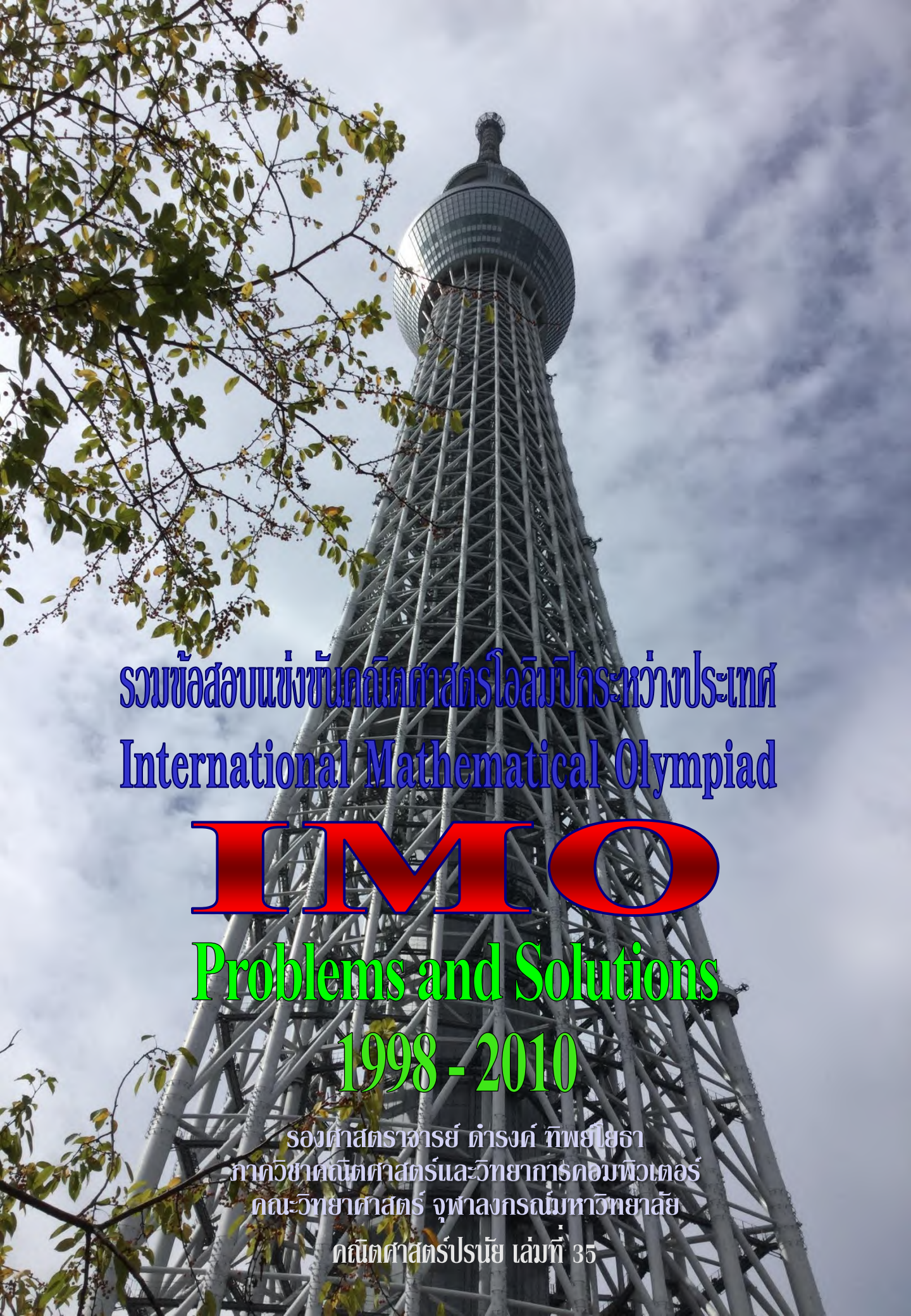




รวมข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
International Mathematical Olympiad

IMO
Problems and Solutions
1998 - 2010

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โชธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปริทัศน์ เล่มที่ 35

รวมข้อสอบแข่งขัน
คณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
International Mathematical Olympiad IMO
Problems and Solutions 1998 - 2010

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 35

รวมข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ 1998 – 2010

International Mathematical Olympiad (IMO)

Problems and Solutions 1998 – 2010

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : มีนาคม พ.ศ. 2561

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-445-996-0

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

หนังสือรวมข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ International Mathematical Olympiad (IMO) Problems and Solutions 1998 - 2010 เล่มนี้เป็นชุดล่าสุดที่จัดทำขึ้น หนังสือเฉลย IMO ทุกเล่มครูผู้สอนและนักเรียนจะได้ประโยชน์เช่น

1. มีข้อสอบ IMO ตัวจริงเพื่อฝึกทำข้อสอบแบบอัดแน่นมากขึ้น
 2. ได้รู้ว่าต้องศึกษาเนื้อหาคณิตศาสตร์มากขึ้น เพราะว่าเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่สอนกันในชั้นเรียนไม่เพียงพอที่จะทำข้อสอบ IMO
 3. ใช้เป็นเอกสารประกอบการจัดอบรมนักเรียนเพื่อเตรียมสอบ IMO
 4. ได้เห็นแนวคิดหลากหลายแบบในการแก้ปัญหา
 5. ได้ทบทวนคณิตศาสตร์บางเรื่องที่เรียนกันค่อนข้างน้อยในหลักสูตร ม.ปลาย เช่น เรขาคณิต
 6. ได้เห็นการอ้างใช้สูตรที่นักเรียนไม่คุ้นเคยอย่างทันทีทันใด เช่น Ptolemy's Theorem (ทฤษฎีบท 78 โลกเรขาคณิต) Ptolemy's Inequality (ทฤษฎีบท 78.1 โลกเรขาคณิต)
- นักเรียนสามารถศึกษาคณิตศาสตร์เพิ่มเติมเพื่อเตรียมสอบ IMO ได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

ครั้งที่	ค.ศ.	เมือง และ ประเทศ	หน้า
39	1998	Taipeh, Taiwan, 10 – 21 July 1998	1 – 34
40	1999	Bucharest, Romania, 10 – 22 July 1999	35 – 86
41	2000	Seul, Korea, 13 – 25 July 2000	87 – 138
42	2001	Washington DC, USA, 1 – 14 July 2001	139 – 186
43	2002	Glasgow, United Kingdom, 19 – 30 July 2002	187 – 226
44	2003	Tokyo, Japan, 7 – 19 July 2003	227 – 270
45	2004	Athens, Greece, 6 – 18 July 2004	271 – 320
46	2005	Merida, Yutacan, Mexico, 8 – 19 July 2005	321 – 356
47	2006	Ljubljana, Slovenia, 6 – 18 July 2006	357 – 390
48	2007	Hanoi, Vietnam, 19 – 31 July 2007	391 – 422
49	2008	Madrid, Spain, 10 – 22 July 2008	423 – 452
50	2009	Bremen, Germany, 10 – 22 July 2009	453 – 484
51	2010	Astana, Kazakhstan, 2 – 14 July 2010	485 – 519

หมายเหตุ ปี ค.ศ. 1989 ประเทศไทยส่งทีมนักเรียนเข้าแข่งขันเป็นครั้งแรก

ช่วงเวลา ค.ศ. 1989 – ค.ศ. 2010 เข้าแข่งขันทั้งหมด 22 ครั้ง

ผลการแข่งขันรวมได้	เหรียญทอง	7	เหรียญ
	เหรียญเงิน	32	เหรียญ
	เหรียญบรอนซ์	39	เหรียญ
	เกียรติคุณประกาศ	21	

ข้อมูลเพิ่มเติมดูได้ที่ <http://www.imo-official.org>

International Mathematic x

ปจจตคัย | https://www.imo-official.org/country_info.aspx?code=THA

IMO 2013 solutions » Google WebMail - Chulalong บักมาจกอินเ

de en es fr ru

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

IMO 2017 IMO 2018

Timeline

Countries

Results

Search

Problems

Hall of fame

About IMO

Links and Resources

◀ THAILAND ▶

TEAM RESULTS • INDIVIDUAL RESULTS • HALL OF FAME



CONTACT

E-mail: Pornpun Waitayangkoon <imo_thai@ipst.ac.th>

IMO Host

2015 - Chiang Mai (Results, Home Page IMO 2015)

PERFORMANCE AT THE IMO

First participation: 1989.

Number of participations: 29.

Gold medals: 21. Silver medals: 50. Bronze medals: 47. Honourable mentions: 23.

The Thirty – Ninth International Mathematical Olympiad

Taipeh, Taiwan

10 – 21 July 1998

Day I (15 July 1998)

- กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก AC และ BD ตัดกัน
แต่ AB และ DC ซึ่งเป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามกันไม่ขนานกัน
สมมติจุด P ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากด้าน AB และ DC อยู่ภายใน $\square ABCD$
จงแสดงว่า $\square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ ก็ต่อเมื่อ $\triangle ABP$ และ $\triangle CDP$ มีพื้นที่เท่ากัน
- ในการแข่งขันครั้งหนึ่งมีผู้เข้าแข่งขัน a คน และมีกรรมการ b คน โดยที่ b เป็นจำนวนเต็มคี่และ $b \geq 3$
การตัดสินของกรรมการจะตัดสินผู้เข้าแข่งขัน “สอบผ่าน” หรือ “สอบตก” อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น
และกรรมการทุกคนต้องตัดสินผู้เข้าแข่งขันทุกคน
สมมติ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีสมบัติว่า
ผลการตัดสินของกรรมการสองคนใดๆ เหมือนกันทุกประการสำหรับผู้เข้าแข่งขันจำนวนอย่างมากที่สุด k คน
จงแสดงว่า $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$
- สำหรับจำนวนเต็มบวก n
ให้ $d(n)$ = จำนวนตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ n (นับรวม 1 และ n ด้วย)
จงหาจำนวนเต็มบวก k ทั้งหมดที่มีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$

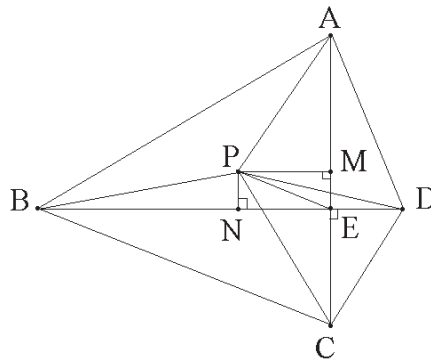
Day II (16 July 1998)

- จงหาลำดับของจำนวนเต็มบวก (a, b) ทั้งหมดที่ทำให้ $ab^2 + b + 7$ หาร $a^2b + a + b$ ลงตัว
- กำหนดให้ I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$
 K, L, M เป็นจุดที่วงกลมแนบใน $\triangle ABC$ สัมผัสด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ
เส้นตรงที่ผ่านจุด B ขนานกับ MK ตัดส่วนของ LM, LK ที่จุด R, S ตามลำดับ
จงแสดงว่า RIS เป็นมุมแหลม
- จงพิสูจน์พร้อมกับหาค่าต่ำสุดของ $f(1998)$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเต็มบวก N ไป N
ซึ่งมีคุณสมบัติ $f(n^2 f(m)) = m(f(n))^2$ ทุกจำนวนเต็มบวก m, n

The Thirty – Ninth International Mathematical Olympiad Solutions

Taipeh, Taiwan, 10 – 21 July 1998

1. แนวคิด



รูปที่ 1998.1.1

ให้ E เป็นจุดตัดของ AC และ BD

เพราะว่า P อยู่ใน $\square ABCD$ เพราะฉะนั้น P อยู่ใน $\triangle ABE$ หรือ $\triangle BCE$ หรือ $\triangle CDE$ หรือ $\triangle DAE$
โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ P อยู่ใน $\triangle ABE$

ให้ N อยู่บน BD และ $PN \perp BD$

... (1)

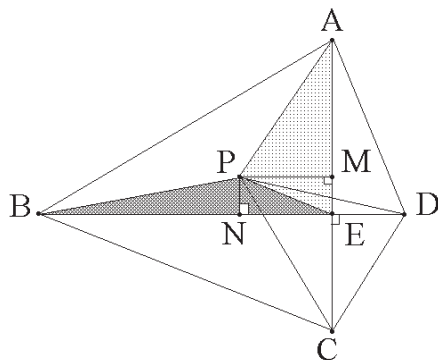
ให้ M อยู่บน AC และ $PM \perp AC$

... (2)

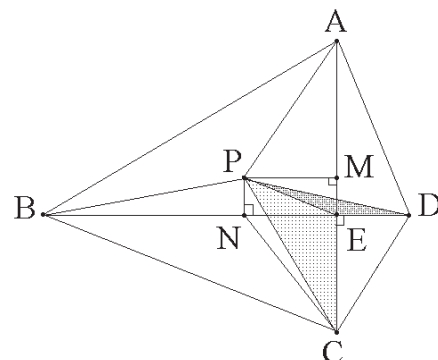
จาก (1) และ (2) จะได้ $\square PMEN$ เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก เพราะฉะนั้น $PN = ME$ และ $PM = NE$

... (3)

ข้อดกลง ให้ Δ_{XYZ} = พื้นที่ของ $\triangle XYZ$



รูปที่ 1998.1.2.1



รูปที่ 1998.1.2.2

$$\Delta_{ABP} = \Delta_{ABE} - \Delta_{PAE} - \Delta_{PBE}$$

$$= \frac{1}{2} (AE \cdot BE) - \Delta_{PAE} - \Delta_{PBE}$$

($\triangle ABE$ มี $AE \perp BE$)

$$= \frac{1}{2} (AE \cdot BE) - \frac{1}{2} (AE \cdot PM) - \Delta_{PBE}$$

($\triangle APE$ มี $PM \perp AE$)

$$= \frac{1}{2} (AE \cdot BE) - \frac{1}{2} (AE \cdot PM) - \frac{1}{2} (BE \cdot PN)$$

($\triangle BPE$ มี $PN \perp BE$)

เพราะฉะนั้น $2 \Delta_{ABP} = (AE \cdot BE) - (AE \cdot PM) - (BE \cdot PN)$

$$= (AM + ME)(BN + NE) - (AM + ME)PM - (BN + NE)PN$$

$$= (AM + PN)(BN + PM) - (AM + PN)PM - (BN + PM)PN \quad (\text{จาก (3)})$$

$$= AMBN + AMPM + PNB N + PMPN - AMPM - PMPN - BNPN - PMPN$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2\Delta_{ABP} = AMBN - PMPN \quad \dots (4)$$

$$\Delta_{CDP} = \Delta_{ECD} + \Delta_{EPD} + \Delta_{EPC}$$

$$= \frac{1}{2}(CE \cdot DE) + \Delta_{EPD} + \Delta_{EPC} \quad (\Delta_{ECD} \text{ มี } CE \perp DE)$$

$$= \frac{1}{2}(CE \cdot DE) + \frac{1}{2}(DE \cdot PN) + \Delta_{EPC} \quad (\Delta_{EPD} \text{ มี } PN \perp ND \text{ และ } DE \text{ อยู่บน } ND)$$

$$= \frac{1}{2}(CE \cdot DE) + \frac{1}{2}(DE \cdot PN) + \frac{1}{2}(CE \cdot PM) \quad (\Delta_{EPC} \text{ มี } PM \perp MC \text{ และ } CE \text{ อยู่บน } MC)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2\Delta_{CDP} = (CE \cdot DE) + (DE \cdot PN) + (CE \cdot PM)$$

$$= (CM - ME)(DN - NE) + (DN - NE)PN + (CM - ME)PM$$

$$= (CM - PN)(DN - PM) + (DN - PM)PN + (CM - PN)PM \quad (\text{จาก (3)})$$

$$= CM \cdot DN - CM \cdot PM - DN \cdot PN + PM \cdot PN + DN \cdot PN - PM \cdot PN + CM \cdot PM - PN \cdot PM$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2\Delta_{CDP} = CM \cdot DN - PM \cdot PN \quad \dots (5)$$

$$\text{จาก (4) และ (5) จะได้ } 2\Delta_{ABP} - 2\Delta_{CDP} = (AMBN - PMPN) - (CM \cdot DN - PM \cdot PN)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2(\Delta_{ABP} - \Delta_{CDP}) = AMBN - CM \cdot DN \quad \dots (6)$$

เพราะว่า P ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากด้าน AB และ DC

$$\text{เพราะฉะนั้น } AP = BP \text{ และ } CP = DP \quad \dots (7)$$

การพิสูจน์ $\square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ $\Rightarrow \Delta ABP$ และ ΔCDP มีพื้นที่เท่ากัน แบบที่ 1

สมมติ $\square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ

ให้ Cir_{ABCD} เป็นวงกลมล้อมรอบ $\square ABCD$

เพราะว่า P เป็นจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากด้าน AB และ DC ซึ่งเป็นคอร์ดของวงกลม Cir_{ABCD}

เพราะฉะนั้น P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_{ABCD}

$$\text{เพราะว่าจาก (2) } PM \perp AC \text{ เพราะฉะนั้น } AM = CM \quad \dots (8)$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } BN = DN \quad \dots (9)$$

$$2(\Delta_{ABP} - \Delta_{CDP}) = AMBN - CM \cdot DN \quad (\text{จาก (6)})$$

$$= AMBN - AMBN \quad (\text{จาก (8) และ (9)})$$

$$= 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \Delta_{ABP} = \Delta_{CDP}$$

การพิสูจน์ ΔABP และ ΔCDP มีพื้นที่เท่ากัน $\Rightarrow \square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ แบบที่ 1

สมมติ ΔABP และ ΔCDP มีพื้นที่เท่ากัน

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (6) จะได้ } AMBN = CM \cdot DN \quad \dots (10)$$

$$\text{สมมติ } PA \neq PC \quad \dots (11)$$

$$\text{โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถกำหนดให้ } PA > PC \quad \dots (12)$$

เพราะว่าจาก (2) $PM \perp AC$ เพราะฉะนั้น ΔPMA และ ΔPMC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned}
 \text{เพราะฉะนั้น } AM^2 &= AP^2 - PM^2 && (\triangle PMA \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก}) \\
 &> CP^2 - PM^2 && (\text{จาก (12)}) \\
 &= CM^2 && (\triangle PMC \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก})
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $AM > CM$... (13)

$$\begin{aligned}
 \text{เพราะว่าจาก (1) } PN \perp BD \text{ เพราะฉะนั้น } \triangle PNB \text{ และ } \triangle PND \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก} \\
 BN^2 &= BP^2 - PN^2 && (\triangle PNB \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก}) \\
 &= AP^2 - PN^2 && (\text{จาก (7)}) \\
 &> CP^2 - PN^2 && (\text{จาก (12)}) \\
 &= DP^2 - PN^2 && (\text{จาก (7)}) \\
 &= DN^2 && (\triangle PND \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก})
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $BN > DN$... (14)

จาก (13) และ (14) จะได้ $AM \cdot BN > CM \cdot DN$ ซึ่งขัดแย้งกับ (10) $AM \cdot BN = CM \cdot DN$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (11) $PA \neq PC$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $PA = PC$

เพราะฉะนั้นจาก (7) จะได้ $AP = BP = CP = DP$

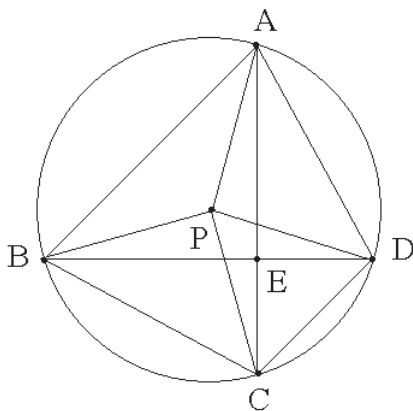
เพราะฉะนั้น P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่าน $\square ABCD$

เพราะฉะนั้น $\square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ

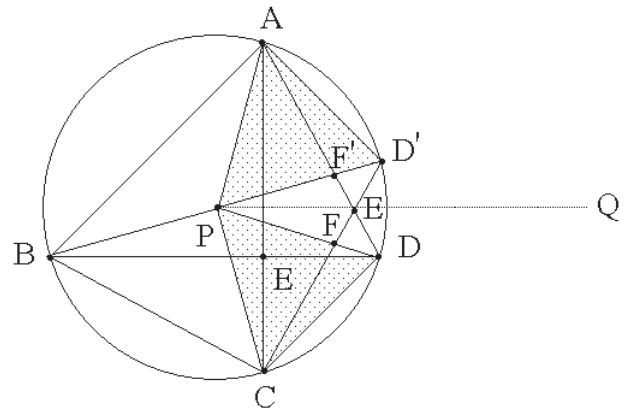
การพิสูจน์ $\square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ $\Rightarrow \triangle ABP$ และ $\triangle CDP$ มีพื้นที่เท่ากัน

แบบที่ 2

สมมติ $\square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ



รูปที่ 1998.1.3.1



รูปที่ 1998.1.3.2

ให้ Cir_{ABCD} เป็นวงกลมล้อมรอบ $\square ABCD$

เพราะว่า P ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากด้าน AB และ DC เพราะฉะนั้น $AP = BP$, $CP = DP$

เพราะฉะนั้น P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_{ABCD}

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ } \square ABCD &= \triangle BDA + \triangle BDC \\
 &= \frac{1}{2} BD \cdot AE + \frac{1}{2} BD \cdot EC \quad (AE \perp BD \text{ และ } CE \perp BD) \\
 &= \frac{1}{2} BD(AE + EC)
 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \text{พื้นที่ } \square ABCD = \frac{1}{2} BD \cdot AC \quad \dots (1)$$

$$\text{โดย Ptolemy theorem จะได้ } AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD \quad \dots (2)$$

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ Ptolemy theorem จากคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 108

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } 2(\text{พื้นที่ } \square ABCD) = AD \cdot BC + AB \cdot CD \quad \dots (3)$$

ให้ $PQ \perp AC$ (รูปที่ 1998.1.3.2)

ให้ D' เป็นภาพสะท้อนของ D เทียบกับ PQ

เพราะฉะนั้น AD ตัดกับ CD' บน PQ ให้ AD ตัดกับ CD' บน PQ ที่ E

ให้ AD ตัดกับ PD' ที่ F' และ PD ตัดกับ CD' ที่ F

$$\text{เพราะฉะนั้น } AD = CD' \text{ และ } AD' = CD \quad \dots (4)$$

$$\text{เพราะว่า } \triangle PAD' \text{ เป็นภาพสะท้อนของ } \triangle PCD \text{ เพราะฉะนั้น } \triangle PAD' = \triangle PCD \quad \dots (5)$$

$$\text{ในทำนองเดียวกันจะได้ } \triangle PEF = \triangle PEF' \text{ และ } \triangle EDF = \triangle EDF' \quad \dots (6)$$

$$\text{เพราะว่า } \triangle PCD' \text{ เป็นภาพสะท้อนของ } \triangle PAD \text{ เพราะฉะนั้น } \triangle PCD' = \triangle PAD \quad \dots (6)$$

$$\text{จาก (5) และ (6) จะได้ } \text{พื้นที่ } \square ABCD = \text{พื้นที่ } \square ABCD' \quad \dots (7)$$

$$\text{ให้ } x = \angle BAD' \quad \dots (8)$$

เพราะว่ามุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมรวมกันเท่ากับ 180°

$$\text{เพราะฉะนั้น } \angle BCD' = 180^\circ - x \quad \dots (9)$$

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ } \square ABCD' &= \triangle ABD' + \triangle CBD' \\
 &= \frac{1}{2} AB \cdot AD' \sin \angle BAD' + \frac{1}{2} BC \cdot CD' \sin \angle BCD' \\
 &= \frac{1}{2} AB \cdot CD \sin x + \frac{1}{2} BC \cdot AD \sin(180^\circ - x) \quad (\text{จาก (8) และ (9)}) \\
 &= \frac{1}{2} AB \cdot CD \sin x + \frac{1}{2} BC \cdot AD \sin x \\
 &= \frac{1}{2} (AB \cdot CD + BC \cdot AD) \sin x
 \end{aligned}$$

$$2(\text{พื้นที่ } \square ABCD') = (AB \cdot CD + BC \cdot AD) \sin x$$

$$2(\text{พื้นที่ } \square ABCD) = (AB \cdot CD + BC \cdot AD) \sin x \quad (\text{จาก (7)})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } AD \cdot BC + AB \cdot CD = (AB \cdot CD + BC \cdot AD) \sin x \quad (\text{จาก (3)})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sin x = 1$$

$$\text{เพราะว่า } 0 < x < 180^\circ \text{ เพราะฉะนั้น } x = 90^\circ$$

$$\text{เพราะว่า } \angle BAD' = x = 90^\circ$$

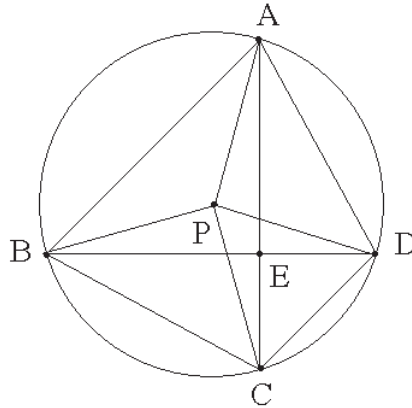
เพราะฉะนั้น BD' เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบ $\square ABCD'$

เพราะฉะนั้น BD' เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบ $\square ABCD$

เพราะฉะนั้น $BP = PD'$ และ B, P, D' อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เพราะฉะนั้น $\Delta_{APB} = \Delta_{APD'}$
 เพราะว่าจาก (5) $\Delta_{PAD'} = \Delta_{PCD}$ เพราะฉะนั้น $\Delta_{APB} = \Delta_{PCD}$

การพิสูจน์ $\square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ $\Rightarrow \Delta ABP$ และ ΔCDP มีพื้นที่เท่ากัน
 สมมติ $\square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ

แบบที่ 3



รูปที่ 1998.1.4

ให้ Cir_{ABCD} เป็นวงกลมล้อมรอบ $\square ABCD$

เพราะว่า P ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากด้าน AB และ DC

เพราะฉะนั้น $AP = BP$ และ $CP = DP$

เพราะฉะนั้น P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_{ABCD}

ให้ R เป็นรัศมีของวงกลม Cir_{ABCD} เพราะฉะนั้น $R = AP = BP = CP = DP$

... (1)

เพราะว่ามุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง

เพราะฉะนั้น $\hat{APB} = 2\hat{ADB}$ และ $\hat{CPD} = 2\hat{CAD}$

เพราะว่า $\hat{ADE} = \hat{ADB}$ และ $\hat{EAD} = \hat{CAD}$ เพราะฉะนั้น $\hat{APB} = 2\hat{ADE}$ และ $\hat{CPD} = 2\hat{EAD}$

เพราะฉะนั้น $\hat{APB} + \hat{CPD} = 2(\hat{ADE} + \hat{EAD})$

$$= 2(180^\circ - \hat{AED})$$

(ผลบวกของมุมภายใน $\triangle AED$)

$$= 2(180^\circ - 90^\circ)$$

(AE $\perp$ ED)

$$= 180^\circ$$

เพราะฉะนั้น $\hat{APB} = 180^\circ - \hat{CPD}$

เพราะฉะนั้น $\sin \hat{APB} = \sin(180^\circ - \hat{CPD}) = \sin \hat{CPD}$

... (2)

$$\Delta_{APB} = \frac{1}{2} PA PB \sin \hat{APB}$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \sin \hat{APB}$$

(จาก (1))

... (3)

$$\Delta_{PCD} = \frac{1}{2} PC PD \sin \hat{CPD}$$

$$= \frac{1}{2} R^2 \sin \hat{CPD}$$

(จาก (1))

$$= \frac{1}{2} R^2 \sin \hat{APB}$$

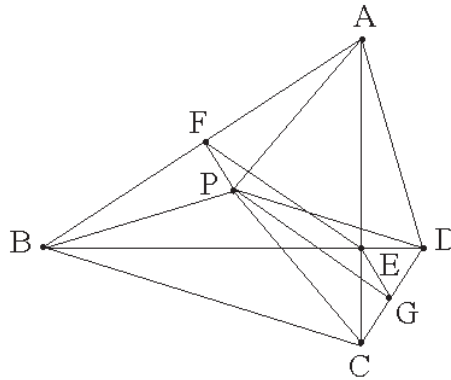
(จาก (2))

... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $\Delta_{APB} = \Delta_{PCD}$

การพิสูจน์ $\triangle ABP$ และ $\triangle CDP$ มีพื้นที่เท่ากัน $\Rightarrow \square ABCD$ มีวงกลมล้อมรอบ
สมมติ $\triangle ABP$ และ $\triangle CDP$ มีพื้นที่เท่ากัน

แบบที่ 2



รูปที่ 1998.1.5

ให้ F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB เพราะฉะนั้น $AF = BF = \frac{1}{2}AB$ และ $PF \perp AB$... (1)

ให้ G เป็นจุดกึ่งกลางด้าน CD เพราะฉะนั้น $CG = GD = \frac{1}{2}CD$ และ $PG \perp CD$... (2)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถกำหนดให้ P, B, C อยู่ด้านเดียวกันของ FG
เพราะว่า $\angle AEB = 90^\circ$ เพราะฉะนั้น F เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A, B, E

เพราะฉะนั้น $FE = FB = FA = \frac{1}{2}AB$... (3)

เพราะว่า $\angle CED = 90^\circ$ เพราะฉะนั้น G เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด C, D, E

เพราะฉะนั้น $EG = CG = DG = \frac{1}{2}CD$... (4)

จาก (1) $PF \perp AB$ เพราะฉะนั้น $\triangle ABP = \frac{1}{2}AB \cdot PF$

จาก (2) $PG \perp CD$ เพราะฉะนั้น $\triangle CDP = \frac{1}{2}CD \cdot PG$

จากข้อสมมติ $\triangle ABP = \triangle CDP$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}AB \cdot PF = \frac{1}{2}CD \cdot PG$

$$EF \cdot PF = EG \cdot PG \quad (\text{จาก (3) และ (4)})$$

$$\frac{PF}{PG} = \frac{EG}{EF} \quad \dots (5)$$

เพราะว่าจาก (3) $FB = FE$ เพราะฉะนั้น $\triangle BEF$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ให้ $\textcircled{1} = \angle FBE = \angle FEB = \angle ABE$... (6)

เพราะว่าจาก (3) $FA = FE$ เพราะฉะนั้น $\triangle AEF$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ให้ $\textcircled{2} = \angle AEF = \angle FAE = \angle BAE$... (7)

เพราะว่า $AE \perp EB$ เพราะฉะนั้น $\textcircled{1} + \textcircled{2} = \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ$... (8)

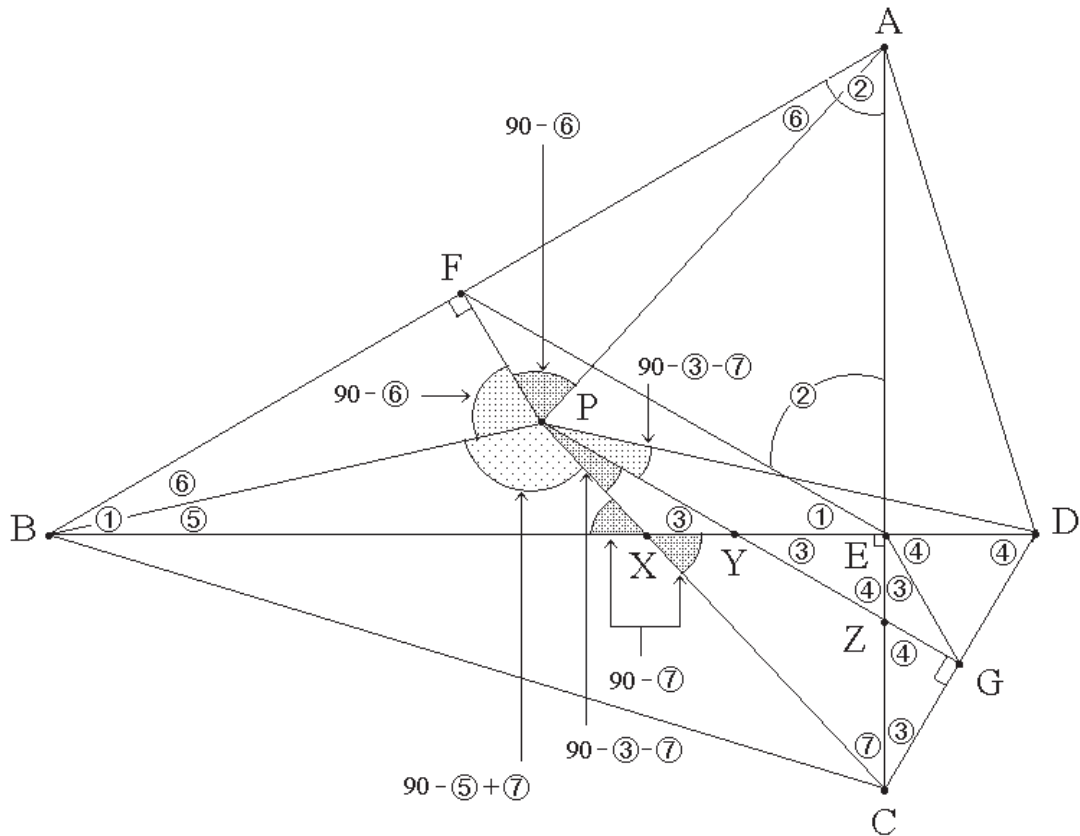
เพราะว่าจาก (4) $GE = GC$ เพราะฉะนั้น $\triangle CEG$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ให้ $\textcircled{3} = \angle GEC = \angle GCE = \angle DCE$... (9)

เพราะว่าจาก (4) $GE = GD$ เพราะฉะนั้น $\triangle GDE$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ให้ $\textcircled{4} = \angle GED = \angle GDE = \angle CDE$... (10)

เพราะว่า $CE \perp ED$ เพราะฉะนั้น $\textcircled{3} + \textcircled{4} = \angle DCE + \angle CDE = 90^\circ$... (11)



รูปที่ 1998.1.6

ให้ PC ตัด BD ที่ X และ PG ตัด BD ที่ Y และ EC ตัด PG ที่ Z

ให้ ⑤ = $\angle PBX$ และ ⑥ = $\angle FBP$ และ ⑦ = $\angle XCE$... (12)

เพราะฉะนั้น ⑤ + ⑥ = $\angle PBD + \angle FBP = \angle FBE = ①$... (13)

เพราะว่า CXE เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากและ $\angle CEX = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น $\angle CXY = \angle CXE = 90^\circ - \angle XCE = 90^\circ - ⑦$... (14)

เพราะว่า $\angle CXY$, $\angle BXP$ เป็นมุมตรงข้าม เพราะฉะนั้น $\angle BXP = \angle CXY = 90^\circ - ⑦$... (15)

$$\begin{aligned} \angle BPX &= 180^\circ - \angle PBX - \angle BXP && \text{(ผลบวกของมุมภายใน } \triangle BPX) \\ &= 180^\circ - ⑤ - (90^\circ - ⑦) && \text{(จาก (12) และ (14))} \\ &= 90^\circ - ⑤ + ⑦ && \dots (16) \end{aligned}$$

เพราะว่า $PF \perp AB$ และ F เป็นจุดกึ่งกลาง AB เพราะฉะนั้น $PA = PB$

เพราะฉะนั้น $\angle FPA = \angle FPB = 90^\circ - ⑥$... (17)

เพราะว่า $PG \perp CD$ และ G เป็นจุดกึ่งกลาง CD เพราะฉะนั้น $PC = PD$

เพราะฉะนั้น $\angle CPG = \angle DPG = 90^\circ - ③ - ⑦$... (18)

$$\angle FEG = \angle FEB + \angle BEC + \angle CEG = ① + 90^\circ + ③ \dots (19)$$

$$\begin{aligned} \angle FPG &= 360^\circ - \angle FPB - \angle BPX - \angle XPG \\ &= 360^\circ - (90^\circ - ⑥) - \angle BPX - \angle XPG && \text{(จาก (17))} \\ &= 360^\circ - (90^\circ - ⑥) - (90^\circ - ⑤ + ⑦) - \angle XPG && \text{(จาก (16))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 360^\circ - (90^\circ - \textcircled{6}) - (90^\circ - \textcircled{5} + \textcircled{7}) - \textcircled{C\hat{P}G} && (\textcircled{C\hat{P}G}, \textcircled{X\hat{P}G} \text{ มุมเดียวกัน}) \\
&= 360^\circ - (90^\circ - \textcircled{6}) - (90^\circ - \textcircled{5} + \textcircled{7}) - (90^\circ - \textcircled{3} - \textcircled{7}) && (\text{จาก (18)}) \\
&= 90^\circ + \textcircled{6} + \textcircled{5} + \textcircled{3} \\
&= 90^\circ + \textcircled{1} + \textcircled{3} && (\text{จาก (13)} \textcircled{6} + \textcircled{5} = \textcircled{1}) \dots (20) \\
&= \textcircled{F\hat{E}G} && (\text{จาก (19)})
\end{aligned}$$

เพราะว่าจาก (5) $\frac{PF}{PG} = \frac{EG}{EF}$ และ $\textcircled{F\hat{P}G} = \textcircled{F\hat{E}G}$

เพราะฉะนั้น $\triangle FPG, \triangle FEG$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย (ทฤษฎีบท 64)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 64 จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 92

เพราะฉะนั้น $\square EFPG$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\begin{aligned}
\text{เพราะฉะนั้น } \textcircled{E\hat{F}P} &= \textcircled{E\hat{G}P} && (\text{มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนาน}) \\
&= 180^\circ - \textcircled{G\hat{E}C} - \textcircled{E\hat{C}G} - \textcircled{C\hat{G}Z} && (\text{ผลบวกของมุมภายใน } \triangle CGE) \\
&= 180^\circ - \textcircled{3} - \textcircled{3} - 90^\circ \\
&= 90^\circ - 2(\textcircled{3}) && \dots (21)
\end{aligned}$$

เพราะว่า $\square EFPG$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\text{เพราะฉะนั้น } 180^\circ = \textcircled{E\hat{F}P} + \textcircled{F\hat{P}G} = (90^\circ - 2(\textcircled{3})) + (90^\circ + \textcircled{1} + \textcircled{3}) \quad (\text{จาก (20) และ (21)})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \textcircled{1} = \textcircled{3}$$

เพราะฉะนั้น $\textcircled{A\hat{B}D} = \textcircled{A\hat{C}D}$ เพราะฉะนั้น $\square EFPG$ มีวงกลมล้อมรอบ (ทฤษฎีบท 39.1)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 39.1 จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 48 $\square$

2. แนวคิด ให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นผู้เข้าแข่งขัน}\}$

$$\text{เพราะว่ามีผู้เข้าแข่งขัน } a \text{ คน เพราะฉะนั้น } n(A) = a \quad \dots (1)$$

ให้ $B = \{y \mid y \text{ เป็นกรรมการ}\}$

$$\text{เพราะว่ามีกรรมการ } b \text{ คน โดยที่ } b \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่และ } b \geq 3 \text{ เพราะฉะนั้น } n(B) = b \quad \dots (2)$$

ให้ $T = \{(x, \{y, z\}) \mid \{y, z\} \text{ เป็นเซตของกรรมการสองคนที่ให้คะแนนกับผู้เข้าแข่งขัน } x \text{ เหมือนกัน}\}$

$$D_T = \{x \mid x \text{ เป็นผู้เข้าแข่งขันและมีกรรมการ } y, z \text{ ที่ให้คะแนนกับ } x \text{ เหมือนกัน}\}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } D_T \subset A \quad \dots (3)$$

ให้ $x \in A$

เพราะว่ามีกรรมการ $b \geq 3$ และการให้คะแนนมีสองแบบคือ “สอบผ่าน” หรือ “สอบตก”

และกรรมการทุกคนต้องให้ผลแข่งขันกับผู้เล่น x

เพราะฉะนั้นโดยหลักการรังนกฟิราบจะได้

ผู้เล่น x ต้องมีกรรมการอย่างน้อยสองคนที่ให้ผลการแข่งขันเหมือนกัน

ให้ y, z เป็นกรรมการที่ให้ผลการแข่งขันกับ x เหมือนกัน

$$\text{เพราะฉะนั้น } (x, \{y, z\}) \in T \text{ เพราะฉะนั้น } x \in D_T$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } A \subset D_T \quad \dots (4)$$

$$\text{จาก (3) และ (4) จะได้ } A = D_T \quad \dots (5)$$

ให้ $R_T = \{\{y, z\} \mid y, z \text{ เป็นกรรมการ}\}$

เพราะว่า $n(B) = b$ เพราะฉะนั้น $|R_T| = \binom{b}{2}$... (6)

ให้ $n_{\{y, z\}}$ = จำนวนของผู้เข้าแข่งขันที่กรรมการ y, z ให้คะแนนเหมือนกัน

เพราะว่าผลการตัดสินของกรรมการสองคนใดๆ เหมือนกันทุกประการสำหรับผู้เข้าแข่งขันอย่างมาก k คน

เพราะฉะนั้น $n_{\{y, z\}} \leq k$... (7)

$$\begin{aligned} n(T) &= \sum_{\{y, z\} \in R_T} n_{\{y, z\}} \\ &\leq \sum_{\{y, z\} \in R_T} k && \text{(จาก (6))} \\ &= k \sum_{\{y, z\} \in R_T} (1) \\ &= k \binom{b}{2} && \text{(จาก (7))} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $n(T) \leq k \frac{b(b-1)}{2}$... (8)

ให้ p เป็นผู้เข้าแข่งขัน และ x เป็นจำนวนกรรมการที่ให้ p สอบผ่าน

เพราะว่ากรรมการทุกคนต้องให้ผลการแข่งขันกับผู้เล่น x

เพราะฉะนั้น $b - x$ เป็นจำนวนกรรมการที่ให้ p สอบตก

ให้ n_p = จำนวนชุดกรรมการ 2 คนที่ให้คะแนนกับ p เหมือนกัน

เพราะว่าจำนวนชุดกรรมการ 2 คนที่ตัดสินให้ p สอบผ่าน = $\binom{x}{2}$ ชุด

และจำนวนชุดกรรมการ 2 คน ที่ตัดสินให้ p สอบตก = $\binom{b-x}{2}$ ชุด เพราะฉะนั้น $n_p = \binom{x}{2} + \binom{b-x}{2}$

จากบทช่วย 1 จะได้ $n_p = \binom{x}{2} + \binom{b-x}{2} \geq \frac{(b-1)^2}{4}$... (9)

$$\begin{aligned} n(T) &= \sum_{p \in D_T} n_p \\ &\geq \sum_{p \in D_T} \frac{(b-1)^2}{4} && \text{(จาก (9))} \\ &= \frac{(b-1)^2}{4} \sum_{p \in D_T} (1) \\ &= \frac{(b-1)^2}{4} \sum_{p \in A} (1) && \text{(จาก (5))} \\ &= \frac{(b-1)^2}{4} (a) && \text{(จาก (1) } n(A) = a) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $n(T) \geq a \frac{(b-1)^2}{4}$... (10)

จาก (8) และ (10) จะได้ $k \frac{b(b-1)}{2} \geq n(T) \geq a \frac{(b-1)^2}{4}$

เพราะฉะนั้น $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$ □

บทช่วย 1 ให้ b เป็นจำนวนเต็มบวกก็ จะได้ $\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2} \geq \frac{(b-1)^2}{4}$ ทุกค่า $x = 0, 1, 2, \dots, b$

$$\begin{aligned}
 \text{ข้อพิสูจน์ แบบที่ 1} \quad \binom{x}{2} + \binom{b-x}{2} &= \frac{x(x-1)}{2} + \frac{(b-x)(b-x-1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2}(x^2 - x + b^2 - 2bx + x^2 - b + x) \\
 &= \frac{1}{2}(2x^2 - 2bx + b^2 - b) \\
 &= x^2 - bx + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b \\
 &= (x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2) + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}b \\
 &= (x - \frac{b}{2})^2 + \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}b \\
 &\geq \frac{1}{4}b^2 - \frac{1}{2}b \\
 &= \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

เพราะว่า b เป็นจำนวนเต็มบวกก็ เพราะฉะนั้น $\frac{(b-1)^2}{4}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะว่า $\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2}$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2} \geq \frac{(b-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น $\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2} \geq \frac{(b-1)^2}{4}$

$$\begin{aligned}
 \text{แบบที่ 2} \quad 2\left(\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2}\right) &= x(x-1) + (b-x)(b-x-1) \\
 &= (x^2 - x) + (b^2 - 2bx + x^2 - b + x) \\
 &= x^2 + (b^2 - 2bx + x^2) - b \\
 &= x^2 + (b-x)^2 - b \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

เพราะว่า b เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $b = 2r + 1$ เมื่อ r เป็นจำนวนเต็มบวก

การแสดงว่า $x^2 + (b-x)^2 \geq r^2 + (b-r)^2$

$$\begin{aligned}
 (x^2 + (b-x)^2) - (r^2 + (b-r)^2) &= (x^2 + (2r+1-x)^2) - (r^2 + (r+1)^2) \\
 &= (x^2 - r^2) + ((2r+1-x)^2 - (r+1)^2) \\
 &= (x-r)(x+r) + ((2r+1-x) - (r+1))((2r+1-x) + (r+1)) \\
 &= (x-r)(x+r) + (r-x)(3r+2-x) \\
 &= (x-r)((x+r) - (3r+2-x)) \\
 &= (x-r)(2x - 2r - 2) \\
 &= 2(x-r)(x - (r+1)) \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\text{การแสดงว่า } (x-r)(x - (r+1)) \geq 0 \text{ แบบที่ 1} \quad \dots (3)$$

กรณีที่ 1 $0 \leq x \leq r-1$ จะได้ $x-r \leq 0$ และ $x - (r+1) \leq 0$ เพราะฉะนั้น $(x-r)(x - (r+1)) \geq 0$

กรณีที่ 2 $x = r$ จะได้ $x-r = 0$ เพราะฉะนั้น $(x-r)(x - (r+1)) \geq 0$

กรณีที่ 3 $r+1 \leq x \leq 2r+1 = b$ จะได้ $x-r > 0$ และ $x - (r+1) \geq 0$

เพราะฉะนั้น $(x - r)(x - (r + 1)) \geq 0$

ทุกกรณีจะได้ $(x - r)(x - (r + 1)) \geq 0$

การแสดงว่า $(x - r)(x - (r + 1)) \geq 0$ แบบที่ 2

$$\begin{aligned}(x - r)(x - (r + 1)) &= (x - \frac{b-1}{2})(x - (\frac{b-1}{2} + 1)) \\ &= \frac{1}{2}(2x - b + 1)(x - \frac{b+1}{2}) \\ &= \frac{1}{4}(2x - b + 1)(2x - b - 1) \\ &= \frac{1}{4}((2x - b)^2 - 1)\end{aligned}$$

เพราะว่า $2x$ เป็นเลขคู่และ b เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $(2x - b)^2 \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(x - r)(x - (r + 1)) \geq 0$

จาก (2) และ (3) จะได้ $(x^2 + (b - x)^2) - (r^2 + (b - r)^2) = 2(x - r)(x - (r + 1)) \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x^2 + (b - x)^2 \geq r^2 + (b - r)^2$

$$x^2 + (b - x)^2 - b \geq r^2 + (b - r)^2 - b$$

$$2\left(\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2}\right) \geq r^2 + (b - r)^2 - b \quad (\text{จาก (1)})$$

$$= r^2 + b^2 - 2rb + r^2 - b$$

$$= 2r^2 - 2rb + b^2 - b$$

$$4\left(\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2}\right) \geq 4r^2 - 4rb + 2b^2 - 2b$$

$$= (2r - b)^2 + b^2 - 2b$$

$$= 1 + b^2 - 2b \quad (\text{เพราะว่า } b = 2r + 1)$$

$$= (b - 1)^2$$

เพราะฉะนั้น $\left(\binom{x}{2} + \binom{b-x}{2}\right) \geq \frac{(b-1)^2}{4}$

□

3. แนวคิด เพราะว่าตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ 1 คือ 1 เพราะฉะนั้น $d(1) = 1$

เพราะว่าตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ 2 คือ 1, 2 เพราะฉะนั้น $d(2) = 2$

เพราะว่าตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ 3 คือ 1, 3 เพราะฉะนั้น $d(3) = 2$

จำนวนเต็มบวก n สามารถเขียนได้เป็น $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$

เมื่อ $p_1, p_2, \dots, p_t$ เป็นจำนวนเฉพาะและ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ w เป็นตัวหารของ n

เพราะว่า $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$

เพราะฉะนั้น ตัวประกอบ p_1 ใน w เลือกได้ $\alpha_1 + 1$ วิธี

ตัวประกอบ p_2 ใน w เลือกได้ $\alpha_2 + 1$ วิธี

:

ตัวประกอบ p_t ใน w เลือกได้ $\alpha_t + 1$ วิธี

เพราะฉะนั้นโดยกฎเกณฑ์การนับจะเลือก w ได้ $= (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_t + 1)$ วิธี

$$d(4) = d(2^2) = 2 + 1 = 3$$

ตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ 4 คือ 1, 2, 4

$$d(5) = 1 + 1 = 2$$

ตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ 5 คือ 1, 5

$$d(6) = d((2)(3)) = (1 + 1)(1 + 1) = 4$$

ตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ 6 คือ 1, 2, 3, 6

$$d(7) = 2$$

ตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ 7 คือ 1, 7

$$d(8) = d(2^3) = 3 + 1 =$$

ตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ 8 คือ 1, 2, 4, 8

$$d(9) = d(3^2) = 2 + 1 = 3$$

ตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ 9 คือ 1, 3, 9

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะฉะนั้นมี $p_1, p_2, \dots, p_t$ เป็นจำนวนเฉพาะและ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$ เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{ที่ทำให้ } n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$$

เพราะฉะนั้น $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_t + 1)$

เพราะว่า $n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_t^{2\alpha_t}$ เพราะฉะนั้น $d(n^2) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \dots (2\alpha_t + 1)$

เพราะฉะนั้น $d(n^2)$ เป็นเลขคี่

$$\text{ให้ } k = \frac{d(n^2)}{d(n)} \text{ เพราะฉะนั้น } kd(n) = d(n^2)$$

เพราะว่า $d(n^2)$ เป็นเลขคี่ และ $kd(n) = d(n^2)$ เพราะฉะนั้น k เป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้นเงื่อนไขที่จำเป็นของค่า k ที่เราต้องการคือ k ต้องเป็นเลขคี่

$$\text{เพราะฉะนั้น } k = \frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1} \frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1} \dots \frac{2\alpha_t+1}{\alpha_t+1} = \frac{2(\alpha_1+1)-1}{\alpha_1+1} \frac{2(\alpha_2+1)-1}{\alpha_2+1} \dots \frac{2(\alpha_t+1)-1}{\alpha_t+1}$$

$$\text{ให้ } k_i = \alpha_i + 1, i = 1, 2, \dots, t \text{ เพราะฉะนั้น } k = \frac{2k_1-1}{k_1} \frac{2k_2-1}{k_2} \dots \frac{2k_t-1}{k_t}$$

ในทางกลับกัน ถ้า $k = \frac{2d_1-1}{d_1} \frac{2d_2-1}{d_2} \dots \frac{2d_s-1}{d_s}$ เมื่อ d_i เป็นจำนวนเต็มบวก, $i = 1, 2, \dots, s$

แล้วเราเลือก $\alpha_i = d_i - 1, i = 1, 2, \dots, s$

และเลือก $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ เมื่อ $p_1, p_2, \dots, p_s$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \frac{d(n^2)}{d(n)} &= \frac{2\alpha_1+1}{\alpha_1+1} \frac{2\alpha_2+1}{\alpha_2+1} \dots \frac{2\alpha_s+1}{\alpha_s+1} \\ &= \frac{2(d_1-1)+1}{(d_1-1)+1} \frac{2(d_2-1)+1}{(d_2-1)+1} \dots \frac{2(d_s-1)+1}{(d_s-1)+1} = \frac{2d_1-1}{d_1} \frac{2d_2-1}{d_2} \dots \frac{2d_s-1}{d_s} = k \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นหากเราพิสูจน์ว่าทุกจำนวนเต็มบวกคี่ k มีจำนวนเต็มบวก $k_i, i = 1, 2, \dots, r$

ที่ทำให้ $k = \frac{2k_1-1}{k_1} \frac{2k_2-1}{k_2} \dots \frac{2k_r-1}{k_r}$ ก็สรุปได้ว่าทุกจำนวนเต็มบวกคี่ k จะมี n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$

แบบที่ 1 การแสดงว่าทุกจำนวนเต็มบวกคี่ k จะมีจำนวนเต็มบวก $k_i, i = 1, 2, \dots, r$

$$\text{ที่ทำให้ } k = \frac{2k_1-1}{k_1} \frac{2k_2-1}{k_2} \dots \frac{2k_r-1}{k_r}$$

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$“ 2n - 1 \text{ มีจำนวนเต็มบวก } k_i, i = 1, 2, \dots, r \text{ ที่ทำให้ } 2n - 1 = \frac{2k_1-1}{k_1} \frac{2k_2-1}{k_2} \dots \frac{2k_r-1}{k_r} ”$$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $1 = \frac{2(1)-1}{1}$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n-1)$ เป็นจริง แล้ว $P(n)$ เป็นจริง

สมมติ $P(1), P(2), P(3), \dots, P(n-1)$ เป็นจริง

... (1)

กรณีที่ 1 n เป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ $n = 2k - 1$

... (2)

เพราะฉะนั้น $k = \frac{n+1}{2}$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก $k_i, i = 1, 2, \dots, r$ ที่ทำให้ $2k - 1 = \frac{2k_1-1}{k_1} \frac{2k_2-1}{k_2} \dots \frac{2k_r-1}{k_r} \dots$ (3)

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก n และ $k_i, i = 1, 2, \dots, r$ ที่ทำให้

$$\begin{aligned} 2n - 1 &= \frac{2n-1}{n} (n) \\ &= \frac{2n-1}{n} (2k - 1) && \text{(จาก (2))} \\ &= \frac{2n-1}{n} \left(\frac{2k_1-1}{k_1} \frac{2k_2-1}{k_2} \dots \frac{2k_r-1}{k_r} \right) && \text{(จาก (3))} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 n เป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก w และจำนวนเต็มบวกคี่ k ที่ทำให้ $n = 2^w k$

เพราะฉะนั้น $2n - 1 = 2(2^w k) - 1$ และ $2^w - 1 \geq 1$

... (4)

ให้ $t = w + 1$ เพราะฉะนั้น $t \geq 2$ และ $2n - 1 = 2^t k - 1$

... (5)

$$\begin{aligned} 2n - 1 &= \frac{(2^t - 1)(2^t k - 1)}{2^t - 1} \\ &= (2^t (2^t - 1)k - (2^t - 1)) \frac{1}{2^t - 1} \\ &= \frac{2^t (2^t - 1)k - (2^t - 1)}{2^{t-1} (2^t - 1)k - (2^{t-1} - 1)} \frac{2^{t-1} (2^t - 1)k - (2^{t-1} - 1)}{2^{t-2} (2^t - 1)k - (2^{t-2} - 1)} \frac{2^{t-2} (2^t - 1)k - (2^{t-2} - 1)}{2^{t-3} (2^t - 1)k - (2^{t-3} - 1)} \dots \\ &\quad \dots \frac{2^3 (2^t - 1)k - (2^3 - 1)}{2^2 (2^t - 1)k - (2^2 - 1)} \frac{2^2 (2^t - 1)k - (2^2 - 1)}{2^1 (2^t - 1)k - (2^1 - 1)} \frac{2^1 (2^t - 1)k - (2^1 - 1)}{2^0 (2^t - 1)k - (2^0 - 1)} (k) \end{aligned}$$

หมายเหตุ $2^0 (2^t - 1)k - (2^0 - 1)$ คือ $(2^t - 1)k$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^t (2^t - 1)k - (2^t - 1)}{2^{t-1} (2^t - 1)k - (2^{t-1} - 1)} \frac{2^{t-1} (2^t - 1)k - (2^{t-1} - 1)}{2^{t-2} (2^t - 1)k - (2^{t-2} - 1)} \frac{2^{t-2} (2^t - 1)k - (2^{t-2} - 1)}{2^{t-3} (2^t - 1)k - (2^{t-3} - 1)} \dots \\ &\quad \dots \frac{2^3 (2^t - 1)k - (2^3 - 1)}{2^2 (2^t - 1)k - (2^2 - 1)} \frac{2^2 (2^t - 1)k - (2^2 - 1)}{2^1 (2^t - 1)k - (2^1 - 1)} \frac{2(2^t - 1)k - 1}{(2^t - 1)k} (k) \\ &= \frac{2^t (2^t - 1)k - (2^t - 1)}{2^{t-1} (2^t - 1)k - (2^{t-1} - 1)} \frac{2^{t-1} (2^t - 1)k - (2^{t-1} - 1)}{2^{t-2} (2^t - 1)k - (2^{t-2} - 1)} \frac{2^{t-2} (2^t - 1)k - (2^{t-2} - 1)}{2^{t-3} (2^t - 1)k - (2^{t-3} - 1)} \dots \\ &\quad \dots \frac{2^3 (2^t - 1)k - (2^3 - 1)}{2^2 (2^t - 1)k - (2^2 - 1)} \frac{2^2 (2^t - 1)k - (2^2 - 1)}{2^1 (2^t - 1)k - (2^1 - 1)} \frac{2z-1}{z} (k) \end{aligned}$$

(ให้ $z = (2^t - 1)k$)

ให้ $d_i = 2^i (2^t - 1)k - (2^i - 1), i = 1, 2, 3, \dots, t-1$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{2d_1-1}{d_1} = \frac{2(2^1(2^t-1)k-(2^1-1))-1}{2^1(2^t-1)k-(2^1-1)} = \frac{2^2(2^t-1)k-(2^2-2)-1}{2^1(2^t-1)k-(2^1-1)} = \frac{2^2(2^t-1)k-(2^2-1)}{2^1(2^t-1)k-(2^1-1)}$$

$$\frac{2d_2-1}{d_2} = \frac{2(2^2(2^t-1)k-(2^2-1))-1}{2^2(2^t-1)k-(2^2-1)} = \frac{2^3(2^t-1)k-(2^3-2)-1}{2^3(2^t-1)k-(2^2-1)} = \frac{2^3(2^t-1)k-(2^3-1)}{2^2(2^t-1)k-(2^2-1)}$$

:

$$\frac{2d_{t-1}-1}{d_{t-1}} = \frac{2(2^{t-1}(2^t-1)k-(2^{t-1}-1))-1}{2^{t-1}(2^t-1)k-(2^{t-1}-1)} = \frac{2^t(2^t-1)k-(2^t-2)-1}{2^{t-1}(2^t-1)k-(2^{t-1}-1)} = \frac{2^t(2^t-1)k-(2^t-1)}{2^{t-1}(2^t-1)k-(2^{t-1}-1)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2n-1 = \frac{2d_{t-1}-1}{d_{t-1}} \frac{2d_{t-2}-1}{d_{t-2}} \frac{2d_{t-3}-1}{d_3} \dots \frac{2d_2-1}{d_2} \frac{2d_1-1}{d_1} \frac{2z-1}{z} (k) \quad \dots (6)$$

$$\text{สมมติ } k \geq 2n-1 \quad \dots (7)$$

$$\text{เพราะว่า } k \geq 2n-1 \Rightarrow 2^w k > 2^{w+1} k - 2^w \Rightarrow n > k 2^w + 2^w k - 2^w \text{ (จาก (4))}$$

$$\Rightarrow n > n + 2^w k - 2^w \text{ (จาก (4))} \Rightarrow 0 > 2^w k - 2^w$$

$$\Rightarrow 2^w > 2^w k \Rightarrow 1 > k \Rightarrow k = 0 \text{ ซึ่งเป็นไปไม่ได้}$$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (7) $k \geq 2n-1$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $k < 2n-1$ เพราะฉะนั้น $k \leq 2n-3$ เพราะฉะนั้น $k \in \{1, 3, \dots, 2n-3\}$

เพราะฉะนั้นจากข้อสมมติของการอุปนัยจะมีจำนวนเต็มบวก $k_i, i = 1, 2, \dots, r$ ที่ทำให้

$$k = \frac{2k_1-1}{k_1} \frac{2k_2-1}{k_2} \dots \frac{2k_r-1}{k_r} \quad \dots (8)$$

จาก (6) และ (8) จะได้

$$2n-1 = \frac{2d_{t-1}-1}{d_{t-1}} \frac{2d_{t-2}-1}{d_{t-2}} \frac{2d_{t-3}-1}{d_3} \dots \frac{2d_2-1}{d_2} \frac{2d_1-1}{d_1} \frac{2z-1}{z} \left(\frac{2k_1-1}{k_1} \frac{2k_2-1}{k_2} \dots \frac{2k_r-1}{k_r} \right)$$

เพราะฉะนั้น $P(n)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \dots$

เพราะฉะนั้นทุกจำนวนเต็มบวก n จะมีจำนวนเต็มบวก $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, r$ ที่ทำให้

$$2n-1 = \frac{2\alpha_1-1}{\alpha_1} \frac{2\alpha_2-1}{\alpha_2} \dots \frac{2\alpha_r-1}{\alpha_r} \quad \dots (9)$$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกคือ

ให้ w เป็นจำนวนเต็มบวก w ที่ทำให้ $k = 2w-1$ จาก (9) จะมีจำนวนเต็มบวก $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, r$

$$\text{ที่ทำให้ } k = 2w-1 = \frac{2\alpha_1-1}{\alpha_1} \frac{2\alpha_2-1}{\alpha_2} \dots \frac{2\alpha_r-1}{\alpha_r} \quad \dots (10)$$

เลือก $n = p_1^{\alpha_1-1} p_2^{\alpha_2-1} \dots p_r^{\alpha_r-1}$ เมื่อ $p_1, p_2, \dots, p_r$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$$\text{เพราะฉะนั้น } d(n) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r \quad \dots (11)$$

$$\text{เพราะว่า } n^2 = p_1^{2(\alpha_1-1)} p_2^{2(\alpha_2-1)} \dots p_r^{2(\alpha_r-1)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } d(n^2) = (2\alpha_1-1)(2\alpha_2-1) \dots (2\alpha_r-1) \quad \dots (12)$$

$$\text{จาก (9), (10) และ (11) จะได้ } \frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{2\alpha_1-1}{\alpha_1} \frac{2\alpha_2-1}{\alpha_2} \dots \frac{2\alpha_r-1}{\alpha_r} = k$$

เพราะฉะนั้นทุกจำนวนเต็มบวกคือ k จะมี n ที่ทำให้ $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$

แบบที่ 2 ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ มีจำนวนเต็มบวก w ที่ทำให้ $2n - 1 = \frac{d(w^2)}{d(w)}$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{d(1^2)}{d(1)} = 1$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(1), P(2), \dots, P(n-1)$ เป็นจริง เมื่อ $n > 1$ แล้ว $P(n)$ เป็นจริง

สมมติ $P(1), P(2), \dots, P(n-1)$ เป็นจริง

ให้ $x \in \{1, 3, \dots, 2n-3\}$

เพราะว่า $P(1), P(2), \dots, P(n-1)$ เป็นจริง เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก q_x ที่ทำให้ $\frac{d(q_x^2)}{d(q_x)} = x \dots (1)$

การแสดงว่าทุกจำนวนเต็มบวก m จะมีจำนวนเต็มบวก r ที่ทำให้ $\frac{d(r^2)}{d(r)} = 2^m x - 1$

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก

กรณีที่ 1 $m = 1$

เลือก $r = p^{x-1} q_x$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ p ไม่เป็นตัวหารของ q_x

เพราะฉะนั้น $\frac{d(r^2)}{d(r)} = \frac{d(p^{2(x-1)} q_x^2)}{d(p^{x-1} q_x)}$

เพราะว่า p, q_x เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะฉะนั้น $p^{2(x-1)}, q_x^2$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

และ p^{x-1}, q_x เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

$$\begin{aligned} \text{จากบทช่วย 1 จะได้ } \frac{d(p^{2(x-1)} q_x^2)}{d(p^{x-1} q_x)} &= \frac{d(p^{2(x-1)}) d(q_x^2)}{d(p^{x-1}) d(q_x)} = \frac{d(p^{2(x-1)})}{d(p^{x-1})} \frac{d(q_x^2)}{d(q_x)} \\ &= \frac{d(p^{2(x-1)})}{d(p^{x-1})} (x) && \text{(จาก (1))} \\ &= \frac{2(x-1)+1}{(x-1)+1} (x) = 2x - 1 \\ &= 2^1 x - 1 \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 $m > 1$

เลือก $r = p_1^{2^{m-1} 3x-2} p_2^{2^{m-2} 3^2 x-2} \dots p_{m-1}^{2 \cdot 3^{m-1} x-2} p_m^{3^{m-1} x-1} q_x$

เมื่อ $p_1, p_2, \dots, p_m$ เป็นจำนวนเฉพาะและไม่เป็นตัวหารของ q_x

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } r^2 &= (p_1^{2^{m-1} 3x-2})^2 (p_2^{2^{m-2} 3^2 x-2})^2 \dots (p_{m-1}^{2 \cdot 3^{m-1} x-2})^2 (p_m^{3^{m-1} x-1})^2 q_x^2 \\ &= p_1^{2^m 3x-4} p_2^{2^{m-1} 3^2 x-4} \dots p_{m-1}^{2^2 \cdot 3^{m-1} x-4} p_m^{2 \cdot 3^{m-1} x-2} q_x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(r) &= d(p_1^{2^{m-1} 3x-2} p_2^{2^{m-2} 3^2 x-2} \dots p_{m-1}^{2 \cdot 3^{m-1} x-2} p_m^{3^{m-1} x-1} q_x) \\ &= d(p_1^{2^{m-1} 3x-2}) d(p_2^{2^{m-2} 3^2 x-2}) \dots d(p_{m-1}^{2 \cdot 3^{m-1} x-2}) d(p_m^{3^{m-1} x-1}) d(q_x) && \text{(บทช่วย 1)} \\ &= ((2^{m-1} 3x - 2) + 1)((2^{m-2} 3^2 x - 2) + 1) \dots ((2 \cdot 3^{m-1} x - 2) + 1)((3^{m-1} x - 1) + 1) d(q_x) \\ &= (2^{m-1} 3x - 1)(2^{m-2} 3^2 x - 1) \dots (2 \cdot 3^{m-1} x - 1)(3^{m-1} x) d(q_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d(r^2) &= d(p_1^{2^m 3x-4} p_2^{2^{m-1} 3^2 x-4} \dots p_{m-1}^{2^2 \cdot 3^{m-1} x-4} p_m^{2 \cdot 3^{m-1} x-2} q_x^2) \\
&= d(p_1^{2^m 3x-4}) d(p_2^{2^{m-1} 3^2 x-4}) \dots d(p_{m-1}^{2^2 \cdot 3^{m-1} x-4}) d(p_m^{2 \cdot 3^{m-1} x-2}) d(q_x^2) \quad (\text{บทช่วย 1}) \\
&= ((2^m 3x - 4) + 1)((2^{m-1} 3^2 x - 4) + 1) \dots ((2^2 \cdot 3^{m-1} x - 4) + 1)((2 \cdot 3^{m-1} x - 2) + 1) d(q_x^2) \\
&= (2^m 3x - 3)(2^{m-1} 3^2 x - 3) \dots (2^2 \cdot 3^{m-1} x - 3)(2 \cdot 3^{m-1} x - 1) d(q_x^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{เพราะฉะนั้น } \frac{d(r^2)}{d(r)} &= \frac{2^m 3x - 3}{2^{m-1} 3x - 1} \frac{2^{m-1} 3^2 x - 3}{2^{m-2} 3^2 x - 1} \dots \frac{2^2 3^{m-1} x - 3}{2 \cdot 3^{m-1} x - 1} \frac{2 \cdot 3^{m-1} x - 1}{3^{m-1} x} \frac{d(q_x^2)}{d(q_x)} \\
&= \frac{3(2^m x - 1)}{2^{m-1} 3x - 1} \frac{3(2^{m-1} 3x - 1)}{2^{m-2} 3^2 x - 1} \dots \frac{3(2^2 3^{m-2} x - 1)}{2 \cdot 3^{m-1} x - 1} \frac{2 \cdot 3^{m-1} x - 1}{3^{m-1} x} \quad (\text{จาก (1)}) \\
&= 3^{m-1} \frac{2^m x - 1}{2^{m-1} 3x - 1} \frac{2^{m-1} 3x - 1}{2^{m-2} 3^2 x - 1} \dots \frac{2^2 3^{m-2} x - 1}{2 \cdot 3^{m-1} x - 1} \frac{2 \cdot 3^{m-1} x - 1}{3^{m-1}} \\
&= \frac{2^m x - 1}{2^{m-1} 3x - 1} \frac{2^{m-1} 3x - 1}{2^{m-2} 3^2 x - 1} \dots \frac{2^2 3^{m-2} x - 1}{2 \cdot 3^{m-1} x - 1} \frac{2 \cdot 3^{m-1} x - 1}{1} \\
&= 2^m x - 1
\end{aligned}$$

จากทั้งสองกรณีจะได้ทุกจำนวนเต็มบวก m จะมีจำนวนเต็มบวก r ที่ทำให้ $\frac{d(r^2)}{d(r)} = 2^m x - 1 \dots (2)$

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกและ x เป็นเลขคี่ที่ทำให้ $2n = 2^m x$ เพราะฉะนั้น $2n - 1 = 2^m x - 1 \dots (3)$

สมมติ $x \geq 2n - 1 \dots (4)$

เพราะว่า $x \geq 2n - 1 \Rightarrow 2^m x \geq 2^{m+1} n - 2^m \Rightarrow 2n \geq 2^{m+1} n - 2^m$ (จาก (3))

$\Rightarrow n \geq 2^m n - 2^{m-1} \Rightarrow n \geq 2^m n + 2^m n - 2^m \Rightarrow n > n + 2^m n - 2^m$ (เพราะว่า $2^m > 1$)

$\Rightarrow 0 > 2^m n - 2^m \Rightarrow 2^m > 2^m n \Rightarrow 1 > n \Rightarrow n = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (4) $x \geq 2n - 1$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $x < 2n - 1$ เพราะว่า x เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ เพราะฉะนั้น $x \in \{1, 3, \dots, 2n - 3\}$

จาก (2) มีจำนวนเต็มบวก r ที่ทำให้ $\frac{d(r^2)}{d(r)} = 2^m x - 1$ เพราะฉะนั้นจาก (3) จะได้ $\frac{d(r^2)}{d(r)} = 2n - 1$

เพราะฉะนั้น $P(n)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \dots$

เพราะฉะนั้นทุกจำนวนเต็มบวก n มีจำนวนเต็มบวก w ที่ทำให้ $2n - 1 = \frac{d(w^2)}{d(w)} \dots (5)$

ให้ k เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $k = 2n - 1$

จาก (5) จะมีจำนวนเต็มบวก w ที่ทำให้ $\frac{d(w^2)}{d(w)} = 2n - 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{d(w^2)}{d(w)} = k$

เพราะฉะนั้นทุกจำนวนเต็มบวกคี่ k จะมีจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ $\frac{d(w^2)}{d(w)} = k$ □

บทช่วย 1 กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ จะได้ $d(xy) = d(x)d(y)$

ข้อพิสูจน์ ให้ $x = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_t^{x_t}$ และ $y = q_1^{y_1} q_2^{y_2} \dots q_u^{y_u}$

เมื่อ $p_1, p_2, \dots, p_t, q_1, q_2, \dots, q_u$ เป็นจำนวนเฉพาะ

และ $x_1, x_2, \dots, x_t, y_1, y_2, \dots, y_u$ เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะว่า x, y เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ เพราะฉะนั้น $\{p_1, p_2, \dots, p_t\} \cap \{q_1, q_2, \dots, q_u\} = \emptyset$

เพราะฉะนั้น $xy = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_t^{x_t} q_1^{y_1} q_2^{y_2} \dots q_u^{y_u}$

$$d(x) = (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_t + 1)$$

$$d(y) = (y_1 + 1)(y_2 + 1) \dots (y_t + 1)$$

$$d(xy) = (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_t + 1)(y_1 + 1)(y_2 + 1) \dots (y_t + 1)$$

เพราะฉะนั้น $d(xy) = d(x)d(y)$

□

4. แนวคิด

แบบที่ 1 เพราะ $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$ และ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{เพราะฉะนั้น } ab^2 + b + 7 \leq a^2b + a + b \quad \dots (1)$$

$$\text{สมมติ } a < b \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b \geq a + 1 \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } ab^2 + b + 7 &> ab^2 + b \\ &= b(ab + 1) \\ &\geq (a + 1)(ab + 1) \quad (\text{จาก (3)}) \\ &= a^2b + a + ab + 1 \\ &> a^2b + a + ab \\ &\geq a^2b + a + (1)b \quad (\text{เพราะว่า } a \geq 1) \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } ab^2 + b + 7 > a^2b + a + b \text{ เพราะฉะนั้นขัดแย้งกับ (1)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้นที่สมมติ (2) } a < b \text{ ไม่จริง}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a \geq b \quad \dots (4)$$

$$\text{เพราะว่า } (ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$$

$$\text{เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก } k \text{ ที่ทำให้ } a^2b + a + b = k(ab^2 + b + 7) \quad \dots (5)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right)(ab^2 + b + 7) &= a^2b + a + \frac{7a}{b} + ab + 1 + \frac{7}{b} \\ &= a^2b + a + ab + \left(\frac{7a}{b} + 1 + \frac{7}{b}\right) \\ &> a^2b + a + ab \\ &\geq a^2b + a + (1)b \quad (\text{เพราะว่า } a \geq 1) \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right)(ab^2 + b + 7) > a^2b + a + b \quad \dots (6)$$

$$\text{จาก (5) และ (6) จะได้ } \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{b}\right)(ab^2 + b + 7) > k(ab^2 + b + 7)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{a}{b} + \frac{1}{b} > k \quad \dots (7)$$

เพราะว่า b เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้นจำนวนการพิสูจน์เป็น 3 กรณีคือ $b = 1, b = 2$ และ $b \geq 3$

กรณีที่ 1 $b = 1$

$$\text{เพราะว่า } (ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b) \text{ เพราะฉะนั้น } (a + 8) \mid (a^2 + a + 1)$$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก c ที่ทำให้ $a^2 + a + 1 = c(a + 8)$... (8)

เพราะว่า $a(a + 8) - (a^2 + a + 1) = 7a - 1$ และ $7(a + 8) - (7a - 1) = 57$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } 57 &= 7(a + 8) - (a(a + 8) - (a^2 + a + 1)) \\ &= 7(a + 8) - (a(a + 8) - c(a + 8)) \quad (\text{จาก (8)}) \\ &= (7 - a + c)(a + 8) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(a + 8) \mid 57$

เพราะว่า $a + 8 \geq 9$ และ $57 = (19)(3)$ เพราะฉะนั้น $a + 8 = 19$ หรือ 57

เพราะฉะนั้น $a = 11$ หรือ 49

กรณีที่ 1.1 $(a, b) = (11, 1)$

$$ab^2 + b + 7 = (11)(1) + 1 + 7 = 19 \text{ และ } a^2b + a + b = 121 + 11 + 1 = 133 = (19)(7)$$

เพราะฉะนั้น $(a, b) = (11, 1)$ สอดคล้องเงื่อนไข $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$

กรณีที่ 1.2 $(a, b) = (49, 1)$

$$ab^2 + b + 7 = (49)(1) + 1 + 7 = 57 \text{ และ } a^2b + a + b = 2401 + 49 + 1 = 2451 = (57)(43)$$

เพราะฉะนั้น $(a, b) = (49, 1)$ สอดคล้องเงื่อนไข $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$

กรณีที่ 2 $b = 2$

เพราะว่า $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$ เพราะฉะนั้น $(4a + 9) \mid (2a^2 + a + 2)$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก c ที่ทำให้ $2a^2 + a + 2 = c(4a + 9)$... (9)

เพราะว่า $a(4a + 9) - 2(2a^2 + a + 2) = 7a - 4$ และ $7(4a + 9) - 4(7a - 4) = 79$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } 79 &= 7(4a + 9) - 4(a(4a + 9) - 2(2a^2 + a + 2)) \\ &= 7(4a + 9) - 4(a(4a + 9) - 2(c(4a + 9))) \quad (\text{จาก (9)}) \\ &= (4a + 9)(7 - 4a + 8c) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(4a + 9) \mid 79$

เพราะว่าค่าที่เป็นไปได้ของ $4a + 9$ คือ 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 45, 49, 53, 57, 61, 65, 69, 73, 77, 81, ... เพราะฉะนั้น $4a + 9$ หาร 79 ไม่ลงตัวทุกค่า $a = 1, 2, 3, \dots$

เพราะฉะนั้น $b = 2$ จะไม่มีค่าของ a ที่ทำให้ $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$

กรณีที่ 3 $b \geq 3$

เพราะฉะนั้น $b^2 \geq 9$ เพราะฉะนั้น $b^2 - 7 \geq 2 > 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{b^2 - 7}{b} > 0$ และ $b - \frac{7}{b} > 0$... (10)

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}\right)(ab^2 + b + 7) &= a^2b + a + \frac{7a}{b} - ab - 1 - \frac{7}{b} \\ &= a^2b + a - ab + \frac{7a}{b} - 1 - \frac{7}{b} \\ &< a^2b + a - ab + \frac{7a}{b} \quad \left(-1 - \frac{7}{b} < 0\right) \\ &= a^2b + a - a\left(b - \frac{7}{b}\right) \end{aligned}$$

$$< a^2 b + a \quad \text{(จาก (10) } b - \frac{7}{b} > 0 \text{ และ } a \geq 1)$$

$$< a^2 b + a + b$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}\right)(ab^2 + b + 7) < a^2 b + a + b \quad \dots (11)$$

$$\text{เพราะว่าจาก (5) } a^2 b + a + b = k(ab^2 + b + 7)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b}\right)(ab^2 + b + 7) < k(ab^2 + b + 7)$$

$$\text{เพราะว่า } ab^2 + b + 7 > 1 \text{ เพราะฉะนั้น } \frac{a}{b} - \frac{1}{b} < k \quad \dots (12)$$

$$\text{จาก (7) และ (12) จะได้ } \frac{a}{b} - \frac{1}{b} < k < \frac{a}{b} + \frac{1}{b}$$

$$a - 1 < kb < a + 1$$

$$\text{เพราะว่า } a - 1, kb, a + 1 \text{ เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น } kb = a \quad \dots (13)$$

$$\text{เพราะว่าจาก (5) } a^2 b + a + b = k(ab^2 + b + 7) \text{ และ } a = kb$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } k^2 b^3 + kb + b = k(kb^3 + b + 7)$$

$$= k^2 b^3 + kb + 7k$$

$$b = 7k \quad \dots (14)$$

$$\text{จาก (13) และ (14) จะได้ } a = 7k^2 \text{ เพราะฉะนั้น } (a, b) = (7k^2, 7k)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (a, b) = (11, 1), (49, 1) \text{ และ } (7k^2, 7k) \text{ สอดคล้องเงื่อนไข } (ab^2 + b + 7) \mid (a^2 b + a + b)$$

$$\text{แบบที่ 2 เพราะ } (ab^2 + b + 7) \mid (a^2 b + a + b) \text{ และ } b(a^2 b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (ab^2 + b + 7) \mid (b^2 - 7a) \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะว่า } (ab^2 + b + 7) - (b^2 - 7a) = (ab^2 - b^2) + b + (7 + 7a)$$

$$= b^2(a - 1) + b + 7(a + 1)$$

$$> b^2(a - 1) \quad \text{(เพราะว่า } b + 7(a + 1) > 0)$$

$$\geq 0 \quad \text{(เพราะว่า } a \geq 1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } ab^2 + b + 7 > b^2 - 7a \quad \dots (2)$$

$$\text{สมมติ } b^2 - 7a > 0 \quad \dots (3)$$

$$\text{เพราะว่าจาก (1) } (ab^2 + b + 7) \mid (b^2 - 7a) \text{ และ } b^2 - 7a > 0 \text{ และ } ab^2 + b + 7 > 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } ab^2 + b + 7 \leq b^2 - 7a \text{ เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ (2)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) } b^2 - 7a > 0 \text{ ไม่จริง}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b^2 - 7a \leq 0$$

$$\text{กรณีที่ 1 } b^2 - 7a = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 7a = b^2 \text{ เพราะฉะนั้น } 7 \mid b^2 \text{ เพราะฉะนั้น } 7 \mid b$$

$$\text{เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก } k \text{ ที่ทำให้ } b = 7k \text{ เพราะ } 7a = b^2 \text{ เพราะฉะนั้น } a = 7k^2$$

$$\text{เพราะว่า } ab^2 + b + 7 = 7^3 k^4 + 7k + 7$$

และ $a^2 b + a + b = 7^3 k^5 + 7k^2 + 7k = k(7^3 k^4 + 7k + 7) = k(ab^2 + b + 7)$

เพราะฉะนั้น $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2 b + a + b)$

เพราะฉะนั้น $(a, b) = (7k^2, 7k)$ สอดคล้องเงื่อนไข $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2 b + a + b)$

กรณีที่ 2 $b^2 - 7a < 0$

เพราะฉะนั้น $7a - b^2 > 0$ และ $7a - b^2 < 7a$... (4)

สมมติ $b \geq 3$... (5)

เพราะว่า $ab^2 + b + 7 > ab^2$

$> 9a$

(เพราะว่า $b \geq 3$)

$> 7a$

$> 7a - b^2$

> 0

(จาก (4))

เพราะฉะนั้น $ab^2 + b + 7 > 7a - b^2 > 0$

... (6)

เพราะว่าจาก (1) $(ab^2 + b + 7) \mid (b^2 - 7a)$

เพราะฉะนั้น $(ab^2 + b + 7) \mid (7a - b^2)$

เพราะว่า $7a - b^2 > 0$ เพราะฉะนั้น $ab^2 + b + 7 \leq 7a - b^2$

... (7)

เพราะว่า (6) และ (7) ขัดแย้งกัน

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (5) $b \geq 3$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $b < 3$

เพราะว่า b เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้น $b = 1$ หรือ $b = 2$

กรณีที่ 2.1 $b = 1$

เพราะว่า $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2 b + a + b)$ เพราะฉะนั้น $(a + 8) \mid (a^2 + a + 1)$

... (8)

จาก (8) และ $\frac{a^2 + a + 1}{a + 8} = a - 7 + \frac{57}{a + 8}$ จะได้ $\frac{57}{a + 8}$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $(a + 8) \mid 57$

เพราะว่า $a + 8 \geq 9$ และ $57 = (19)(3)$ เพราะฉะนั้น $a + 8 = 19$ หรือ 57

เพราะฉะนั้น $a = 11$ หรือ 49

กรณีที่ 2.1.1 $(a, b) = (11, 1)$

$ab^2 + b + 7 = (11)(1) + 1 + 7 = 19$ และ $a^2 b + a + b = 121 + 11 + 1 = 133 = (19)(7)$

เพราะฉะนั้น $(a, b) = (11, 1)$ สอดคล้องเงื่อนไข $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2 b + a + b)$

กรณีที่ 2.1.2 $(a, b) = (49, 1)$

$ab^2 + b + 7 = (49)(1) + 1 + 7 = 57$ และ $a^2 b + a + b = 2401 + 49 + 1 = 2451 = (57)(43)$

เพราะฉะนั้น $(a, b) = (49, 1)$ สอดคล้องเงื่อนไข $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2 b + a + b)$

กรณีที่ 2 $b = 2$

กรณีที่ 2 แบบที่ 1 เพราะว่า $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$ เพราะฉะนั้น $(4a + 9) \mid (2a^2 + a + 2)$

เพราะฉะนั้น $(4a + 9) \mid (2(2a^2 + a + 2))$... (9)

จาก (9) และ $\frac{4a^2 + 2a + 4}{4a + 9} = a - \frac{7a - 4}{4a + 9}$ จะได้ $\frac{7a - 4}{4a + 9}$ เป็นจำนวนเต็ม

$$8a > 7a$$

$$8a + 18 > 7a - 4$$

$$2(4a + 9) > 7a - 4$$

$$2 > \frac{7a - 4}{4a + 9}$$

เพราะว่า $7a - 4 > 0$, $4a + 9 > 0$, $\frac{7a - 4}{4a + 9}$ เป็นจำนวนเต็ม และ $2 > \frac{7a - 4}{4a + 9}$

เพราะฉะนั้น $\frac{7a - 4}{4a + 9} = 1$

เพราะฉะนั้น $7a - 4 = 4a + 9$ เพราะฉะนั้น $a = \frac{13}{3}$

เพราะฉะนั้น $b = 2$ จะไม่มีจำนวนเต็ม a ที่ทำให้ $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$

กรณีที่ 2 แบบที่ 2 เพราะว่า $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$ และ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะฉะนั้น $\frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7} \geq 1$

เพราะว่า $b = 2$ เพราะฉะนั้น $\frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7} = \frac{2a^2 + a + 2}{4a + 9}$ เพราะฉะนั้น $\frac{2a^2 + a + 2}{4a + 9} \geq 1$... (10)

สมมติ $\frac{2a^2 + a + 2}{4a + 9} = 1$... (11)

เพราะฉะนั้น $2a^2 + a + 2 = 4a + 9$

$$2a^2 - 3a - 7 = 0$$

$$a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(-7)}}{2(2)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{65}}{4}$$

เพราะว่า $a = \frac{3 \pm \sqrt{65}}{4}$ ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก เกิดข้อขัดแย้งกับ a เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (11) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $\frac{2a^2 + a + 2}{4a + 9} > 1$

$$2a^2 + a + 2 > 4a + 9 \quad (4a + 9 > 0)$$

$$2a^2 - 3a - 7 > 0$$

$$2(a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{9}{16}) - 7 - \frac{9}{8} > 0$$

$$2(a - \frac{3}{4})^2 > \frac{64}{8}$$

$$(a - \frac{3}{4})^2 > 4$$

เพราะฉะนั้น $a - \frac{3}{4} > 2$ เพราะฉะนั้น $a > 2 + \frac{3}{4} = 2.75$... (12)

เพราะว่า $(ab^2 + b + 7) \mid (b^2 - 7a)$ เพราะฉะนั้น $\frac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7}$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $b = 2$ เพราะฉะนั้น $\frac{b^2 - 7a}{ab^2 + b + 7} = \frac{4 - 7a}{4a + 9}$ เพราะฉะนั้น $\frac{4 - 7a}{4a + 9}$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $\frac{22 + a}{4a + 9} = \frac{4 - 7a}{4a + 9} + 2$ และ $\frac{22 + a}{4a + 9} > 0$ เพราะฉะนั้น $0 < 4a + 9 < 22 + a$

เพราะฉะนั้น $3a < 13$ เพราะฉะนั้น $a < 4.3$... (13)

จาก (12) และ (13) จะได้ $a = 3$ หรือ $a = 4$

เพราะว่า $(a, b) = (3, 2)$ ทำให้ $\frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7} = \frac{2a^2 + a + 2}{4a + 9} = \frac{23}{21}$

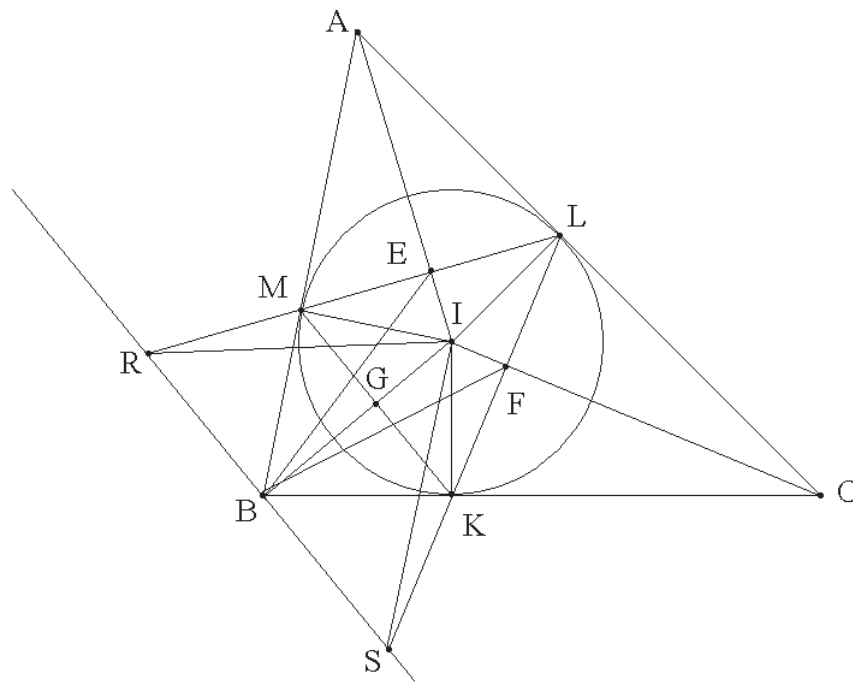
และ $(a, b) = (4, 2)$ ทำให้ $\frac{a^2b + a + b}{ab^2 + b + 7} = \frac{2a^2 + a + 2}{4a + 9} = \frac{38}{25}$

เพราะฉะนั้น $b = 2$ ไม่มี a ที่ทำให้ $ab^2 + b + 7 =$ หาร $a^2b + a + b$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $(a, b) = (11, 1), (49, 1), (7k^2, 7k)$ สอดคล้องเงื่อนไข $(ab^2 + b + 7) \mid (a^2b + a + b)$ $\square$

5. แนวคิด

แบบที่ 1



รูปที่ 1998.5.1

ให้ $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$

เพราะว่า IM, IK, IL เป็นรัศมีของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$ เพราะฉะนั้น $IM = IK = IL$

เพราะว่า BM, BK เป็นเส้นสัมผัสวงกลม $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$

เพราะฉะนั้น $BM = BK$ และ $BI \perp MK$ และ $\angle MBI = \angle IBK = \frac{B}{2}$ (ทฤษฎีบท 47.1) ... (1)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 47.1 จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 55

ในทำนองเดียวกันจะได้ $AM = ML$, $AI \perp LM$, $\hat{MAI} = \hat{LAI} = \frac{A}{2}$... (2)

และ $CL = LK$, $CI \perp LK$, $\hat{KCI} = \hat{LCI} = \frac{C}{2}$... (3)

ให้ AI , BI , CI ตัดกับ LM , MK , KL ที่จุด E , G , F ตามลำดับ

เพราะว่า MK ขนานกับ RS เพราะฉะนั้น $BI \perp RS$... (4)

เพราะฉะนั้น $\triangle BIR$ และ $\triangle BIS$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้น $IR^2 = BR^2 + BI^2$ และ $IS^2 = BI^2 + BS^2$... (5)

เพราะว่า $RS = RB + BS$ เพราะฉะนั้น $RS^2 = RB^2 + BS^2 + 2RBBS$... (6)

$$\begin{aligned} \text{จาก (5) จะได้ } IR^2 + IS^2 &= (BR^2 + BI^2) + (BI^2 + BS^2) \\ &= (BR^2 + BS^2) + 2BI^2 \\ &= (RS^2 - 2RBBS) + 2BI^2 \quad (\text{จาก (6)}) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $IR^2 + IS^2 - RS^2 = 2BI^2 - 2RBBS$... (7)

เพราะว่าจาก (2) จะได้ $AM = AL$ และ $\triangle AME$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \hat{AML} = \hat{ALM} &= 90^\circ - \hat{LAI} \\ &= 90^\circ - \frac{A}{2} \quad (\text{จาก (2)}) \end{aligned}$$

เพราะว่ามุมตรงข้ามต้องเท่ากัน เพราะฉะนั้น $\hat{RMB} = \hat{AML} = 90^\circ - \frac{A}{2}$... (8)

$$\begin{aligned} \hat{RBM} &= \hat{RBI} - \hat{MBI} \\ &= 90^\circ - \hat{MBI} \quad (\text{จาก (4) } BI \perp RS) \\ &= 90^\circ - \frac{B}{2} \quad (\text{จาก (1)}) \end{aligned} \quad \dots (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{BRM} &= 180^\circ - \hat{RBM} - \hat{RMB} \quad (\text{ผลบวกของมุมภายใน } \triangle BMR) \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{B}{2}) - (90^\circ - \frac{A}{2}) \quad (\text{จาก (8) และ (9)}) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \end{aligned}$$

เพราะว่า $A + B + C = 180^\circ$ เพราะฉะนั้น $\hat{BRM} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$... (10)

$$\begin{aligned} \text{จาก } \triangle BMR \text{ โดยกฎของไซน์ } \frac{BM}{\sin \hat{BRM}} &= \frac{BR}{\sin \hat{BMR}} = \frac{RM}{\sin \hat{RBM}} \\ \frac{BM}{\sin(90^\circ - \frac{C}{2})} &= \frac{BR}{\sin(90^\circ - \frac{A}{2})} = \frac{RM}{\sin(90^\circ - \frac{B}{2})} \quad (\text{จาก (8), (9) และ (10)}) \\ \frac{BM}{\cos \frac{C}{2}} &= \frac{BR}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{RM}{\cos \frac{B}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{BR}{BM} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \quad \dots (11)$$

เพราะว่าจาก (3) จะได้ $CL = CK$ และ $\triangle CLF$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \hat{CKL} = \hat{CLK} &= 90^\circ - \hat{LCI} \\ &= 90^\circ - \frac{C}{2} \quad (\text{จาก (3)}) \end{aligned}$$

เพราะว่ามุมตรงข้ามต้องเท่ากัน เพราะฉะนั้น $\hat{BKS} = \hat{CKL} = 90^\circ - \frac{C}{2}$... (12)

$$\begin{aligned}\hat{KBS} &= \hat{IBS} - \hat{KBI} \\ &= 90^\circ - \hat{KBI} && \text{(จาก (4) } BI \perp RS) \\ &= 90^\circ - \frac{B}{2} && \text{(จาก (1))} \quad \dots (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{BSK} &= 180^\circ - \hat{KBS} - \hat{BKS} && \text{(ผลบวกของมุมภายใน } \triangle BKS) \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{B}{2}) - (90^\circ - \frac{C}{2}) && \text{(จาก (12) และ (13))} \\ &= \frac{B}{2} + \frac{C}{2}\end{aligned}$$

เพราะว่า $A + B + C = 180^\circ$ เพราะฉะนั้น $\hat{BSK} = \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$... (14)

ใน $\triangle BKS$ โดยกฎของไซน์

$$\begin{aligned}\frac{BS}{\sin \hat{BKS}} &= \frac{BK}{\sin \hat{BSK}} = \frac{KS}{\sin \hat{KBS}} \\ \frac{BS}{\sin(90^\circ - \frac{C}{2})} &= \frac{BK}{\sin(90^\circ - \frac{A}{2})} = \frac{KS}{\sin(90^\circ - \frac{B}{2})} && \text{(จาก (12), (13) และ (14))} \\ \frac{BS}{\cos \frac{C}{2}} &= \frac{BK}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{KS}{\cos \frac{B}{2}}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{BS}{BK} = \frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$... (15)

จาก (11) และ (15) จะได้ $(\frac{BS}{BK})(\frac{BR}{BM}) = (\frac{\cos \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}})(\frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos \frac{C}{2}}) = 1$

เพราะฉะนั้น $BR \cdot BS = BK \cdot BM$... (16)

เพราะว่าจาก (1) $BM = BK$ เพราะฉะนั้นจาก (16) จะได้ $BR \cdot BS = BK^2$... (17)

จาก (7) และ (17) จะได้ $IR^2 + IS^2 - RS^2 = 2BI^2 - 2BK^2 = 2(BI^2 - BK^2)$... (18)

เพราะว่า K เป็นจุดที่ BK สัมผัสวงกลม Cir_{in_ABC} เพราะฉะนั้น $IK \perp KB$

เพราะฉะนั้น $\triangle BIK$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะฉะนั้น $BI^2 = IK^2 + BK^2$

เพราะฉะนั้น $BI^2 - BK^2 = IK^2$... (19)

จาก (18) และ (19) จะได้ $IR^2 + IS^2 - RS^2 = 2IK^2$

จาก $\triangle RIS$ โดยกฎของโคไซน์ จะได้ $\cos \hat{RIS} = \frac{IR^2 + IS^2 - RS^2}{2(IR)(IS)} = \frac{2IK^2}{2(IR)(IS)} > 0$

เพราะว่า $\hat{RIS}$ เป็นมุมภายใน $\triangle RIS$ เพราะฉะนั้น $0 < \hat{RIS} < 180^\circ$

เพราะว่า $\cos \hat{RIS} > 0$ และ $0 < \hat{RIS} < 180^\circ$ เพราะฉะนั้น $\hat{RIS}$ เป็นมุมแหลม

แบบที่ 2 ให้ Cir_{in_ABC} เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$

ให้ ML ตัดกับ AI ที่จุด E และ MK ตัดกับ BI ที่จุด G และ KL ตัดกับ CI ที่จุด F

เพราะว่า AM และ AL เป็นเส้นสัมผัส เพราะฉะนั้น

$$AM = AL, ME = EL, AI \perp ML, IM \perp MA, IL \perp LA, \hat{MAI} = \hat{LAI} = \frac{A}{2} \quad \text{(ทฤษฎีบท 47.1)} \quad \dots (1)$$

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 47.1 จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 55

ในทำนองเดียวกันจะได้ $CK = CL$, $KF = FL$, $KL \perp IC$, $IK \perp KC$, $IL \perp LC$, $\hat{KCI} = \hat{LCI} = \frac{C}{2}$... (2)

และ $BK = BM$, $KG = GM$, $KM \perp IB$, $IK \perp KB$, $IM \perp MB$, $\hat{KBI} = \hat{MBI} = \frac{B}{2}$... (3)

เพราะว่าจาก (1) $IM \perp MA$ และ $IL \perp LA$ เพราะฉะนั้น $\hat{MIL} = 180^\circ - \hat{MAL}$... (4)

$$\begin{aligned}\hat{MKL} &= \frac{1}{2} \hat{MIL} && (\text{มุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง}) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} \hat{MAL} && (\text{จาก (4)}) \\ &= 90^\circ - \frac{A}{2} && \dots (5)\end{aligned}$$

เพราะว่า R, S อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับ MK เพราะฉะนั้น RS ขนานกับ MK ... (6)

เพราะว่า $\hat{MKL}$, $\hat{BSL}$ เป็นมุมในตำแหน่งภายในของ MK และ BS เพราะฉะนั้น $\hat{MKL} = \hat{BSL}$

จาก (5) จะได้ $\hat{MKL} = \hat{BSL} = 90^\circ - \frac{A}{2}$... (7)

เพราะว่า $\hat{BSL}$ และ $\hat{BSK}$ เป็นมุมเดียวกัน เพราะฉะนั้น $\hat{MKL} = \hat{BSK} = 90^\circ - \frac{A}{2}$... (8)

เพราะว่าจาก (3) $KM \perp IB$ และ BS ขนานกับ MK เพราะฉะนั้น $IB \perp BS$ และ $IB \perp BR$... (9)

$$\begin{aligned}\hat{MBR} &= \hat{RBI} - \hat{MBI} \\ &= 90^\circ - \hat{MBI} && (\text{จาก (9) } IB \perp BR) \\ &= 90^\circ - \frac{B}{2} && (\text{จาก (3)}) \dots (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{KBS} &= \hat{IBS} - \hat{IBK} \\ &= 90^\circ - \hat{IBK} && (\text{จาก (9) } IB \perp BS) \\ &= 90^\circ - \frac{B}{2} && (\text{จาก (3)}) \dots (11)\end{aligned}$$

จาก (10) และ (11) จะได้ $\hat{MBR} = 90^\circ - \frac{B}{2} = \hat{KBS}$... (12)

$$\begin{aligned}\hat{BMR} &= \hat{AML} && (\text{มุมตรงข้าม}) \\ &= \hat{MKL} && (\text{มุมที่เส้นสัมผัส AK ทำกับคอร์ด ML เท่ากับมุมที่ส่วนโค้งด้านตรงข้าม}) \\ &= \hat{BSK} && (\text{จาก (8)}) \dots (13)\end{aligned}$$

จาก (8) และ (13) จะได้ $\hat{BMR} = 90^\circ - \frac{A}{2} = \hat{BSK}$... (14)

เพราะว่า $\triangle BMR$, $\triangle BSK$ มี $\hat{MBR} = \hat{SBK}$ (จาก (12)) และ $\hat{BMR} = \hat{BSK}$ (จาก (14))

เพราะฉะนั้น $\triangle BMR$, $\triangle BSK$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย เพราะฉะนั้น $\frac{BR}{BK} = \frac{RM}{KS} = \frac{MB}{SB}$

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้น} \quad \frac{BR}{BM} &= \frac{BK}{BS} \\ &= \frac{BM}{BS} && (\text{จาก (3) } BK = BM)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $BR \cdot BS = MB^2$... (15)

เพราะว่า BI เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของ $\triangle BIM$ เพราะฉะนั้น $BI > BM$... (16)

เพราะฉะนั้นจาก (15) และ (16) จะได้ $BR \cdot BS < BI^2$

เพราะฉะนั้นโดยบทช่วย 1 จะได้ $\hat{RIS} < 90^\circ$

แบบที่ 3 ให้ $\text{Cir}_{\text{in_ABC}}$ เป็นวงกลมแนบใน $\triangle ABC$

ให้ ML ตัดกับ AI ที่จุด E และ MK ตัดกับ BI ที่จุด G และ KL ตัดกับ CI ที่จุด F
 เพราะว่า AL และ AM เป็นเส้นสัมผัส เพราะฉะนั้น

$$AM = AL, ME = EL, AI \perp ML, IM \perp MA, IL \perp LA, \hat{MAI} = \hat{LAI} = \frac{A}{2} \quad (\text{ทฤษฎีบท 47.1}) \quad \dots (1)$$

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 47.1 จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 55

$$\text{ในทำนองเดียวกันจะได้ } CK = CL, KF = FL, KL \perp IC, IK \perp KC, IL \perp LC, \hat{KCI} = \hat{LCI} = \frac{C}{2} \quad \dots (2)$$

$$\text{และ} \quad BK = BM, KG = GM, KM \perp IB, IK \perp KB, IM \perp MB, \hat{KBI} = \hat{MBI} = \frac{B}{2} \quad \dots (3)$$

เพราะว่า R, S อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับ MK เพราะฉะนั้น RS ขนานกับ MK

$$\text{จาก (3) } KM \perp IB \text{ และ } KM \text{ ขนานกับ } BR \text{ เพราะฉะนั้น } IB \perp BR \text{ เพราะฉะนั้น } \hat{RBI} = 90^\circ \quad \dots (4)$$

$$\text{จาก (1) } AI \perp ML \text{ และ } ML \text{ ตัดกับ } AI \text{ ที่จุด } E \text{ เพราะฉะนั้น } \hat{MEI} = 90^\circ$$

$$\text{เพราะว่า } \hat{REI} = \hat{MEI} \text{ เพราะฉะนั้น } \hat{REI} = 90^\circ \quad \dots (5)$$

$$\text{จาก (4) และ (5) จะได้ } \hat{RBI} + \hat{REI} = 180^\circ \text{ เพราะฉะนั้น } \square RBIE \text{ มีวงกลมล้อมรอบ}$$

ให้ Cir_{RBIE} เป็นวงกลมล้อมรอบ $\square RBIE$

เพราะว่า $\hat{REI} = 90^\circ$ เพราะฉะนั้น RI เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม Cir_{RBIE}

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\square SBIF$ มีวงกลมล้อมรอบ

ให้ Cir_{SBIF} เป็นวงกลมล้อมรอบ $\square SBIF$ และ SI เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม Cir_{SBIF}

$$\hat{RIS} = 180^\circ - (\hat{SRI} + \hat{RSI}) \quad (\text{ผลบวกของมุมภายใน } \triangle RSI) \quad \dots (6)$$

$$\begin{aligned} 180^\circ &= \hat{RIS} + \hat{LSR} + \hat{SRL} \quad (\text{ผลบวกของมุมภายใน } \triangle RSL) \\ &= \hat{RIS} + (\hat{ISL} + \hat{RSI}) + (\hat{IRL} + \hat{SRI}) \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \hat{RIS} + \hat{IRL} + \hat{ISL} = 180^\circ - (\hat{SRI} + \hat{RSI}) \quad \dots (7)$$

$$\text{จาก (6) และ (7) จะได้ } \hat{RIS} = \hat{RIS} + \hat{IRL} + \hat{ISL} \quad \dots (8)$$

$$\text{จาก (3) } IK \perp KB \text{ และ } IM \perp MB \text{ เพราะฉะนั้น } \hat{IMB} = 90^\circ = \hat{IKB}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \hat{MIK} = 180^\circ - \hat{MBK} \quad \dots (9)$$

$$\begin{aligned} \hat{RIS} &= \hat{MLK} && (\hat{RIS}, \hat{MLK} \text{ เป็นมุมเดียวกัน}) \\ &= \frac{1}{2} \hat{MIK} && (\text{คอร์ด } MK \text{ มุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง}) \\ &= 90^\circ - \frac{1}{2} \hat{MBK} && (\text{จาก (9)}) \\ &= 90^\circ - \frac{B}{2} && \dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{IRL} &= \hat{IRE} && (\hat{IRL}, \hat{IRE} \text{ เป็นมุมเดียวกัน}) \\ &= \hat{IBE} && (\text{มุมที่รองรับด้วยคอร์ด } IE \text{ ของวงกลม } \text{Cir}_{\text{RBIE}}) \end{aligned} \quad \dots (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{ISL} &= \hat{ISF} && (\hat{ISL}, \hat{ISF} \text{ เป็นมุมเดียวกัน}) \\ &= \hat{IBF} && (\text{มุมที่รองรับด้วยคอร์ด } IF \text{ ของวงกลม } \text{Cir}_{\text{SBIF}}) \end{aligned} \quad \dots (12)$$

$$\hat{RIS} = \hat{RIS} + \hat{IRL} + \hat{ISL} \quad (\text{จาก (8)})$$

$$\begin{aligned}
&= (90^\circ - \frac{B}{2}) + \hat{I}RL + \hat{I}SL \quad (\text{จาก (10)}) \\
&= (90^\circ - \frac{B}{2}) + \hat{I}BE + \hat{I}SL \quad (\text{จาก (11)}) \\
&= (90^\circ - \frac{B}{2}) + \hat{I}BE + \hat{I}BF \quad (\text{จาก (12)}) \\
&= 90^\circ - \frac{B}{2} + \hat{E}BF \quad (\hat{I}BE + \hat{I}BF = \hat{E}BF) \\
&= 90^\circ - \frac{B}{2} + \hat{E}BL + \hat{L}BF \quad \dots (13)
\end{aligned}$$

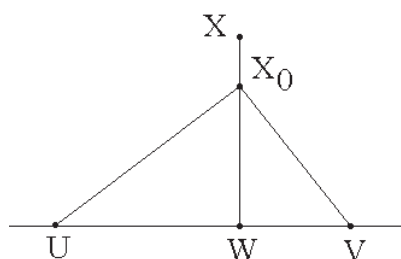
เพราะว่า BE เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle BML$ และ $BL > BM$ โดยบทช่วย 2 จะได้ $\hat{E}BL < \frac{1}{2} \hat{L}BM$

เพราะว่า BF เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle BKL$ และ $BL > BK$ โดยบทช่วย 2 จะได้ $\hat{F}BL < \frac{1}{2} \hat{L}BK$

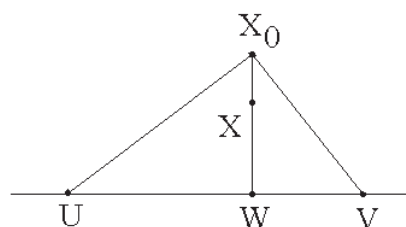
$$\begin{aligned}
\text{เพราะฉะนั้น } \hat{E}BL + \hat{F}BL &< \frac{1}{2} \hat{L}BM + \frac{1}{2} \hat{L}BK \\
&= \frac{1}{2} (\hat{L}BM + \hat{L}BK) \\
&= \frac{1}{2} \hat{M}BK \\
&= \frac{B}{2} \quad \dots (14)
\end{aligned}$$

จาก (13) และ (14) จะได้ $\hat{R}IS < 90^\circ - \frac{B}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ$ □

บทช่วย 1 W เป็นจุดบนส่วนเส้นตรง UV และ $XW \perp UV$ จะได้ $\hat{U}XV < 90^\circ$ ก็ต่อเมื่อ $XW^2 > UW \cdot VW$
ข้อพิสูจน์



รูปที่ 1998.5.2.1



รูปที่ 1998.5.2.2

การพิสูจน์ $XW^2 > UW \cdot VW \Rightarrow \hat{U}XV < 90^\circ$

สมมติ $XW^2 > UW \cdot VW$

เพราะฉะนั้นมี X_0 เป็นจุดบน XW ที่ทำให้ $X_0W^2 = UW \cdot VW$ เพราะฉะนั้น $\frac{X_0W}{VW} = \frac{UW}{X_0W}$

เพราะว่า $XW \perp UV$ และ X_0 เป็นจุดบน XW เพราะฉะนั้น $\hat{V}X_0W = 90^\circ$

เพราะว่า $\hat{V}X_0W = 90^\circ = \hat{U}X_0W$ และ $\frac{X_0W}{VW} = \frac{UW}{X_0W}$

เพราะฉะนั้น $\triangle V\hat{X}_0W, \triangle U\hat{X}_0W$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย (ทฤษฎีบท 64)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 64 จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 92

เพราะฉะนั้น $\hat{W}X_0V = \hat{W}X_0U$... (1)

$$\begin{aligned}
 U\hat{X}_0V &= U\hat{X}_0W + W\hat{X}_0V \\
 &= U\hat{X}_0W + W\hat{U}X_0 \quad (\text{จาก (1)}) \\
 &= 90^\circ \quad (\Delta U\hat{W}X_0 \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก})
 \end{aligned}$$

เพราะว่า $U\hat{X}V < U\hat{X}_0V$ เพราะฉะนั้น $U\hat{X}V < 90^\circ$

การพิสูจน์ $U\hat{X}V < 90^\circ \Rightarrow XW^2 > UW \cdot VW$

เราพิสูจน์ $XW^2 \leq UW \cdot VW \Rightarrow U\hat{X}V \geq 90^\circ$ แทน

สมมติ $XW^2 \leq UW \cdot VW$

เพราะฉะนั้นมี X_0 เป็นจุดภายนอกส่วนเส้นตรง XW ที่ทำให้ $X_0W^2 = UW \cdot VW$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{X_0W}{VW} = \frac{UW}{X_0W}$$

เพราะว่า $XW \perp UV$ และ X_0 เป็นจุดบนส่วนเส้นตรง XW เพราะฉะนั้น $V\hat{W}X_0 = 90^\circ$

$$\text{เพราะว่า } V\hat{W}X_0 = 90^\circ = U\hat{W}X_0 \text{ และ } \frac{X_0W}{VW} = \frac{UW}{X_0W}$$

เพราะฉะนั้น $\Delta V\hat{W}X_0, \Delta U\hat{W}X_0$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย (ทฤษฎีบท 64)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 64 จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 92

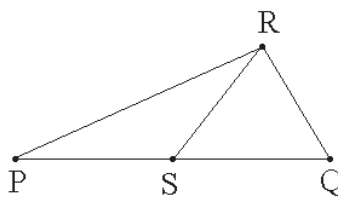
$$\text{เพราะฉะนั้น } W\hat{X}_0V = W\hat{U}X_0 \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned}
 U\hat{X}_0V &= U\hat{X}_0W + W\hat{X}_0V \\
 &= U\hat{X}_0W + W\hat{U}X_0 \quad (\text{จาก (2)}) \\
 &= 90^\circ \quad (\Delta U\hat{W}X_0 \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก})
 \end{aligned}$$

เพราะว่า $U\hat{X}V \geq U\hat{X}_0V$ เพราะฉะนั้น $U\hat{X}V \geq 90^\circ$ □

บทช่วย 2 S เป็นจุดกึ่งกลาง PQ ของ ΔPQR และ $PR > QR$ จะได้ $P\hat{R}S < Q\hat{R}S$ และ $P\hat{R}S < \frac{1}{2} P\hat{R}Q$

ข้อพิสูจน์



รูปที่ 1998.5.3

$$\text{พื้นที่ } \Delta PRS = \text{พื้นที่ } \Delta QRS \quad (S \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง } PQ \Rightarrow PS = SQ)$$

$$\frac{1}{2} RP \cdot RS \sin P\hat{R}S = \frac{1}{2} RQ \cdot RS \sin Q\hat{R}S$$

$$RP \sin P\hat{R}S = RQ \sin Q\hat{R}S$$

เพราะฉะนั้น $RP > RQ$ เพราะฉะนั้น $\sin P\hat{R}S < \sin Q\hat{R}S$

เพราะว่า $\sin$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$ เพราะฉะนั้น $P\hat{R}S < Q\hat{R}S$

เพราะว่า $P\hat{R}S < Q\hat{R}S$ และ $P\hat{R}S + Q\hat{R}S = P\hat{R}Q$ เพราะฉะนั้น $P\hat{R}S < \frac{1}{2} P\hat{R}Q$ □

6. แนวคิด ให้ $S = \{f \mid f : N \rightarrow N \text{ และ } f(n^2 f(m)) = m(f(n))^2 \text{ ทุก } m, n \in N\}$... (1)

เพราะว่า $f : N \rightarrow N$ นิยามโดย $f(x) = x$ ทุก $x \in N$ มีคุณสมบัติ

$$f(n^2 f(m)) = f(n^2 m) = n^2 m = m n^2 = m(f(n))^2 \text{ ทุก } m, n \in N$$

เพราะฉะนั้น $S \neq \emptyset$

ให้ $f \in S$ และ $a = f(1)$... (2)

จาก (1) และ $n = 1$ จะได้ $f(1 f(m)) = m(f(1))^2$ เพราะฉะนั้น $f(f(m)) = a^2 m$ ทุก $m \in N$... (3)

จาก (1) และ $m = 1$ จะได้ $f(n^2 f(1)) = 1 (f(n))^2$ เพราะฉะนั้น $f(a n^2) = (f(n))^2$ ทุก $n \in N$... (4)

$$\begin{aligned} \text{ให้ } m, n \in N \quad (f(m)f(n))^2 &= (f(m))^2 (f(n))^2 \\ &= (f(m))^2 f(a n^2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(จาก (4))} \\ \dots (5) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } x = f(a n^2) \text{ จะได้} \quad x (f(m))^2 &= f(m^2 f(x)) \\ &= f(m^2 f(f(a n^2))) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(จาก (1))} \\ \end{array}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad f(a n^2) (f(m))^2 = f(m^2 f(f(a n^2))) \quad \dots (6)$$

$$\text{จาก (5) และ (6) จะได้} \quad (f(m)f(n))^2 = f(m^2 f(f(a n^2))) \quad \dots (7)$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } y = a n^2 \text{ จะได้} \quad f(f(y)) &= a^2 y \\ &= a^2 (a n^2) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(จาก (3))} \\ \end{array}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad f(f(a n^2)) = a^2 (a n^2) \quad \dots (8)$$

$$\begin{aligned} \text{จาก (7) และ (8) จะได้} \quad (f(m)f(n))^2 &= f(m^2 a^2 (a n^2)) \\ &= f(a(amn)^2) \end{aligned} \quad \dots (9)$$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } z = amn \text{ จะได้} \quad f(a(amn)^2) &= f(a z^2) \\ &= (f(z))^2 \\ &= (f(amn))^2 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{(จาก (4))} \\ \dots (10) \end{array}$$

$$\text{จาก (9) และ (10) จะได้} \quad (f(m)f(n))^2 = (f(amn))^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad f(m)f(n) = f(amn) \text{ ทุก } m, n \in N \quad \dots (11)$$

$$\text{จาก (11) แทนค่า } m = 1 \text{ จะได้} \quad f(1)f(n) = f(a(1)n) \text{ เพราะฉะนั้น} \quad af(n) = f(an) \text{ ทุก } n \in N \quad \dots (12)$$

$$\text{จาก (12) แทนค่า } n \text{ ด้วย } mn \text{ จะได้} \quad af(mn) = f(amn) \text{ ทุก } m, n \in N \quad \dots (13)$$

$$\text{จาก (11) และ (13) จะได้} \quad af(mn) = f(m)f(n) \text{ ทุก } m, n \in N \quad \dots (14)$$

การแสดงว่า a เป็นตัวหารของ $f(n)$ ทุก $n \in N$

ให้ $n \in N$

ให้ $P(k)$ แทนข้อความ “ $(f(n))^k = a^{k-1} f(n^k)$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(f(n))^1 = a^{1-1} f(n^1)$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(f(n))^k = a^{k-1} f(n^k)$
 $(f(n))^k f(n) = a^{k-1} f(n^k) f(n)$
 $= a^{k-1} (af(n^k n)) \quad (\text{จาก (14)})$

เพราะฉะนั้น $(f(n))^{k+1} = a^k f(n^{k+1})$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ $(f(n))^k = a^{k-1} f(n^k)$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots$... (15)

ให้ $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ และ $f(n) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}$

เมื่อ p_i เป็นจำนวนเฉพาะ α_i, β_i เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์, $i = 1, 2, \dots, t$

ให้ $i \in \{1, 2, \dots, t\}$

ให้ $p = p_i, \alpha = \alpha_i$ และ $\beta = \beta_i$

เพราะฉะนั้น α เป็นจำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p^\alpha \mid a$... (16)

และ β เป็นจำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p^\beta \mid f(n)$... (17)

สมมติ $\alpha > \beta$... (18)

เพราะฉะนั้น $\alpha - \beta \geq 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{\alpha - \beta}{\beta} \geq \frac{1}{\beta}$

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $\frac{\alpha - \beta}{\beta} > \frac{1}{m}$ (m มีได้หลายค่า เช่น $m = \beta + 1, \beta + 2$)

เพราะฉะนั้น $\alpha > \beta + \frac{\beta}{m} = \beta(\frac{m+1}{m})$

เพราะฉะนั้น $m\alpha > \beta(m+1)$... (19)

เพราะว่าจาก (16) α เป็นจำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p^\alpha \mid a$

เพราะฉะนั้น $m\alpha$ เป็นจำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p^{m\alpha} \mid a^m$... (20)

เพราะว่าจาก (17) β เป็นจำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p^\beta \mid f(n)$

เพราะฉะนั้น $\beta(m+1)$ เป็นจำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p^{\beta(m+1)} \mid (f(n))^{m+1}$... (21)

จาก (15) จะได้ $a^m f(n^{m+1}) = (f(n))^{m+1}$ เพราะฉะนั้น $a^m \mid (f(n))^{m+1}$... (22)

จาก (20) $p^{m\alpha} \mid a^m$ และจาก (22) $a^m \mid (f(n))^{m+1}$ เพราะฉะนั้น $p^{m\alpha} \mid (f(n))^{m+1}$

เพราะว่า $p^{m\alpha} \mid (f(n))^{m+1}$ และจาก (19) $m\alpha > \beta(m+1)$ เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกันกับ (21)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (18) $\alpha > \beta$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $\alpha \leq \beta$

เพราะฉะนั้น $\alpha_i \leq \beta_i$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, t$... (23)

เพราะว่า $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ และ $f(n) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_t^{\beta_t}$ และจาก (23) เพราะฉะนั้น $a \mid f(n)$

เพราะฉะนั้น $a \mid f(n)$ ทุกค่า $n \in N$... (24)

ให้ $g : N \rightarrow N$ นิยามโดย $g(n) = \frac{f(n)}{a}$ ทุก $n \in N$... (25)

$g(a) = \frac{f(a)}{a}$ (จาก (25))

$$= \frac{f(f(1))}{a} \quad (\text{จาก (2) } a = f(1))$$

$$= \frac{a^2(1)}{a} \quad (\text{จาก (3)})$$

เพราะฉะนั้น $g(a) = a$... (26)

ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ $g(mn) = \frac{f(mn)}{a}$ (จาก (25))

$$= \frac{af(mn)}{a^2}$$

$$= \frac{f(m)f(n)}{a^2} \quad (\text{จาก (14)})$$

$$= \frac{f(m)}{a} \frac{f(n)}{a}$$

$$= g(m)g(n)$$

เพราะฉะนั้น $g(mn) = g(m)g(n)$ ทุก $m, n \in \mathbb{N}$... (27)

ให้ $m \in \mathbb{N}$ $g(g(m)) = \frac{g(a)}{a} g(g(m))$ (จาก (26) $g(a) = a$)

$$= \frac{1}{a} g(a)g(g(m))$$

$$= \frac{1}{a} g(ag(m)) \quad (\text{จาก (27)})$$

$$= \frac{1}{a} g(f(m)) \quad (\text{จาก (25) } g(m) = \frac{f(m)}{a} \Rightarrow ag(m) = f(m))$$

$$= \frac{1}{a} \frac{f(f(m))}{a} \quad (\text{จาก (25)})$$

$$= \frac{1}{a^2} f(f(m))$$

$$= \frac{1}{a^2} (a^2 m) \quad (\text{จาก (3)})$$

$$= m$$

เพราะฉะนั้น $g(g(m)) = m$ ทุก $m \in \mathbb{N}$... (28)

ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ $g(n^2 g(m)) = g(n^2)g(g(m))$ (จาก (27))

$$= g(n^2)m \quad (\text{จาก (28)})$$

เพราะฉะนั้น $g(n^2 g(m)) = mg(n^2)$ ทุก $m, n \in \mathbb{N}$ เพราะฉะนั้น g เป็นสมาชิกของ S ... (29)

เพราะว่า $g(n) = \frac{f(n)}{a}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ และ $a \geq 1$ เพราะฉะนั้น $g(n) \leq f(n)$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น $g(1998) \leq f(1998)$

เพราะว่าจาก (2) f เป็นฟังก์ชันใดๆ ใน S เพราะฉะนั้น $g(1998) \leq f(1998)$ ทุก $f \in S$... (30)

การแสดงว่า $g(p)$ เป็นจำนวนเฉพาะ ทุกจำนวนเฉพาะ p ... (31)

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ

สมมติ $g(p)$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ ... (32)

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก u, v โดยที่ $v > 1$ และ $u > 1$ ที่ทำให้ $g(p) = uv$... (33)

$$p = g(g(p)) \quad (\text{จาก (28)})$$

$$= g(uv) \quad (\text{จาก (33)})$$

$$= g(u)g(v) \quad (\text{จาก (27)})$$

เพราะว่า p เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะฉะนั้น $g(u) = 1$ หรือ $g(v) = 1$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถกำหนดให้ $g(u) = 1$... (34)

$$u = g(g(u)) \quad (\text{จาก (28)})$$

$$= g(1) \quad (\text{จาก (34)})$$

$$= \frac{f(1)}{a} \quad (\text{จาก (25)})$$

$$= 1 \quad (\text{จาก (2) } a = f(1))$$

เพราะฉะนั้น $u = 1$ เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ $u > 1$ จาก (33)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (32) $g(p)$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะไม่จริง

เพราะฉะนั้น $g(p)$ เป็นจำนวนเฉพาะ

การแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

... (35)

ให้ $g(x) = g(y)$ เพราะฉะนั้น $g(g(x)) = g(g(y))$

$$x = y \quad (\text{จาก (28)})$$

เพราะฉะนั้น g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$$g(1998) = g(2 \cdot 3^3 \cdot 37)$$

$$= g(2 \cdot 3^3)g(37) \quad (\text{จาก (27)})$$

$$= g(2)g(3^3)g(37) \quad (\text{จาก (27)})$$

:

$$= g(2)(g(3))^3 g(37)$$

เพราะว่า $g(2)$, $g(3)$, $g(37)$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เพราะฉะนั้น $g(2)(g(3))^3 g(37)$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $\{g(2), g(3), g(37)\} = \{2, 3, 5\}$ และ $g(3) = 2$

เพราะฉะนั้น $g(1998) \geq (3)(2^3)(5) = 120$... (36)

จาก (30) จะได้ $120 \leq f(1998)$ ทุก $f \in S$

... (37)

ต่อไปต้องยืนยันว่าค่าต่ำสุดคือ 120 ด้วยการหาฟังก์ชัน h ที่อยู่ใน S และ $h(1998) = 120$

สำหรับ $n = 2^{n_1} 3^{n_2} 5^{n_3} 37^{n_4} p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$

เมื่อ n_1, n_2, n_3, n_4 เป็นจำนวนเต็ม

และ $p_1, p_2, \dots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะที่มีใช้ 2, 3, 5, 37 และ $s_1, s_2, \dots, s_k$ เป็นจำนวนเต็ม

ให้ $h : N \rightarrow N$

นิยามโดย $h(n) = h(2^{n_1} 3^{n_2} 5^{n_3} 37^{n_4} p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}) = 3^{n_1} 2^{n_2} 37^{n_3} 5^{n_4} p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$

เพราะฉะนั้น $h(1) = h(2^0 3^0) = 3^0 2^0 = 1$

$$h(2) = h(2^1 3^0) = 3^1 2^0 = 3$$

$$h(3) = h(2^0 3^1) = 3^0 2^1 = 2$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $h(5) = 37$

$$h(37) = 5$$

และ $h(p) = p$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มีใช้ 2, 3, 5, 37

ให้ n, m เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะฉะนั้นมี $n_1, n_2, n_3, n_4, m_1, m_2, m_3, m_4$ เป็นจำนวนเต็ม

และ $p_1, p_2, \dots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะที่มีใช้ 2, 3, 5, 37

และ $s_1, s_2, \dots, s_k, t_1, t_2, \dots, t_k$ เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้

$$n = 2^{n_1} 3^{n_2} 5^{n_3} 37^{n_4} p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$$

$$\text{และ} \quad m = 2^{m_1} 3^{m_2} 5^{m_3} 37^{m_4} p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k}$$

$$\text{เพราะว่า} \quad h(m) = 3^{m_1} 2^{m_2} 37^{m_3} 5^{m_4} p_1^{t_1} p_2^{t_2} \dots p_k^{t_k}$$

$$\text{และ} \quad n^2 = 2^{2n_1} 3^{2n_2} 5^{2n_3} 37^{2n_4} p_1^{2s_1} p_2^{2s_2} \dots p_k^{2s_k}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad n^2 h(m) = 2^{2n_1+m_2} 3^{2n_2+m_1} 5^{2n_3+m_4} 37^{2n_4+m_3} p_1^{2s_1+t_1} p_2^{2s_2+t_2} \dots p_k^{2s_k+t_k}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad h(n^2 h(m)) = 3^{2n_1+m_2} 2^{2n_2+m_1} 37^{2n_3+m_4} 5^{2n_4+m_3} p_1^{2s_1+t_1} p_2^{2s_2+t_2} \dots p_k^{2s_k+t_k} \dots (38)$$

$$\text{เพราะว่า} \quad h(n) = 3^{n_1} 2^{n_2} 37^{n_3} 5^{n_4} p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_k^{s_k}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad (h(n))^2 = 3^{2n_1} 2^{2n_2} 37^{2n_3} 5^{2n_4} p_1^{2s_1} p_2^{2s_2} \dots p_k^{2s_k}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad m(h(n))^2 = 3^{2n_1+m_2} 2^{2n_2+m_1} 37^{2n_3+m_4} 5^{2n_4+m_3} p_1^{2s_1+t_1} p_2^{2s_2+t_2} \dots p_k^{2s_k+t_k} \dots (39)$$

จาก (38) และ (39) จะได้ $h(n^2 h(m)) = m(h(n))^2$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad h \in S \text{ และ } h(1998) = h(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = (3)(2^3)(5) = 120 \dots (40)$$

จาก (37) และ (40) จะได้ 120 เป็นค่าต่ำสุดของ $f(1998)$ ทุก $f \in S$ □

The Fortieth International Mathematical Olympiad

Bucharest, Romania

10 – 22 July 1999

Day I (16 July 1999)

1. เซต S ของจุดบนระนาบเรียกว่า **completely symmetric** ถ้า S มีสมาชิกอย่างน้อย 3 จุด และทุกจุด A, B ที่แตกต่างกันใน S เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB เป็นเส้นสมมาตรของ S จงแสดงว่า ถ้า S มี n จุดและ S เป็น completely symmetric แล้วจุดของ S ประกอบกันเป็นรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

2. กำหนดให้ $n \geq 2$ จงหาค่าน้อยที่สุดของ C ที่ทำให้

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^4$$

เป็นจริงทุกจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ $x_1, x_2, \dots, x_n$

และจงหาค่า C ที่ทำให้สมการเป็นจริง

3. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ รูปสี่เหลี่ยมขนาด 1×1 ของตารางขนาด $n \times n$

เรียกว่า **ประชิดกัน** ถ้าสองช่องนั้นมีด้านร่วมกัน

รูปสี่เหลี่ยมขนาด 1×1 จำนวน m ช่องได้ทำการกาเครื่องหมายไว้ในลักษณะที่ทำให้รูปสี่เหลี่ยมขนาด 1×1 (มีเครื่องหมายหรือไม่มีเครื่องหมายกาไว้) บนตารางอยู่ประชิดกันกับรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีเครื่องหมายกาไว้อย่างน้อยหนึ่งรูป

จงหาค่าต่ำสุดของ m

Day II (17 July 1999)

4. จงหาคู่ลำดับ (n, p) เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ p เป็นจำนวนเฉพาะ โดยที่ $n \leq 2p$ และ n^{p-1} หาร $(p-1)^n + 1$ ลงตัว

5. กำหนดให้วงกลม Ω_1 และ Ω_2 สัมผัสในวงกลม Ω ที่จุด M, N ตามลำดับ

จุดศูนย์กลางของวงกลม Ω_2 อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม Ω_1

เส้นตรงที่ผ่านคอร์ดร่วมของวงกลม Ω_1 และ Ω_2 ตัดวงกลม Ω ที่จุด A, B

เส้นตรง MA, MB ตัดวงกลม Ω_1 ที่จุด C, D ตามลำดับ

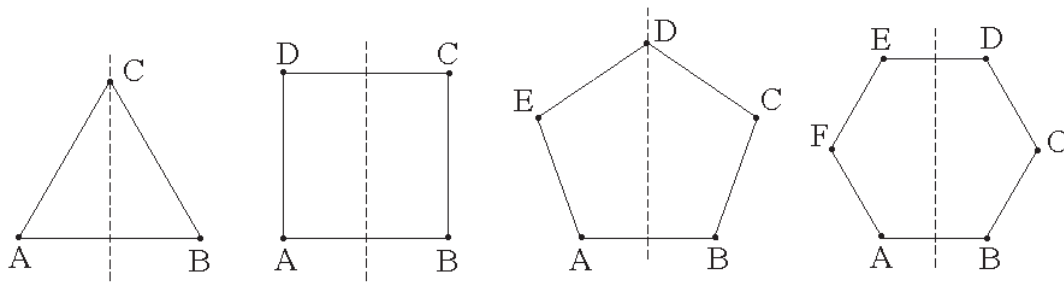
จงแสดงว่า CD สัมผัสวงกลม Ω_2

6. จงหาฟังก์ชันค่าจริง $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่มีคุณสมบัติ $f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$ ทุกจำนวนจริง x, y

The Fortieth International Mathematical Olympiad Solutions

Bucharest, Romania, 10 – 22 July 1999

1. แนวคิด



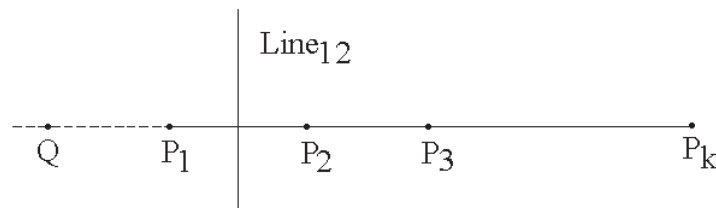
รูปที่ 1999.1.1

รูป n เหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า (regular polygon) มีคุณสมบัติ completely symmetric ทุกค่า $n = 3, 4, \dots$
ให้ S มี n จุดและ S เป็น completely symmetric

สมมติมีจุดของ S อย่างน้อย 3 จุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ... (1)

ให้ $P_1, P_2, \dots, P_k$ เป็นจุดของ S และอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ P_1, P_k เป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรงที่ผ่าน $P_1, P_2, \dots, P_k$



รูปที่ 1999.1.2

ให้ Line_{12} เป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ P_1P_2

เพราะฉะนั้น Line_{12} เป็นเส้นสมมาตรของ S

เพราะฉะนั้นภาพสะท้อนของ P_3 ต้องเป็นสมาชิกของ S

ให้ Q เป็นภาพสะท้อนของ P_3 เทียบกับเส้นตรง Line_{12}

เพราะฉะนั้น $Q, P_1, P_2, \dots, P_k$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันโดย Q, P_k เป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรง

เกิดข้อขัดแย้งกับ P_1, P_k เป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรง

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) มีจุดของ S อย่างน้อย 3 จุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ไม่จริง

เพราะฉะนั้น ถ้า A, B เป็นจุดของ S แล้วบนส่วนเส้นตรง AB จะไม่มีจุดอื่นของ S นอกจากจุด A, B ... (2)

ให้ $A_1A_2 \dots A_m$ เป็นรูป m เหลี่ยมมุมที่ปิดล้อมทุกจุดของ S

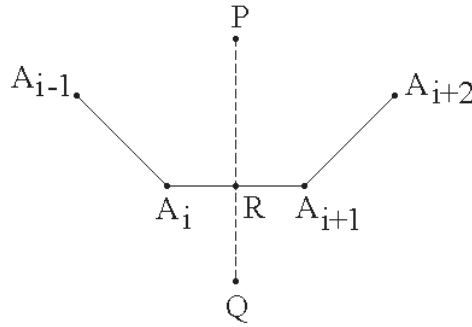
เพราะฉะนั้น $m \leq n$... (3)

เพราะว่า $A_1A_2 \dots A_m$ เป็นรูป m เหลี่ยมมุมที่ปิดล้อมทุกจุดของ S

เพราะฉะนั้นทุกจุดของ S เป็นจุดยอดหรืออยู่ภายในรูป m เหลี่ยมมุม $A_1A_2 \dots A_m$... (4)

หมายเหตุ ในกรณีที่ $j > n$ หรือ $j < n$ กำหนดให้ A_j คือ $A_{j \pmod{m}}$

การแสดงว่ารูป m เหลี่ยม $A_1A_2\dots A_m$ มีมุมทุกมุมเท่ากัน



รูปที่ 1999.1.3

ให้ $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

ให้ PQ เป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ A_iA_{i+1} ที่จุด R

เพราะว่า S เป็น completely symmetric เพราะฉะนั้น PQ เป็นเส้นสมมาตรของ S

เพราะว่า PQ เป็นเส้นสมมาตรของ S เพราะฉะนั้น $A_{i-1}\hat{A}_iR = R\hat{A}_{i+1}A_{i+2}$

เพราะฉะนั้น $A_{i-1}\hat{A}_iA_{i+1} = A_i\hat{A}_{i+1}A_{i+2}$

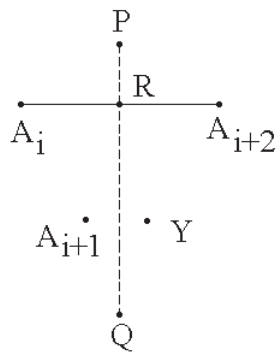
เพราะฉะนั้นรูป m เหลี่ยม $A_1A_2\dots A_m$ มีมุมทุกมุมเท่ากัน

การแสดงว่ารูป m เหลี่ยม $A_1A_2\dots A_m$ มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

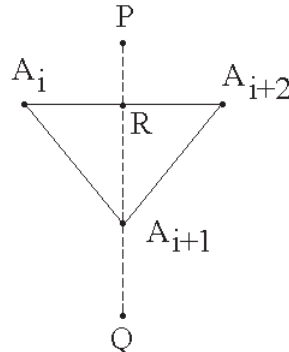
ให้ $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

เพราะฉะนั้น A_iA_{i+1} , $A_{i+1}A_{i+2}$ เป็นด้านของรูป n เหลี่ยม $A_1A_2\dots A_m$

ให้ PQ เป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ A_iA_{i+1} ที่จุด R



รูปที่ 1999.1.4.1



รูปที่ 1999.1.4.2

สมมติ A_{i+1} ไม่อยู่บน PQ (รูปที่ 1999.1.4.1)

... (5)

เพราะว่า S เป็น completely symmetric เพราะฉะนั้น PQ เป็นเส้นสมมาตรของ S

เพราะว่า PQ เป็นเส้นสมมาตรของ S เพราะฉะนั้นภาพสะท้อนของ A_{i+1} ต้องเป็นสมาชิกของ S

ให้ Y เป็นภาพสะท้อนของ A_{i+1} เทียบกับเส้นสมมาตร PQ

เพราะฉะนั้น Y อยู่นอกกรุป m เหลี่ยม $A_1A_2\dots A_m$ เกิดข้อขัดแย้งกับ (4)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (5) A_{i+1} ไม่อยู่บน PQ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น A_{i+1} อยู่บน PQ (รูปที่ 1999.1.4.2)

เพราะว่า A_i และ A_{i+2} สมมาตรกับ PQ เพราะฉะนั้น $\Delta A_i A_{i+1} R$ และ $\Delta A_{i+2} A_{i+1} R$ เท่ากันทุกประการ
 เพราะฉะนั้น $A_i A_{i+1} = A_{i+2} A_{i+1}$ เพราะฉะนั้นรูป m เหลี่ยม $A_1 A_2 \dots A_m$ มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน
 เพราะฉะนั้น $A_1 A_2 \dots A_m$ เป็นรูป m เหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า
 ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของรูป m เหลี่ยมด้านเท่าและมุมเท่า $A_1 A_2 \dots A_m$

สมมติ $m < n$... (6)

เพราะฉะนั้นมี $X \in S - \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ และ X อยู่ภายในรูป m เหลี่ยม $A_1 A_2 \dots A_m$

เพราะฉะนั้นมี A_i, A_{i+1} ที่ทำให้ X อยู่ใน $\Delta A_i A_{i+1} C$ หรืออยู่ที่เส้นรอบรูปของ $\Delta A_i A_{i+1} C$

เพราะฉะนั้น $CA_i \neq CX$... (7)

ให้ $L_{XA_i}, L_{XA_{i+1}}, L_{A_i A_{i+1}}$ เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $XA_i, XA_{i+1}, A_i A_{i+1}$ ตามลำดับ

เพราะว่า S มีสมบัติ completely symmetric และ $\{A_1, A_2, \dots, A_m\} \subset S$

เพราะฉะนั้น $L_{XA_i}, L_{XA_{i+1}}, L_{A_i A_{i+1}}$ เป็นเส้นสมมาตรของ $A_1, A_2, \dots, A_m$

เพราะฉะนั้น C ต้องอยู่บนตัดของ $L_{XA_i}, L_{XA_{i+1}}, L_{A_i A_{i+1}}$

เพราะฉะนั้น C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ $\Delta A_i A_{i+1} X$

เพราะฉะนั้น X อยู่บนวงกลมที่ผ่าน A_i, A_{i+1} และมีจุดศูนย์กลาง C

เพราะฉะนั้น $CA_i = CX$ ขัดแย้งกับ (7) เพราะฉะนั้นที่สมมติ (6) $m < n$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $m \geq n$... (8)

เพราะฉะนั้นจาก (3) และ (8) จะได้ $m = n$

เพราะฉะนั้นจุดของ S เป็นจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า □

2. แนวคิด

แบบที่ 1 ตัวอย่างเสริมความเข้าใจกรณี $n = 3$

ให้ $S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

โดยใช้สมการ A.M. - G.M. กับจำนวนจริง S และ $2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$ จะได้

$$\frac{S + (2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3)}{2} \geq (S((2x_1 x_2) + (2x_1 x_3) + (2x_2 x_3)))^{\frac{1}{2}}$$

เพราะฉะนั้น $(\frac{S + (2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3)}{2})^2 \geq S((2x_1 x_2) + (2x_1 x_3) + (2x_2 x_3))$... (1)

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_3 (x_1^2 + x_3^2) + x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2) \\ & \leq x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_1 x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + x_2 x_3 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ & = x_1 x_2 S + x_1 x_3 S + x_2 x_3 S \\ & = \frac{1}{2} (S((2x_1 x_2) + (2x_1 x_3) + (2x_2 x_3))) \\ & \leq \frac{1}{2} (\frac{S + (2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3)}{2})^2 \quad \text{(จาก (1))} \quad \dots (2) \\ & = \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3)^2 \\ & = \frac{1}{8} ((x_1 + x_2 + x_3)^2)^2 \\ & = \frac{1}{8} (x_1 + x_2 + x_3)^4 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right)^4$... (3)

สมการ (3) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมการ (2) เป็นจริง

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } s = 2x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_2x_3$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$$

หมายเหตุ ถ้ามี $x_i = x_j$ หนึ่งคู่ และ x_k ที่เหลือเป็นศูนย์

$$\text{แล้ว } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$$

การพิสูจน์กรณีทั่วไป ให้ $S = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$

โดยใช้สมการ A.M. - G.M. กับจำนวนจริง 2 จำนวนคือ S และ $2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$ จะได้

$$\frac{S + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j}{2} \geq \left(S \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

เพราะฉะนั้น $\left(\frac{S + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j}{2} \right)^2 \geq S \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j \right)$... (1)

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$
 ... (2)

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j S$$

$$= S \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

$$= \frac{1}{2} \left(S \left(2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(S \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j \right) \right)$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{S + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j}{2} \right)^2 \quad (\text{จาก (1)}) \quad \dots (3)$$

$$= \frac{1}{8} \left(S + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j \right)^2$$

$$= \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \right)^2$$

$$= \frac{1}{8} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)^2$$

$$= \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4} \leq \frac{1}{8}$... (4)

ให้ $x_1 = x_2$ และ $x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = (1)(1)(1 + 1) = 2 \quad \dots (5)$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 = (1 + 1 + 0 + 0 + \dots + 0)^4 = 16 \quad \dots (6)$$

จาก (5) และ (6) จะได้
$$\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)}{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}$ เป็นจำนวนจริงบวกค่าน้อยสุดที่ทำให้
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 \quad \dots (7)$$

สมการ (7) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมการ (2) และ (3) เป็นจริง

ก็ต่อเมื่อ $x_i = x_j$ หนึ่งคู่ และ x_k อื่นๆ เป็นศูนย์หมด

แบบที่ 2 ตัวอย่างเสริมความเข้าใจ กรณี $n = 3$

ให้ $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_3 (x_1^2 + x_3^2) + x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2)$

เพื่อความสะดวกต่อการเขียนและจะได้เข้าใจง่าย ให้ $a = x_1, b = x_2, c = x_3$

เพราะฉะนั้น
$$\sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right)^4$$
 เมื่อแทนค่า a, b, c จะได้

$$ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) \leq \frac{1}{8} (a + b + c)^4 \quad \dots (1)$$

เพราะว่า $ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) \leq \frac{1}{8} (a + b + c)^4$ เป็นสมการเอกพันธ์

เพราะฉะนั้นการพิสูจน์ควรจำแนกเป็น 2 กรณีคือ $a + b + c = 1$ และ $a + b + c \neq 1$

กรณีที่ 1 $a + b + c = 1$

เพราะว่าสมการ (1) มีเป็นสมการสมมาตร

เพราะฉะนั้นโดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a \geq b \geq c \geq 0$

เพราะว่า $F(a, b, c) = ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2)$

และ $F(a, b + c, 0) = a(b + c)(a^2 + (b + c)^2) + a(0)(a^2 + 0^2) + (b + c)(0)((b + c)^2 + 0^2)$

$$= a(b + c)(a^2 + (b + c)^2)$$

$$= (ab + ac)(a^2 + b^2 + 2bc + c^2)$$

$$= ab(a^2 + b^2 + 2bc + c^2) + ac(a^2 + b^2 + 2bc + c^2)$$

เพราะฉะนั้น
$$F(a, b + c, 0) - F(a, b, c) = (ab(a^2 + b^2 + 2bc + c^2) + ac(a^2 + b^2 + 2bc + c^2)) - (ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2))$$

$$= ab(c^2 + 2bc) + ac(b^2 + 2bc) - bc(b^2 + c^2)$$

$$= abc(c + 2b) + abc(b + 2c) - bc(b^2 + c^2)$$

$$= bc(a(c + 2b) + a(b + 2c) - (b^2 + c^2))$$

$$= bc(ac + 2ab + ab + 2ac - (b^2 + c^2))$$

$$\begin{aligned}
&= bc(3ac + 3ab - (b^2 + c^2)) \\
&= bc(3a(c + b) - (b^2 + c^2)) \\
&= bc(3(1 - (b + c))(b + c) - (b^2 + c^2)) \quad (\text{เพราะว่า } a + b + c = 1) \\
&= bc(3(1 - (b + c))(b + c) - (b + c)^2 + 2bc) \\
&= bc((b + c)(3(1 - (b + c)) - (b + c)) + 2bc) \\
&= bc((b + c)(3 - 4(b + c)) + 2bc) \quad \dots (2)
\end{aligned}$$

เพราะว่า $1 = a + b + c$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a+a}{2} + b + c \\
&\geq \frac{b+c}{2} + b + c \quad (\text{เพราะว่า } a \geq b \geq c \geq 0) \\
&= \frac{3}{2}(b + c) \\
2 &\geq 3(b + c) \\
\frac{8}{3} &\geq 4(b + c)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$3 \geq 4(b + c)$$

$$3 - 4(b + c) \geq 0$$

$$(b + c)(3 - 4(b + c)) \geq 0 \quad (\text{เพราะว่า } b + c \geq 0)$$

$$(b + c)(3 - 4(b + c)) + 2bc \geq 0 \quad (\text{เพราะว่า } 2bc \geq 0)$$

$$bc((b + c)(3 - 4(b + c)) + 2bc) \geq 0 \quad (\text{เพราะว่า } bc \geq 0) \quad \dots (3)$$

จาก (2) และ (3) จะได้ $F(a, b + c, 0) - F(a, b, c) \geq 0$

$$F(a, b, c) \leq F(a, b + c, 0) \quad \dots (4)$$

$$= a(b + c)(a^2 + (b + c)^2)$$

$$= xy(x^2 + y^2) \quad (\text{ให้ } x = a, y = b + c)$$

$$\leq \frac{1}{8}(x + y)^4 \quad (\text{บทช่วย 1}) \quad \dots (5)$$

$$= \frac{1}{8}(a + b + c)^4 \quad (\text{เพราะว่า } x = a, y = b + c)$$

$$= \frac{1}{8} \quad (\text{เพราะว่า } a + b + c = 1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) \leq \frac{1}{8}(a + b + c)^4$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right)^4 \quad \dots (6)$$

สมการ (6) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมการ (4) และ (5) เป็นจริง

ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกสองตัวของ $\{a, b, c\}$ มีค่าเท่ากันและตัวที่เหลือมีค่าเป็นศูนย์

ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกสองตัวของ $\{x_1, x_2, x_3\}$ มีค่าเท่ากันและตัวที่เหลือเป็นศูนย์

กรณีที่ 2 $a + b + c \neq 1$

กรณีที่ 2.1 $a + b + c = 0$

เพราะว่า $a \geq 0$, $b \geq 0$ และ $c \geq 0$ เพราะฉะนั้น $a = b = c = 0$

$$\text{เพราะฉะนั้น } ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) \leq \frac{1}{8}(a + b + c)^4$$

กรณีที่ 2.2 $a + b + c \neq 0$

$$\text{ให้ } s = a + b + c, x = \frac{a}{s}, y = \frac{b}{s}, z = \frac{c}{s}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x + y + z = 1$$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์กรณีที่ 1 จะได้

$$xy(x^2 + y^2) + xz(x^2 + z^2) + yz(y^2 + z^2) \leq \frac{1}{8} \quad \dots (7)$$

$$\left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{b}{s}\right)\left(\left(\frac{a}{s}\right)^2 + \left(\frac{b}{s}\right)^2\right) + \left(\frac{a}{s}\right)\left(\frac{c}{s}\right)\left(\left(\frac{a}{s}\right)^2 + \left(\frac{c}{s}\right)^2\right) + \left(\frac{b}{s}\right)\left(\frac{c}{s}\right)\left(\left(\frac{b}{s}\right)^2 + \left(\frac{c}{s}\right)^2\right) \leq \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{s^4}(ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2)) \leq \frac{1}{8}$$

$$(ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2)) \leq \frac{1}{8}s^4$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } ab(a^2 + b^2) + ac(a^2 + c^2) + bc(b^2 + c^2) \leq \frac{1}{8}(a + b + c)^4$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^3 x_i \right)^4 \quad \dots (8)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

สมการ (8) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกสองตัวของ $\{x_1, x_2, x_3\}$ มีค่าเท่ากัน และ ตัวที่เหลือเป็นศูนย์

$$\text{การพิสูจน์ } \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 \text{ กรณีทั่วไป}$$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_n \geq 0$

กรณีที่ 1 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

$$\text{ให้ } F(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j (a_i^2 + a_j^2)$$

$$\text{ให้ } y_1 = x_1, y_2 = x_2, \dots, y_{n-2} = x_{n-2}, y_{n-1} = x_{n-1} + x_n \text{ และ } y_n = 0 \quad \dots (1)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + x_n, 0) = F(y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, y_n)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} y_i y_j (y_i^2 + y_j^2)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} y_i y_j (y_i^2 + y_j^2) \quad (\text{เพราะว่า } y_n = 0)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} y_i y_j (y_i^2 + y_j^2) + \sum_{1 \leq i \leq n-2} y_i y_{n-1} (y_i^2 + y_{n-1}^2)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i (x_{n-1} + x_n) (x_i^2 + (x_{n-1} + x_n)^2) \quad (\text{จาก (1)})$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i (x_{n-1} + x_n) (x_i^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 + 2x_{n-1}x_n)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_{n-1} (x_i^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 + 2x_{n-1}x_n)$$

$$+ \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_n (x_i^2 + x_{n-1}^2 + x_n^2 + 2x_{n-1}x_n)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_{n-1} (x_i^2 + x_{n-1}^2) + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_{n-1} (x_n^2 + 2 x_{n-1} x_n) \\
&\quad + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_n (x_i^2 + x_n^2) + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_n (x_{n-1}^2 + 2 x_{n-1} x_n) \quad \dots (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_{n-1} (x_i^2 + x_{n-1}^2) + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_n (x_i^2 + x_n^2) \\
&\quad + x_{n-1} x_n (x_{n-1}^2 + x_n^2) \quad \dots (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{จาก (2) และ (3) จะได้ } F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + x_n, 0) - F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \\
&= F(y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, 0) - F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_{n-1} (x_n^2 + 2 x_{n-1} x_n) + \sum_{1 \leq i \leq n-2} x_i x_n (x_{n-1}^2 + 2 x_{n-1} x_n) \\
&\quad - x_{n-1} x_n (x_{n-1}^2 + x_n^2) \\
&= x_{n-1} x_n \left(\sum_{i=1}^{n-2} x_i (x_n + 2 x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-2} x_i (x_{n-1} + 2 x_n) - x_{n-1}^2 - x_n^2 \right) \\
&= x_{n-1} x_n \left(\sum_{i=1}^{n-2} (x_i x_n + 2 x_i x_{n-1} + x_i x_{n-1} + 2 x_i x_n) - x_{n-1}^2 - x_n^2 \right) \\
&= x_{n-1} x_n \left(\sum_{i=1}^{n-2} (3 x_i x_n + 3 x_i x_{n-1}) - x_{n-1}^2 - x_n^2 \right) \\
&= x_{n-1} x_n \left(\sum_{i=1}^{n-2} 3(x_n + x_{n-1}) x_i - x_{n-1}^2 - x_n^2 \right) \\
&= x_{n-1} x_n (3(x_n + x_{n-1}) \sum_{i=1}^{n-2} x_i - x_{n-1}^2 - x_n^2) \\
&= x_{n-1} x_n (3(x_n + x_{n-1})(1 - x_{n-1} - x_n) - x_{n-1}^2 - x_n^2) \quad (\text{เพราะว่า } \sum_{i=1}^n x_i = 1) \\
&= x_{n-1} x_n (3(x_n + x_{n-1})(1 - x_{n-1} - x_n) - (x_{n-1} + x_n)^2 + 2 x_{n-1} x_n) \\
&= x_{n-1} x_n ((x_n + x_{n-1})(3(1 - x_{n-1} - x_n) - (x_{n-1} + x_n)) + 2 x_{n-1} x_n) \\
&= x_{n-1} x_n ((x_n + x_{n-1})(3 - 4(x_{n-1} + x_n)) + 2 x_{n-1} x_n) \quad \dots (4)
\end{aligned}$$

$$\text{เพราะว่า } 1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n$$

$$= x_1 + (x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-2}) + x_{n-1} + x_n$$

$$\geq x_1 + x_{n-1} + x_n$$

$$= \frac{x_1 + x_{n-1}}{2} + x_{n-1} + x_n$$

$$\geq \frac{x_{n-1} + x_n}{2} + x_{n-1} + x_n$$

$$(\text{เพราะว่า } x_1 \geq x_{n-1} \text{ และ } x_1 \geq x_n)$$

$$= \frac{3}{2}(x_{n-1} + x_n)$$

$$2 \geq 3(x_{n-1} + x_n)$$

$$\frac{8}{3} \geq 4(x_{n-1} + x_n)$$

$$3 \geq 4(x_{n-1} + x_n)$$

$$3 - 4(x_{n-1} + x_n) \geq 0$$

$$(x_n + x_{n-1})(3 - 4(x_{n-1} + x_n)) \geq 0$$

$$(x_n + x_{n-1})(3 - 4(x_{n-1} + x_n)) + 2x_{n-1}x_n \geq 0$$

$$x_{n-1}x_n((x_n + x_{n-1})(3 - 4(x_{n-1} + x_n)) + 2x_{n-1}x_n) \geq 0 \quad \dots (5)$$

จาก (4) และ (5) จะได้ $F(y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, 0) - F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \geq 0$

เพราะฉะนั้น $F(y_1, y_2, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}, 0) \geq F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$

เพราะฉะนั้น $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \leq F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + x_n, 0)$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1} + x_n, 0)$

$$\leq F(x_1, x_2, \dots, x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2} + x_{n-1} + x_n, 0, 0)$$

$$\leq F(x_1, x_2, \dots, x_{n-4}, x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} + x_n, 0, 0, 0)$$

:

$$\leq F(x_1, x_2, x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} + x_n, 0, \dots, 0, 0, 0)$$

$$\leq F(x_1, x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_{n-1} + x_n, 0, 0, \dots, 0, 0, 0)$$

$$= F(x_1, 1 - x_1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0) \quad (\text{เพราะว่า } \sum_{i=1}^n x_i = 1)$$

ให้ $w_1 = x_1, w_2 = 1 - x_1$

เพราะฉะนั้น $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \leq F(w_1, w_2, 0, 0, \dots, 0, 0, 0)$

เพราะว่า $F(w_1, w_2, 0, 0, \dots, 0) = w_1 w_2 (w_1^2 + w_2^2)$

$$\leq \frac{1}{8}(w_1 + w_2)^4 \quad (\text{บทช่วย 1})$$

$$= \frac{1}{8}(1) \quad (w_1 + w_2 = 1)$$

เพราะฉะนั้น $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{1}{8}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 \quad (\text{เพราะว่า } \sum_{i=1}^n x_i = 1)$

กรณีที่ 2 $x_1 + x_2 + \dots + x_n \neq 1$

กรณีที่ 2.1 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$

เพราะว่า $x_i \geq 0$ ทุกค่า i เพราะฉะนั้น $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

เพราะฉะนั้น $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4$

กรณีที่ 2.2 $x_1 + x_2 + \dots + x_n \neq 0$

ให้ $s = \sum_{i=1}^n x_i$ และ $A_i = \frac{x_i}{s}$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$ เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^n A_i = 1$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 1 จะได้ $\sum_{1 \leq i < j \leq n} A_i A_j (A_i^2 + A_j^2) \leq \frac{1}{8}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i}{s} \frac{x_j}{s} \left(\left(\frac{x_i}{s} \right)^2 + \left(\frac{x_j}{s} \right)^2 \right) \leq \frac{1}{8}$

$$\frac{1}{s^4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8}$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} s^4$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4$$

แบบที่ 3 ตัวอย่างเสริมความเข้าใจ กรณี $n = 3$

กำหนดให้ $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$

ให้ $F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)$

$$= x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_3 (x_1^2 + x_3^2) + x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2)$$

$$= x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 + x_1^3 x_3 + x_1 x_3^3 + x_2^3 x_3 + x_2 x_3^3$$

$$= x_1^3 (x_2 + x_3) + x_2^3 (x_1 + x_3) + x_3^3 (x_1 + x_2)$$

$$= x_1^3 (1 - x_1) + x_2^3 (1 - x_2) + x_3^3 (1 - x_3) \quad (\text{เพราะว่า } x_1 + x_2 + x_3 = 1)$$

$$= \sum_{i=1}^3 x_i^3 (1 - x_i) \quad \dots (1)$$

กรณีที่ 1 $0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}$

เพราะว่า $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x_3 \leq x_2 \leq \frac{1}{2}$

โดยบทช่วย 2 จะได้ $x_i^2 - x_i^3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3$... (2)

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 x_i^3 (1 - x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^3 x_i (x_i^2 - x_i^3)$$

$$\leq \sum_{i=1}^3 x_i \left(\frac{1}{8}\right) \quad (\text{จาก (2)})$$

$$= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^3 x_i$$

$$= \frac{1}{8} \quad (\text{เพราะว่า } x_1 + x_2 + x_3 = 1)$$

กรณีที่ 2 $\frac{1}{2} < x_1$

เพราะว่า $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ เพราะฉะนั้น $x_2 + x_3 \leq \frac{1}{2}$

ให้ $a = x_1$ และ $b = 1 - a = 1 - x_1 = x_2 + x_3$... (3)

เพราะฉะนั้น $a > \frac{1}{2}$ และ $b \leq \frac{1}{2}$

เพราะว่า $b = x_2 + x_3$ และ $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x_i \leq b$ ทุกค่า $i = 2, 3$

โดยบทช่วย 2 จะได้ $x_i^2 - x_i^3 \leq b^2 - b^3$ ทุกค่า $i = 2, 3$... (4)

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=1}^3 x_i^3 (1 - x_i) \\
 &= x_1^3 (1 - x_1) + \sum_{i=2}^3 x_i^3 (1 - x_i) \\
 &= x_1^3 (1 - x_1) + \sum_{i=2}^3 x_i (x_i^2 - x_i^3) \\
 &\leq a^3 (1 - a) + \sum_{i=2}^3 x_i (b^2 - b^3) && \text{(จาก (3) และ (4))} \\
 &= a^3 (1 - a) + (b^2 - b^3) \sum_{i=2}^3 x_i \\
 &= a^3 (1 - a) + (b^2 - b^3)(x_2 + x_3) \\
 &= a^3 (1 - a) + (b^2 - b^3)(1 - x_1) && \text{(เพราะว่า } x_1 + x_2 + x_3 = 1) \\
 &= a^3 (1 - a) + (b^2 - b^3)(1 - a) && \text{(จาก (3))} \\
 &= a^3 b + (b^2 - b^3)b && \text{(จาก (3) } a + b = 1 \rightarrow b = 1 - a) \\
 &= a^3 b + b^3 (1 - b) \\
 &= a^3 b + b^3 a && \text{(จาก (3) } a + b = 1 \rightarrow a = 1 - b) \\
 &= ab(a^2 + b^2) \\
 &\leq \frac{1}{8} (a + b)^4 && \text{(บทช่วย 1)} \\
 &= \frac{1}{8} && \text{(จาก (3) } a + b = 1)
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8}$... (5)

ให้ $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 0$

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2, x_3) &= F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\
 &= x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) + x_1 x_3 (x_1^2 + x_3^2) + x_2 x_3 (x_2^2 + x_3^2) \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + 0 + 0 \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{8}$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2)$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{8}$

กรณีทั่วไปของการพิสูจน์ $\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \frac{1}{8} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^4$

เป็นอสมการสมมาตรและเป็นอสมการของฟังก์ชันเอกพันธ์

เพราะฉะนั้นโดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถกำหนดให้ $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$

กรณีที่ 1 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{ให้ } F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j x_j^2 \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^3 x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j^3 \\
 &= (x_1^3 (x_2 + \dots + x_n) + x_2^3 (x_3 + \dots + x_n) + \dots + x_{n-2}^3 (x_{n-1} + x_n) + x_{n-1}^3 x_n) \\
 &\quad + (x_1 (x_2^3 + \dots + x_n^3) + x_2 (x_3^3 + \dots + x_n^3) + \dots + x_{n-2} (x_{n-1}^3 + x_n^3) + x_{n-1} x_n^3) \\
 &= x_1^3 (x_2 + x_3 + \dots + x_n) + x_2^3 (x_1 + x_3 + \dots + x_n) + \dots + x_n^3 (x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) \\
 &= x_1^3 (1 - x_1) + x_2^3 (1 - x_2) + \dots + x_n^3 (1 - x_n) \quad (\text{เพราะว่า } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i^3 (1 - x_i) \quad \dots (1)
 \end{aligned}$$

กรณีที่ 1.1 $0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2}$

เพราะว่า $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x_n \leq \dots \leq x_2 \leq \frac{1}{2}$

โดยบทช่วย 2 จะได้

$$x_i^2 - x_i^3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad \text{ทุกค่า } i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned}
 F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n x_i^3 (1 - x_i) \quad (\text{จาก (1)}) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i (x_i^2 - x_i^3) \\
 &\leq \sum_{i=1}^n x_i \left(\frac{1}{8}\right) \quad (\text{จาก (2)}) \\
 &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^n x_i \\
 &= \frac{1}{8} \quad (\text{เพราะว่า } x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1)
 \end{aligned}$$

กรณีที่ 1.2 $\frac{1}{2} < x_1$

เพราะว่า $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ และ $\frac{1}{2} < x_1$ เพราะฉะนั้น $x_2 + x_3 + \dots + x_n \leq \frac{1}{2}$... (3)

ให้ $a = x_1$ และ $b = 1 - a = 1 - x_1 = x_2 + x_3 + \dots + x_n$... (4)

เพราะฉะนั้น $a > \frac{1}{2}$ และ $b \leq \frac{1}{2}$