป็นที่ของขวัญชิ้นนั้นห่อโดยกันยา

วิธีทำ ให้ A, B, C เป็นเหตุการณ์ที่ของขวัญชิ้นหนึ่งห่อโดย กันยา ขนิษฐา และ พาณี ตามลำดับ

E เป็นเหตุการณ์ที่ผู้ห่อลืมหาป้ายติดราคาออกก่อนห่อของขวัญ

เพราะว่ากันยาห่อของขวัญ 40% ของของขวัญทั้งหมดและลืมหาป้ายติดราคาออกก่อนห่อของ 1 ใน 50 ครั้ง

เพราะฉะนั้น $P(A) = 0.40$ และ $P(E | A) = 0.02$

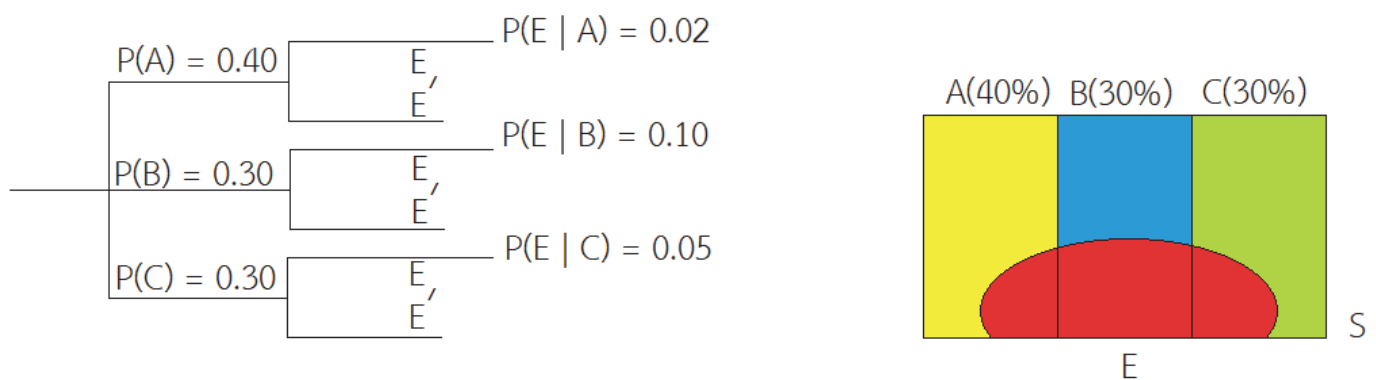
เพราะว่าขนิษฐาห่อของขวัญ 30% ของของขวัญทั้งหมดและลืมหาป้ายติดราคาออกก่อนห่อ 1 ใน 10 ครั้ง

เพราะฉะนั้น $P(B) = 0.30$ และ $P(E | B) = 0.10$

เพราะว่าพาณีห่อของขวัญที่เหลือและลืมหาป้ายติดราคาออกก่อนห่อ 1 ใน 20 ครั้ง

เพราะฉะนั้น $P(C) = 0.30$ และ $P(E | C) = 0.05$

พิจารณาแผนภาพต้นไม้ของความน่าจะเป็นและแผนภาพของเวนนีได้ดังนี้



รูปที่ 1.14

$$\begin{aligned}
 P(A | E) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} \\
 &= \frac{P(A)P(E | A)}{P(A)P(E | A) + P(B)P(E | B) + P(C)P(E | C)} \\
 &= \frac{(0.40)(0.02)}{(0.40)(0.02) + (0.30)(0.10) + (0.30)(0.05)} \\
 &= \frac{8}{53}
 \end{aligned}$$



บทที่ 2

ตัวแปรสุ่ม

ในการโยนเหรียญเที่ยงตรงผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้น 2 แบบ คือหัวหรือก้อย ปริณิบัติตัวอย่างของการโยนเหรียญเที่ยงตรง $S = \{ H, T \}$ แต่ในการโยนเหรียญครั้งต่อไปไม่รู้ว่าจะได้หัวหรือก้อย การทดลองทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูกจะได้ปริณิบัติตัวอย่างของแต้มลูกเต๋าเป็น $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ แต่ในการทอดลูกเต๋าร้อยครั้งต่อไปไม่รู้ว่าจะได้แต้มเท่าใด ในการทดลองทางสถิติ คำว่า **การลองสุ่ม** (random trial) ได้แก่การกระทำใด ๆ ที่ผู้กระทำไม่สามารถทราบผลลัพธ์ล่วงหน้าจนกว่าจะได้ทำเสร็จสิ้นไปแล้ว จึงจะทราบผลลัพธ์ที่ถูกต้อง

การทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง ถ้าไม่คำนึงถึงรายละเอียดว่าหัวจะขึ้นเป็นอันดับที่เท่าใด และสนใจเฉพาะจำนวนหัวทั้งหมดที่ขึ้นจากการโยนเหรียญ 3 ครั้ง แล้วจะเห็นว่าจำนวนหัวอาจมีค่าเป็น 0, 1, 2 หรือ 3 ซึ่งเป็นผลทั้งหมดเท่าที่จะเป็นไปได้ของการลองสุ่ม ปริณิบัติตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้ คือ

$$S = \{ TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH \}$$

เมื่อ H แทนการขึ้นหัว และ T แทนการขึ้นก้อย จากการโยนเหรียญ

สมมติให้ X เป็นจำนวนหัวที่ขึ้นเมื่อโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง ค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2, 3

การทดลองทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 5 ครั้ง

$$S = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \text{ เป็นแต้มลูกเต๋าของการทอดครั้งที่ } i, i = 1, 2, 3, 4, 5 \}$$

$$S = \{ (1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 2), \dots, (6, 6, 6, 6, 5), (6, 6, 6, 6, 6) \}$$

กรณีที่เรไม่คำนึงถึงรายละเอียดว่าแต้มที่ขึ้นเป็นอันดับที่เท่าใด

ถ้าสนใจเฉพาะจำนวนลูกเต๋าคี่ขึ้นแต้ม 6 แล้วจำนวนลูกเต๋าคี่ขึ้นแต้ม 6 อาจมีค่าเป็น 0, 1, 2, 3, 4 หรือ 5

สมมติให้ X จำนวนลูกเต๋าคี่ขึ้นแต้ม 6 เพราะฉะนั้นค่าของ X ที่เป็นไปได้ คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5

การทดลองหยิบลูกบอลพร้อมกัน 4 ลูก จากกล่องที่มีลูกบอลสีดำ 6 ลูก และลูกบอลสีขาว 10 ลูก

ถ้าเราสนใจเฉพาะจำนวนลูกบอลสีดำที่ได้ แล้วจะเห็นว่าจำนวนลูกบอลสีดำอาจมีค่าเป็น 0, 1, 2, 3 หรือ 4

สมมติให้ X จำนวนลูกบอลสีดำที่ได้

เพราะฉะนั้นค่าของ X ที่เป็นไปได้ คือ 0, 1, 2, 3, 4

2.1 ตัวแปรสุ่ม (Random Variables)

บทนิยาม 2.1.1 ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง **ตัวแปรสุ่ม** คือฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริง (real - valued function) ซึ่งกำหนดโดยแต่ละสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง กล่าวคือ $X : S \rightarrow \mathbb{R}$

ตัวอย่างเช่น ปริภูมิตัวอย่างของการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง

$$S = \{ TTT, TTH, THT, HTT, THH, HTH, HHT, HHH \}$$

ตัวแปรสุ่ม $X : S \rightarrow \mathbb{R}$

กำหนดโดย $X(s) =$ จำนวนหัวของสมาชิก s ของ S

$$\text{เช่น } X(TTT) = 0, X(TTH) = 1, \dots, X(HHH) = 3$$

จากตัวอย่างที่กล่าวข้างต้น X เป็นฟังก์ชันที่เรียกว่า ตัวแปรสุ่ม

X จะมีค่าเป็น 0 ก็ต่อเมื่อ ผลการทดลองเป็น TTT

X จะมีค่าเป็น 1 ก็ต่อเมื่อ ผลการทดลองเป็น TTH, THT หรือ HTT

X จะมีค่าเป็น 2 ก็ต่อเมื่อ ผลการทดลองเป็น THH, HTH หรือ HHT

X จะมีค่าเป็น 3 ก็ต่อเมื่อ ผลการทดลองเป็น HHH

ค่า X ที่ได้อาจเป็น 0, 1, 2 หรือ 3 ต่างก็เป็นจำนวนจริงและมีค่าได้เมื่อการทดลองเกิดผลดังกล่าว

เพราะฉะนั้น X เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริง ซึ่งกำหนดโดยสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างนี้

เรานิยมเขียนอักษรตัวใหญ่แทนตัวแปรสุ่มเช่น X, Y, Z และ อักษรตัวเล็กแทนค่าของตัวแปรสุ่มเช่น x, y, z

ตัวอย่าง 2.1.1 หยิบลูกบอลอย่างสุ่มทีละหนึ่งลูก 2 ครั้ง โดยหยิบแล้วไม่ใส่คืน จากกล่องที่มีลูกบอลสีแดง 4 ลูกและสีขาว 3 ลูก ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้ จงแสดงว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม

วิธีทำ ปริภูมิตัวอย่างคือ $S = \{ (a, b) \mid a, b \text{ เป็นสีของลูกบอลในการหยิบครั้งที่ 1 และ 2} \}$

เพราะฉะนั้น $S = \{ (\text{แดง}, \text{แดง}), (\text{แดง}, \text{ขาว}), (\text{ขาว}, \text{แดง}), (\text{ขาว}, \text{ขาว}) \}$

ให้ X คือจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้

X มีค่าเป็น 0, 1, 2

X มีค่าเป็น 0 เมื่อหยิบได้ (ขาว, ขาว)

X มีค่าเป็น 1 เมื่อหยิบได้ (ขาว, แดง) หรือ (แดง, ขาว)

X มีค่าเป็น 2 เมื่อหยิบได้ (แดง, แดง)

ค่า X ที่ได้อาจเป็น 0, 1, 2 ต่างก็เป็นจำนวนจริงและมีค่าได้เมื่อการทดลองเกิดผลดังกล่าว

เพราะฉะนั้น X เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริง ซึ่งกำหนดโดยสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง S

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่ม



ตัวแปรสุ่มมี 2 ชนิด คือ ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable) และ ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable)

ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable)

ตัวแปรสุ่ม X เป็น **ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง** ถ้า X มีค่าเป็นจำนวนที่นับได้ถ้วน หรือ X มีค่าเป็นจำนวนที่จับคู่ชนิดหนึ่งต่อกับจำนวนเต็มบวกทั้งหมดได้ ปฏิบัติตัวอย่างที่มีจุดตัวอย่างเป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง เรียกว่า **ปริภูมิตัวอย่างไม่ต่อเนื่อง** (discrete sample space) ตัวอย่างเช่น

1. ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก จนกระทั่งหน้า 5 ขึ้นเป็นครั้งแรก

ให้ลูกเต๋าชี้หน้า 5 ครั้งแรก ในการทอดครั้งที่ x

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 1, 2, 3, 4, ... เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

2. ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 5 อันพร้อมกัน ให้ X แทนจำนวนหัวที่ได้

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

3. ในการหยิบลูกแก้ว 8 ลูกออกมาพร้อมกันจากกล่องที่มีลูกแก้วสีดำ 10 ลูก และลูกแก้วสีขาว 15 ลูก X แทนจำนวนลูกแก้วสีดำที่ได้

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable)

ตัวแปรสุ่ม X เป็น **ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง** ถ้า X มีค่าต่อเนื่องกันได้หลายค่าไม่นับไม่ถ้วน ปฏิบัติตัวอย่างที่มีจุดตัวอย่างเป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง เรียกว่า **ปริภูมิตัวอย่างต่อเนื่อง** (continuous sample space)

ตัวอย่างเช่น

1. ให้ t เป็นอายุการใช้งานของหลอดภาพโทรทัศน์ เพราะฉะนั้น t มีค่ามากกว่า 0

ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{ t \mid t > 0 \}$ เป็นปริภูมิตัวอย่างต่อเนื่อง

2. ให้ x เป็นจำนวนจริงที่สุ่มเลือกมาจากช่วง $[0, 1]$

ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{ x \mid 0 \leq x \leq 1 \}$ เป็นปริภูมิตัวอย่างต่อเนื่อง

3. ให้ w เป็นน้ำหนักของเด็กแรกเกิดในกรุงเทพมหานคร เพราะฉะนั้น w มีค่ามากกว่า 0

ปริภูมิตัวอย่าง $S = \{ w \mid w > 0 \}$ เป็นปริภูมิตัวอย่างต่อเนื่อง

2.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นไม่ต่อเนื่อง (Discrete Probability Distributions)

ให้ $X = x_1, x_2, x_3, \dots$ เป็นตัวแปรสุ่ม จะได้ว่า $P(X = x_i) = f(x_i)$ เป็นค่าคงที่เสมอ
การหา $f(x)$ สามารถหาได้ในรูปแบบของสูตรหรือรูปแบบตารางแจกแจงความน่าจะเป็น

ตัวอย่าง 2.2.1 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 3 ครั้ง

ให้ X แทนจำนวนหัวที่ขึ้น

เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่ม $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$ ผลการโยนจะมีแบบต่าง ๆ กันดังนี้

เหตุการณ์เชิงเดียว	x
T T T	0
T T H	1
T H T	1
H T T	1
T H H	2
H T H	2
H H T	2
H H H	3

ให้ $P(X = x) = f(x)$ จากตารางจะได้

$$P(X = 0) = f(0) = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = 3) = f(3) = \frac{1}{8}$$



บทนิยาม 2.2.1 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีค่าเป็น $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ด้วยความน่าจะเป็น $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ ตามลำดับ

ถ้าเหตุการณ์ A เป็นสับเซตของเซต $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$

$$\text{แล้ว } P(X \in A) = \sum_{x \in A} f(x)$$

บทนิยาม 2.2.2 ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็น **ฟังก์ชันความน่าจะเป็น** (probability function) หรือ การแจกแจงความน่าจะเป็น (probability distribution) ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X ถ้า

1. $f(x) \geq 0$ ทุกค่า x
2. $\sum_{x \in R_X} f(x) = 1$ เมื่อ R_X เป็นพิสัย (เซตของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด) ของตัวแปรสุ่ม X
3. $P(X = x) = f(x)$ ทุกค่า x

ตัวอย่าง 2.2.2 ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก ให้ X เป็นจำนวนลูกเต๋าคี่ที่ขึ้นหน้า 1 หรือหน้า 2 จงสร้างตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

วิธีทำ เพราะว่า X เป็นจำนวนลูกเต๋าคี่ที่ขึ้นหน้า 1 หรือหน้า 2 เพราะฉะนั้น X มีค่า 0, 1 หรือ 2 ลูกเต๋าคี่แต่ละลูกมี 6 หน้า จำนวนวิธีที่ลูกเต๋าคี่ 2 ลูกจะขึ้นหน้าต่าง ๆ กันมีทั้งหมด $= 6^2 = 36$ วิธี

ลูกที่ 2 ลูกที่ 1	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$x = 0$ เมื่อลูกเต๋าคี่ไม่ขึ้นหน้า 1 หรือ 2 เลย

จำนวนวิธีที่ลูกเต๋าคี่ทั้งสองลูกไม่ขึ้นหน้า 1 หรือ 2 เลยมี 16 วิธี $P(X = 0) = f(0) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$x = 1$ เมื่อลูกเต๋าคี่ขึ้นหน้า 1 หรือ 2 เพียงลูกเดียว

ลูกเต๋าคี่ขึ้นหน้า 1 หรือ 2 เพียงลูกเดียว มี 16 วิธี $P(X = 1) = f(1) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

$x = 2$ เมื่อลูกเต๋าคี่ทั้งสองลูกขึ้นหน้า 1 หรือ 2 เท่านั้น

จำนวนวิธีที่ลูกเต๋าคี่ทั้งสองลูกขึ้นหน้า 1 หรือ 2 เท่านั้น มี 4 วิธี $P(X = 2) = f(2) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

เพราะฉะนั้นตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

x	0	1	2	รวม
ความน่าจะเป็นของ $X = x$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1



ตัวอย่าง 2.2.3 ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 5 อันพร้อมกัน ให้ X เป็นจำนวนหัวที่ขึ้น

จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

วิธีทำ ปริภูมิตัวอย่างซึ่งเกิดจากการโยนเหรียญเที่ยงตรง 5 อันมีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนวิธีทั้งหมดที่เหรียญทั้ง 5 อันจะขึ้นแบบต่าง ๆ กัน $= 2^5 = 32$ วิธี

เพราะว่า X เป็นจำนวนหัวที่ขึ้น เพราะฉะนั้น X เป็นตัวแปรสุ่มมีค่าเป็น $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

จำนวนวิธีที่ขึ้นหัว x ครั้ง $= \binom{5}{x}$ เมื่อ $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

เพราะฉะนั้น $P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{5}{x}}{32}$ เมื่อ $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

เพราะฉะนั้นตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

x	0	1	2	3	4	5	รวม
$f(x)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1



การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> x=c(0,1,2,3,4,5)
> f=function(x) (factorial(5)/(factorial(x)*factorial(5-x)))/32
> fx=f(x)
> f(0)
[1] 0.03125
> f(1)
[1] 0.15625
> table=data.frame(x,fx)
> table
  x      fx
1 0 0.03125
2 1 0.15625
3 2 0.31250
4 3 0.31250
5 4 0.15625
6 5 0.03125
```

บทที่ 2 ตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง 2.2.4 ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีดำ 3 ลูก สีแดง 2 ลูก สีขาว 5 ลูก หยิบลูกบอล 1 ลูกอย่างสุ่ม ให้ $x = 1$ เมื่อลูกบอลที่หยิบได้เป็นสีดำ

$x = 2$ เมื่อลูกบอลที่หยิบได้เป็นสีแดง

$x = 3$ เมื่อลูกบอลที่หยิบได้เป็นสีขาว

จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

วิธีทำ

มีลูกบอลในถุงมีทั้งหมด 10 ลูก หยิบลูกบอล 1 ลูกอย่างสุ่ม

ให้ S = ปริภูมิตัวอย่างของการหยิบลูกบอล 1 ลูก จากลูกบอลทั้งหมด 10 ลูก

เพราะฉะนั้นจำนวนสมาชิกของ S เท่ากับ $\binom{10}{1} = 10$

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีดำ 1 ลูก จากลูกบอลสีดำ 3 ลูก $= \binom{3}{1} = 3$

$$P(X = 1) = f(1) = \frac{3}{10} = 0.3$$

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีแดง 1 ลูก จากลูกบอลสีแดง 2 ลูก $= \binom{2}{1} = 2$

$$P(X = 2) = f(2) = \frac{2}{10} = 0.2$$

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีขาว 1 ลูก จากลูกบอลสีขาว 5 ลูก $= \binom{5}{1} = 5$

$$P(X = 3) = f(3) = \frac{5}{10} = 0.5$$

เพราะฉะนั้นตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ

x	1	2	3
$f(x)$	0.3	0.2	0.5



บทนิยาม 2.2.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X ซึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็น $f(x)$ คือ $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$

และ $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม X ในตัวอย่าง 2.2.3

วิธีทำ

$$F(0) = P(X = 0) = f(0) = \frac{1}{32}$$

$$F(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{6}{32}$$

$$F(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{16}{32}$$

$$F(3) = P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^3 f(x) = \frac{26}{32}$$

$$F(4) = P(X \leq 4) = \sum_{x=0}^4 f(x) = \frac{31}{32}$$

$$F(5) = P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^5 f(x) = 1$$

$$\text{ความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม } X \text{ คือ } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \frac{1}{32} & \text{เมื่อ } 0 \leq x < 1 \\ \frac{6}{32} & \text{เมื่อ } 1 \leq x < 2 \\ \frac{16}{32} & \text{เมื่อ } 2 \leq x < 3 \\ \frac{26}{32} & \text{เมื่อ } 3 \leq x < 4 \\ \frac{31}{32} & \text{เมื่อ } 4 \leq x < 5 \\ 1 & \text{เมื่อ } x \geq 5 \end{cases}$$



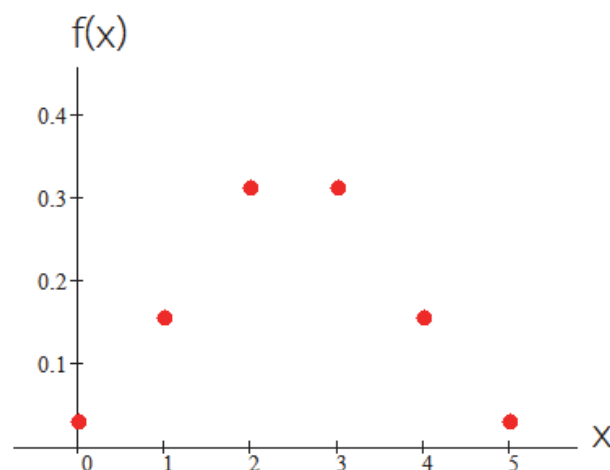
กราฟของความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

ให้ $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ และ $P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{5}{x}}{32}$ จะได้การแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ดังนี้

x	0	1	2	3	4	5	รวม
f(x)	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$	1

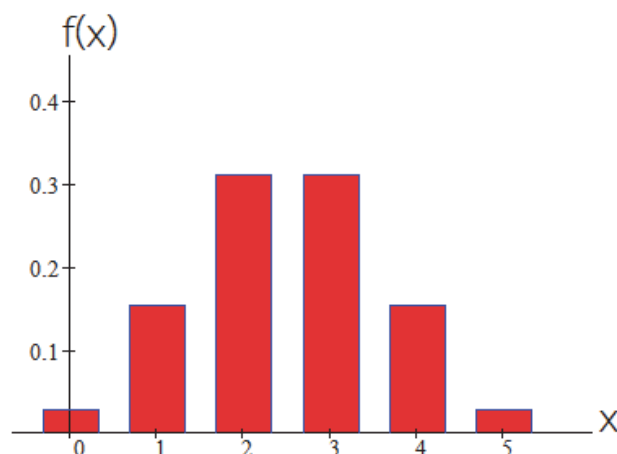
การนำเสนอการแจกแจงความน่าจะเป็นโดยการเขียนกราฟอาจแสดงด้วย

1. การเขียนจุด ($x, f(x)$)
 2. แผนภูมิแท่ง (bar chart)
 3. ฮิสโตแกรมความน่าจะเป็น (probability histogram)
 4. ฮิสโตแกรมความน่าจะเป็น (probability histogram) และเชื่อมโยงจุดกึ่งกลางเป็นโค้งของความน่าจะเป็น
- ตัวอย่างเช่น กราฟของการแจกแจงความน่าจะเป็น



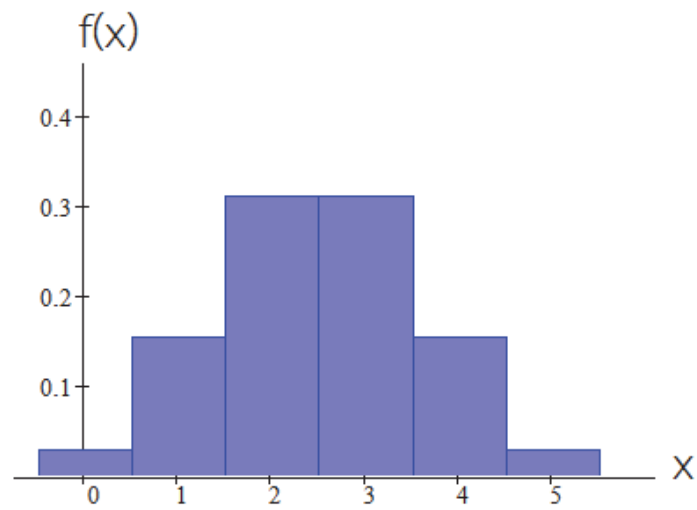
รูปที่ 2.1

แผนภูมิแท่ง (bar chart)



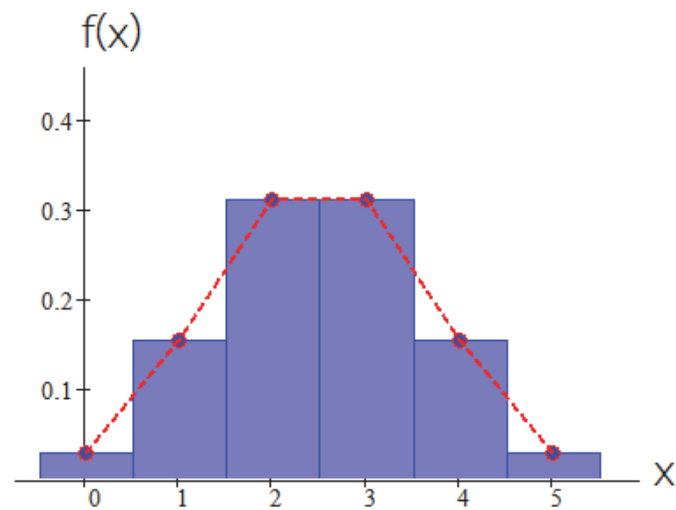
รูปที่ 2.2

ฮิสโตแกรมความน่าจะเป็น (probability histogram)



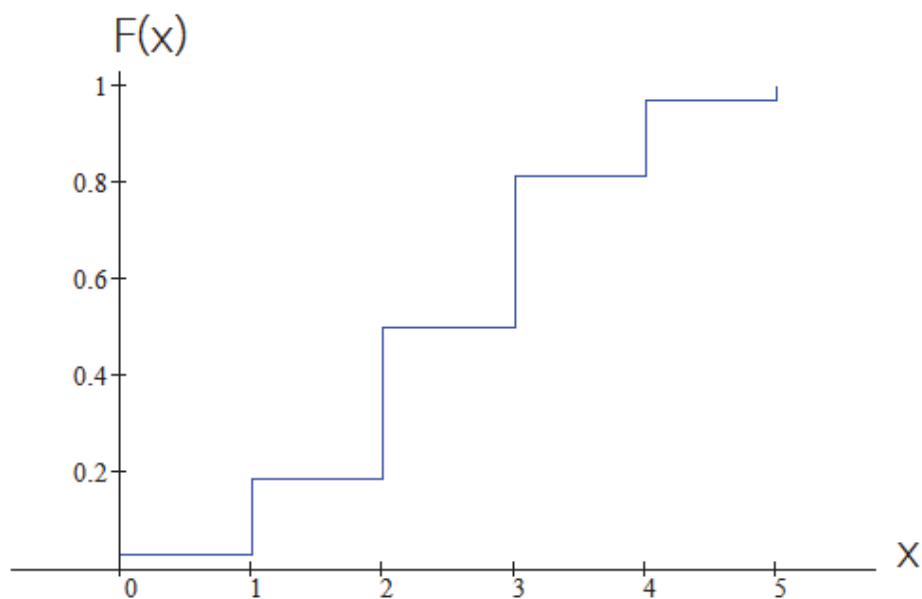
รูปที่ 2.3

ฮิสโตแกรมความน่าจะเป็น (probability histogram) และเชื่อมโยงจุดกึ่งกลางเป็นโค้งของความน่าจะเป็น



รูปที่ 2.4

กราฟของการแจกแจงความน่าจะเป็นสะสม มีลักษณะเป็นฟังก์ชันขั้นบันได (step function) หาได้โดยเขียนจุด $(x, F(x))$ และลากเส้นระดับ ดังรูปที่ 2.5



รูปที่ 2.5

2.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นต่อเนื่อง (Continuous Probability Distributions)

ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X มีฟังก์ชัน f ฟังก์ชันหนึ่งซึ่งทำให้ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่า x ในช่วง $(-\infty, \infty)$ เรียก $f(x)$ ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น (probability density function) เขียนย่อว่า p.d.f. หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ฟังก์ชันความน่าจะเป็น และ ถ้า A เป็นเหตุการณ์ แล้ว $P(X \in A) = \int_A f(x) dx$

หมายเหตุ

1. ให้ $A = \{x \mid a < x < b\} = (a, b)$ และตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X มี p.d.f. เป็น $f(x)$

$$\text{จะได้ว่า } P(a < X < b) = P(X \in A) = \int_A f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

2. ไม่ว่าเซต A จะเป็นช่วงเปิดหรือช่วงปิดหรือช่วงครึ่งเปิดก็ตามค่าของ $\int_a^b f(x) dx$ ก็ยังคงมีค่าเท่าเดิม

$$\text{เพราะฉะนั้น } P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)$$

3. $P(X = a) = 0$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

$$4. \text{ ถ้า } A = \{x \mid -\infty < x < \infty\} \text{ แล้ว } P(X \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

บทนิยาม 2.3.1 ฟังก์ชัน $f(x)$ จะเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X ถ้า

1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริง

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$3. P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

ตัวอย่าง 2.3.1 ให้ตัวแปรสุ่ม X มี p.d.f. เป็น $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(3+2x) & \text{เมื่อ } 2 < x < 4 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$

ก. จงหาค่าของ $P(2 < X < 3)$

ข. จงแสดงว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

วิธีทำ

$$\text{ก. } P(2 < X < 3) = \int_2^3 f(x) dx$$

$$= \int_2^3 \frac{1}{18} (3 + 2x) dx$$

$$= \frac{1}{18} [3x + x^2]_{x=2}^{x=3}$$

$$= \frac{4}{9}$$

$$\text{ข. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^{\infty} f(x) dx$$

$$= 0 + \int_2^4 \frac{1}{18} (3 + 2x) dx + 0$$

$$= \frac{1}{18} [3x + x^2]_{x=2}^{x=4}$$

$$= \frac{1}{18} (28 - 10)$$

$$= 1$$



การคำนวณโดยโปรแกรม R

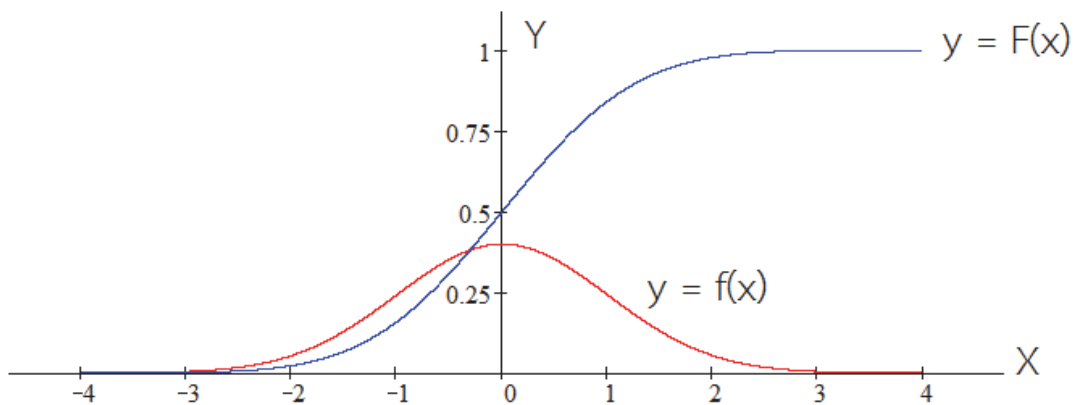
```
> f=function(x) (1/18)*(3+2*x)
> integrate(f,2,3)
0.444444444 with absolute error < 0.0000000000000049
```

บทนิยาม 2.3.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X ซึ่งมี p.d.f. เป็น $f(x)$ คือ

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

จากนิยามของ $F(x)$ จะได้ $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$ และ $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$

ตัวอย่างกราฟของ $y = f(x)$ และ $y = F(x)$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มปกติ



รูปที่ 2.6

ตัวอย่าง 2.3.2 จาก p.d.f. ในตัวอย่าง 2.3.1 จงหา $F(x)$ และ $P(2 < X < 3)$

วิธีทำ $F(x) = \int_2^x \frac{1}{18} (3 + 2t) dt$ เมื่อ $2 < x < 4$

$$= \frac{1}{18} [3t + t^2]_{t=2}^{t=x}$$

$$= \frac{1}{18} [(3x + x^2) - (6 + 4)]$$

$$= \frac{1}{18} (x^2 + 3x - 10) \text{ เมื่อ } 2 < x < 4$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ \frac{1}{18}(x^2 + 3x - 10) & \text{เมื่อ } 2 < x < 4 \\ 1 & \text{เมื่อ } x \geq 4 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $P(2 < X < 3) = F(3) - F(2)$

$$= \frac{1}{18} (9 + 9 - 10) - 0$$

$$= \frac{4}{9}$$



2.4 ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม

การกำหนดบทนิยามค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม หรือ ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม ก่อนอื่นขอให้ดูตัวอย่างของการทดลอง 2 แบบ ต่อไปนี้

ตัวอย่างการทดลองแบบที่หนึ่ง

กล่องใบหนึ่งมีสลากหมายเลข 1 จำนวน 1 ใบ และมีสลากหมายเลข 2 จำนวน 1 ใบ หยิบสลากออกมา 1 ใบ ให้ X = หมายเลขที่ได้

เพราะฉะนั้น $X = 1, 2$

ปัญหาที่สำคัญในทางสถิติคือ ตัวแปรสุ่ม X มีค่าเฉลี่ยเท่าใด

เพราะว่า $P(X = 1) = P(X = 2) = 0.5$ เพราะฉะนั้นตัวแปรสุ่ม X มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\frac{1+2}{2} = 1.5$

ตัวอย่างการทดลองแบบที่สอง

กล่องใบหนึ่งมีสลากหมายเลข 1 จำนวน 1 ใบ และมีสลากหมายเลข 2 จำนวน 99 ใบ หยิบสลากออกมา 1 ใบ ให้ X = หมายเลขที่ได้

เพราะฉะนั้น $X = 1, 2$

หากเราจะบอกว่าตัวแปรสุ่ม X มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\frac{1+2}{2} = 1.5$ อาจไม่เหมาะสม เนื่องจาก $P(X = 1) = \frac{1}{100}$

แต่ $P(X = 2) = \frac{99}{100}$

เพราะว่า $P(X = 1) = \frac{1}{100}$ เพราะฉะนั้น $x = 1$ ถ่วงน้ำหนักด้วยโอกาสเกิดเฉลี่ยมีค่าเป็น $(1)(\frac{1}{100}) = 0.01$

เพราะว่า $P(X = 2) = \frac{99}{100}$ เพราะฉะนั้น $x = 2$ ถ่วงน้ำหนักด้วยโอกาสเกิดเฉลี่ยมีค่าเป็น $(2)(\frac{99}{100}) = 1.98$

เพราะฉะนั้นตัวแปรสุ่ม X มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $0.01 + 1.98 = 1.99$

การกำหนดค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม หรือ ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม ใช้บทนิยามดังนี้

บทนิยาม 2.4.1 X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x)$ ค่าคาดหวังของ X แทนด้วย $E(X)$

กำหนดค่าโดย

$E(X) = \sum_x x f(x)$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X แทนด้วย μ หรือ μ_X มีค่าเท่ากับ $E(X)$

ข้อตกลง $\sum_x \xi(x)$ หมายถึงผลบวก $\xi(x)$ ทุกค่า x ที่เป็นไปได้

ตัวอย่าง 2.4.1 เลือกกรรมการ 3 คนอย่างสุ่มจากผู้สมัครทั้งหมด 7 คน ซึ่งเป็นนักเคมี 4 คน และนักชีววิทยา 3 คน จงหาค่าคาดหวังของจำนวนนักเคมีที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการ

วิธีทำ ให้ X เป็นจำนวนนักเคมีที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการ

$$P(X = x) = f(x) = \frac{\binom{4}{x} \binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}} \text{ เมื่อ } x = 0, 1, 2, 3$$

x	0	1	2	3	รวม
f(x)	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1
x f(x)	0	$\frac{12}{35}$	$\frac{36}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{60}{35}$

$$E(X) = \sum_{x=0}^3 x f(x) = \frac{60}{35} = \frac{12}{7} = 1.71428571$$

เพราะฉะนั้นในการเลือกกรรมการ 3 คนอย่างสุ่มจากนักเคมี 4 คนและนักชีววิทยา 3 คน

จะได้ค่าเฉลี่ยของนักเคมีที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการเท่ากับ 1.71428571 คน



การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> ncr=function(n,r) (factorial(n)/(factorial(r)*factorial(n-r)))
> x=c(0,1,2,3)
> f=function(x) ncr(4,x)*ncr(3,3-x)/ncr(7,3)
> fx=f(x)
> xfx=x*f(x)
> f(0)
[1] 0.0285714286
> f(1)
[1] 0.342857143
> table=data.frame(x,fx,xfx)
> table
  x      fx      xfx
1 0 0.0285714286 0.000000000
2 1 0.3428571429 0.342857143
3 2 0.5142857143 1.028571429
4 3 0.1142857143 0.342857143
> Ex=sum(x*f(x))
> Ex
[1] 1.71428571
```

บทที่ 2 ตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง 2.4.2 เล่นเกมโยนเหรียญเที่ยงตรง 3 อันพร้อมกัน

ถ้า เหรียญขึ้นหัวทั้งหมด หรือ ก้อยทั้งหมด แล้วผู้เล่นจะได้รับเงิน 5 บาทจากร้านเล่นเกม

ถ้า เหรียญขึ้นหัว 1 อัน หรือ 2 อัน แล้วผู้เล่นจะจ่าย 3 บาทให้ร้านเล่นเกม

จงหาค่าคาดคะเนของเงินที่ผู้เล่นจะได้รับจากร้านเล่นเกม

วิธีทำ ให้ Y เป็นจำนวนเงินที่จะได้รับจากร้านเล่นเกม

เพราะว่า

ถ้า เหรียญขึ้นหัวทั้งหมด หรือ ก้อยทั้งหมด แล้วผู้เล่นจะได้รับเงิน 5 บาทจากร้านเล่นเกม

ถ้า เหรียญขึ้นหัว 1 อัน หรือ 2 อัน แล้วผู้เล่นจะจ่าย 3 บาทให้ร้านเล่นเกม

เพราะฉะนั้น $Y = 5, -3$

$$P(Y = 5) = f(5) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(Y = -3) = f(-3) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$E(Y) = (5)\left(\frac{1}{4}\right) + (-3)\left(\frac{3}{4}\right) = -1$$

เพราะฉะนั้นในเกมนี้โดยเฉลี่ยแล้วผู้เล่นจะเสียเงิน 1 บาท ในการเล่นแต่ละครั้ง



หมายเหตุ การเล่นเกมใด ๆ เราจะเรียกว่า **เกมยุติธรรม** (fair game) ถ้าโดยเฉลี่ยแล้วผู้เล่นไม่ได้เปรียบหรือเสียเปรียบเลย เพราะฉะนั้นเมื่อค่าคาดคะเนเป็นศูนย์จะหมายถึงเกมยุติธรรม

ตัวอย่าง 2.4.3 ให้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X คือ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{20,000}{x^3} & \text{เมื่อ } x > 100 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าคาดคะเนของ X

$$\text{วิธีทำ } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_{100}^{\infty} x \left(\frac{20000}{x^3} \right) dx$$

$$= \int_{100}^{\infty} \frac{20000}{x^2} dx$$

$$= 200$$



บทนิยาม 2.4.2 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม $u(X)$ เป็นฟังก์ชันของ X จะได้ $u(X)$ เป็นตัวแปรสุ่ม

ทฤษฎีบท 2.4.1 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x)$ และตัวแปรสุ่ม $u(X)$ เป็นฟังก์ชันของ X ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม $u(X)$ แทนด้วย $E[u(X)]$

กำหนดค่าโดย

$$E[u(X)] = \sum_x u(x) f(x) \text{ เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง}$$

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx \text{ เมื่อ } X \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง}$$

ตัวอย่าง 2.4.4 ให้ X เป็นจำนวนเหรียญที่ขึ้นหัวที่เกิดจากการโยนเหรียญเที่ยงตรง 3 อันพร้อมกัน

$$\text{ให้ } u(X) = X^2 + 1 \text{ และ } v(X) = (X - 1)^2$$

จงหา $E[u(X)]$ และ $E[v(X)]$

วิธีทำ $X = 0, 1, 2, 3$

$$u(X) = X^2 + 1$$

$$E[u(X)] = E(X^2 + 1) = \sum_{x=0}^3 (x^2 + 1) f(x)$$

$$f(x) = \binom{3}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \text{ เมื่อ } x = 0, 1, 2, 3$$

$$E(X^2 + 1) = (1) f(0) + (2) f(1) + (5) f(2) + (10) f(3)$$

$$= (1)\left(\frac{1}{8}\right) + (2)\left(\frac{3}{8}\right) + (5)\left(\frac{3}{8}\right) + (10)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 4$$

ในทำนองเดียวกัน $v(X) = (X - 1)^2$

$$E[v(X)] = E[(X - 1)^2]$$

$$= \sum_{x=0}^3 (x - 1)^2 f(x)$$

$$= (0 - 1)^2 f(0) + (1 - 1)^2 f(1) + (2 - 1)^2 f(2) + (3 - 1)^2 f(3)$$

$$= (1) f(0) + (0) f(1) + (1) f(2) + (4) f(3)$$

$$= (1)\left(\frac{1}{8}\right) + (0)\left(\frac{3}{8}\right) + (1)\left(\frac{3}{8}\right) + (4)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= 1$$



ตัวอย่าง 2.4.5 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3} & \text{เมื่อ } -1 < x < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$

และให้ $u(X) = 2X - 1$

จงหาค่าคาดคะเนของ $u(X)$

วิธีทำ $E[u(X)] = E(2X - 1)$

$$= \int_{-1}^2 (2x - 1) f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^2 (2x - 1) \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-1}^2 (2x^3 - x^2) dx$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{x^4}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=2}$$

$$= \frac{1}{3} \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{16}{3} - \frac{5}{6} \right)$$

$$= \frac{3}{2}$$



การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> xf=function(x) (2*x-1)*(x^2)/3
> Ex=integrate(xf,-1,2)
> Ex
1.5 with absolute error < 2.3e-14
```

2.5 กฎของการคาดคะเน

เพื่อช่วยให้การคำนวณค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่มสะดวกขึ้น เรามีกฎต่าง ๆ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ทั้งกรณีตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องและตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ซึ่งในที่นี้จะแสดงการพิสูจน์สำหรับกรณีตัวแปรสุ่มต่อเนื่องเท่านั้น

ทฤษฎีบท 2.5.1 ถ้า a และ b เป็นค่าคงตัว จะได้ $E(aX + b) = aE(X) + b$

ข้อพิสูจน์

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x) dx \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= aE(X) + b(1) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $E(aX + b) = aE(X) + b$



ทฤษฎีบทประกอบ 2.5.2 เมื่อ $a = 0$ จะได้ $E(b) = b$

ทฤษฎีบทประกอบ 2.5.3 เมื่อ $b = 0$ จะได้ $E(aX) = aE(X)$

ทฤษฎีบท 2.5.4 $E[u(X) + v(X)] = E[u(X)] + E[v(X)]$

ข้อพิสูจน์

$$\begin{aligned} \text{โดยนิยาม } E[u(X) + v(X)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \{ u(x) + v(x) \} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} v(x) f(x) dx \\ &= E[u(X)] + E[v(X)] \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $E[u(X) + v(X)] = E[u(X)] + E[v(X)]$



ทฤษฎีบทประกอบ 2.5.5 $E[u(X) - v(X)] = E[u(X)] - E[v(X)]$

บทที่ 2 ตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง 2.5.1 จงหาค่าของ $E[(X - 1)^2]$

จากตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ดังต่อไปนี้

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$

$$\text{วิธีทำ } E[(X - 1)^2] = E(X^2 - 2X + 1)$$

$$= E(X^2) - 2E(X) + E(1)$$

$$= E(X^2) - 2E(X) + 1$$

$$E(X) = (0)\left(\frac{1}{3}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (2)(0) + (3)\left(\frac{1}{6}\right) = 1$$

$$E(X^2) = (0)\left(\frac{1}{3}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) + (4)(0) + (9)\left(\frac{1}{6}\right) = 2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } E[(X - 1)^2] = 2 - 2(1) + 1 = 1$$



การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> x=c(0,1,2,3)
> f=c(1/3,1/2,0,1/6)
> Ex=sum(x*f)
> Ex
[1] 1
> Exx=sum(x*x*f)
> Exx
[1] 2
> Exx-2*Ex+1
[1] 1
```

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 2.4.5 เราอาจหาค่าของ $E(2X - 1)$ โดยทฤษฎีบท 2.5.1

$$\text{เพราะฉะนั้น } E(2X - 1) = 2E(X) - 1$$

$$\text{เพราะว่า } E(X) = \int_{-1}^2 x \left(\frac{x^2}{3}\right) dx = \int_{-1}^2 \frac{x^3}{3} dx = \left[\frac{x^4}{12}\right]_{x=-1}^{x=2} = \frac{5}{4}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } E(2X - 1) = (2)\left(\frac{5}{4}\right) - 1 = \frac{3}{2}$$

2.6 ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม

ความแปรปรวนเป็นค่าตัวเลขที่บอกให้เราทราบว่าการกระจายค่าของตัวแปรสุ่ม X มีการกระจายมากหรือน้อยจากค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X หรือค่าของตัวแปรสุ่ม X เบี่ยงเบนมากหรือน้อยจากค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X

แนวคิดของการหาค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มเป็นดังนี้

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีค่าเป็น $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ด้วยความน่าจะเป็น $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n), \dots$ ตามลำดับ

ให้ $\mu = E(X)$ เป็นค่าคาดคะเนของ X

เพราะฉะนั้น $x_i - \mu$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่ x_i เบี่ยงเบนไปจาก μ

เพราะฉะนั้น $(x_i - \mu)^2$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองที่ x_i เบี่ยงเบนไปจาก μ

เพราะว่า $P(X = x_i) = f(x_i)$

เพราะฉะนั้น $(x_i - \mu)^2 f(x_i)$ เป็นค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองถ่วงน้ำหนักด้วยโอกาสเกิดค่าของ x_i

เพราะฉะนั้น $\sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 f(x)$ เป็นผลรวมค่าคลาดเคลื่อนยกกำลังสองถ่วงน้ำหนักด้วยความน่าจะเป็น

ของตัวแปรสุ่ม $P(X = x) = f(x)$

จะเห็นว่า $\sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 f(x)$ ตรงกับ $E[(X - \mu)^2]$

ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X ทั้งตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง และ ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง กำหนดดังนี้

บทนิยาม 2.6.1 ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย σ^2 หรือ $\text{var}(X)$

กำหนดโดย $\sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$

กรณีที่สองของความแปรปรวนที่มีค่าเป็นบวกเรียกว่า **ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน**

ทฤษฎีบท 2.6.1 $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

ข้อพิสูจน์ $\text{var}(X) = \sigma^2 = E[(X - \mu)^2]$

$$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2)$$

$$= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$



ตัวอย่าง 2.6.1 จงหาความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X เมื่อ X เป็นจำนวนนักเคมีที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการจากการเลือกกรรมการ 3 คน จากผู้สมัครซึ่งเป็นนักเคมี 4 คน และ นักชีววิทยา 3 คน

วิธีทำ จากตัวอย่าง 2.4.1 ได้ $E(X) = \mu = \frac{12}{7}$

เพราะว่า $E(X^2) = (0)\left(\frac{1}{35}\right) + (1)\left(\frac{12}{35}\right) + (4)\left(\frac{18}{35}\right) + (9)\left(\frac{4}{35}\right) = \frac{24}{7}$ และ $\mu = \frac{12}{7}$

เพราะฉะนั้น $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$ □

การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> ncr=function(n,r) (factorial(n)/(factorial(r)*factorial(n-r)))
> x=c(0,1,2,3)
> f=function(x) ncr(4,x)*ncr(3,3-x)/ncr(7,3)
> fx=f(x)
> xfx=x*f(x)
> f(0)
[1] 0.0285714286
> f(1)
[1] 0.342857143
> table=data.frame(x,fx,xfx)
> table
  x      fx      xfx
1 0 0.0285714286 0.000000000
2 1 0.3428571429 0.342857143
3 2 0.5142857143 1.028571429
4 3 0.1142857143 0.342857143
> Ex=sum(x*f(x))
> Ex
[1] 1.71428571
> Exx=sum(x*x*f(x))
> Exx
[1] 3.42857143
> variance=Exx-(Ex)^2
> variance
[1] 0.489795918
```

ตัวอย่าง 2.6.2 จงหา ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมี p.d.f.

$$\text{คือ } f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{เมื่อ } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

$$\text{วิธีทำ } \mu = E(X) = \int_1^2 x(2(x-1)) dx = \frac{5}{3} \text{ และ } E(X^2) = \int_1^2 x^2(2(x-1)) dx = \frac{17}{6}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sigma^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sigma = \frac{1}{\sqrt{18}} = 0.236$$



ตัวอย่าง 2.6.3 จงหาค่าความแปรปรวน σ^2

จากตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ดังต่อไปนี้

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.15	0.25

วิธีทำ

x	0	1	2	3	4	รวม
$f(x)$	0.2	0.1	0.3	0.15	0.25	1
$x f(x)$	0	0.1	0.6	0.45	1	2.15
$x^2 f(x)$	0	0.1	1.2	1.35	4	6.65

$$\text{เพราะฉะนั้น } \mu = E(X) = 2.15, E(X^2) = 6.65$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = 6.65 - (2.15)^2 = 2.0275$$

การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> x=c(0,1,2,3,4)
> f=c(0,0.1,0.3,0.15,0.25)
> Ex=sum(x*f)
> Ex
[1] 2.15
> Exx=sum(x*x*f)
> Exx
[1] 6.65
> Exx-Ex^2
[1] 2.0275
```

2.7 การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกัน (Joint Probability Distributions)

ให้ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นผลของการทดลองสุ่มซึ่งเกิดในเวลาเดียวกัน ความน่าจะเป็นของตัวแปรทั้งสองที่ X มีค่าเป็น x และ Y มีค่าเป็น y เขียนแทนในรูปฟังก์ชัน $f(x, y)$ เรียกว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y**

ในกรณีตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง จะได้ $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$

บทนิยาม 2.7.1 $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน (joint probability function) ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X และ Y ถ้า

1. $f(x, y) \geq 0$ ทุกค่า (x, y)
2. $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$
3. $P((X, Y) \in A) = \sum_{(x, y) \in A} f(x, y)$ เมื่อ $A \subseteq R \times R$

ตัวอย่าง 2.7.1 หยิบไฟ 1 ใบอย่างสุ่มจากไฟ 1 สำหรับที่มี 52 ใบ

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีค่าเป็น 1, 2, 3, 4 เมื่อหยิบได้ไฟโพดำ โฟแดง ข้าวหลามตัด ดอกจิก ตามลำดับ

ให้ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีค่าเป็น 1, 2, 3, ..., 13 เมื่อไฟที่หยิบได้มีแต้มเป็น A, 2, 3, ..., 10, J, Q, K ตามลำดับ
จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่ม X และ Y

วิธีทำ ให้ $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$

เช่น $f(2, 13) = P(X = 2, Y = 13)$ คือความน่าจะเป็นที่หยิบไฟได้ K โฟแดง

เพราะว่า จำนวนวิธีหยิบไฟ 1 ใบใด ๆ จาก 52 ใบ $= \binom{52}{1} = 52$

เพราะฉะนั้น $f(x, y) = \frac{1}{52}$ เมื่อ $x = 1, 2, 3, 4$ และ $y = 1, 2, 3, \dots, 13$ □

ตัวอย่าง 2.7.2 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีดำ 3 ลูก สีแดง 2 ลูก และ สีเขียว 3 ลูก หยิบลูกบอล 2 ลูกพร้อมกัน

อย่างสุ่ม ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีดำที่หยิบได้ และ Y เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้

จงหาฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่ม X และ Y

วิธีทำ

สมมติหยิบลูกบอล 2 ลูก ได้สีดำ x ลูกและสีแดง y ลูก เพราะฉะนั้นหยิบลูกบอลสีเขียวได้ $= 2 - x - y$ ลูก

จำนวนวิธีหยิบลูกบอล 2 ลูกจากลูกบอลทั้งหมด 8 ลูก $= \binom{8}{2}$

ในทำนองเดียวกัน จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีดำ x ลูกจากลูกบอลสีดำ 3 ลูก $= \binom{3}{x}$

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีแดง y ลูกจากลูกบอลสีแดง 2 ลูก $= \binom{2}{y}$

จำนวนวิธีหยิบลูกบอลสีเขียว $(2 - x - y)$ ลูกจากลูกบอลสีเขียว 3 ลูก $= \binom{3}{2 - x - y}$

เพราะฉะนั้น $f(x, y) = P(X = x, Y = y) = \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}$

เมื่อ $x = 0, 1, 2$ และ $y = 0, 1, 2$ และ $0 \leq x + y \leq 2$

เพราะฉะนั้นตารางการแจกแจงความน่าจะเป็น $f(x, y) = P(X = x, Y = y)$ ของตัวแปรสุ่ม X และ Y คือ

x	0	1	2
y			
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0



การคำนวณโดยโปรแกรม R

```
> Prob.table=matrix(nrow=3,ncol=3,
+                   dimnames=list(c("y = 0","y = 1","y = 2"),
+                                 c("x = 0","x = 1","x = 2")))
+                   )
> ncr=function(n,r) factorial(n)/(factorial(r)*factorial(n-r))
> P=function(y,x)
+   if (x+y<=2) (ncr(3,x)*ncr(2,y)*ncr(3,2-x-y))/ncr(8,2) else 0
>
> for (j in 1:3)
+ {
+   for (i in 1:3)
+   {
+     Prob.table[i,j]=P(i-1,j-1)
+   }
+ }
> Prob.table
      x = 0      x = 1      x = 2
y = 0 0.1071428571 0.321428571 0.107142857
y = 1 0.2142857143 0.214285714 0.000000000
y = 2 0.0357142857 0.000000000 0.000000000
```

บทนิยาม 2.7.2 $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกัน (joint density function) ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X และ Y ถ้า

1. $f(x, y) \geq 0$ ทุกค่า (x, y)
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$
3. $P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y) dx dy$ เมื่อ $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 2.7.3 กำหนดให้ฟังก์ชันความหนาแน่นร่วมกันของ X และ Y คือ

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x, y \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหา $P((X, Y) \in A)$ เมื่อ $A = \{ (x, y) \mid 0 < x < 1, \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \}$

วิธีทำ $P((X, Y) \in A) = P(0 < X < 1, \frac{1}{4} < Y < \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4} dx dy \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8} \right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{8} + \frac{3y^2}{8} \right] dy \\ &= \left[\frac{y}{8} + \frac{y^3}{8} \right]_{y=\frac{1}{4}}^{y=\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{64} \right) - \left(\frac{1}{32} + \frac{1}{512} \right) \\ &= \frac{23}{512} \end{aligned}$$



บทนิยาม 2.7.3 $g(x)$ เป็นการแจกแจงมาร์จินัลของ X (marginal distribution of X) และ $h(y)$ เป็นการแจกแจงมาร์จินัลของ Y (marginal distribution of Y) ถ้า

$$(i) \quad g(x) = \sum_y f(x, y) \text{ และ } h(y) = \sum_x f(x, y) \text{ เมื่อ } X \text{ และ } Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง}$$

$$(ii) \quad g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \text{ และ } h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \text{ เมื่อ } X \text{ และ } Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง}$$

จากคุณสมบัติของ $f(x, y)$ เมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

$$1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = 1$$

$$2. \quad g(x) \geq 0 \text{ ทุกค่า } x$$

$$3. \quad P(a < X < b) = P(a < X < b, -\infty < Y < \infty) = \int_a^b \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx = \int_a^b g(x) dx$$

เพราะฉะนั้น $g(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} h(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

$$2. \quad h(y) \geq 0 \text{ ทุกค่า } y$$

$$3. \quad P(c < Y < d) = P(-\infty < X < \infty, c < Y < d) = \int_c^d \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_c^d h(y) dy$$

เพราะฉะนั้น $h(y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Y

ตัวอย่าง 2.7.4 จากตัวอย่าง 2.7.2 จงหา $g(x)$ และ $h(y)$

วิธีทำ หาผลบวกแนวแถว (row) และแนวหลัก (column)

x y	0	1	2	$h(y)$
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	0	$\frac{12}{28}$
2	$\frac{1}{28}$	0	0	$\frac{1}{28}$
$g(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$	

เพราะฉะนั้นการแจกแจงมาร์จินัล $g(x)$ คือ

x	0	1	2
$g(x)$	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

และการแจกแจงมาร์จินัล $h(y)$ คือ

y	0	1	2
$h(y)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{1}{28}$



จากนิยามของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ เมื่อ } P(A) > 0$$

ถ้าให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ตัวแปรสุ่ม $X = x$ และ B เป็นเหตุการณ์ที่ตัวแปรสุ่ม $Y = y$

$$\text{เพราะฉะนั้น } P(Y = y \mid X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}$$

$$\text{หรือ } f(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} \text{ เมื่อ } g(x) > 0$$

$$\text{ในทำนองเดียวกันจะได้ } f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \text{ เมื่อ } h(y) > 0$$

เราเรียก $f(y \mid x)$ ว่า การแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง Y เมื่อกำหนด $X = x$

และเรียก $f(x \mid y)$ ว่า การแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X เมื่อกำหนด $Y = y$

$$\text{ในทำนองเดียวกันสำหรับตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X และ Y จะได้ } f(y \mid x) = \frac{f(x, y)}{g(x)} \text{ เมื่อ } g(x) > 0$$

คือฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง Y เมื่อกำหนด $X = x$

$$\text{และ } f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \text{ เมื่อ } h(y) > 0$$

คือฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X เมื่อกำหนด $Y = y$

ตัวอย่าง 2.7.5 จากตัวอย่าง 2.7.4 จงหา $f(x \mid 1)$ และ $P(X = 0 \mid Y = 1)$

$$\text{วิธีทำ } f(x \mid y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} \text{ เมื่อ } h(y) > 0$$

$$f(x \mid 1) = \frac{f(x, 1)}{h(1)} \text{ และ } h(1) = \frac{3}{7}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(x \mid 1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(x, 1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(x \mid 1) = \frac{7}{3} f(x, 1) \text{ เมื่อ } x = 0, 1, 2$$

$$f(0 \mid 1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(0, 1) = \left(\frac{7}{3}\right) \left(\frac{6}{28}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f(1 \mid 1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(1, 1) = \left(\frac{7}{3}\right) \left(\frac{6}{28}\right) = \frac{1}{2}$$

$$f(2 \mid 1) = \left(\frac{7}{3}\right) f(2, 1) = \left(\frac{7}{3}\right) (0) = 0$$

จะได้ตารางการแจกแจงแบบมีเงื่อนไขของ X เมื่อกำหนด $Y = 1$ คือ

x	0	1	2
$f(x \mid 1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$$\text{และ } P(X = 0 \mid Y = 1) = f(0 \mid 1) = \frac{1}{2}$$



ตัวอย่าง 2.7.6 จากตัวอย่าง 2.7.3 จงหา $g(x)$, $h(y)$, $f(x | y)$ และ $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{3})$

วิธีทำ $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$

$$= \int_0^1 \frac{x(1+3y^2)}{4} dy$$

$$= \left[\frac{xy}{4} + \frac{xy^3}{4} \right]_{y=0}^{y=1}$$

$$= \frac{x}{2}$$

เพราะฉะนั้น $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x(1+3y^2)}{4} dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{8} + \frac{3x^2y^2}{8} \right]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \frac{1+3y^2}{2}$$

เพราะฉะนั้น $h(y) = \begin{cases} \frac{1+3y^2}{2} & \text{เมื่อ } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } y \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$

เพราะว่า $f(x | y) = \frac{f(x, y)}{h(y)} = \frac{\left(\frac{x(1+3y^2)}{4} \right)}{\left(\frac{1+3y^2}{2} \right)} = \frac{x}{2} \text{ เมื่อ } 0 < x < 2$

เพราะฉะนั้น $P(\frac{1}{4} < X < \frac{1}{2} | Y = \frac{1}{3}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(x | y = \frac{1}{3}) dx = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{2} dx = \frac{3}{64}$

□

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 2.7.6 จะเห็นได้ว่า ค่าของ $f(x | y)$ ไม่ขึ้นอยู่กับ y และ $f(x | y) = g(x)$

จาก $f(x | y) = \frac{f(x, y)}{h(y)}$ เมื่อ $h(y) > 0$ เพราะฉะนั้น $f(x, y) = f(x | y) h(y)$

เพราะฉะนั้น $f(x, y) = g(x) h(y)$

บทนิยาม 2.7.4 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่องซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน $f(x, y)$ และการแจกแจงมาร์จินัล $g(x)$ และ $h(y)$ ตามลำดับ จะกล่าวว่า

ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกค่า x และ y จะได้ $f(x, y) = g(x) h(y)$

จากตัวอย่าง 2.7.4

$$f(0, 1) = \frac{3}{14}$$

$$g(0) = \sum_{y=0}^2 f(0, y) = \frac{3}{28} + \frac{6}{28} + \frac{1}{28} = \frac{5}{14}$$

$$h(1) = \sum_{x=0}^2 f(x, 1) = \frac{6}{28} + \frac{6}{28} + 0 = \frac{3}{7}$$

$$g(0) h(1) = \left(\frac{5}{14}\right)\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{15}{98}$$

เพราะว่า $f(0, 1) \neq g(0) h(1)$ เพราะฉะนั้นตัวแปรสุ่ม X และ Y ไม่เป็นอิสระต่อกัน

บทนิยาม 2.7.5 $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกันของตัวแปรสุ่ม X และ Y

ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม $u(X, Y)$ แทนด้วย $E[u(X, Y)]$

กำหนดค่าโดย

$$E[u(X, Y)] = \sum_x \sum_y u(x, y) f(x, y) \text{ เมื่อ } X, Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง}$$

$$E[u(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) f(x, y) dx dy \text{ เมื่อ } X, Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง}$$

หมายเหตุ กรณีตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ $E(XY) = E(X) E(Y)$

$$E(XY) = \sum_x \sum_y xy f(x, y) \quad \text{เมื่อ } X, Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง}$$

$$= \sum_x \sum_y xy g(x) h(y) \quad (X, Y \text{ อิสระต่อกัน จะได้ } f(x, y) = g(x) h(y))$$

$$= \sum_x x g(x) \sum_y y h(y) = \sum_x x g(x) E(Y) = E(Y) \sum_x x g(x) = E(Y) E(X)$$

$$\text{และ } E(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy \quad \text{เมื่อ } X, Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy g(x) h(y) dx dy \quad (X, Y \text{ อิสระต่อกัน จะได้ } f(x, y) = g(x) h(y))$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) E(X) dy = E(X) \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) dy = E(X) E(Y)$$

ตัวอย่าง 2.7.7 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกัน ดังตัวอย่าง 2.7.2

ให้ $u(X, Y) = XY$

จงหาค่าคาดคะเนของตัวแปรสุ่ม $u(X, Y)$

วิธีทำ จากตัวอย่าง 2.7.2

$X = 0, 1, 2$ และ $Y = 0, 1, 2$ มีตารางแสดงค่าฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

x	0	1	2
y			
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	0
2	$\frac{1}{28}$	0	0

$$E(XY) = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 xy f(x, y)$$

$$= (0)(0) f(0, 0) + (0)(1) f(0, 1) + (0)(2) f(0, 2) + (1)(0) f(1, 0) + (1)(1) f(1, 1) + (2)(0) f(2, 0)$$

$$= f(1, 1)$$

$$= \frac{3}{14} \quad \square$$

ข้อสังเกต ถ้า $u(X, Y) = X$ โดยนิยามจะได้

$$E(X) = \sum_x \sum_y x f(x, y) = \sum_x x g(x) \text{ เมื่อ } X, Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} x g(x) dx \text{ เมื่อ } X, Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง}$$

โดยที่ $g(x)$ คือการแจกแจงมาร์จินัลของตัวแปรสุ่ม X

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $u(X, Y) = Y$ จะได้

$$E(Y) = \sum_x \sum_y y f(x, y) = \sum_y y h(y) \text{ เมื่อ } X, Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} y h(y) dy \text{ เมื่อ } X, Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง}$$

โดยที่ $h(y)$ คือการแจกแจงมาร์จินัลของตัวแปรสุ่ม Y

จากตัวอย่าง 2.7.6 จะได้ $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$

และ $h(y) = \begin{cases} \frac{1+3y^2}{2} & \text{เมื่อ } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } y \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $g(x) h(y) = \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{1+3y^2}{2}\right)$ เมื่อ $0 < x < 2, 0 < y < 1$

เพราะฉะนั้น $g(x) h(y) = \begin{cases} \frac{x(1+3y^2)}{4} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x, y \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases} = f(x, y)$

เพราะว่า $f(x, y) = g(x) h(y)$ เพราะฉะนั้นตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

บทนิยาม 2.7.5 ความแปรปรวนร่วม (covariance) ของตัวแปรสุ่ม X และ Y

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ σ_{XY} หรือ $\text{cov}(X, Y)$ คือ

$$\sigma_{XY} = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \text{ เมื่อ } \mu_X = E(X) \text{ และ } \mu_Y = E(Y)$$

$$\sigma_{XY} = \sum_x \sum_y (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) \text{ เมื่อ } X \text{ และ } Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง}$$

$$\sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) dx dy \text{ เมื่อ } X \text{ และ } Y \text{ เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง}$$

ทฤษฎีบท 2.7.2

$$1. \sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$2. \text{ ถ้า } X, Y \text{ เป็นอิสระต่อกัน แล้ว } \sigma_{XY} = 0$$

ข้อพิสูจน์ 1. $\sigma_{XY} = \text{cov}(X, Y)$

$$= E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

$$= E(XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X \mu_Y)$$

$$= E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) + E(\mu_X \mu_Y)$$

$$= E(XY) - \mu_X \mu_Y - \mu_X \mu_Y + \mu_X \mu_Y$$

$$= E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$2. \text{ ให้ } X, Y \text{ เป็นอิสระต่อกัน เพราะฉะนั้น } E(XY) = E(X) E(Y) = \mu_X \mu_Y$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y = 0$$



ตัวอย่าง 2.7.8 จากตัวอย่าง 2.7.2 จงหาค่า σ_{XY}

$$\text{วิธีทำ } \mu_X = E(X) = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 x f(x, y) = \sum_{x=0}^2 x \times \sum_{y=0}^2 f(x, y) = \sum_{x=0}^2 x g(x)$$

$$= (0)\left(\frac{10}{28}\right) + (1)\left(\frac{15}{28}\right) + (2)\left(\frac{3}{28}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \sum_{y=0}^2 \sum_{x=0}^2 y f(x, y) = \sum_{y=0}^2 y \sum_{x=0}^2 f(x, y) = \sum_{y=0}^2 y h(y)$$

$$= (0)\left(\frac{15}{28}\right) + (1)\left(\frac{3}{7}\right) + (2)\left(\frac{1}{28}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{จากตัวอย่าง 2.7.7 เราได้ } E(XY) = \frac{3}{14}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y$$

$$= \frac{3}{14} - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{9}{56}$$



ข้อสังเกต เราสามารถนำค่าของความแปรปรวนร่วม อธิบายความสัมพันธ์ของตัวแปรได้ดังนี้

1. ถ้า $\sigma_{XY} < 0$ แล้วแสดงว่า เมื่อ X มีค่าเพิ่มขึ้น Y มีค่าลดลง หรือเมื่อ X มีค่าลดลง Y มีค่าเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $\sigma_{XY} > 0$ แล้วแสดงว่าทั้ง X และ Y มีค่าเพิ่มขึ้นพร้อมกันหรือมีค่าลดลงพร้อมกัน

ตัวอย่าง 2.7.9 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน $f(x, y)$ คือ

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } 0 < x < y, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x, y \text{ มีค่าอื่นๆ} \end{cases}$$

จงหา σ_{XY}

วิธีทำ

$$\mu_X = E(X) = \int_0^1 \int_0^y 2x \, dx \, dy = \frac{1}{3}$$

$$\mu_Y = E(Y) = \int_0^1 \int_0^y 2y \, dx \, dy = \frac{2}{3}$$

$$\text{และ } E(XY) = \int_0^1 \int_0^y 2xy \, dx \, dy = \frac{1}{4}$$

$$\text{เพราะว่า } \sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X \mu_Y \text{ เพราะฉะนั้น } \sigma_{XY} = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{36}$$



2.8 คุณสมบัติของความแปรปรวนและความแปรปรวนร่วม

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีความแปรปรวน σ_X^2 และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีความแปรปรวน σ_Y^2

และ σ_{XY} เป็นความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่ม X และ Y

ให้ $u(X)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม X

ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ $u(X)$ แทนด้วย $\mu_{u(X)}$ และ $\sigma_{u(X)}^2$ ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 2.8.1 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f(x)$ จะได้ความแปรปรวนของ $u(X)$ คือ

$$\sigma_{u(X)}^2 = E[\{ u(X) - \mu_{u(X)} \}^2]$$

ทฤษฎีบท 2.8.2 ให้ b เป็นค่าคงตัว จะได้ $\sigma_{X+b}^2 = \sigma_X^2$ 。

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $\sigma_{X+b}^2 = E[\{ (X+b) - \mu_{X+b} \}^2]$ และ $\mu_{X+b} = E(X+b) = E(X) + b = \mu + b$

เพราะฉะนั้น $\sigma_{X+b}^2 = E[(X+b - \mu - b)^2] = E[(X - \mu)^2] = \sigma_X^2$ □

ทฤษฎีบท 2.8.3 ให้ a เป็นค่าคงตัว จะได้ $\sigma_{aX}^2 = a^2 \sigma_X^2$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $\sigma_{aX}^2 = E[(aX - \mu_{aX})^2]$ และ $\mu_{aX} = E(aX) = aE(X) = a\mu$

เพราะฉะนั้น $\sigma_{aX}^2 = E[(aX - a\mu)^2] = a^2 E[(X - \mu)^2] = a^2 \sigma_X^2$ □

ทฤษฎีบท 2.8.4 ให้ a และ b เป็นค่าคงตัว จะได้ $\sigma_{aX+bY}^2 = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 + 2ab \sigma_{XY}$

ข้อพิสูจน์ $\sigma_{aX+bY}^2 = E[\{ (aX+bY) - \mu_{aX+bY} \}^2]$

และ $\mu_{aX+bY} = E(aX+bY) = aE(X) + bE(Y) = a\mu_X + b\mu_Y$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2.8.3 และทฤษฎีบท 2.7.4 จะได้

$$\sigma_{aX+bY}^2 = E[\{ (aX+bY) - (a\mu_X + b\mu_Y) \}^2]$$

$$= E[\{ a(X - \mu_X) + b(Y - \mu_Y) \}^2]$$

$$= a^2 E[(X - \mu_X)^2] + b^2 E[(Y - \mu_Y)^2] + 2abE[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$$

$$= a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 + 2ab \sigma_{XY}$$
 □

ตัวอย่าง 2.8.1 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งมี $\sigma_X^2 = 12$, $\sigma_Y^2 = 60$ และ $\sigma_{XY} = 14$

จงหาค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Z เมื่อ $Z = 3X + 4Y + 5$

วิธีทำ $\sigma_Z^2 = \sigma_{3X+4Y+5}^2 = \sigma_{3X+4Y}^2$

$$= 3^2 \sigma_X^2 + 4^2 \sigma_Y^2 + 2(3)(4) \sigma_{XY}$$

$$= (9)(12) + (16)(60) + 2(3)(4)(14)$$

$$= 1404$$
 □

ทฤษฎีบทประกอบ 2.8.5 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกัน

$$\text{แล้วจะได้ } \sigma_{aX+bY}^2 = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2$$

$$\text{ข้อพิสูจน์ } \sigma_{aX+bY}^2 = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2 + 2ab \sigma_{XY}$$

เพราะว่า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน เพราะฉะนั้น $\sigma_{XY} = 0$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sigma_{aX+bY}^2 = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2$$



ทฤษฎีบทประกอบ 2.8.6 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกัน

$$\text{แล้วจะได้ } \sigma_{aX-bY}^2 = a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2$$

$$\text{ข้อพิสูจน์ จากทฤษฎีบทประกอบ 2.8.5 } \sigma_{aX-bY}^2 = \sigma_{aX+(-b)Y}^2$$

$$= a^2 \sigma_X^2 + (-b)^2 \sigma_Y^2$$

$$= a^2 \sigma_X^2 + b^2 \sigma_Y^2$$



ตัวอย่าง 2.8.2 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นอิสระต่อกันโดยที่ $\sigma_X^2 = 3$ และ $\sigma_Y^2 = 4$

จงหาค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Z เมื่อ $Z = 4X - 5Y + 6$

$$\text{วิธีทำ } \sigma_Z^2 = \sigma_{4X-5Y+6}^2$$

$$= \sigma_{4X-5Y}^2 \quad (\text{ทฤษฎีบท 2.8.2})$$

$$= (16)\sigma_X^2 + (25)\sigma_Y^2 \quad (\text{ทฤษฎีบทประกอบ 2.8.6})$$

$$= (16)(3) + (25)(4)$$

$$= 148$$



บทที่ 3

การแจกแจงความน่าจะเป็นไม่ต่อเนื่อง

ในบทนี้จะกล่าวถึงการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องบางชนิดที่มีความสำคัญเช่น การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มยูนิฟอร์ม การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มพหุนาม การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเรขาคณิต การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามลบ การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีโอเมตริก และ การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปัวส์ซอง และการประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีโอเมตริกด้วยความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม การประมาณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินามด้วยความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปัวส์ซอง

3.1 การแจกแจงยูนิฟอร์ม (Uniform Distribution)

การแจกแจงของตัวแปรสุ่มซึ่งแต่ละค่าของตัวแปรสุ่มมีความน่าจะเป็นที่จะเกิดเท่า ๆ กัน เรียกว่า การแจกแจงยูนิฟอร์ม ลักษณะทั่วไปของการแจกแจงยูนิฟอร์มมีดังนี้

ให้ค่าของตัวแปรสุ่ม X ประกอบด้วย $x_1, x_2, \dots, x_k$ ซึ่งแต่ละค่ามีความน่าจะเป็นเท่า ๆ กัน ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มยูนิฟอร์ม X คือ

$$f(x; k) = \frac{1}{k} \text{ เมื่อ } x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

หมายเหตุ การที่เขียน $f(x; k)$ แทนที่จะเขียน $f(x)$ ก็เพื่อที่จะชี้ให้เห็นว่าสูตรของการแจกแจงยูนิฟอร์มขึ้นอยู่กับค่าของ k

ตัวอย่าง 3.1.1 ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 1 ครั้ง

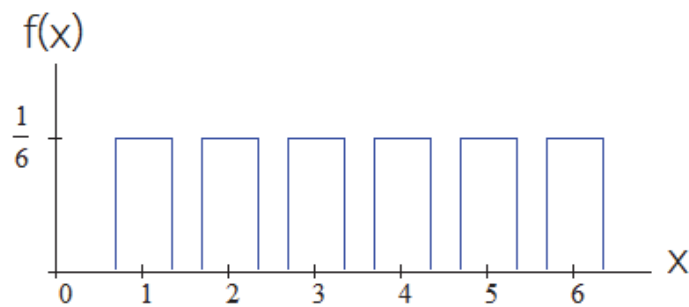
ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 1 เมื่อเหรียญขึ้นหัว และมีค่าเป็น 0 เมื่อเหรียญขึ้นก้อย

X จะมีการแจกแจงยูนิฟอร์ม ดังนี้ $f(x; 2) = \frac{1}{2}$ เมื่อ $x = 0, 1$ □

ตัวอย่าง 3.1.2 ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง ให้ X เป็นแต้มที่ได้

X จะมีการแจกแจงยูนิฟอร์ม ดังนี้ $f(x; 6) = \frac{1}{6}$ เมื่อ $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ □

รูปฮิสโตแกรมสำหรับการแจกแจงยูนิฟอร์ม ประกอบด้วยรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ต่างก็มีความสูงเท่ากัน



รูปที่ 3.1

ทฤษฎีบท 3.1.1 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มยูนิฟอร์ม X ที่มีการแจกแจงยูนิฟอร์ม

$$f(x; k) = \frac{1}{k} \text{ เมื่อ } x = x_1, x_2, \dots, x_k$$

$$\text{คือ ค่าเฉลี่ย } \mu = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \text{ และ ความแปรปรวน } \sigma^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (x_i - \mu)^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2 - \mu^2$$

$$\text{ข้อพิสูจน์ ค่าเฉลี่ย } \mu = E(X) = \sum_{i=1}^k x_i f(x_i) = \sum_{i=1}^k x_i \left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i$$

$$\text{ความแปรปรวน } \sigma^2 = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$$

$$= \sum_{i=1}^k x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

$$= \sum_{i=1}^k x_i^2 \left(\frac{1}{k}\right) - \mu^2$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2 - \mu^2$$

□

ตัวอย่าง 3.1.3 ทอดลูกเต๋ายี่สิบตรง 1 ลูก 1 ครั้ง และตัวแปรสุ่ม X เป็นแต้มที่ได้

จงหาค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 ของตัวแปรสุ่ม X

วิธีทำ $X = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ มีการแจกแจงยูนิฟอร์ม $P(X = x) = f(x; \frac{1}{6})$

$$\text{ค่าเฉลี่ย } \mu = \frac{1}{6} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$\text{ความแปรปรวน } \sigma^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^2 - \mu^2$$

$$= \frac{1}{6} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{35}{12}$$

□

3.2 การแจกแจงแบร์นูลลี (Bernoulli Distribution)

การทดลองทางสถิติหลายแบบที่มีลักษณะเป็นการกระทำ 1 ครั้งมีผลอย่างใดอย่างหนึ่งใน 2 แบบ เช่น

โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน ผล 2 แบบที่สนใจคือได้ หัว หรือ ก้อย

ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก ผล 2 แบบที่สนใจคือได้แต้มคู่ หรือ แต้มคี่

หยิบสินค้าออกมา 1 ชิ้น จากกล่องที่มีสินค้าดี 4 ชิ้นและสินค้าเสีย 6 ชิ้น จะได้ สินค้าดี หรือ สินค้าเสีย

รูปแบบทั่วไปที่เราสนใจคือ การทดลองที่การกระทำ 1 ครั้งมีผลของการกระทำเป็นไปได้อย่างใดอย่างหนึ่งใน 2 อย่าง เท่านั้น คือ **ผลสำเร็จ** (success) หรือ **ผลไม่สำเร็จ** (failure) โดยความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จเท่ากับ p และความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลไม่สำเร็จเท่ากับ q ซึ่ง $p + q = 1$

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งที่เกิดผลสำเร็จในการทดลอง 1 ครั้ง

ถ้าการทดลองเกิดผลสำเร็จ แล้ว $X = 1$ และ ถ้าการทดลองเกิดผลไม่สำเร็จ แล้ว $X = 0$

เพราะฉะนั้นค่าที่เป็นไปได้ของ X คือ 0, 1 ตัวแปรสุ่ม X เรียกว่า **ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี**

เพราะฉะนั้น $P(X = 0) = q$ และ $P(X = 1) = p$

และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ $f(x) = P(X = x) = p^x q^{1-x}$ เมื่อ $x = 0, 1$

บทนิยาม 3.2.1 ตัวแปรสุ่ม X ที่แสดงจำนวนครั้งของผลสำเร็จที่เกิดจากการทดลอง 1 ครั้ง

เรียกว่า **ตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี** การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X เรียกว่า **การแจกแจงแบร์นูลลี**

สรุปรูปแบบทั่วไปของการทดลองแบร์นูลลี (Bernoulli experiment) คือ

1. การทดลอง 1 ครั้งมีผลได้ 2 แบบคือ ผลสำเร็จ (success) หรือ ผลไม่สำเร็จ (failure)
2. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จเท่ากับ p
3. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลไม่สำเร็จเท่ากับ q เพราะฉะนั้น $p + q = 1$
4. ทำการทดลอง 1 ครั้ง

ให้ $X =$ จำนวนครั้งของผลสำเร็จ เพราะฉะนั้น $X = 0, 1$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X คือ $f(x) = P(X = x) = p^x q^{1-x}$ เมื่อ $x = 0, 1$

ตัวอย่าง 3.2.1 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ในการโยนเหรียญนี้ได้เหรียญขึ้นหัว

วิธีทำ การทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 1 ครั้ง ผลสำเร็จคือการได้หัว ผลไม่สำเร็จคือการได้ก้อย

ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่เหรียญขึ้นหัว เพราะฉะนั้น $X = 0, 1$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จ คือความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัว $= p = \frac{1}{2}$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลไม่สำเร็จ คือความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นก้อย $= q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ความน่าจะเป็นที่ในการโยนเหรียญนี้ได้เหรียญขึ้นหัวคือ $P(X = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} = \frac{1}{2}$



ตัวอย่าง 3.2.2 ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋ารับขึ้นแต้ม 3

วิธีทำ การทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง ผลสำเร็จคือลูกเต๋ารับขึ้นแต้ม 3 ผลไม่สำเร็จคือลูกเต๋ารับขึ้นแต้มอื่น
ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ลูกเต๋ารับขึ้นแต้ม 3

เพราะฉะนั้น $X = 0, 1$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จ คือความน่าจะเป็นที่ได้แต้ม 3 มีค่าเท่ากับ $p = \frac{1}{6}$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลไม่สำเร็จ คือความน่าจะเป็นที่ไม่ได้แต้ม 3 มีค่าเท่ากับ $q = 1 - p = \frac{5}{6}$

ความน่าจะเป็นที่ทอดลูกเต๋าทิ้งตรง 1 ลูก 1 ครั้ง ลูกเต๋ารับขึ้นแต้ม 3 มีค่าเท่ากับ $P(X = 1)$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{1-1} = \frac{1}{6}$$



ข้อสังเกต สำหรับการแจกแจงแบร์นูลลี จะได้ว่า $P(X = 0) = q$ และ $P(X = 1) = p$

ทฤษฎีบท 3.2.1 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี X ที่มีการแจกแจงแบร์นูลลี

$$f(x) = P(X = x) = p^x q^{1-x} \text{ เมื่อ } x = 0, 1$$

คือ ค่าเฉลี่ย $\mu = p$ และ ความแปรปรวน $\sigma^2 = pq$

ข้อพิสูจน์

$$\mu = E(X)$$

$$= \sum_{x=0}^1 x P(X = x) = (0) P(X = 0) + (1) P(X = 1)$$

$$= (0)(q) + (1)(p)$$

$$= p$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$= \sum_{x=0}^1 x^2 P(X = x) - p^2$$

$$= (0^2) P(X = 0) + (1^2) P(X = 1) - p^2$$

$$= (0)(q) + (1)(p) - p^2$$

$$= p - p^2$$

$$= p(1 - p)$$

$$= pq$$



3.3 การแจกแจงทวินาม (Binomial Distribution)

การทดลองที่ประกอบด้วยการทำงานซ้ำ ๆ กัน โดยผลของการกระทำแต่ละครั้งมีได้เพียง 2 อย่าง คือ ความสำเร็จ หรือ ความสำเร็จไม่สำเร็จ เช่น

โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 20 ครั้ง การโยนแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกันจะปรากฏผลเป็นหัวหรือก้อย ซึ่งอาจถือว่าการขึ้นหัวเป็นผลสำเร็จ ส่วนการขึ้นก้อยเป็นผลไม่สำเร็จ สำหรับตัวอย่างของการโยนเหรียญนี้ ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัวเท่ากับ $\frac{1}{2}$ และความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นก้อยเท่ากับ $\frac{1}{2}$

ทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 15 ครั้ง การทอดแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกันจะได้แต้ม 1 หรือไม่ได้แต้ม 1 ซึ่งอาจถือว่าการได้แต้ม 1 เป็นผลสำเร็จ ส่วนการไม่ได้แต้ม 1 เป็นผลไม่สำเร็จ สำหรับตัวอย่างของการทอดลูกเต๋าทิ้งตรงหนึ่งลูกความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 เท่ากับ $\frac{1}{6}$ และความน่าจะเป็นที่จะไม่ได้แต้ม 1 เท่ากับ $\frac{5}{6}$

ทอดลูกเต๋าทิ้งตรง 2 ลูกพร้อมกัน 3 ครั้ง การทอดแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกันจะได้แต้มเท่ากัน หรือ ไม่เท่ากัน ซึ่งอาจถือว่าการได้แต้มเท่ากันเป็นผลสำเร็จ ส่วนการได้แต้มไม่เท่ากันเป็นผลไม่สำเร็จ

$S = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (4, 6), (5, 6), (6, 6) \}$, $n(S) = 36$

$A = \{ (x, y) \mid x = y \} = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \}$ เพราะฉะนั้น $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

เพราะฉะนั้น $P(\text{ผลสำเร็จ}) = \frac{1}{6}$ และ $P(\text{ผลไม่สำเร็จ}) = \frac{5}{6}$

ตัวอย่างข้างต้นเป็นตัวอย่างหนึ่งของ **การทดลองทวินาม** (binomial experiment) หรือกล่าวได้ว่าการทดลองทวินามก็คือการทำการทดลองแบบแบร์นูลลีซ้ำ ๆ กัน หลาย ๆ ครั้ง

รูปแบบทั่วไปของการทดลองทวินาม (Binomial experiment) คือ

1. การทดลอง 1 ครั้งมีผลได้ 2 แบบคือ ความสำเร็จ (success) หรือ ความสำเร็จไม่สำเร็จ (failure)
2. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลสำเร็จเท่ากับ p
3. ความน่าจะเป็นที่จะเกิดผลไม่สำเร็จเท่ากับ q เพราะฉะนั้น $p + q = 1$
4. การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระต่อกัน
5. ทำการทดลอง n ครั้ง

ให้ $X =$ จำนวนครั้งของผลสำเร็จ

เพราะฉะนั้น $X = 0, 1, 2, 3, \dots, n$