

รวมข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
International Mathematical Olympiad

IMO

Problems and Solutions

1983 - 1997

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
คณิตศาสตร์ปริญ เล่มที่ 34

รวมข้อสอบแข่งขัน
คณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ
International Mathematical Olympiad IMO
Problems and Solutions 1983 - 1997

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 34

รวมข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ 1983 - 1997

International Mathematical Olympiad (IMO)

Problems and Solutions 1983 - 1997

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : ธันวาคม พ.ศ. 2560

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-445-954-0

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

การแข่งขันคณิตศาสตร์ของนักเรียน ที่มีชื่อเสียงระดับโลกที่สำคัญที่สุดต้องเป็นการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ (International Mathematical Olympiad : IMO) จัดขึ้นครั้งแรกที่ประเทศโรมาเนีย ในปี ค.ศ. 1959 จนถึงปัจจุบัน ค.ศ. 2017

ประเทศไทยได้จัดส่งทีมนักเรียนเข้าแข่งขันครั้งแรกในปี ค.ศ. 1989 ณ ประเทศสหพันธ์สาธารณรัฐเยอรมัน ซึ่งเป็นการแข่งขันครั้งที่ 30 ผลงานในการแข่งขันครั้งแรกของประเทศไทยถือว่าประสบความสำเร็จเป็นอย่างมากคือ ได้รับรางวัลเหรียญทองแดง 1 รางวัล และ รางวัลเกียรติคุณประกาศ 2 รางวัล

ผลงานต่อมาในช่วงปี พ.ศ. 2532 - พ.ศ. 2560 นักเรียนไทยได้รับรางวัลเป็นเหรียญทอง 21 เหรียญ เหรียญเงิน 50 เหรียญ เหรียญทองแดง 47 เหรียญ เกียรติคุณประกาศ 23 รางวัล และ Best Solution 1 รางวัล

เพื่อสนับสนุนให้นักเรียนได้ทำข้อสอบอัตนัย และ มีประสบการณ์ตรงในการทำข้อสอบ IMO ตัวจริง ผู้เขียนจึงได้รวบรวมข้อสอบ IMO ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1983 - ค.ศ. 1997 และเฉลยอย่างละเอียด

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

ครั้งที่	ค.ศ.	เมือง และ ประเทศ	หน้า
24	1983	Paris, France, 1 – 12 July 1983	1 – 16
25	1984	Prague, Czechoslovakia, 29 June – 10 July 1984	17 – 40
26	1985	Joutsa, Finland, 29 June – 11 July 1985	41 – 70
27	1986	Warsaw, Poland, 4 – 15 July 1986	71 – 100
28	1987	Havana, Cuba, 5 – 16 July 1987	101 – 126
29	1988	Canberra, Australia, 9 – 21 July 1988	127 – 156
30	1989	Braunschweig – Neidersachsen, Germany, 13 – 24 July 1989	157 – 192
31	1990	Beijing, China, 8 – 19 July 1990	193 – 246
32	1991	Sigtuna, Sweden, 12 – 23 July 1991	247 – 292
33	1992	Moscow, Russia, 10 – 21 July 1992	293 – 348
34	1993	Istanbul, Turkey, 13 – 24 July 1993	349 – 394
35	1994	Hong – Kong, 8 – 20 July 1994	395 – 418
36	1995	Ontario, Canada, 13 – 25 July 1995	419 – 440
37	1996	Mumbai, India, 5 – 17 July 1996	441 – 464
38	1997	Mar del Plata, Argentina, 18 – 31 July 1997	465 – 508

หมายเหตุ ปี ค.ศ. 1989 ประเทศไทยส่งทีมนักเรียนเข้าแข่งขันเป็นครั้งแรก

The Twenty – Fourth International Mathematical Olympiad

Paris, France

1 – 12 July 1983

Day I (6 July 1983)

1. จงหาฟังก์ชัน f ที่มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกที่นิยามบนเซตของจำนวนจริงบวก และมีคุณสมบัติ
(i) $f(x f(y)) = y f(x)$ ทุกค่า x, y
(ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
2. ให้ A เป็นจุดตัดจุดหนึ่งจากสองจุดของวงกลม C_1 และ C_2 บนระนาบเดียวกันซึ่งมีรัศมีไม่เท่ากัน
ให้ O_1, O_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม C_1 และ C_2 ตามลำดับ
เส้นสัมผัสร่วมตรงเส้นหนึ่งสัมผัสวงกลม C_1 ที่จุด P_1 และสัมผัสวงกลม C_2 ที่จุด P_2
และเส้นสัมผัสร่วมตรงอีกเส้นหนึ่งสัมผัสวงกลม C_1 ที่จุด Q_1 และสัมผัสวงกลม C_2 ที่จุด Q_2
ให้ M_1 เป็นจุดกึ่งกลาง P_1Q_1 และ M_2 เป็นจุดกึ่งกลาง P_2Q_2
จงแสดงว่า $O_1 \hat{A} O_2 = M_1 \hat{A} M_2$
3. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวกและไม่มีสองตัวใดๆ มีตัวประกอบร่วมกันค่าเกิน 1
จงแสดงว่า $2abc - ab - bc - ca$ เป็นจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูป
 $xbc + yca + zab$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

Day II (7 July 1983)

4. กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
ให้ E เป็นเซตของจุดบนเส้นรอบรูป $\triangle ABC$ (รวมจุด A, B, C)
จงพิสูจน์ว่า ทุกผลแบ่งกันของ E ที่แบ่ง E ออกเป็นสองสับเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันต้องมีย่าน้อยหนึ่ง
เซตที่เซตนั้นมีจุดสามจุดเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
5. เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเลือกจำนวนเต็มบวกต่างกัน 1983 ตัว ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 10^5
และไม่มีจำนวน 3 ตัวใดๆ ที่เรียงจากน้อยไปมากแล้วเป็นลำดับเลขคณิต
6. กำหนดให้ a, b, c เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$
จงแสดงว่า $a^2 b(a - b) + b^2 c(b - c) + c^2 a(c - a) \geq 0$
และจงหาเงื่อนไขที่ทำให้ $a^2 b(a - b) + b^2 c(b - c) + c^2 a(c - a) = 0$

The Twenty – Fourth International Mathematical Olympiad Solutions

Paris, France, 1 – 12 July 1983

1. แนวคิด

แบบที่ 1 เพราะว่า f มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก เพราะฉะนั้น $f(x) \neq 0$ ทุกค่า x กำหนดให้ $f(k) = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{เพราะฉะนั้น} \quad f(x) &= f(x(1)) \\
 &= f(x f(k)) && (\text{จากข้อสมมติ } f(k) = 1) \\
 &= k f(x) && (\text{คุณสมบัติ (i)})
 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } k = 1 \text{ เพราะฉะนั้น ถ้า } f(k) = 1 \text{ แล้ว } k = 1 \quad \dots (1)$$

$$\text{ให้} \quad y = \frac{1}{f(x)} \quad \dots (2)$$

$$\text{ให้} \quad k = x f(y) \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned}
 \text{เพราะฉะนั้น} \quad f(k) &= f(x f(y)) && (\text{จาก (3)}) \\
 &= y f(x) && (\text{คุณสมบัติ (i)}) \\
 &= 1 && (\text{จาก (2)})
 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } k = 1 \text{ (จาก (1))} \quad \dots (4)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(1) = 1 \quad \dots (5)$$

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{1}{f(x)}\right) &= f(y) && (\text{จาก (2)}) \\
 &= \frac{k}{x} = \frac{1}{x} && (\text{จาก (3) และ (4)})
 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad f(y) = f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{x} \quad \dots (6)$$

$$\begin{aligned}
 f(f(y)) &= f\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= y f(1) && (\text{คุณสมบัติ (i)})
 \end{aligned}$$

$$f(f(y)) = y \quad \dots (7) \quad (\text{จาก (5) } f(1) = 1)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = y \quad \dots (8) \quad (\text{จาก (6)})$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)} \quad \dots (8) \quad (\text{จาก (2)})$$

ให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก

$$\text{ให้} \quad z = f(y) \quad \dots (9)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad f(z) = f(f(y)) = y \quad \dots (10) \quad (\text{จาก (7)})$$

$$f(xy) = f(x f(z)) \quad \dots (10) \quad (\text{จาก (10) } y = f(z))$$

$$= z f(x) \quad \dots (10) \quad (\text{คุณสมบัติ (i)})$$

$$= f(y) f(x) \quad \dots (10) \quad (\text{จาก (9)})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(xy) = f(x) f(y) \text{ ทุกค่า } x, y \quad \dots (11)$$

ให้ x เป็นจำนวนจริงบวก

โดยคุณสมบัติ (i) จะได้ $f(x f(x)) = x f(x)$ ทุกค่า x ... (12)

ให้ $k = x f(x)$... (13)

การแสดงว่า $k = 1$

$$f(k^2) = f(k) f(k) \quad (\text{จาก (10)})$$

$$= (f(k))^2$$

$$= (f(x f(x)))^2 \quad (\text{จาก (12)})$$

$$= (x f(x))^2 \quad (\text{จาก (11)})$$

$$= k^2 \quad (\text{จาก (12)})$$

สมมติ $f(k^t) = k^t$ ทุกค่า $2 \leq t < n$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(k^n) = f(k^{n-2} k^2) = f(k^{n-2}) f(k^2) = k^{n-2} k^2 = k^n$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ $f(k^n) = k^n$ ทุกค่า $n = 2, 3, \dots$... (14)

สมมติ $k > 1$... (15)

$$\text{เพราะฉะนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = \infty \quad \text{เพราะฉะนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} f(k^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = \infty$$

$$\text{โดยคุณสมบัติ (ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = \infty$$

$$\text{เพราะฉะนั้นโดยบทช่วย 1 จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} f(k^n) = 0 \quad \text{เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ } \lim_{n \rightarrow \infty} f(k^n) = \infty$$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (15) $k > 1$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $0 < k \leq 1$... (16)

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(\frac{1}{x f(x)}\right) \quad (\text{จาก (13)})$$

$$= f\left(\frac{1}{x}\right) f\left(\frac{1}{f(x)}\right) \quad (\text{จาก (11)})$$

$$= \frac{1}{f(x)} f\left(\frac{1}{f(x)}\right) \quad (\text{จาก (8)})$$

$$= \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{x} \quad (\text{จาก (6)})$$

$$= \frac{1}{k} \quad (\text{จาก (13)})$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $f\left(\frac{1}{k^n}\right) = \frac{1}{k^n}$ ทุกค่า $n = 2, 3, \dots$... (17)

สมมติ $k < 1$... (18)

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{1}{k} > 1 \quad \text{เพราะฉะนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^n} = \infty$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \lim_{\frac{1}{k^n} \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k^n}\right) = \lim_{k^n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^n} = \infty$$

$$\text{โดยคุณสมบัติ (ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{และ} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^n} = \infty$$

$$\text{เพราะฉะนั้นโดยบทช่วย 1 จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k^n}\right) = 0 \quad \text{เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ } \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{k^n}\right) = \infty$$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (18) $k < 1$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้นจาก (16) จะได้ $k = 1$

เพราะว่าจาก (13) $k = x f(x)$ เพราะฉะนั้น $1 = x f(x)$ เพราะฉะนั้น $f(x) = \frac{1}{x}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \frac{1}{x}$ ทุกจำนวนจริงบวก x

เพราะว่า $f(x) = \frac{1}{x}$ มีคุณสมบัติ $f(x f(y)) = y f(x)$ ทุกค่า x, y และ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

เพราะฉะนั้นมี $f(x) = \frac{1}{x}$ ฟังก์ชันเดียวเท่านั้น

แบบที่ 2 ให้ x เป็นจำนวนจริงบวก

ให้ $a = x f(x)$... (1)

เพราะฉะนั้น $f(a) = f(x f(x))$ (จาก (1))
 $= x f(x)$ (คุณสมบัติ (i))
 $= a$ (จาก (1))

เพราะฉะนั้น $f(a) = a$... (2)

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $f(a^n) = a^n$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

จาก (2) จะได้ $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $f(a^k) = a^k$... (3)

$$\begin{aligned} f(a^{k+1}) &= f(a \cdot a^k) \\ &= f(a f(a^k)) && \text{(จาก (3))} \\ &= a^k f(a) && \text{(คุณสมบัติ (i))} \\ &= a^k a && \text{(จาก (2) } a = f(a)) \\ &= a^{k+1} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $f(a^n) = a^n$ ทุกค่า n ... (4)

เพราะว่า $a = f(a)$
 $= f(1 \cdot a)$
 $= a f(1)$ (คุณสมบัติ (i))

เพราะว่า $a \neq 0$ เพราะฉะนั้น $f(1) = 1$... (5)

$$\begin{aligned} a f(a^{-1}) &= f(a^{-1} f(a)) && \text{(คุณสมบัติ (i))} \\ &= f(a^{-1} a) && \text{(จาก (4))} \\ &= f(1) \\ &= 1 && \text{(จาก (5))} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(a^{-1}) = a^{-1}$

... (6)

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $f(a^{-n}) = a^{-n}$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

จาก (6) จะได้ $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $f(a^{-k}) = a^{-k}$

... (7)

$$f(a^{-(k+1)}) = f(a^{-1} a^{-k})$$

$$= f(a^{-1} f(a^{-k})) \quad (\text{จาก (7)})$$

$$= a^{-k} f(a^{-1}) \quad (\text{คุณสมบัติ (i)})$$

$$= a^{-k} a^{-1} \quad (\text{จาก (6) } f(a^{-1}) = a^{-1})$$

$$= a^{-(k+1)}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $f(a^{-n}) = a^{-n}$ ทุกค่า n

... (8)

สมมติ $a > 1$

... (9)

เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$

โดยคุณสมบัติ (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$

เพราะฉะนั้นโดยบทช่วย 1 จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n) = 0$ เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n) = \infty$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (9) $a > 1$ ไม่จริง เพราะฉะนั้น $a \leq 1$

สมมติ $a < 1$

... (10)

เพราะว่า $0 < a < 1$ เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = \infty$

เพราะฉะนั้นจาก (8) จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^{-n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = \infty$

โดยคุณสมบัติ (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} = \infty$

เพราะฉะนั้นโดยบทช่วย 1 จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^{-n}) = 0$ เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a^{-n}) = \infty$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (10) $a < 1$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $a = 1$ เพราะว่าจาก (1) $a = x f(x)$ เพราะฉะนั้น $x f(x) = 1$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \frac{1}{x}$ ทุกจำนวนจริงบวก x

เพราะว่า $f(x) = \frac{1}{x}$ มีคุณสมบัติ $f(x f(y)) = y f(x)$ ทุกค่า x, y และ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

เพราะฉะนั้นมี $f(x) = \frac{1}{x}$ ฟังก์ชันเดียวเท่านั้น



บทช่วย 1 ถ้า $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ และ t_n เป็นลำดับซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = 0$

ข้อพิสูจน์ให้ $\varepsilon > 0$

เพราะว่า $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ เพราะฉะนั้นมีจำนวนจริงบวก $M > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $x > M$ แล้ว $|f(x)| < \varepsilon$... (1)

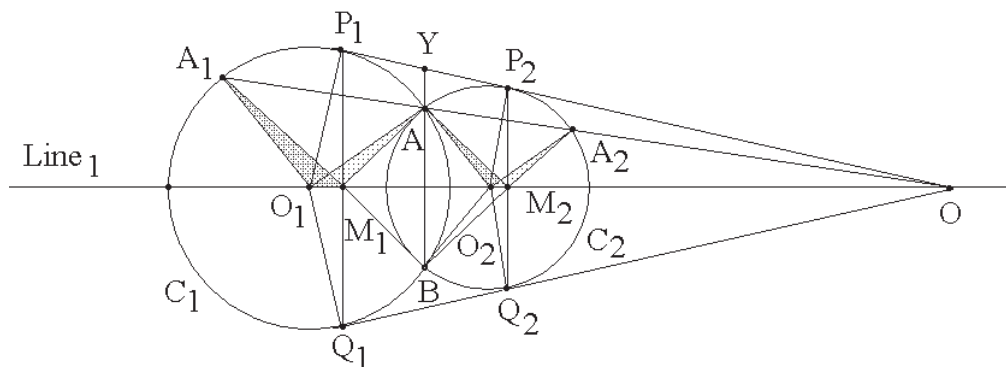
เพราะว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก N_0 ที่ทำให้ ถ้า $n > N_0$ แล้ว $t_n > M$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ ถ้า $n > N_0$ แล้ว $|f(t_n)| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้นทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ที่ทำให้ ถ้า $n > N_0$ แล้ว $|f(t_n)| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = 0$ □

2. แนวคิด แบบที่ 1



รูปที่ 1983.2.1

ให้วงกลม C_1 และ C_2 ตัดกันที่จุด A และ B และให้ r_1, r_2 เป็นรัศมีของวงกลม C_1 และ C_2 ตามลำดับ
ลากเส้นตรงผ่าน O, A ตัดวงกลม C_1 และ C_2 ที่จุด A_1, A_2 ตามลำดับ

ให้เส้นสัมผัสร่วมตรงทั้งสองเส้นตัดกันที่จุด O

เพราะฉะนั้นจุด O, O_1, O_2 อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ให้ $Line_1$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด O, O_1, O_2

เพราะฉะนั้นเส้นตรง $Line_1$ เป็นเส้นสมมาตรของ P_1Q_1, P_2Q_2, AB

เพราะฉะนั้นเส้นตรง $Line_1$ เป็นแกนของการขยายขนาด

โดยมีจุด O เป็นจุดศูนย์กลางของความคล้าย (the center of similitude)

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{OO_1}{OO_2} = \frac{OP_1}{OP_2} = \frac{OQ_1}{OQ_2} = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{OA}{OA_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\text{เพราะว่าจุด } O \text{ เป็นจุดศูนย์กลางของความคล้ายและ } \frac{OO_1}{OO_2} = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{OA}{OA_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \triangle O_1AM_1, \triangle O_2A_2M_2 \text{ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย เพราะฉะนั้น } \angle O_1AM_1 = \angle O_2A_2M_2 \quad \dots (1)$$

เพราะว่า $\triangle O_1AM_1, \triangle O_2A_2M_2$ เป็นสามเหลี่ยมคล้ายและ O_1M_1 ขนานกับ O_2M_2

$$\text{เพราะฉะนั้น } AM_1 \text{ ขนานกับ } A_2M_2 \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะว่า } AB \perp OO_1 \text{ และ } AB \text{ สมมาตรกับ } OO_1 \text{ เพราะฉะนั้น } \angle BM_2O = \angle AM_2O \quad \dots (3)$$

ต่อ BA ไปตัด P_1P_2 ที่จุด Y เพราะฉะนั้น $P_1Y^2 = YA \cdot YB = P_2Y^2$ (ทฤษฎีบท 58)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 58 จากคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 84

เพราะฉะนั้น $P_1Y = P_2Y$

เพราะว่า P_1Q_1 , P_2Q_2 และ AB ขนานกัน เพราะฉะนั้น $BY \perp M_1M_2$ และ BY แบ่งครึ่ง M_1M_2

เพราะฉะนั้น $AB \perp M_1M_2$ และ AB แบ่งครึ่ง M_1M_2

เพราะว่า $O_1O_2 \perp AB$ และ O_1O_2 แบ่งครึ่ง AB (ทฤษฎีบท 49.6)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 49.6 จากคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 61

เพราะฉะนั้น M_1M_2 และ AB แบ่งครึ่งและตั้งฉากซึ่งกันและกัน

เพราะฉะนั้น $AM_1 = M_1B = BM_2 = AM_2$ เพราะฉะนั้น $\square AM_1BM_2$ เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

เพราะฉะนั้น AM_1 ขนานกับ BM_2 ... (4)

จาก (2) และ (4) จะได้ BM_2 ขนานกับ A_2M_2

เพราะฉะนั้น B, M_2 , A_2 อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ในทำนองเดียวกันจะได้ B, M_1 , A_1 อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เพราะว่า $O_2B = O_2A_2 = r_2$ เพราะฉะนั้น $O_2\hat{A}_2M_2 = O_2\hat{B}M_2$... (5)

เพราะว่า AB สมมาตรกับ OO_1 เพราะฉะนั้น $\triangle O_2M_2A$, $\triangle O_2M_2B$ เท่ากันทุกประการ

เพราะฉะนั้น $O_2\hat{A}M_2 = O_2\hat{B}M_2$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $O_2\hat{A}_2M_2 = O_2\hat{A}M_2$... (7)

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } O_1\hat{A}O_2 &= O_1\hat{A}M_1 + M_1\hat{A}O_2 \\ &= O_2\hat{A}_2M_2 + M_1\hat{A}O_2 && \text{(จาก (1))} \\ &= O_2\hat{A}M_2 + M_1\hat{A}O_2 && \text{(จาก (7))} \\ &= M_1\hat{A}M_2 \end{aligned}$$

แบบที่ 2 เพราะว่าจุด O เป็นจุดศูนย์กลางของความคล้าย และ $\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{OA_1}{OA} = \frac{r_1}{r_2}$

เพราะฉะนั้น A_1M_1 ขนานกับ AM_2 และ O_1A_1 ขนานกับ O_2A

เพราะฉะนั้น $\triangle O_1A_1M_1$, $\triangle O_2AM_2$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย เพราะฉะนั้น $O_1\hat{A}_1M_1 = O_2\hat{A}M_2$... (8)

เพราะว่า $\triangle OO_1P_1$ และ $\triangle OP_1M_1$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $O_1\hat{O}P_1 = M_1\hat{O}P_1$

เพราะฉะนั้น $\triangle OO_1P_1$ และ $\triangle OP_1M_1$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

เพราะฉะนั้น $\frac{OP_1}{OM_1} = \frac{OO_1}{OP_1}$ เพราะฉะนั้น $OP_1^2 = OO_1 \cdot OM_1$

เพราะว่า OA_1 ตัดวงกลม C_1 ที่จุด A และ OP_1 สัมผัสวงกลม C_1

เพราะฉะนั้น $OA \cdot OA_1 = OP_1^2$ (ทฤษฎีบท 58)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 58 (Euclid III. 36.) คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 84

เพราะฉะนั้น $OA \cdot OA_1 = OO_1 \cdot OM_1$ เพราะฉะนั้น A, A_1 , O_1 , M_1 อยู่บนวงกลมเดียวกัน (ทฤษฎีบท 59.4)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ทฤษฎีบท 59.4 จากคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 87

ให้ $C_{AA_1O_1M_1}$ เป็นวงกลมที่ผ่านจุด A, A_1 , O_1 , M_1

เพราะฉะนั้น $O_1\hat{A}M_1 = O_1\hat{A}_1M_1$ (มุมที่รองรับด้วยคอร์ด O_1M_1 ของวงกลม $C_{AA_1O_1M_1}$)
 $= O_2\hat{A}M_2$ (จาก (8)) ... (9)

เพราะฉะนั้น $O_1\hat{A}O_2 = O_1\hat{A}M_1 + M_1\hat{A}O_2$
 $= O_2\hat{A}M_2 + M_1\hat{A}O_2$ (จาก (9))
 $= M_1\hat{A}M_2$

แบบที่ 3 เพราะว่าจุด O เป็นจุดศูนย์กลางของความคล้ายและ $\frac{OA_1}{OA} = \frac{OM_1}{OM_2} = \frac{OA}{OA_2} = \frac{r_1}{r_2}$

เพราะฉะนั้น M_1A_1 ขนานกับ M_2A และ M_1A ขนานกับ M_2A_2

เพราะฉะนั้น $\triangle M_1AA_1, \triangle M_2A_2A$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

$$\begin{aligned}
 M_1\hat{A}M_2 &= M_1\hat{B}M_2 && (AB, M_1M_2 \text{ แบ่งครึ่งและตั้งฉากซึ่งกันและกัน}) \\
 &= A_1\hat{B}A_2 && (B, M_1, A_1 \text{ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ } B, M_2, A_2 \text{ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน}) \\
 &= 180^\circ - (A_2\hat{A}_1B + A_1\hat{A}_2B) && (\text{มุมใน } \triangle A_1A_2B) \\
 &= 180^\circ - (A\hat{A}_1B + A_1\hat{A}_2B) && (A_2\hat{A}_1B, A\hat{A}_1B \text{ เป็นมุมเดียวกัน}) \\
 &= 180^\circ - (A\hat{A}_1B + A\hat{A}_2B) && (A_1\hat{A}_2B, A\hat{A}_2B \text{ เป็นมุมเดียวกัน}) \\
 &= 180^\circ - \left(\frac{1}{2} A\hat{O}_1B + \frac{1}{2} A\hat{O}_2B\right) && (\text{มุมที่เส้นรอบวงเท่ากับครึ่งหนึ่งของมุมที่จุดศูนย์กลาง}) \\
 &= 180^\circ - (A\hat{O}_1O_2 + A\hat{O}_2O_1) && (OO_1 \text{ เป็นแกนสมมาตรที่แบ่งครึ่งมุม } A\hat{O}_1B \text{ และ } A\hat{O}_2B) \\
 &= O_1\hat{A}O_2 && (\text{มุมใน } \triangle O_1AO_2) \quad \square
 \end{aligned}$$

3. แนวคิด

แบบที่ 1 เพื่อให้เข้าใจแนวคิดขอลดระดับคำถามเป็น $bc - b - c$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $mb + nc$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ (ดูการพิสูจน์จากบทช่วย 1)

การพิสูจน์กรณีที่เกี่ยวข้องการเป็นดังนี้

เพราะว่า $\{0, 1, 2, \dots, a-1\}$ เป็นเซตสมมูลของเศษเหลือตกค้างที่ลงรอยกับ a (complete set of residues mod b) และ $\gcd(a, b) = \gcd(c, a) = 1$

เพราะฉะนั้น $\{0, bc, 2bc, \dots, (a-1)bc\}$ เป็นเซตสมมูลของเศษเหลือตกค้างที่ลงรอยกับ a
ให้ $N > 2abc - ab - bc - ca$

เพราะฉะนั้นมี $x \in \{0, 1, 2, \dots, a-1\}$ ที่ทำให้ $xbc \equiv N \pmod{a}$ และ $xbc \leq (a-1)bc$

เพราะฉะนั้น $N - xbc > 2abc - ab - bc - ca - (a-1)bc = abc - ab - ca = a(bc - b - c)$

เพราะฉะนั้นมี k เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $N - xbc = ak$ และ $k > bc - b - c$

เพราะฉะนั้นมี y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ทำให้ $k = zb + yc$ (บทช่วย 1)

เพราะฉะนั้น $N = xbc + ak = xbc + a(zb + yc) = xbc + yca + zab$

ให้ $N = 2abc - ab - bc - ca$... (1)

สมมติ N สามารถเขียนได้ในรูป $N = xbc + yca + zab$... (2)

เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เพราะว่า $N = 2abc - ab - bc - ca = a(2bc - b - c) - bc$ เพราะฉะนั้น $N \equiv -bc \pmod{a}$... (3)

เพราะว่าจาก (2) $N = xbc + yca + zab = xbc + a(ya + zb)$ เพราะฉะนั้น $N \equiv xbc \pmod{a}$... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $xbc \equiv -bc \pmod{a}$ เพราะฉะนั้น $x \equiv -1 \pmod{a}$

เพราะฉะนั้น $a \mid (x + 1)$ เพราะฉะนั้น $x + 1 \geq a$ เพราะฉะนั้น $x \geq a - 1$... (5)

ในทำนองเดียวกันจะได้ $y \geq b - 1$ และ $z \geq c - 1$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $xbc + yca + zab \geq (a - 1)bc + (b - 1)ca + (c - 1)ab$

$$N \geq 3abc - bc - ca - ab \quad (\text{จาก (2)})$$

$$2abc - ab - bc - ca \geq 3abc - ab - bc - ca \quad (\text{จาก (1)})$$

เพราะฉะนั้น $2 \geq 3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (2) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $2abc - ab - bc - ca$ ไม่สามารถเขียนได้ในรูป $N = xbc + yca + zab$

เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เพราะฉะนั้น $2abc - ab - bc - ca$ เป็นจำนวนเต็มค่ามากที่สุด ที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูป

$xbc + yca + zab$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

แบบที่ 2 เพราะว่า a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวกและไม่มีสองตัวใดๆ มีตัวประกอบร่วมกันค่าเกิน 1

เพราะฉะนั้น $\gcd(a, b) = \gcd(b, c) = \gcd(c, a) = 1$

ให้ x_0, y_0, z_0 เป็นผลเฉลยของ $xbc + yca + zab = n$... (1)

เพราะฉะนั้น $x_0 bc + y_0 ca + z_0 ab = n$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $(x - x_0)bc + (y - y_0)ca + (z - z_0)ab = 0$... (3)

เพราะฉะนั้น $(x - x_0)bc = -((y - y_0)ca + (z - z_0)ab)$

เพราะว่า $a \mid -((y - y_0)ca + (z - z_0)ab)$ เพราะฉะนั้น $a \mid (x - x_0)bc$

เพราะว่า $\gcd(a, b) = \gcd(c, a) = 1$ เพราะฉะนั้น $a \mid (x - x_0)$

ให้ s เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $x - x_0 = as$... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $sabc + (y - y_0)ca + (z - z_0)ab = 0$

เพราะว่า $a \neq 0$ เพราะฉะนั้น $sbc + (y - y_0)c + (z - z_0)b = 0$... (5)

เพราะฉะนั้น $(y - y_0)c = -(sbc + (z - z_0)b)$

เพราะว่า $b \mid -(sbc + (z - z_0)b)$ เพราะฉะนั้น $b \mid ((y - y_0)c)$

เพราะว่า $\gcd(b, c) = 1$ เพราะฉะนั้น $b \mid (y - y_0)$

ให้ t เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $y - y_0 = bt$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $sbc + btc + (z - z_0)b = 0$

เพราะว่า $b \neq 0$ เพราะฉะนั้น $sc + tc + z - z_0 = 0$

$$z - z_0 = -c(s + t)$$

จาก (4) จะได้ $x = x_0 + as$ และจาก (6) จะได้ $y = y_0 + bt$

เลือก s และ t ที่ทำให้ $0 \leq x \leq a - 1$ และ $0 \leq y \leq b - 1$... (7)

$$\text{สมมติ } n > 2abc - ab - bc - ca \quad \dots (8)$$

$$\text{จาก (1) จะได้ } abz = n - bcx - acy$$

$$\geq n - bc(a - 1) - ac(b - 1) \quad (\text{จาก (7)})$$

$$> (2abc - ab - bc - ca) - bc(a - 1) - ac(b - 1) \quad (\text{จาก (8)})$$

$$= -ab$$

เพราะฉะนั้น $abz > -ab$ เพราะว่า $ab > 0$ เพราะฉะนั้น $z > -1$ เพราะฉะนั้น $z \geq 0$

เพราะฉะนั้น ถ้า $n > 2abc - ab - bc - ca$

แล้ว n สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $xbc + yca + zab$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

การแสดงว่า $2abc - ab - bc - ca$ ไม่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $xbc + yca + zab$

เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

$$\text{สมมติ } 2abc - ab - bc - ca \text{ สามารถเขียนได้ในรูปแบบ } xbc + yca + zab \quad \dots (9)$$

เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เพราะฉะนั้นมี x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบที่ทำให้ $2abc - ab - bc - ca = xbc + yca + zab$

$$bc(x + 1) + ca(y + 1) + ab(z + 1) = 2abc \quad \dots (10)$$

เพราะว่า x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ เพราะฉะนั้น $x + 1 \geq 1, y + 1 \geq 1$ และ $z + 1 \geq 1$

$$\text{จาก (10) จะได้ } bc(x + 1) = -(ca(y + 1) + ab(z + 1)) + 2abc$$

เพราะว่า $a \mid (-(ca(y + 1) + ab(z + 1)) + 2abc)$ เพราะฉะนั้น $a \mid (bc(x + 1))$

$$\text{เพราะว่า } \gcd(a, b) = \gcd(a, c) = 1 \text{ เพราะฉะนั้น } a \mid (x + 1) \text{ เพราะฉะนั้น } a \leq x + 1 \quad \dots (11)$$

$$\text{จาก (10) จะได้ } ca(y + 1) = -(bc(x + 1) + ab(z + 1)) + 2abc$$

เพราะว่า $b \mid (-(bc(x + 1) + ab(z + 1)) + 2abc)$ เพราะฉะนั้น $b \mid (ca(y + 1))$

$$\text{เพราะว่า } \gcd(a, b) = \gcd(b, c) = 1 \text{ เพราะฉะนั้น } b \mid (y + 1) \text{ เพราะฉะนั้น } b \leq y + 1 \quad \dots (12)$$

$$\text{จาก (10) จะได้ } ab(z + 1) = -(bc(x + 1) + ca(y + 1)) + 2abc$$

เพราะว่า $c \mid (-(bc(x + 1) + ca(y + 1)) + 2abc)$ เพราะฉะนั้น $c \mid (ab(z + 1))$

$$\text{เพราะว่า } \gcd(a, c) = \gcd(b, c) = 1 \text{ เพราะฉะนั้น } c \mid (z + 1) \text{ เพราะฉะนั้น } c \leq z + 1 \quad \dots (13)$$

$$\text{จาก (11), (12) และ (13) จะได้ } bc(x + 1) + ca(y + 1) + ab(z + 1) \geq bca + cab + abc = 3abc \quad \dots (14)$$

$$\text{จาก (10) และ (14) จะได้ } 2abc \geq 3abc$$

เพราะว่า $abc > 0$ เพราะฉะนั้น $2 \geq 3$ เป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้นที่สมมติ (9) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $2abc - ab - bc - ca$ เป็นจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูป $xbc + yca + zab$

เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ □

บทช่วย 1 $bc - b - c$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $mb + nc$

เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $\{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$ เป็นเซตสมมูลของเศษเหลือตกค้างที่ลงรอยกับ b (complete set of residues mod b) และ $\gcd(b, c) = 1$

เพราะฉะนั้น $\{0, c, 2c, \dots, (b - 1)c\}$ เป็นเซตสมมูลของเศษเหลือตกค้างที่ลงรอยกับ b

ให้ $r > bc - c - b$

เพราะฉะนั้น $r > (b - 1)c - b$

เพราะฉะนั้นมี $n \in \{0, 1, 2, \dots, b - 1\}$ ที่ทำให้ $r \equiv nc \pmod{b}$

เพราะฉะนั้น $b \mid (r - nc)$ เพราะฉะนั้น $r - nc > b$ เพราะฉะนั้น $r > nc + b$

ให้ m เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $r - nc = mb$ เพราะฉะนั้น $r = nc + mb$

เพราะว่า $r - nc > b > 0$ และ $r = nc + mb$ เพราะฉะนั้น $mb > 0$ เพราะฉะนั้น $m > 0$

เพราะฉะนั้นทุกจำนวนเต็ม $r > bc - c - b$ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ n, m ที่ทำให้ $r = nc + mb$

สมมติ $bc - b - c$ สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $mb + nc$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ... (1)

เพราะฉะนั้น $bc - b - c = mb + nc$... (2)

$$bc + b(m + 1) = c(n + 1)$$

เพราะฉะนั้น $b \mid c(n + 1)$

เพราะว่า $\gcd(b, c) = 1$ เพราะฉะนั้น $b \mid (n + 1)$ เพราะฉะนั้น $n + 1 \geq b$

เพราะฉะนั้น $n \geq b - 1$... (3)

$$mb + nc \geq nc$$

$$\geq (b - 1)c \quad (\text{จาก (3)})$$

$$= bc - c$$

$$> bc - b - c \quad (c \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก})$$

$$= mb + nc \quad (\text{จาก (2)})$$

เพราะฉะนั้น $mb + nc > mb + nc$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $bc - b - c$ ไม่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $mb + nc$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เพราะว่า $r > bc - c - b$ จะมีจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ n, m ที่ทำให้ $r = nc + mb$

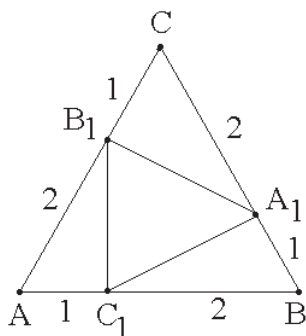
และ $bc - b - c$ ไม่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $mb + nc$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เพราะฉะนั้น $bc - b - c$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $mb + nc$

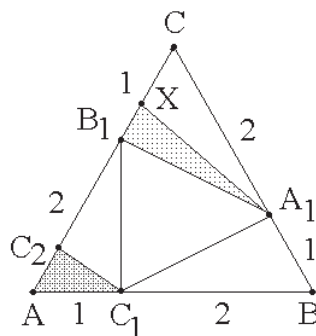
เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

□

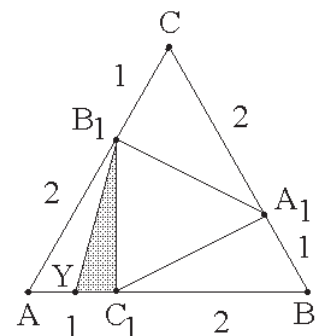
4. แนวคิด



รูปที่ 1983.4.1.1



รูปที่ 1983.4.1.2



รูปที่ 1983.4.1.3

ข้อตกลง E มีคุณสมบัติ Pythagoras ก็ต่อเมื่อ ทุกผลแบ่งกัน E_1, E_2 ของ E ต้องมี E_i อย่างน้อยหนึ่งเซตที่ทำให้มีจุด X, Y, Z ใน E_i ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก XYZ

หมายเหตุ E_1, E_2 เป็นผลแบ่งกันของ E ก็ต่อเมื่อ $E_1 \cup E_2 = E$ และ $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

เพราะว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

เพราะฉะนั้นโดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $AB = BC = CA = 3 \quad \dots (1)$

ให้ A_1, B_1, C_1 เป็นจุดบน BC, CA, AB ที่ทำให้ $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{2}{1}$ (รูปที่ 1983.4.1.1)

เพราะฉะนั้น $AB_1 = 2$ และ $AC_1 = 1$

เพราะว่า $AB_1 = 2$ และ $AC_1 = 1$ และ $B_1AC_1 = 60^\circ$ เพราะฉะนั้น $B_1C_1 = \sqrt{3}$ และ $B_1C_1 \perp AB$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $C_1A_1 = \sqrt{3}$ และ $C_1A_1 \perp BC$ และ $A_1B_1 = \sqrt{3}$ และ $A_1B_1 \perp CA$

เพราะฉะนั้น $B_1C_1 \perp AB$ และ $C_1A_1 \perp BC$ และ $A_1B_1 \perp CA \quad \dots (2)$

สมมติ E ไม่มีคุณสมบัติ Pythagoras $\dots (3)$

เพราะฉะนั้นมีผลแบ่งกัน E_1, E_2 ของ E ที่ทำให้

ทุก 3 จุด X, Y, Z ใน E_1 จะได้ $\triangle XYZ$ ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทุก 3 จุด X, Y, Z ใน E_2

จะได้ $\triangle XYZ$ ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก $\dots (4)$

เพราะว่า E_1, E_2 เป็นผลแบ่งกันของ E เพราะฉะนั้น $E = E_1 \cup E_2$ และ $E_1 \cap E_2 = \emptyset \quad \dots (5)$

เพราะว่ามี 3 จุด A_1, B_1, C_1 และมี 2 เซต E_1, E_2

โดยหลักการรังนกพิราบต้องมีสองจุดจาก A_1, B_1, C_1 อยู่ในเซต E_i เดียวกัน

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $A_1, B_1 \in E_1$ (รูปที่ 1983.4.1.2) $\dots (6)$

ให้ $[AC]$ เป็นเซตของจุดบนส่วนเส้นตรง AC และ $[AB]$ เป็นเซตของจุดบนส่วนเส้นตรง AB

สมมติ $([AC] - \{B_1\}) \cap E_1 \neq \emptyset \quad \dots (7)$

ให้ $X \in ([AC] - \{B_1\}) \cap E_1$ เพราะฉะนั้น $X, A_1, B_1 \in E_1$

จาก (2) $A_1B_1 \perp CA$ เพราะฉะนั้น $\triangle XA_1B_1$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้นมี $X, A_1, B_1 \in E_1$ ที่ทำให้ $\triangle XA_1B_1$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งขัดแย้งกับ (4)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (7) $([AC] - \{B_1\}) \cap E_1 \neq \emptyset$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $([AC] - \{B_1\}) \cap E_1 = \emptyset \quad \dots (8)$

เพราะว่า E_1, E_2 เป็นผลแบ่งกันของ E และจาก (8) เพราะฉะนั้น $([AC] - \{B_1\}) \subset E_2 \quad \dots (9)$

สมมติ $C_1 \notin E_1 \quad \dots (10)$

เพราะว่า E_1, E_2 เป็นผลแบ่งกันของ E เพราะฉะนั้น $C_1 \in E_2$

ให้ C_2 อยู่บนส่วนเส้นตรง AC และ $C_1C_2 \perp AC$ (รูปที่ 1983.4.1.2)

สมมติ $C_2 \in E_1 \quad \dots (11)$

จาก (6) จะได้ $C_2, A_1, B_1 \in E_1$ และ $\triangle C_2A_1B_1$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก เกิดข้อขัดแย้งกับ (4)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (11) ไม่จริง เพราะฉะนั้น $C_2 \notin E_1$ เพราะฉะนั้น $C_2 \in E_2$

เพราะว่า $C_1C_2 \perp AC$ เพราะฉะนั้น $\triangle AC_1C_2$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้นมี $A, C_1, C_2 \in E_2$ ที่ทำให้ $\triangle AC_1C_2$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งขัดแย้งกับ (4)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (10) $C_1 \notin E_1$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $C_1 \in E_1$ เพราะฉะนั้นจาก (6) จะได้ $A_1, B_1, C_1 \in E_1$... (12)

สมมติ $([AB] - \{C_1\}) \cap E_1 \neq \emptyset$... (13)

ให้ $Y \in ([AB] - \{C_1\}) \cap E_1$ (รูปที่ 1983.4.1.3)

เพราะฉะนั้นจาก (12) จะได้ $Y, C_1, B_1 \in E_1$

จาก (1) $B_1C_1 \perp AB$ เพราะฉะนั้น $\triangle YB_1C_1$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้นมี $Y, C_1, B_1 \in E_1$ ที่ทำให้ $\triangle YB_1C_1$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งขัดแย้งกับ (4)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (13) $([AB] - \{C_1\}) \cap E_1 \neq \emptyset$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $([AB] - \{C_1\}) \cap E_1 = \emptyset$... (14)

เพราะว่า E_1, E_2 เป็นผลแบ่งกันของ E เพราะฉะนั้นจาก (14) จะได้ $([AB] - \{C_1\}) \subset E_2$... (15)

จาก (9) และ (15) จะได้ $([AC] - \{B_1\}) \cup ([AB] - \{C_1\}) \subset E_2$... (16)

ให้ P อยู่บน AC และ $AP = \frac{1}{3}AC = \frac{1}{3}(3) = 1$ (จาก (1))

ให้ Q อยู่บน AB และ $AQ = \frac{1}{6}AB = \frac{1}{6}(3) = \frac{1}{2}$ (จาก (1))

เพราะฉะนั้น $AP : AQ = 2 : 1$

เพราะว่า $\hat{PAQ} = \hat{BAC} = 60^\circ$ และ $AP : AQ = 2 : 1$ เพราะฉะนั้น $\triangle APQ$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้นมี $A, P, Q \in E_2$ ที่ทำให้ $\triangle APQ$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากซึ่งขัดแย้งกับ (3)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) E ไม่มีคุณสมบัติ Pythagoras ไม่จริง

เพราะฉะนั้น E มีคุณสมบัติ Pythagoras □

5. แนวคิด ให้ $T_n = \{(t_n t_{n-1} \dots t_2 t_1 t_0)_3 \mid t_i \text{ เป็น } 0 \text{ หรือ } 1 \text{ ทุกค่า } i = 0, 1, 2, \dots, n\}$

สมมติมี x, y, z ใน T_n และ x, y, z เรียงจากน้อยไปมากเป็นลำดับเลขคณิต ... (1)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $x < y < z$ เพราะฉะนั้น $2y = x + z$... (2)

ให้ $y = (y_n y_{n-1} \dots y_2 y_1 y_0)_3$ เมื่อ y_i เป็น 0 หรือ 1 ทุกค่า $i = 0, 1, 2, \dots, n$

เพราะฉะนั้น $2y = ((2y_n)(2y_{n-1}) \dots (2y_2)(2y_1)(2y_0))_3$

เพราะฉะนั้น $2y_i$ เป็น 0 หรือ 2 ทุกค่า $i = 0, 1, 2, \dots, n$... (3)

ให้ $x = (x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0)_3$ เมื่อ x_i เป็น 0 หรือ 1 ทุกค่า $i = 0, 1, 2, \dots, n$

$z = (z_n z_{n-1} \dots z_2 z_1 z_0)_3$ เมื่อ z_i เป็น 0 หรือ 1 ทุกค่า $i = 0, 1, 2, \dots, n$

เพราะฉะนั้น $x + z = ((x_n + z_n)(x_{n-1} + z_{n-1}) \dots (x_2 + z_2)(x_1 + z_1)(x_0 + z_0))_3$

เพราะว่า $(x_i \text{ เป็น } 0 \text{ หรือ } 1) \text{ ทุกค่า } i = 0, 1, 2, \dots, n$ และ $(z_i \text{ เป็น } 0 \text{ หรือ } 1) \text{ ทุกค่า } i = 0, 1, 2, \dots, n$

เพราะฉะนั้น $x_i + z_i$ เป็น 0, 1 หรือ 2 ทุกค่า $i = 0, 1, 2, \dots, n$... (4)

จาก (2) $2y = x + z$ และจาก (3) และ (4) จะได้ $x_i + z_i$ เป็น 0 หรือ 2 ทุกค่า $i = 0, 1, 2, \dots, n$... (5)

ถ้า $2y_i = 2$ แล้ว $x_i + z_i = 2$ เพราะฉะนั้น $x_i = z_i = 1$

ถ้า $2y_i = 0$ แล้ว $x_i + z_i = 0$ เพราะฉะนั้น $x_i = z_i = 0$

เพราะฉะนั้น $x = z$ ขัดแย้งกับ $x < z$ เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นไม่มี x, y, z ใน T_n ที่ทำให้ x, y, z เรียงจากน้อยไปมากเป็นลำดับเลขคณิต

เพราะว่า $|T_{10}| = 2^{11} = 2048$ เพราะฉะนั้นให้ $A \subset T_{10}$ และ $|A| = 1983$

เพราะว่า $(1111111111)_3$ เป็นสมาชิกค่ามากที่สุดของ T_{10}

และ $(1111111111)_3 = 3^{10} + 3^9 + \dots + 3 + 1 = \frac{3^{11}-1}{3-1} = \frac{177147-1}{2} = 88573 \leq 100000 = 10^5$

เพราะฉะนั้นสมาชิกทุกตัวของ A มีค่าน้อยกว่า 10^5

เพราะฉะนั้นเป็นไปได้ที่จะเลือกจำนวนเต็มบวกต่างกัน 1983 ตัว ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 10^5

และไม่มีจำนวน 3 ตัวใดๆ ที่เรียงจากน้อยไปมากแล้วเป็นลำดับเลขคณิต

□

6. แนวคิด โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $0 < a \leq b \leq c$

พิจารณาระบบสมการ $y + z = a$

$$z + x = b$$

$$x + y = c$$

เพราะว่า $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ เพราะฉะนั้นระบบสมการ $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$ มีผลเฉลย

ให้ x, y, z เป็นผลเฉลยของระบบสมการ $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$

เพราะว่า a, b, c เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยม เพราะฉะนั้น $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$

$$a + b > c \rightarrow (y + z) + (z + x) > (x + y) \rightarrow 2z > 0 \rightarrow z > 0$$

$$b + c > a \rightarrow (z + x) + (x + y) > (y + z) \rightarrow 2x > 0 \rightarrow x > 0$$

$$c + a > b \rightarrow (x + y) + (y + z) > (z + x) \rightarrow 2y > 0 \rightarrow y > 0$$

เพราะฉะนั้น x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก

$$\begin{aligned} a^2 b(a - b) &= (y + z)^2 (z + x)((y + z) - (z + x)) \\ &= (y^2 + 2yz + z^2)(z + x)(y - x) \\ &= (y^2 + 2yz + z^2)(yz - xz + xy - x^2) \\ &= y^2(yz - xz + xy - x^2) + 2yz(yz - xz + xy - x^2) + z^2(yz - xz + xy - x^2) \\ &= (y^3 z - x y^2 z + x y^3 - x^2 y^2) + (2 y^2 z^2 - 2 x y z^2 + 2 x y^2 z - 2 x^2 y z) \\ &\quad + (y z^3 - x z^3 + x y z^2 - x^2 z^2) \\ &= y^3 z + x y^2 z + x y^3 - x^2 y^2 + 2 y^2 z^2 - x y z^2 - 2 x^2 y z + y z^3 - x z^3 - x^2 z^2 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$b^2 c(b - c) = x z^3 + x y z^2 + y z^3 - y^2 z^2 + 2 x^2 z^2 - x^2 y z - 2 x y^2 z + x^3 z - x^3 y - x^2 y^2$$

$$c^2 a(c - a) = x^3 y + x^2 y z + x^3 z - x^2 z^2 + 2 x^2 y^2 - x y^2 z - x y z^2 + x y^3 - y^3 z - y^2 z^2$$

เพราะฉะนั้น $a^2 b(a - b) + b^2 c(b - c) + c^2 a(c - a)$

$$= 2x y^3 + 2y z^3 - 2x y^2 z - 2x y z^2 - 2x^2 y z + 2x^3 z$$

$$= 2(x y^3 + y z^3 - x y^2 z - x y z^2 - x^2 y z + x^3 z)$$

$$= 2(x y^3 + y z^3 + z x^3 - x y z(x + y + z))$$

$$\geq 0$$

(บทช่วย 1)

... (1)

เพราะฉะนั้น $a^2 b(a - b) + b^2 c(b - c) + c^2 a(c - a) \geq 0$

... (2)

สมการ (2) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมการ (1) เป็นจริง
 ก็ต่อเมื่อ $x = y = z$ (บทช่วย 1)
 ก็ต่อเมื่อ $y + z = z + x = x + y$
 ก็ต่อเมื่อ $a = b = c$
 ก็ต่อเมื่อ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า □

บทช่วย 1 x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ $xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z)$

ข้อพิสูจน์ให้ $a_1 = \sqrt{xy^3}, a_2 = \sqrt{yz^3}, a_3 = \sqrt{zx^3}$
 $b_1 = \sqrt{z}, b_2 = \sqrt{x}, b_3 = \sqrt{y}$

โดยอสมการโคชีจะได้ $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \quad \dots (1)$

หมายเหตุ ศึกษาอสมการโคชีเพิ่มเติมได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 29 โลกอสมการ หน้า 242

เพราะฉะนั้น $(xy^3 + yz^3 + zx^3)(z + y + x) \geq (\sqrt{xy^3} \sqrt{z} + \sqrt{yz^3} \sqrt{x} + \sqrt{zx^3} \sqrt{y})^2$
 $(xy^3 + yz^3 + zx^3)(x + y + z) \geq (y\sqrt{xyz} + z\sqrt{xyz} + x\sqrt{xyz})^2$
 $= xyz(y + z + x)^2$
 $= xyz(x + y + z)^2$

เพราะฉะนั้น $xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(x + y + z) \quad \dots (2)$

สมการ (2) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมการ (1) เป็นจริง
 ก็ต่อเมื่อ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$
 ก็ต่อเมื่อ $(\frac{a_1}{b_1})^2 = (\frac{a_2}{b_2})^2 = (\frac{a_3}{b_3})^2$
 ก็ต่อเมื่อ $\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{x^3z}{y}$
 ก็ต่อเมื่อ $\frac{xy^3}{z} (xyz) = \frac{yz^3}{x} (xyz) = \frac{x^3z}{y} (xyz)$
 ก็ต่อเมื่อ $x^2 y^4 = y^2 z^4 = z^2 x^4$
 ก็ต่อเมื่อ $xy^2 = yz^2 = zx^2$
 ก็ต่อเมื่อ $\frac{xy^2}{xyz} = \frac{yz^2}{xyz} = \frac{zx^2}{xyz}$
 ก็ต่อเมื่อ $\frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y}$

ให้ $t = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x}{y}$ เพราะฉะนั้น $t^3 = (\frac{y}{z})(\frac{z}{x})(\frac{x}{y}) = 1$ เพราะฉะนั้น $t = 1$

เพราะฉะนั้น $x = y = z$

เพราะฉะนั้น สมการ (2) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $x = y = z$

เพราะฉะนั้น $xy^3 + yz^3 + zx^3 = xyz(x + y + z)$ ก็ต่อเมื่อ $x = y = z$ □

คำถามใกล้เคียง

6.1 กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

จงแสดงว่า $a^2(a - b) + b^2(b - c) + c^2(c - a) \geq 0$

6.1 แนวคิด โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $0 < a \leq b \leq c$

(a^2, b^2, c^2) เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $0 < a^2 \leq b^2 \leq c^2$

(a, b, c) เป็นลำดับของจำนวนจริงและ $0 < a \leq b \leq c$

โดยอสมการเชบีเชฟจะได้

$$(a)(a^2) + (b)(b^2) + (c)(c^2) \geq (a^2)(b) + (b^2)(c) + (c^2)(a) \quad \dots (1)$$

หมายเหตุ ศึกษาอสมการเชบีเชฟได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 29 โลกอสมการ หน้า 339

เพราะฉะนั้น

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^3 - a^2b + b^3 - b^2c + c^3 - c^2a \geq 0$$

$$a^2(a - b) + b^2(b - c) + c^2(c - a) \geq 0 \quad \square$$

6.2 กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$

จงแสดงว่า $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$

6.2 แนวคิด เพราะว่า $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $a^2 + b^2 \geq 2ab$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $b^2 + c^2 \geq 2bc$ และ $c^2 + a^2 \geq 2ca$

เพราะฉะนั้น

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

เพราะฉะนั้น

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \dots (1)$$

โดยกฎของโคไซน์จะได้

$$2ab \cos C = b^2 + a^2 - c^2$$

$$2bc \cos A = b^2 + c^2 - a^2$$

$$2ca \cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

เพราะฉะนั้น

$$2ab \cos C + 2bc \cos A + 2ca \cos B = a^2 + b^2 + c^2$$

$$ab \cos C + bc \cos A + ca \cos B = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

เพราะว่า

$$ab(1) + bc(1) + ca(1) \geq ab \cos C + bc \cos A + ca \cos B$$

เพราะฉะนั้น

$$ab + bc + ca \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \quad \dots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \leq ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 \quad \square$$

The Twenty – Fifth International Mathematical Olympiad

Prague, Czechoslovakia

29 June – 10 July 1984

Day I (4 July 1984)

- กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ และ $x + y + z = 1$
จงแสดงว่า $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$
- จงหาคู่ของจำนวนเต็มบวก a, b ที่มีคุณสมบัติ
 $ab(a + b)$ หารด้วย 7 ไม่ลงตัว และ $(a + b)^7 - a^7 - b^7$ หารด้วย 7^7 ลงตัว
- กำหนดให้ O และ P เป็นจุดบนระนาบและทุกจุดบนระนาบมีการระบายสี
โดยสีต่างๆ ทั้งหมดที่ใช้มีจำนวนสีเป็นจำนวนจำกัด
ให้ X เป็นจุดบนระนาบและ $C(X)$ เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง O รัศมี $OX + \frac{AOX}{OX}$
เมื่อ $\angle AOX$ เป็นมุมในหน่วยเรเดียน และ $0 \leq \angle AOX < 2\pi$
จงพิสูจน์ว่า มี X ซึ่งไม่อยู่บน OA ที่ทำให้สีของจุด X ปรากฏบนเส้นรอบวงของวงกลม $C(X)$

Day II (5 July 1984)

- กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมี CD สัมผัสวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
จงแสดงว่า AB สัมผัสวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ก็ต่อเมื่อ AD ขนานกับ BC
- กำหนดให้ d เป็นผลบวกของความยาวของเส้นทแยงมุมของรูป n เหลี่ยมมุม $(n > 3)$
และ p เป็นความยาวของเส้นรอบรูป n เหลี่ยมมุม
จงแสดงว่า $n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n+1}{2} \right] - 2$
- กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ $0 < a < b < c < d$ และ $ad = bc$
จงแสดงว่า
ถ้า $a + d = 2^k$ และ $b + c = 2^m$ สำหรับบางค่าของจำนวนเต็มบวก k, m แล้ว $a = 1$

The Twenty – Fifth International Mathematical Olympiad Solutions

Prague, Czechoslovakia, 29 June – 10 July 1984

1. แนวคิด

ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ และ $x + y + z = 1$ (คุณสมบัติ (i))

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถกำหนดให้ $x \geq y \geq z \geq 0$

สมมติ $z > \frac{1}{2}$... (1)

เพราะฉะนั้น $x \geq y \geq z > \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $x + y + z > 3z = \frac{3}{2}$ ขัดแย้งกับ (i) $x + y + z = 1$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) $z > \frac{1}{2}$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $z \leq \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $x \geq y \geq z \geq 0$ และ $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ (คุณสมบัติ (ii))

การแสดงว่า $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz$

แบบที่ 1 จาก (ii) จะได้ $1 - 2z \geq 0$... (1)

เพราะฉะนั้น $xy + yz + zx - 2xyz = (xy - 2xyz) + (xz + yz)$

$$= xy(1 - 2z) + (x + y)z$$

$$\geq 0 \quad (\text{จาก (1) และ (i)})$$

เพราะฉะนั้น $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz$

แบบที่ 2 จาก (i) จะได้ $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ และ $0 \leq z < 1$

เพราะฉะนั้น $xyz \leq xy(1) = xy$

$$xyz \leq (1)y z = yz$$

$$xyz \leq x(1)z = zx$$

เพราะฉะนั้น $3xyz \leq xy + yz + zx$

$$xyz \leq xy + yz + zx - 2xyz$$

เพราะว่า x, y, z เป็นจำนวนจริงบวกหรือศูนย์ เพราะฉะนั้น $xyz \geq 0$

เพราะฉะนั้น $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz$

การแสดงว่า $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

แบบที่ 1 $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) = 1 - 2(x + y + z) + 4(xy + yz + zx) - 8xyz$
 $= 1 - 2(1) + 4(xy + yz + zx) - 8xyz$ (จาก (i) $x + y + z = 1$)
 $= -1 + 4(xy + yz + zx) - 8xyz$

เพราะฉะนั้น $4(xy + yz + zx) - 8xyz = 1 + (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)$

$$(xy + yz + zx) - 2xyz = \frac{1}{4}(1 + (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)) \quad \dots (1)$$

กรณีที่ 1 $1 - 2x \geq 0$ และ $1 - 2y \geq 0$ และ $1 - 2z \geq 0$

$$\begin{aligned}
 (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) &\leq \left(\frac{(1-2x) + (1-2y) + (1-2z)}{3} \right)^3 && \text{(อสมการ A.M. - G.M.)} \\
 &= \frac{1}{27} (3 - 2(x + y + z))^3 \\
 &= \frac{1}{27} (3 - 2(1))^3 && \text{(จาก (i) } x + y + z = 1) \\
 &= \frac{1}{27} && \dots (2)
 \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $(xy + yz + zx) - 2xyz \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{7}{27}$... (3)

กรณีที่ 2 $1 - 2x < 0$ หรือ $1 - 2y < 0$ หรือ $1 - 2z < 0$

$$\frac{1}{2} < x \text{ หรือ } \frac{1}{2} < y \text{ หรือ } \frac{1}{2} < z$$

เพราะว่าจาก (ii) $x \geq y \geq z \geq 0$ และ $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} < x$ หรือ $\frac{1}{2} < y$... (4)

สมมติ $\frac{1}{2} < y$... (5)

เพราะว่าจาก (ii) $x \geq y \geq z \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x + y + z > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1$

ขัดแย้งกับ (i) $x + y + z = 1$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (5) $\frac{1}{2} < y$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้นจาก (4) จะได้ $\frac{1}{2} < x$

เพราะฉะนั้น $z \leq \frac{1}{2}$, $y \leq \frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{2} < x$

เพราะฉะนั้น $1 - 2z \geq 0$, $1 - 2y \geq 0$ และ $1 - 2x < 0$

เพราะฉะนั้น $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) < 0$

เพราะฉะนั้น $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) \leq \frac{1}{27}$... (6)

จาก (1) และ (6) จะได้ $(xy + yz + zx) - 2xyz \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{7}{27}$... (7)

จากกรณีที่ 1 และ 2 จะได้ $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

แบบที่ 2 เพราะว่าโดยอสมการ A.M. - G.M. จะได้ $xy \leq \frac{1}{4}(x + y)^2$ และ $x + y + z = 1$

เพราะฉะนั้น $xy \leq \frac{1}{4}(1 - z)^2$... (1)

$$\begin{aligned}
 xy + yz + zx - 2xyz &= (x + y)z + xy(1 - 2z) \\
 &\leq (1 - z)z + \frac{1}{4}(1 - z)^2(1 - 2z) && \text{(จาก (i) } x + y + z = 1 \text{ และ (1))} \\
 &= \frac{1}{4}(1 + z^2 - 2z^3) && \dots (2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{เพราะว่า } \frac{1}{4}(1 + z^2 - 2z^3) - \frac{7}{27} &= -\frac{1}{108}(1 - 27z^2 + 54z^3) \\
 &= -\frac{1}{108}(1 + 6z)(1 - 6z + 9z^2) \\
 &= -\frac{1}{108}(1 + 6z)(1 - 3z)^2 \\
 &\leq 0
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{4}(1 + z^2 - 2z^3) \leq \frac{7}{27}$... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

แบบที่ 3 ให้ $z = \frac{1}{2} - t$... (1)

เพราะว่าจาก (ii) $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$ และ $t = \frac{1}{2} - z$ เพราะฉะนั้น $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$... (2)

เพราะว่าจาก (i) $x + y + z = 1$ เพราะฉะนั้น $x + y = \frac{1}{2} + t$... (3)

$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - 2z) + (x + y)z$

$\leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2(1 - 2z) + (x + y)z$ (อสมการ A.M. - G.M.)

$= \left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right)^2(1 - 2z) + \left(\frac{1}{2} + t\right)z$ (จาก (3))

$= \left(\frac{1}{4} + \frac{t}{2}\right)^2(2t) + \left(\frac{1}{2} + t\right)\left(\frac{1}{2} - t\right)$ (จาก (1) $z = \frac{1}{2} - t$)

$= \frac{1}{8}(4t^3 - 4t^2 + t + 2)$... (4)

ให้ $f(t) = 4t^3 - 4t^2 + t + 2$ และ $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

เพราะว่า $f'(t) = 12t^2 - 8t + 1 = (2t - 1)(6t - 1)$

เพราะฉะนั้น $f'(t) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $t = \frac{1}{2}$ และ $t = \frac{1}{6}$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0, \frac{1}{2}]$ เพราะฉะนั้น f ต้องมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์

เพราะว่าค่าสูงสุดสัมบูรณ์ต้องเกิดที่จุดวิกฤตและจุดวิกฤตมี 3 จุดคือ $t = 0, \frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{6}$

เพราะว่า $f(0) = 2, f(\frac{1}{2}) = 2$ และ $f(\frac{1}{6}) = \frac{56}{27}$

เพราะฉะนั้นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[0, \frac{1}{2}]$ คือ $f(\frac{1}{6}) = \frac{56}{27}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}(4t^3 - 4t^2 + t + 2) \leq \frac{1}{8}\left(\frac{56}{27}\right) = \frac{7}{27}$... (5)

จาก (4) และ (5) จะได้ $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

แบบที่ 4 ให้ $G(t) = (t - x)(t - y)(t - z)$

$= t^3 - (x + y + z)t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz$

$= t^3 - t^2 + (xy + yz + zx)t - xyz$ (จาก (i) $x + y + z = 1$)

เพราะฉะนั้น $G(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + (xy + yz + zx)\frac{1}{2} - xyz$

$= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(xy + yz + zx - 2xyz)$... (1)

เพราะฉะนั้น $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{2}(xy + yz + zx - 2xyz) \leq \frac{7}{2(27)}$

ก็ต่อเมื่อ $-\frac{1}{8} + \frac{1}{2}(xy + yz + zx - 2xyz) \leq -\frac{1}{8} + \frac{7}{2(27)}$

ก็ต่อเมื่อ $G(\frac{1}{2}) \leq -\frac{1}{8} + \frac{7}{2(27)}$ (จาก (1))

เพราะฉะนั้น $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ ก็ต่อเมื่อ $G(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{216}$... (2)

กรณีที่ 1 $x > \frac{1}{2}$ หรือ $y > \frac{1}{2}$

จาก (ii) $x \geq y \geq z \geq 0$ และ $0 \leq z \leq \frac{1}{2}$

สมมติ $y > \frac{1}{2}$

... (3)

เพราะฉะนั้น $x \geq y > \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $x + y + z > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + z > 1 + z > 1$

เพราะฉะนั้น $x + y + z > 1$ ขัดแย้งกับ (i) $x + y + z = 1$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) $y > \frac{1}{2}$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $y \leq \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $x > \frac{1}{2}$ และ $y \leq \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} - x < 0$ และ $\frac{1}{2} - y \geq 0$

เพราะว่าจาก (ii) $\frac{1}{2} - z \geq 0$

เพราะฉะนั้นจาก (4) และ (5) จะได้ $G(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - x)(\frac{1}{2} - y)(\frac{1}{2} - z) \leq 0$ เพราะฉะนั้น $G(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{216}$

เพราะฉะนั้นจาก (2) จะได้ $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

กรณีที่ 2 $x \leq \frac{1}{2}$ และ $y \leq \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} - x \geq 0$, $\frac{1}{2} - y \geq 0$ และจาก (2) $\frac{1}{2} - z \geq 0$

เพราะฉะนั้น $G(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - x)(\frac{1}{2} - y)(\frac{1}{2} - z)$

$$\leq \left(\frac{(\frac{1}{2} - x) + (\frac{1}{2} - y) + (\frac{1}{2} - z)}{3} \right)^3 \quad (\text{อสมการ A.M. - G.M.})$$

$$= \left(\frac{\frac{3}{2} - (x + y + z)}{3} \right)^3$$

$$= \left(\frac{\frac{3}{2} - (1)}{3} \right)^3 \quad (\text{จาก (1) } x + y + z = 1)$$

$$= \frac{1}{216}$$

เพราะฉะนั้น $G(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{216}$

เพราะฉะนั้นจาก (2) จะได้ $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

จากกรณีที่ 1 และ 2 จะได้ $xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$

แบบที่ 5 $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) = 1 - 2(x + y + z) + 4(xy + yz + zx) - 8xyz$

$$= 1 - 2(1) + 4(xy + yz + zx) - 8xyz \quad (\text{จาก (i) } x + y + z = 1)$$

เพราะฉะนั้น $4(xy + yz + zx) - 8xyz = (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) + 1$... (1)

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 4(xy + yz + zx) - 8xyz \leq \frac{28}{27}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) + 1 \leq \frac{28}{27} \quad (\text{จาก (1)})$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) \leq \frac{1}{27} \quad \dots (2)$$

กรณีที่ 1 $1 - 2x \geq 0$ และ $1 - 2y \geq 0$ และ $1 - 2z \geq 0$

$$\begin{aligned} (1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) &\leq \left(\frac{(1 - 2x) + (1 - 2y) + (1 - 2z)}{3} \right)^3 && \text{(อสมการ A.M. - G.M.)} \\ &= \left(\frac{3 - 2(x + y + z)}{3} \right)^3 \\ &= \left(\frac{3 - 2(1)}{3} \right)^3 && \text{(จาก (i) } x + y + z = 1) \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

กรณีที่ 2 $1 - 2x < 0$ หรือ $1 - 2y < 0$ หรือ $1 - 2z < 0$

$$\frac{1}{2} < x \text{ หรือ } \frac{1}{2} < y \text{ หรือ } \frac{1}{2} < z$$

จาก (ii) $z \leq \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} < x$ หรือ $\frac{1}{2} < y$

กรณีที่ 2.1 $\frac{1}{2} < x$ และ $\frac{1}{2} < y$

เพราะฉะนั้น $x + y > 1$ ขัดแย้งกับ (i) $x + y + z = 1$

กรณีที่ 2.2 $\frac{1}{2} < x$ และ $\frac{1}{2} \geq y$

เพราะฉะนั้น $1 - 2x < 0$ และ $1 - 2y \geq 0$

เพราะว่าจาก (ii) $z \leq \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $1 - 2z \geq 0$

เพราะฉะนั้น $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) < 0 < \frac{1}{27}$

กรณีที่ 2.3 $\frac{1}{2} \geq x$ และ $\frac{1}{2} < y$

เพราะฉะนั้น $1 - 2x \geq 0$ และ $1 - 2y < 0$

เพราะว่าจาก (ii) $z \leq \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $1 - 2z \geq 0$

เพราะฉะนั้น $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) < 0 < \frac{1}{27}$

จากกรณีที่ 1 และ 2 จะได้ $(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z) \leq \frac{1}{27}$

□

2. แนวคิด

แบบที่ 1 $(a + b)^7 - a^7 - b^7$

$$\begin{aligned} &= (a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7) - a^7 - b^7 \\ &= 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 \\ &= 7ab(a^5 + 3a^4b + 5a^3b^2 + 5a^2b^3 + 3ab^4 + b^5) \\ &= 7ab((a^5 + b^5) + 3ab(a^3 + b^3) + 5a^2b^2(a + b)) \\ &= 7ab((a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 3ab(a + b)(a^2 - ab + b^2) + 5a^2b^2(a + b)) \\ &= 7ab(a + b)((a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) + 3ab(a^2 - ab + b^2) + 5a^2b^2) \\ &= 7ab(a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 + 3a^3b - 3a^2b^2 + 3ab^3 + 5a^2b^2) \\ &= 7ab(a + b)(a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4) \\ &= 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(a + b)^7 - a^7 - b^7 = 7ab(a + b)(a^2 + ab + b^2)^2$... (1)

เพราะเราต้องการ $7 \nmid (ab(a+b))$ เพราะฉะนั้นหา a, b ที่ทำให้ $7 \nmid a$ และ $7 \nmid b$ และ $7 \nmid (a+b) \dots (2)$

เพราะฉะนั้นเราต้องการ $7^7 \mid ((a+b)^7 - a^7 - b^7)$ และ $7 \nmid a$ และ $7 \nmid b$ และ $7 \nmid (a+b) \dots (3)$

เพราะว่าจาก (1) และ (3)

เพราะฉะนั้นเราต้องการ $7^7 \mid (7ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2)$ และ $7 \nmid a$ และ $7 \nmid b$ และ $7 \nmid (a+b)$

เพราะฉะนั้นเราต้องการ $7^6 \mid (ab(a+b)(a^2 + ab + b^2)^2)$ และ $7 \nmid a$ และ $7 \nmid b$ และ $7 \nmid (a+b)$

เพราะฉะนั้นหา a, b ที่ทำให้ $7^6 \mid (a^2 + ab + b^2)^2$ และ $7 \nmid a$ และ $7 \nmid b$ และ $7 \nmid (a+b)$

เพราะฉะนั้นหา a, b ที่ทำให้ $7^3 \mid (a^2 + ab + b^2)$ และ $7 \nmid a$ และ $7 \nmid b$ และ $7 \nmid (a+b)$

เพราะว่า $7^3 \mid (a^2 + ab + b^2)$ เพราะฉะนั้น $a^2 + ab + b^2 \geq 7^3 \dots (4)$

เพราะว่า $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 > a^2 + ab + b^2 \dots (5)$

เพราะฉะนั้นจาก (4) และ (5) จะได้ $(a+b)^2 > 7^3 = 343$

เพราะว่า $18^2 = 324$ และ $19^2 = 361$

เพราะฉะนั้น $a+b \geq 19$

เลือก $a = 1, b = 18$

จะได้ $ab(a+b) = 342 = (2)(3^2)(19)$

และ $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 19^7 - 1^7 - 18^7 = 281651706 = (2)(3^2)(19)(7^7)$

เพราะฉะนั้น $7^7 \mid ((a+b)^7 - a^7 - b^7)$ และ $7 \nmid (ab(a+b))$

หมายเหตุ ต้องอาศัยความโชคดีที่เลือก $a = 1, b = 18$ แล้วได้คำตอบที่ต้องการ

แบบที่ 2 แนวทางในการหา a, b อีกแบบหนึ่งจากเงื่อนไข $7^3 \mid (a^2 + ab + b^2)$

เพราะว่า $a^2 + ab + b^2 = \frac{a^3 - b^3}{a - b}$

เพราะฉะนั้นพิจารณาค่าของ a, b ที่ทำให้ $a^3 \equiv b^3 \pmod{7^3}$

โดย Euler theorem จะได้ $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

เมื่อ Euler phi function $\varphi(m) =$ จำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ m

เพราะว่า $\varphi(7^3) = 7^3 - 7^2 = (7-1)7^2 = (2)(3)(49) = 3(98)$

พิจารณาเงื่อนไข $a^3 \equiv 1 \pmod{7^3} \equiv 1 \pmod{343}$

เพราะฉะนั้น ถ้า $a = n^{98}$ แล้ว $n^{98(3)} = a^3 \equiv 1 \pmod{343}$

เพราะว่า $2^{98} \equiv 18 \pmod{343}$

และ $(2^{98})^3 \equiv 18^3 \pmod{343} = 1 \pmod{343}$

เพราะฉะนั้น $1^3 \equiv 18^3 \pmod{343}$

เพราะฉะนั้นเลือก $(a, b) = (1, 18)$ จะได้ $7^7 \mid ((a+b)^7 - a^7 - b^7)$ และ $7 \nmid (ab(a+b))$

หมายเหตุ กรณี $(a, b) = (18, 324)$

จะได้ $ab(a+b) = (18)(324)(342) = 1994544 = 2^4 3^8 19$

และ $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 342^7 - 18^7 - 324^7 = 172432816460174592 = 2^8 3^{16} 7^7 19$

เพราะฉะนั้น $7^7 \mid ((a+b)^7 - a^7 - b^7)$ และ $7 \nmid (ab(a+b))$

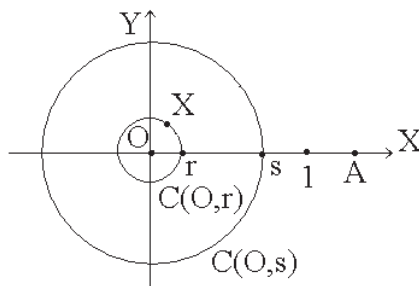
กรณี $(a, b) = (1, 324)$

จะได้ $ab(a+b) = (1)(324)(325) = 105300 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 13$

และ $(a+b)^7 - a^7 - b^7 = 342^7 - 18^7 - 324^7 = 8173186372997100 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^7 \cdot 13 \cdot 307^2$

เพราะฉะนั้น $7^7 \mid ((a+b)^7 - a^7 - b^7)$ และ $7 \nmid (ab(a+b))$ □

3. แนวคิด



รูปที่ 1984.3.1

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ O เป็นจุดกำเนิด

และ OA ทับแกน X ทางด้านบวก

สมมติไม่มี X ซึ่งไม่อยู่บน OA ที่ทำให้สีของจุด X ปรากฏบนเส้นรอบวงของวงกลม $C(X)$... (1)

ให้ $C(O, r)$, $C(O, s)$ เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง O และมีรัศมี r, s ตามลำดับ โดยที่ $0 < r < s < 1$

เพราะว่า $0 < r < s < 1$ เพราะฉะนั้น $0 < s - r < 1$

เพราะฉะนั้น $0 \leq r(s - r) < 1 < \pi$

ให้ P เป็นจุดบนวงกลม $C(O, r)$ และ $\angle AOP = r(s - r)$

เพราะฉะนั้น $0 \leq \angle AOP < 2\pi$ และ $OP = r$

และรัศมีของวงกลม $C(P)$ จะมีค่าเท่ากับ $OP + \frac{\angle AOP}{\angle OP} = r + \frac{r(s-r)}{r} = s$

เพราะว่ารัศมีของวงกลม $C(P)$ เท่ากับ s และวงกลม $C(P)$ มีจุดศูนย์กลาง O

เพราะฉะนั้นวงกลม $C(P)$ และวงกลม $C(O, s)$ เป็นวงกลมเดียวกัน

จากข้อสมมติ (1) จะได้สีของจุด P กับสีของจุดบนวงกลม $C(O, s)$ เป็นสีต่างกัน

เพราะฉะนั้นเซตของสีที่ปรากฏบนวงกลม $C(O, r)$ กับเซตของสีที่ปรากฏบนวงกลม $C(O, s)$ ไม่มีสีที่ซ้ำกัน

เพราะว่า วงกลม $C(O, t)$ เมื่อ $0 < t < 1$ มีเป็นจำนวนอนันต์

และ วงกลม $C(O, r)$, $C(O, s)$ เมื่อ $0 < r < s < 1$ ไม่มีสีที่ซ้ำกัน

เพราะฉะนั้นจำนวนสีที่ใช้ต้องใช้หลายสีมากเป็นจำนวนอนันต์

เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับจำนวนสีต่างๆ ทั้งหมดที่ใช้เป็นจำนวนจำกัด

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมี X ซึ่งไม่อยู่บน OA ที่ทำให้สีของจุด X ปรากฏบนเส้นรอบวงของวงกลม $C(X)$ □

4. แนวคิด ให้ Cir_{AB} , Cir_{CD} เป็นวงกลมที่มี AB , CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางตามลำดับ
ให้ M , N เป็นจุดกึ่งกลาง AB และ CD ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น $AM = BM$ และ M เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_{AB} ... (1)

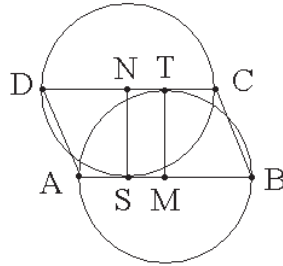
เพราะฉะนั้น $CN = DN$ และ N เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_{CD} ... (2)

ให้ T อยู่บน CD และ $MT \perp CD$ เพราะฉะนั้น $MT = MA = MB$... (3)

ให้ S อยู่บน AB และ $NS \perp AB$ เพราะฉะนั้น $NC = ND = NS$... (4)

แบบที่ 1

กรณีที่ 1 AB และ CD ขนานกัน



รูปที่ 1984.4.1

($\Rightarrow$) สมมติ AB สัมผัสกับวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น AB สัมผัสวงกลม Cir_{CD} ที่จุด S

เพราะว่า AB และ CD ขนานกัน เพราะฉะนั้น CD สัมผัสวงกลม Cir_{AB} ที่จุด T

เพราะว่า $MT \perp CD$ และ $NS \perp AB$ เพราะฉะนั้น $NS = MT$... (5)

จาก (3) จะได้ $AB = 2MT$ และจาก (4) จะได้ $CD = 2NS$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $AB = CD$

เพราะว่า $AB = CD$ และ AB ขนานกับ CD เพราะฉะนั้น $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เพราะฉะนั้น AD ขนานกับ BC

($\Leftarrow$) สมมติ AD ขนานกับ BC

จากข้อสมมติกรณีที่ 1 AB และ CD ขนานกัน เพราะฉะนั้น $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จาก (3) T อยู่บน CD และ $MT \perp CD$ และจาก (4) S อยู่บน AB และ $NS \perp AB$

เพราะฉะนั้น $NS = MT$ และ NS ขนานกับ MT ... (7)

$$DN = \frac{1}{2} CD \quad (N \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง } CD)$$

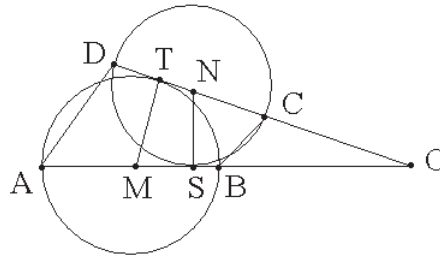
$$= \frac{1}{2} AB \quad (\square ABCD \text{ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน})$$

$$= MT \quad (\text{จาก (3)})$$

$$= NS \quad (\text{จาก (7)})$$

เพราะว่า $NS \perp AB$ และ $DN = NS$ เพราะฉะนั้น AB สัมผัสวงกลม Cir_{CD} ที่จุด S

เพราะฉะนั้น AB สัมผัสกับวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง



รูปที่ 1984.4.2

กรณีที่ 2 AB และ CD ไม่ขนานกัน

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ AB, DC ตัดกันที่จุด O

พิจารณา $\triangle OMT$, $\triangle ONS$ เพราะว่า $MT \perp CD$ และ $NS \perp AB$ เพราะฉะนั้น $\hat{MTO} = 90^\circ = \hat{NSO}$

เพราะว่า $\hat{MTO} = \hat{NSO}$ และ $\hat{MOT} = \hat{NOS}$ เพราะฉะนั้น $\triangle OMT$, $\triangle ONS$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{OM}{NO} = \frac{MT}{NS} = \frac{TO}{OS} \quad \text{เพราะฉะนั้น } \frac{OM}{MT} = \frac{ON}{NS} \quad \dots (8)$$

$$\frac{OM}{MT} = \frac{ON}{NS} \rightarrow \frac{OM}{MT} + 1 = \frac{ON}{NS} + 1 \rightarrow \frac{OM+MT}{MT} = \frac{ON+NS}{NS} \quad \dots (9)$$

$$\frac{OM}{MT} = \frac{ON}{NS} \rightarrow \frac{OM}{MT} - 1 = \frac{ON}{NS} - 1 \rightarrow \frac{OM-MT}{MT} = \frac{ON-NS}{NS} \quad \dots (10)$$

$$\text{จาก (9) และ (10) จะได้ } \frac{OM-MT}{OM+MT} = \frac{ON-NS}{ON+NS}$$

$$\text{เพราะว่าจาก (3) } MT = MA = MB \text{ เพราะฉะนั้น } \frac{OM-MB}{OM+MA} = \frac{ON-NS}{ON+NS}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{OB}{OA} = \frac{ON-NS}{ON+NS} \quad \dots (11)$$

($\Rightarrow$) สมมติ AB สัมผัสกับวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น $NS = NC = ND =$ รัศมีของวงกลม Cir_{CD}

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (11) จะได้ } \frac{OB}{OA} = \frac{ON-NS}{ON+NS} = \frac{ON-NC}{ON+ND} = \frac{OC}{OD}$$

$$\text{เพราะว่า } \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD} \text{ เพราะฉะนั้น AD ขนานกับ BC}$$

($\Leftarrow$) สมมติ AD ขนานกับ BC

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (11) จะได้ } \frac{OC}{OD} = \frac{ON-NS}{ON+NS} \quad \dots (12)$$

$$\text{เพราะว่า } OC = ON - NC \text{ และ } OD = ON + ND \text{ และจาก (4) } ND = NC$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } OC = ON - NC \text{ และ } OD = ON + NC \quad \dots (13)$$

$$\text{จาก (12) และ (13) จะได้ } \frac{ON-NC}{ON+NC} = \frac{ON-NS}{ON+NS}$$

$$(ON - NC)(ON + NS) = (ON - NS)(ON + NC)$$

$$ON^2 + ONNS - NC ON - NC NS = ON^2 + ONNC - NS ON - NS NC$$

$$2(ONNS) = 2(ONNC)$$

$$NC = NS$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } ND = NC = NS$$

เพราะว่า $NS \perp AB$ เพราะฉะนั้น AB สัมผัสกับวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

แบบที่ 2 ข้อตกลง Δ_{XYZ} หมายถึงพื้นที่ของ ΔXYZ

$$AM = MB = MT = \frac{1}{2} AB \text{ และ } DN = NC = \frac{1}{2} CD \quad \dots (1)$$

$$\text{จาก (1) จะได้ } \Delta_{AMD} = \frac{1}{2} \Delta_{ABD} \text{ และ } \Delta_{MBC} = \frac{1}{2} \Delta_{ABC} \quad \dots (2)$$

$$\text{และ } \Delta_{AND} = \frac{1}{2} \Delta_{ACD} \text{ และ } \Delta_{BNC} = \frac{1}{2} \Delta_{BCD} \quad \dots (3)$$

ให้ $[ABCD]$ เป็นพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } [ABCD] &= \Delta_{AMD} + \Delta_{MBC} + \Delta_{CDM} \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{ABD} + \frac{1}{2} \Delta_{ABC} + \frac{1}{2} MT \cdot CD \quad (\text{จาก (2) และ } MT \perp CD) \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } [ABCD] = \frac{1}{2} (\Delta_{ABD} + \frac{1}{2} \Delta_{ABC}) + \frac{1}{4} AB \cdot CD \quad (\text{จาก (1)}) \quad \dots (4)$$

$$\text{เพราะว่า } \Delta_{ABC} + \Delta_{ACD} = [ABCD]$$

$$\text{และ } \Delta_{ABD} + \Delta_{BCD} = [ABCD]$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \Delta_{ABC} + \Delta_{ACD} = \Delta_{ABD} + \Delta_{BCD} \quad \dots (5)$$

$$\begin{aligned} [ABCD] &= \Delta_{AND} + \Delta_{BCN} + \Delta_{ABN} \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{ACD} + \frac{1}{2} \Delta_{BCD} + \frac{1}{2} AB \cdot NS \quad (\text{จาก (3) และ } NS \perp AB) \quad \dots (6) \end{aligned}$$

($\Rightarrow$) สมมติ AB สัมผัสกับวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น S เป็นจุดสัมผัสของ AB กับวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$$\text{เพราะฉะนั้น } NS \perp AB \text{ และ } NS = \frac{1}{2} CD$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (6) จะได้ } [ABCD] = \frac{1}{2} (\Delta_{ACD} + \frac{1}{2} \Delta_{BCD}) + \frac{1}{4} AB \cdot CD \quad \dots (7)$$

$$\text{จาก (4) และ (7) จะได้ } \Delta_{ABD} + \Delta_{ABC} = \Delta_{ACD} + \Delta_{BCD} \quad \dots (8)$$

$$(5) + (8) \text{ จะได้ } 2\Delta_{ABC} + \Delta_{ABD} + \Delta_{ACD} = 2\Delta_{BCD} + \Delta_{ACD} + \Delta_{ABD}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \Delta_{ABC} = \Delta_{BCD}$$

เพราะว่า ΔABC และ ΔBCD อยู่บนฐาน BC เดียวกันและ $\Delta_{ABC} = \Delta_{BCD}$

เพราะฉะนั้น AD ขนานกับ BC

($\Leftarrow$) สมมติ AD ขนานกับ BC

เพราะว่า ΔABC และ ΔBCD อยู่บนฐาน BC เดียวกัน เพราะฉะนั้น $\Delta_{ABC} = \Delta_{BCD}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2\Delta_{ABC} + \Delta_{ABD} + \Delta_{ACD} = 2\Delta_{BCD} + \Delta_{ACD} + \Delta_{ABD}$$

$$(\Delta_{ABC} + \Delta_{ABD}) + (\Delta_{ABC} + \Delta_{ACD}) = (\Delta_{ABD} + \Delta_{BCD}) + (\Delta_{ACD} + \Delta_{BCD})$$

$$\Delta_{ABC} + \Delta_{ABD} = \Delta_{ACD} + \Delta_{BCD} \quad (\text{จาก (5)}) \quad \dots (9)$$

$$\text{จาก (4) และ (6) จะได้ } \frac{1}{2} (\Delta_{ABD} + \Delta_{ABC}) + \frac{1}{4} AB \cdot CD = [ABCD]$$

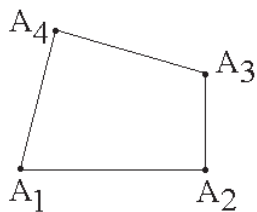
$$= \frac{1}{2} (\Delta_{ACD} + \Delta_{BCD}) + \frac{1}{2} AB \cdot NS$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (9) จะได้ } \frac{1}{4} AB \cdot CD = \frac{1}{2} AB \cdot NS$$

เพราะฉะนั้น $NS = \frac{1}{2} CD$ เพราะฉะนั้น S อยู่บนวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะว่า $NS \perp AB$ เพราะฉะนั้น AB สัมผัสกับวงกลมที่มี CD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง □

5. แนวคิด ตัวอย่างเสริมความเข้าใจ

กรณี $n = 4$ 

รูปที่ 1984.5.1

เพราะฉะนั้น $d = A_1A_3 + A_2A_4$ และ $p = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_1$... (1)

เพราะว่าในรูปสามเหลี่ยมด้านตรงข้ามมุมใหญ่ยาวกว่าด้านตรงข้ามมุมเล็ก

เพราะฉะนั้นจาก $\triangle A_1A_2A_3$ และ $\triangle A_2A_3A_4$ จะได้ $A_1A_3 > A_1A_2$ และ $A_2A_4 > A_3A_4$

เพราะว่า $A_1A_3 + A_2A_4 > A_1A_2 + A_3A_4$... (2)

ในทำนองเดียวกันจะได้ $A_2A_4 + A_3A_1 > A_2A_3 + A_4A_1$... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $2(A_1A_3 + A_2A_4) > A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_1$

$$2d > p \quad (\text{จาก (1)})$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2d}{p} > 1$... (4)

เพราะว่าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมรวมกันยาวกว่าด้านที่สาม

เพราะฉะนั้น $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$... (5)

$A_2A_4 < A_1A_2 + A_2A_4$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $A_1A_3 + A_2A_4 < A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_1$

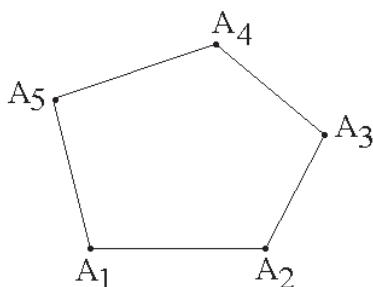
$$d < p$$

$$\frac{2d}{p} < 2 \quad \dots (7)$$

จาก (4) และ (7) จะได้ $1 < \frac{2d}{p} < 2$... (8)

เพราะว่า $n = 4$ เพราะฉะนั้น $n - 3 = 1$ และ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2 = \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{4+1}{2} \right\rfloor - 2 = 4 - 2 = 2$

เพราะฉะนั้น $n - 3 < \frac{2d}{p} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 2$ เมื่อ $n = 4$

กรณี $n = 5$ 

รูปที่ 1984.5.2

เพราะฉะนั้น $d = A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_4 + A_2A_5 + A_3A_5$... (1)

และ $p = A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_1$... (2)

ในทำนองเดียวกันกับการได้ (2) ของกรณีที่ $n = 4$ ข้างต้นจะได้

$$A_1A_3 + A_2A_4 > A_1A_2 + A_3A_4$$

$$A_1A_4 + A_2A_5 > A_1A_2 + A_4A_5$$

$$A_2A_4 + A_3A_5 > A_2A_3 + A_4A_5$$

$$A_2A_5 + A_3A_1 > A_2A_3 + A_5A_1$$

$$A_3A_5 + A_4A_1 > A_3A_4 + A_5A_1$$

เพราะฉะนั้นบวกอสมการทั้ง 5 จะได้

$$2(A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_4 + A_2A_5 + A_3A_5) > 2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_1)$$

$$2d > 2p \quad (\text{จาก (1) และ (2)})$$

$$2 < \frac{2d}{p} \quad \dots (3)$$

เพราะว่าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมรวมกันยาวกว่าด้านที่สาม

เพราะฉะนั้น

$$A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$$

$$A_1A_4 < A_1A_5 + A_5A_4$$

$$A_2A_4 < A_2A_3 + A_3A_4$$

$$A_2A_5 < A_2A_1 + A_1A_5$$

$$A_3A_5 < A_3A_4 + A_4A_5$$

เพราะฉะนั้นบวกอสมการทั้ง 5 จะได้

$$A_1A_3 + A_1A_4 + A_2A_4 + A_2A_5 + A_3A_5 < 2(A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_1)$$

$$d < 2p \quad (\text{จาก (1) และ (2)})$$

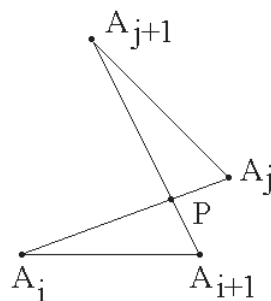
$$\frac{2d}{p} < 4 \quad \dots (4)$$

จาก (3) และ (4) จะได้ $2 < \frac{2d}{p} < 4$

เพราะว่า $n = 5$ เพราะฉะนั้น $n - 3 = 2$ และ $\left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2 = \left[\frac{5}{2}\right] \left[\frac{5+1}{2}\right] - 2 = (2)(3) - 2 = 4$

เพราะฉะนั้น $n - 3 < \frac{2d}{p} < \left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n+1}{2}\right] - 2$ เมื่อ $n = 5$

กรณีทั่วไป



รูปที่ 1984.5.3

ให้ A_i เป็นตำแหน่งของจุดบนรูป n เหลี่ยมมุม $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

ให้ $A_n = A_0$ และ A_k หมายถึง $k \pmod n$

ให้ A_iA_{i+1} และ A_jA_{j+1} เป็นด้านของรูป n เหลี่ยมมุม และ A_iA_{i+1}, A_jA_{j+1} ไม่เป็นด้านเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $A_i A_j$ และ $A_{i+1} A_{j+1}$ เป็นเส้นทแยงมุมของรูป n เหลี่ยมนูน

ให้ $A_i A_j$ และ $A_{i+1} A_{j+1}$ ตัดกันที่จุด P

เพราะว่าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมรวมกันยาวกว่าด้านที่สาม

เพราะฉะนั้น $A_i P + P A_{i+1} > A_i A_{i+1}$ และ $A_j P + P A_{j+1} > A_j A_{j+1}$

เพราะฉะนั้น $(A_i P + A_j P) + (P A_{i+1} + P A_{j+1}) > A_i A_{i+1} + A_j A_{j+1}$

เพราะฉะนั้น $A_i A_j + A_{i+1} A_{j+1} > A_i A_{i+1} + A_j A_{j+1}$... (1)

เพราะว่า $A_i A_{i+1}$, $A_j A_{j+1}$ ไม่เป็นด้านเดียวกัน

และ $A_i A_j$ และ $A_{i+1} A_{j+1}$ เป็นเส้นทแยงมุมของรูป n เหลี่ยมนูน

เพราะฉะนั้นสำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ จะได้ $j \notin \{i, i-1, i+1\}$

เพราะฉะนั้นจาก (1) และ (2) จะได้

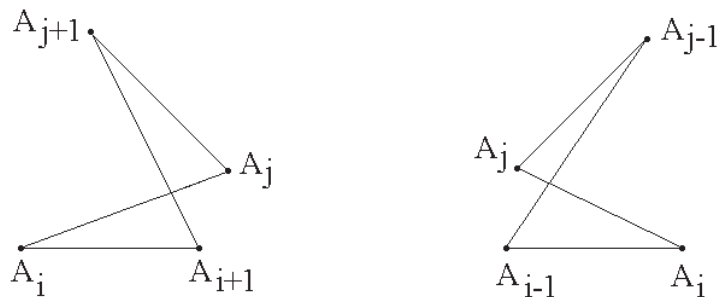
$$\sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_j + A_{i+1} A_{j+1}) > \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_{i+1} + A_j A_{j+1})$$

$$\text{และ} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_j + A_{i+1} A_{j+1}) > \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_{i+1} + A_j A_{j+1}) \quad \dots (2)$$

$$\text{ให้} \quad \text{LHS} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_j + A_{i+1} A_{j+1})$$

$$\text{และ} \quad \text{RHS} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_{i+1} + A_j A_{j+1})$$

$$\text{พิจารณาการปรากฏของ } A_i A_j \text{ ใน LHS} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_j + A_{i+1} A_{j+1})$$



รูปที่ 1984.5.4

แต่ละค่า i และ j จะได้ $A_i A_j$ ปรากฏใน LHS ดังนี้

$$(A_i A_j + A_{i+1} A_{j+1}), (A_j A_i + A_{j+1} A_{i+1}), (A_i A_j + A_{i-1} A_{j-1}), (A_j A_i + A_{j-1} A_{i-1})$$

เพราะว่า $A_i A_j$ และ $A_j A_i$ เป็นเส้นทแยงมุมเส้นเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $A_i A_j$ ปรากฏขึ้น 4 ครั้งใน LHS

เพราะว่า d เป็นผลบวกของเส้นทแยงมุม

$$\text{เพราะฉะนั้น LHS} = \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_j + A_{i+1} A_{j+1}) = 4d \quad \dots (3)$$

พิจารณาการปรากฏพจน์ $A_i A_{i+1}$ ใน $RHS = \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_{i+1} + A_j A_{j+1})$

เพราะว่า 1. แต่ละพจน์ $A_i A_{i+1}$ เราต้องเลือก j จากเงื่อนไข $j \notin \{i, i-1, i+1\}$ จึงเลือก j ได้ $n-3$ วิธี และ 2. $A_i A_{i+1}$ และ $A_{i+1} A_i$ เป็นด้านเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $A_i A_{i+1}$ ปรากฏใน RHS ทั้งหมด $2(n-3)$ ครั้ง

เพราะว่า p = ความยาวเส้นรอบรูปของรูป n เหลี่ยมมุม

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2(n-3)p = RHS = \sum_{i=1}^n \sum_{j \notin \{i, i-1, i+1\}} (A_i A_{i+1} + A_j A_{j+1}) \quad \dots (4)$$

จาก (2), (3) และ (4) จะได้ $4d > 2(n-3)p$

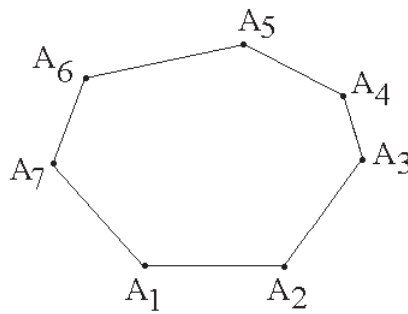
$$\text{เพราะฉะนั้น } n-3 < \frac{2d}{p} \quad \dots (5)$$

ในกรณีที่ AX เป็นเส้นทแยงมุมของรูป n เหลี่ยมมุม

จะได้ AX น้อยกว่าผลบวก m ด้าน (จาก X ไป A) และ AX น้อยกว่าผลบวก $n-m$ ด้าน (จาก A ไป X)

เพราะฉะนั้นสำหรับแต่ละเส้นทแยงมุม $A_i A_r$ เราจะเลือกผลบวกที่มีจำนวนด้านน้อยกว่า

กรณี $n = 2m + 1$



รูปที่ 1984.5.5

เพื่อให้เข้าใจแนวคิดของการจัดรูปพีชคณิตสำหรับกรณีทั่วไป

ขอยกตัวอย่างกรณี $n = 7 = 2(3) + 1$ เพราะฉะนั้น $m = 3$

เพราะว่าทุกค่า $1 \leq i \leq 7$ ($n = 7$)

จะได้ $A_i A_{i+r} \leq A_i A_{i+1} + A_{i+1} A_{i+2} + \dots + A_{i+r-1} A_{i+r}$ ทุกค่า $2 \leq r \leq 3$ ($m = 3$)

เพราะฉะนั้น

$$i = 1 \quad A_1 A_3 < A_1 A_2 + A_2 A_3 \quad (r = 2)$$

$$A_1 A_4 < A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 \quad (r = 3)$$

$$i = 2 \quad A_2 A_4 < A_2 A_3 + A_3 A_4 \quad (r = 2)$$

$$A_2 A_5 < A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 \quad (r = 3)$$

$$i = 3 \quad A_3 A_5 < A_3 A_4 + A_4 A_5 \quad (r = 2)$$

$$A_3 A_6 < A_3 A_4 + A_4 A_5 + A_5 A_6 \quad (r = 3)$$

$$i = 4 \quad A_4 A_6 < A_4 A_5 + A_5 A_6 \quad (r = 2)$$

$$A_4 A_7 < A_4 A_5 + A_5 A_6 + A_6 A_7 \quad (r = 3)$$

$$\begin{aligned}
i = 5 \quad A_5A_7 &< A_5A_6 + A_6A_7 & (r = 2) \\
A_5A_1 &< A_5A_6 + A_6A_7 + A_7A_1 & (r = 3, A_{7+1} = A_{8 \pmod{7}} = A_1) \\
i = 6 \quad A_6A_1 &< A_6A_7 + A_7A_1 & (r = 2) \\
A_6A_2 &< A_6A_7 + A_7A_1 + A_1A_2 & (r = 3) \\
i = 7 \quad A_7A_2 &< A_7A_1 + A_1A_2 & (r = 2, A_{7+2} = A_{9 \pmod{7}} = A_2) \\
A_7A_3 &< A_7A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 & (r = 3, A_{7+3} = A_{10 \pmod{7}} = A_3)
\end{aligned}$$

การบวกข้างต้นทั้ง 14 อสมการจะเกิดการครบรอบพอดี (ทางด้านซ้ายได้เส้นทแยงมุมทุกเส้น)

พิจารณาผลบวกของอสมการทุกค่า $1 \leq i \leq 7$ ($n = 7$) และ ทุกค่า $2 \leq r \leq 3$ ($m = 3$) จะได้

ผลบวกทางด้านซ้ายของอสมการ (LHS) = ผลรวมเส้นทแยงมุม = d

ผลบวกทางด้านขวาของอสมการ (RHS) = $(2)p + (2)p + (1)p$

เพราะฉะนั้น $d < (2)p + (2)p + (1)p$

$$= ((m - 1) + ((m - 1) + 1))p \text{ เมื่อ } m = 3$$

พิจารณากรณีทั่วไป $n = 2m + 1$

เพราะฉะนั้น $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

ทุกค่า $1 \leq i \leq n$ และ ทุกค่า $2 \leq r \leq m$ จะได้

$$A_iA_{i+2} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2}$$

$$A_iA_{i+3} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3}$$

$$A_iA_{i+4} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+3}A_{i+4}$$

:

$$A_iA_{i+r} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+3}A_{i+4} + \dots + A_{i+r-1}A_{i+r}$$

:

$$A_iA_{i+m-1} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+3}A_{i+4} + \dots + A_{i+m-2}A_{i+m-1}$$

$$A_iA_{i+m} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+3}A_{i+4} + \dots + A_{i+m-2}A_{i+m-1} + A_{i+m-1}A_{i+m}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{r=2}^m A_iA_{i+r}$$

$$= A_iA_{i+2} + A_iA_{i+3} + A_iA_{i+4} + \dots + A_iA_{i+r} + \dots + A_iA_{i+m-1} + A_iA_{i+m}$$

$$< (m - 1)A_iA_{i+1} + (m - 1)A_{i+1}A_{i+2} + (m - 2)A_{i+2}A_{i+3} + (m - 3)A_{i+3}A_{i+4}$$

$$+ \dots + 2A_{i+m-2}A_{i+m-1} + A_{i+m-1}A_{i+m} \quad \dots (6)$$

เพราะว่า p เป็นความยาวเส้นรอบรูป n เหลี่ยมมุม

$$\text{เพราะฉะนั้น } p = \sum_{i=1}^n A_iA_{i+1} = \sum_{i=1}^n A_{i+1}A_{i+2} = \dots = \sum_{i=1}^n A_{i+m-1}A_{i+m} \quad \dots (7)$$

เพราะว่า d เป็นผลบวกของเส้นทแยงมุม

เพราะฉะนั้น $d = \sum_{i=1}^n \sum_{r=2}^m A_i A_{i+r}$

$$< \sum_{i=1}^n ((m-1)A_i A_{i+1} + (m-1)A_{i+1} A_{i+2} + (m-2)A_{i+2} A_{i+3} + (m-3)A_{i+3} A_{i+4} + \dots + 2A_{i+m-2} A_{i+m-1} + A_{i+m-1} A_{i+m}) \quad (\text{จาก (6)})$$

$$= (m-1) \sum_{i=1}^n A_i A_{i+1} + (m-1) \sum_{i=1}^n A_{i+1} A_{i+2} + (m-2) \sum_{i=1}^n A_{i+2} A_{i+3} + \dots + \dots + 2 \sum_{i=1}^n A_{i+m-2} A_{i+m-1} + \sum_{i=1}^n A_{i+m-1} A_{i+m}$$

$$= (m-1)p + (m-1)p + (m-2)p + \dots + 2p + p \quad (\text{จาก (7)})$$

$$= (m-1)p + ((m-1) + (m-2) + \dots + 2 + 1)p$$

$$= p((m-1) + (1 + 2 + \dots + (m-1)))$$

$$= p(m-1 + \frac{m-1}{2}(1 + (m-1)))$$

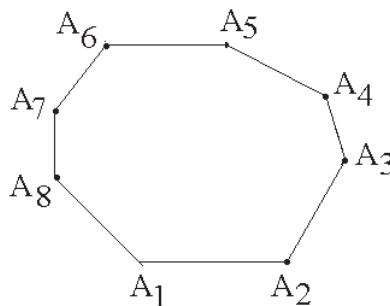
$$= \frac{p}{2}(m^2 + m - 2)$$

$$= \frac{p}{2}(m(m+1) - 2)$$

$$= \frac{p}{2}([\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}] - 2) \quad (\text{เพราะว่า } n = 2m + 1 \text{ เพราะฉะนั้น } m = [\frac{n}{2}])$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2d}{p} < [\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}] - 2$ เมื่อ n เป็นเลขคี่ ... (8)

กรณี $n = 2m$



รูปที่ 1984.5.6

เพื่อให้เข้าใจแนวคิดของการจัดรูปพีชคณิตสำหรับกรณีทั่วไป

ขอยกตัวอย่างกรณี $n = 8 = 2(4)$ เพราะฉะนั้น $m = 4$

เพราะว่าทุกค่า $1 \leq i \leq 8$ ($n = 8$)

จะได้ $A_i A_{i+r} \leq A_i A_{i+1} + A_{i+1} A_{i+2} + \dots + A_{i+r-1} A_{i+r}$ ทุกค่า $2 \leq r \leq 3$ ($m = 3$)

เพราะฉะนั้น

$$i = 1 \quad A_1 A_3 < A_1 A_2 + A_2 A_3 \quad (r = 2)$$

$$A_1 A_4 < A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 \quad (r = 3)$$

$$i = 2 \quad A_2 A_4 < A_2 A_3 + A_3 A_4 \quad (r = 2)$$

$$A_2 A_5 < A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_5 \quad (r = 3)$$

$$\begin{array}{lll}
i = 3 & A_3A_5 < A_3A_4 + A_4A_5 & (r = 2) \\
& A_3A_6 < A_3A_4 + A_4A_5 + A_5A_6 & (r = 3) \\
i = 4 & A_4A_6 < A_4A_5 + A_5A_6 & (r = 2) \\
& A_4A_7 < A_4A_5 + A_5A_6 + A_6A_7 & (r = 3) \\
i = 5 & A_5A_7 < A_5A_6 + A_6A_7 & (r = 2) \\
& A_5A_8 < A_5A_6 + A_6A_7 + A_7A_8 & (r = 3) \\
i = 6 & A_6A_8 < A_6A_7 + A_7A_8 & (r = 2) \\
& A_6A_1 < A_6A_7 + A_7A_8 + A_8A_1 & (r = 3, A_{8+1} = A_{9 \pmod{8}} = A_1) \\
i = 7 & A_7A_1 < A_7A_8 + A_8A_1 & (r = 2, A_{7+2} = A_{9 \pmod{8}} = A_1) \\
& A_7A_2 < A_7A_8 + A_8A_1 + A_1A_2 & (r = 3, A_{7+3} = A_{10 \pmod{8}} = A_2) \\
i = 8 & A_8A_2 < A_8A_1 + A_1A_2 & (r = 2, A_{8+2} = A_{10 \pmod{8}} = A_2) \\
& A_8A_3 < A_8A_1 + A_1A_2 + A_2A_3 & (r = 3, A_{8+3} = A_{11 \pmod{8}} = A_3) \\
& A_1A_5 < \frac{p}{2} & (\text{บทช่วย 1}) \\
& A_2A_6 < \frac{p}{2} & (\text{บทช่วย 1}) \\
& A_3A_7 < \frac{p}{2} & (\text{บทช่วย 1}) \\
& A_4A_8 < \frac{p}{2} & (\text{บทช่วย 1})
\end{array}$$

การบวกข้างต้นทั้ง 20 อสมการจะเกิดการครบรอบพอดี (ทางด้านซ้ายได้เส้นทแยงมุมทุกเส้น)

พิจารณาผลบวกของอสมการทุกค่า $1 \leq i \leq 8$ ($n = 8$) และ ทุกค่า $2 \leq r \leq 3$ ($m = 3$) จะได้

ผลบวกทางด้านซ้ายของอสมการ = ผลรวมเส้นทแยงมุม = d

ผลบวกทางด้านขวาของอสมการ = $(2)p + (2)p + (1)p + 4(\frac{p}{2})$

เพราะฉะนั้น $d < (2)p + (2)p + (1)p = ((m - 2) + ((m - 2) + 1))p + 4(\frac{p}{2})$ เมื่อ $m = 4$

พิจารณากรณีทั่วไปเมื่อ $n = 2m$

ทุกค่า $1 \leq i \leq n$ และ ทุกค่า $2 \leq r \leq m$ จะได้

$$A_iA_{i+2} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2}$$

$$A_iA_{i+3} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3}$$

$$A_iA_{i+4} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+3}A_{i+4}$$

:

$$A_iA_{i+r} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+3}A_{i+4} + \dots + A_{i+r-1}A_{i+r}$$

:

$$A_iA_{i+m-2} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+3}A_{i+4} + \dots + A_{i+m-3}A_{i+m-2}$$

$$A_iA_{i+m-1} < A_iA_{i+1} + A_{i+1}A_{i+2} + A_{i+2}A_{i+3} + A_{i+3}A_{i+4} + \dots + A_{i+m-3}A_{i+m-2} + A_{i+m-2}A_{i+m-1}$$

$$A_iA_{i+m} < \frac{p}{2} \quad \text{ทุกค่า } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (\text{บทช่วย 1})$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{r=2}^{m-1} A_i A_{i+r}$

$$= A_i A_{i+2} + A_i A_{i+3} + A_i A_{i+4} + \dots + A_i A_{i+r} + \dots + A_i A_{i+m-2} + A_i A_{i+m-1}$$

$$< (m-2) A_i A_{i+1} + (m-2) A_{i+1} A_{i+2} + (m-3) A_{i+2} A_{i+3} + (m-4) A_{i+3} A_{i+4} \\ + \dots + 2 A_{i+m-2} A_{i+m-1} + A_{i+m-1} A_{i+m} \quad \dots (10)$$

เพราะว่า d เป็นผลบวกของเส้นทแยงมุม

เพราะฉะนั้น $d = \sum_{i=1}^n \sum_{r=2}^{m-1} A_i A_{i+r} + \sum_{i=1}^m A_i A_{i+m}$

$$< \sum_{i=1}^n ((m-2) A_i A_{i+1} + (m-2) A_{i+1} A_{i+2} + (m-3) A_{i+2} A_{i+3} + (m-4) A_{i+3} A_{i+4} + \dots + \\ + \dots + 2 A_{i+m-2} A_{i+m-1} + A_{i+m-1} A_{i+m}) + \sum_{i=1}^m A_i A_{i+m} \quad (\text{จาก (10)})$$

$$= (m-2) \sum_{i=1}^n A_i A_{i+1} + (m-2) \sum_{i=1}^n A_{i+1} A_{i+2} + (m-3) \sum_{i=1}^n A_{i+2} A_{i+3} \\ + (m-4) \sum_{i=1}^n A_{i+3} A_{i+4} + \dots + 2 \sum_{i=1}^n A_{i+m-2} A_{i+m-1} + \sum_{i=1}^n A_{i+m-1} A_{i+m} + \sum_{i=1}^m A_i A_{i+m}$$

$$= (m-2)p + (m-2)p + (m-3)p + (m-4)p + \dots + 2p + p + \sum_{i=1}^m A_i A_{i+m}$$

$$= (m-2)p + ((m-2) + (m-3) + (m-4) + \dots + 2 + 1)p + \sum_{i=1}^m A_i A_{i+m}$$

$$= (m-2)p + \left(\frac{(m-2)}{2} ((m-2) + 1) \right) p + \sum_{i=1}^m A_i A_{i+m}$$

$$= \frac{p}{2} (2(m-2) + (m-2)(m-1)) + \sum_{i=1}^m A_i A_{i+m}$$

$$= \frac{p}{2} (2m - 4 + m^2 - 3m + 2) + \sum_{i=1}^m A_i A_{i+m}$$

$$= \frac{p}{2} (m^2 - m - 2) + \sum_{i=1}^m A_i A_{i+m}$$

$$< \frac{p}{2} (m^2 - m - 2) + \sum_{i=1}^m \frac{p}{2} \quad (\text{บทช่วย 1})$$

$$= \frac{p}{2} (m^2 - m - 2) + \frac{mp}{2}$$

$$= \frac{p}{2} (m^2 - 2)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2d}{p} < m^2 - 2$

$$= \left[\frac{2m}{2} \right] \left[\frac{2m}{2} \right] - 2$$

$$= \left[\frac{2m}{2} \right] \left[\frac{2m+1}{2} \right] - 2$$

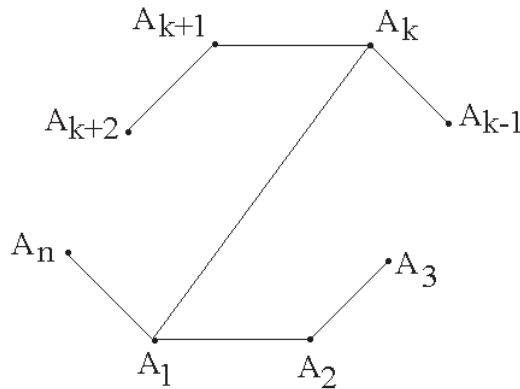
$$= \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n+1}{2} \right] - 2$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2d}{p} < [\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}] - 2$ เมื่อ n เป็นเลขคู่ ... (11)

จาก (5), (8) และ (11) จะได้ $n - 3 < \frac{2d}{p} < [\frac{n}{2}][\frac{n+1}{2}] - 2$ $\square$

บทช่วย 1 ให้ p เป็นความยาวของรอบรูป n เหลี่ยมมุม $n > 3$ และ AB เป็นเส้นทแยงมุม จะได้ $AB < \frac{p}{2}$

ข้อพิสูจน์ ให้ $A_1A_2A_3 \dots A_n$ เป็นรูป n เหลี่ยมมุม



รูปที่ 1984.5.7

ให้ AB เป็นเส้นทแยงมุมของรูป n เหลี่ยมมุม $A_1A_2A_3 \dots A_n$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถกำหนดให้ $AB = A_1A_k$

เพราะฉะนั้น $A_1A_k < A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k$... (1)

และ $A_1A_k < A_1A_n + A_nA_{n-1} + \dots + A_{k+1}A_k$... (2)

$(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k) + (A_1A_n + A_nA_{n-1} + \dots + A_{k+1}A_k) = p$... (3)

สมมติ $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k > \frac{p}{2}$ และ $A_1A_n + A_nA_{n-1} + \dots + A_{k+1}A_k > \frac{p}{2}$... (4)

เพราะฉะนั้น $(A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k) + (A_1A_n + A_nA_{n-1} + \dots + A_{k+1}A_k) > p$ ขัดแย้งกับ (3)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (4) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{k-1}A_k \leq \frac{p}{2}$ และ $A_1A_n + A_nA_{n-1} + \dots + A_{k+1}A_k \leq \frac{p}{2}$... (5)

จาก (1), (2) และ (5) จะได้ $A_1A_k < \frac{p}{2}$ $\square$

6. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ $0 < a < b < c < d$ และ $ad = bc$... (1)

ให้ $a + d = 2^k$ และ $b + c = 2^m$ เมื่อ m, k เป็นจำนวนเต็มบวก ... (2)

โดยบทช่วย 1 จะได้ $a + d > b + c$

เพราะฉะนั้น $2^k > 2^m$

เพราะฉะนั้น $k > m$... (3)

$$ad = bc \quad (\text{จาก (1)})$$

$$a(2^k - a) = b(2^m - b) \quad (\text{จาก (2)})$$

$$b^2 - a^2 = b2^m - a2^k$$

$$= 2^m(b - a2^{k-m}) \quad (\text{จาก (3) } k - m > 0)$$

เพราะฉะนั้น $(b + a)(b - a) = 2^m (b - a 2^{k-m})$... (4)

จากบทช่วย 2 จะได้ $4 \mid (b + a)$ และ $4 \mid (b - a)$ พร้อมกันไม่ได้

เพราะฉะนั้น $2^{m-1} \mid (b + a)$ หรือ $2^{m-1} \mid (b - a)$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

สมมติ $2^{m-1} \mid (b - a)$... (5)

เพราะฉะนั้น $b - a \geq 2^{m-1}$

เพราะว่า $c > b > b - a$ เพราะฉะนั้น $b > 2^{m-1}$ และ $c > 2^{m-1}$

เพราะฉะนั้น $b + c > 2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^m$ ขัดแย้งกับ (2) $b + c = 2^m$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (5) $2^{m-1} \mid (b - a)$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $2^{m-1} \nmid (b - a)$

เพราะฉะนั้น $2^{m-1} \mid (b + a)$ เพราะฉะนั้น $b + a \geq 2^{m-1}$

สมมติ $b + a > 2^{m-1}$... (6)

เพราะว่า $2^{m-1} \mid (b + a)$ และ $b + a > 2^{m-1}$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก t และ $t \geq 2$ ที่ทำให้ $b + a = 2^{m-1} t$... (7)

เพราะฉะนั้น $b + a = 2^{m-1} t$

$\geq 2^{m-1} 2$ (จาก (7))

$= 2^m$

$= b + c$ (จาก (2))

เพราะฉะนั้น $a \geq c$ ขัดแย้งกับ (1) $a < c$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (6) $b + a > 2^{m-1}$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $b + a = 2^{m-1}$ เพราะฉะนั้น $b = 2^{m-1} - a$... (8)

เพราะว่า $bc = ad$

$b(2^m - b) = a(2^k - a)$ (จาก (2))

$(2^{m-1} - a)(2^m - (2^{m-1} - a)) = a(2^k - a)$ (จาก (5))

$(2^{m-1} - a)(2^{m-1} - a) = a(2^k - a)$

$2^{2(m-1)} - a^2 = a 2^k - a^2$

$2^{2(m-1)} = a 2^k$

เพราะว่า $2^{2(m-1)}$ เป็นเลขคู่ และ a เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $a = 1$

แบบที่ 2 บางส่วนที่ใช้เหมือนข้างต้นคือ $k > m$ จาก (3) และ $(b + a)(b - a) = 2^m (b - a 2^{k-m})$ จาก (4)

สมมติ $b \geq 2^{m-1}$... (9)

เพราะฉะนั้น $c > b \geq 2^{m-1}$

เพราะฉะนั้น $b + c > 2^{m-1} + 2^{m-1} = 2^m$ ขัดแย้งกับ $b + c = 2^m$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (9) $b \geq 2^{m-1}$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $b < 2^{m-1}$... (10)

$$\text{จากข้างต้น } (b + a)(b - a) = 2^m (b - a 2^{k-m}) \quad \dots (11)$$

$$\text{เพราะว่า } b \text{ เป็นเลขคี่ และ } a 2^{k-m} \text{ เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น } b - a 2^{k-m} \text{ เป็นเลขคี่} \quad \dots (12)$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (11) และ (12) จะได้ } 2^m \mid (b + a)(b - a) \text{ และ } 2^{m+1} \nmid ((b + a)(b - a))$$

$$\text{ให้ } b + a = 2^{m_1} p \quad \text{เมื่อ } m_1 \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } p \text{ เป็นเลขคี่} \quad \dots (13)$$

$$b - a = 2^{m_2} q \quad \text{เมื่อ } m_2 \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } q \text{ เป็นเลขคี่} \quad \dots (14)$$

$$\text{จาก (11), (12), (13) และ (14) จะได้ } m = m_1 + m_2 \quad \dots (15)$$

$$(13) + (14) \text{ จะได้ } 2b = 2^{m_1} p + 2^{m_2} q \text{ เพราะฉะนั้น } b = \frac{1}{2}(2^{m_1} p + 2^{m_2} q) \text{ เป็นเลขคี่} \quad \dots (16)$$

$$\text{ในทำนองเดียวกันจะได้ } a = \frac{1}{2}(2^{m_1} p - 2^{m_2} q) \text{ เป็นเลขคี่} \quad \dots (17)$$

$$\text{สมมติ } m_1 > 1 \text{ และ } m_2 > 1 \quad \dots (18)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } m_1 \geq 2 \text{ และ } m_2 \geq 2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b = \frac{1}{2}(2^{m_1} p + 2^{m_2} q) = 2^{m_1-1} p + 2^{m_2-1} q \text{ เป็นเลขคู่ ขัดแย้งกับ } b \text{ เป็นเลขคี่}$$

$$\text{เพราะฉะนั้นที่สมมติ (18) } m_1 > 1 \text{ และ } m_2 > 1 \text{ ไม่จริง}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } m_1 \leq 1 \text{ หรือ } m_2 \leq 1$$

$$\text{เพราะว่า } m_1, m_2 \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้น } m_1 = 1 \text{ หรือ } m_2 = 1$$

$$\text{สมมติ } m_1 = 1 \text{ และ } m_2 = 1 \quad \dots (19)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b = \frac{1}{2}(2^{m_1} p + 2^{m_2} q) = p + q$$

$$\text{จาก (13) และ (14) จะได้ } b = p + q \text{ เป็นเลขคู่ ขัดแย้งกับ } b \text{ เป็นเลขคี่}$$

$$\text{เพราะฉะนั้นที่สมมติ (19) } m_1 = 1 \text{ และ } m_2 = 1 \text{ ไม่จริง}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } m_1 = 1 \text{ หรือ } m_2 = 1 \text{ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้นเป็น 1 พร้อมกันไม่ได้} \quad \dots (20)$$

$$\text{สมมติ } m_1 = 1 \quad \dots (21)$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (15) จะได้ } m_2 = m - 1 \quad \dots (22)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b - a = 2^{m_2} q \quad (\text{จาก (14)})$$

$$= 2^{m-1} q \quad (\text{จาก (22)})$$

$$\geq 2^{m-1} (1) \quad (\text{จาก (14) } q \text{ เป็นเลขคี่})$$

$$\text{เพราะว่า } b > b - a \text{ เพราะฉะนั้น } b > 2^{m-1} \text{ ขัดแย้งกับ (10)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้นที่สมมติ (21) } m_1 = 1 \text{ ไม่จริง เพราะฉะนั้น } m_1 \neq 1 \quad \dots (23)$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (20) และ (23) จะได้ } m_2 = 1 \quad \dots (24)$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (15) และ (24) จะได้ } m_1 = m - 1$$

$$b + a = \frac{1}{2}(2^{m_1} p + 2^{m_2} q) + a \quad (\text{จาก (16)})$$

$$= \frac{1}{2}(2^{m_1} p + 2^{m_2} q) + \frac{1}{2}(2^{m_1} p - 2^{m_2} q) \quad (\text{จาก (17)})$$

$$= \frac{1}{2}(2^{m_1} p + 2^{m_2} q + 2^{m_1} p - 2^{m_2} q)$$

$$= \frac{1}{2}(2^{m-1} p + 2q + 2^{m-1} p - 2q) \quad (\text{เพราะว่า } m_2 = 1 \text{ และ } m_1 = m - 1)$$

$$= 2^{m-1} p \quad \dots (25)$$

$$\begin{aligned}
 b - a &= \frac{1}{2}(2^{m_1} p + 2^{m_2} q) - a && \text{(จาก (16))} \\
 &= \frac{1}{2}(2^{m_1} p + 2^{m_2} q) - \frac{1}{2}(2^{m_1} p - 2^{m_2} q) && \text{(จาก (17))} \\
 &= \frac{1}{2}(2^{m_1} p + 2^{m_2} q - 2^{m_1} p + 2^{m_2} q) \\
 &= \frac{1}{2}(2^{m-1} p + 2q - 2^{m-1} p + 2q) && \text{(เพราะว่า } m_2 = 1 \text{ และ } m_1 = m - 1) \\
 &= 2q && \dots (26)
 \end{aligned}$$

$$\text{สมมติ } p > 1 \quad \dots (27)$$

เพราะว่า p เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $p \geq 3$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก (25)} \quad a + b &= 2^{m-1} p \\
 &\geq 2^{m-1} (3) && \text{(เพราะว่า } p \geq 3) \\
 &> 2^{m-1} (2) \\
 &= 2^m \\
 &= b + c && \text{(จาก (2))}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a \geq c$ ขัดแย้งกับ $a < c$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (27) $p > 1$ ไม่จริง

เพราะว่า p เป็นเลขคี่บวก เพราะฉะนั้น $p = 1$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (25) จะได้ } a + b = 2^{m-1} \quad \dots (28)$$

$$\begin{aligned}
 (b + a)(b - a) &= 2^m (b - a 2^{k-m}) && \text{(จาก (4))} \\
 (2^{m-1})(2q) &= 2^m (b - a 2^{k-m}) && \text{(จาก (26) และ (28))} \\
 q &= b - a 2^{k-m} \\
 &= \frac{1}{2}(2^{m-1} + 2q) - a 2^{k-m} && \text{(จาก (16) และ } m_1 = m - 1, m_2 = 1 \text{ และ } p = 1) \\
 &= 2^{m-2} + q - a 2^{k-m} \\
 a 2^{k-m} &= 2^{m-2}
 \end{aligned}$$

เพราะว่า 2^{m-2} เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $a = 1$ □

บทช่วย 1 a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ $0 < a < b < c < d$ และ $ad = bc$ จะได้ $a + d > b + c$

ข้อพิสูจน์

$$\begin{aligned}
 \text{แบบที่ 1} \quad a < c \text{ และ } d - c > 0 &\rightarrow a(d - c) < c(d - c) \\
 &\rightarrow ad - ac < c(d - c) \\
 &\rightarrow bc - ac < c(d - c) && \text{(เพราะว่า } ad = bc) \\
 &\rightarrow c(b - a) < c(d - c) \\
 &\rightarrow b - a < d - c && \text{(เพราะว่า } c > 0) \\
 &\rightarrow a + d > b + c
 \end{aligned}$$

แบบที่ 2 $(d + a)^2 - (d - a)^2 = 4ad$
 $= 4bc$ (เพราะว่า $ad = bc$)
 $= (c + b)^2 - (c - b)^2$
 $(d + a)^2 - (c + b)^2 = (d - a)^2 - (c - b)^2 \quad \dots (1)$
 $0 < a < b < c < d \rightarrow d - a > c - a > 0$
 $\rightarrow d - a > c - b > 0$ (เพราะว่า $a < b$ เพราะฉะนั้น $-a > -b$)
 $\rightarrow (d - a)^2 - (c - b)^2 > 0$ (จาก (1))
 $\rightarrow (d + a)^2 - (c + b)^2 > 0$
 $\rightarrow d + a > c + b$
 $\rightarrow a + d > b + c$ □

บทช่วย 2 x, y เป็นจำนวนเต็มคี่ และ $x > y$ จะได้ $4 \mid (x + y)$ และ $4 \mid (x - y)$ พร้อมกันไม่ได้
ข้อพิสูจน์

แบบที่ 1 เพราะว่า $x = 4t + 1, y = 4t' + 1$ จะได้ $x + y = 4(t + t') + 2$ จะได้ $4 \nmid (x + y)$
 $x = 4t + 3, y = 4t' + 3$ จะได้ $x + y = 4(t + t') + 6$ จะได้ $4 \nmid (x + y)$
 $x = 4t + 3, y = 4t' + 1$ จะได้ $x - y = 4(t - t') + 2$ จะได้ $4 \nmid (x - y)$
 $x = 4t + 1, y = 4t' + 3$ จะได้ $x - y = 4(t - t') - 2$ จะได้ $4 \nmid (x - y)$

และทุกจำนวนเต็มคี่เขียนได้ในรูป $4z + 1$ หรือ $4z + 3$

เพราะฉะนั้น $4 \mid (x + y)$ และ $4 \mid (x - y)$ พร้อมกันไม่ได้

แบบที่ 2

สมมติ $4 \mid (x + y)$ และ $4 \mid (x - y)$... (1)

เพราะฉะนั้น $4 \mid ((x + y) + (x - y))$ เพราะฉะนั้น $4 \mid (2x)$ เพราะฉะนั้น $2 \mid x$

เพราะฉะนั้น x เป็นเลขคู่ ขัดแย้งกับ x เป็นจำนวนเต็มคี่

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) $4 \mid (x + y)$ และ $4 \mid (x - y)$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $4 \nmid (x + y)$ หรือ $4 \nmid (x - y)$

เพราะฉะนั้น $4 \mid (x + y)$ และ $4 \mid (x - y)$ พร้อมกันไม่ได้ □

The Twenty – Sixth International Mathematical Olympiad

Joutsa, Finland

29 June – 11 July 1985

Day I (4 July 1985)

- กำหนดให้ Cir_1 เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางบนด้าน AB และ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม และ BC, CD, DA เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม Cir_1
จงแสดงว่า $AD + BC = AB$
- ให้ n, k เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ k กับ n เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และ $k < n$
ให้ $M = \{1, 2, \dots, n-1\}$
การกำหนดสีให้กับสมาชิกของ M ด้วยสีฟ้าหรือสีขาวโดยใช้เงื่อนไขดังนี้
(i) i และ $n-i$ มีสีเดียวกัน ทุกค่า $i \in M$
(ii) i และ $|i-k|$ มีสีเดียวกัน ทุกค่า $i \in M$ และ $i \neq k$
จงแสดงว่า สมาชิกทุกตัวของ M มีสีเดียวกัน
- กำหนดให้ $o(P)$ เป็นจำนวนสัมประสิทธิ์ที่เป็นเลขคู่ของพหุนาม $P(x)$
และ $Q_i(x) = (1+x)^i$ สำหรับ $i = 0, 1, 2, \dots$
จงแสดงว่า ถ้า $i_1, i_2, \dots, i_n$ เป็นจำนวนเต็มที้อยอดคล้องเงื่อนไข $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n$
แล้ว $o(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \dots + Q_{i_n}) \geq o(Q_{i_1})$

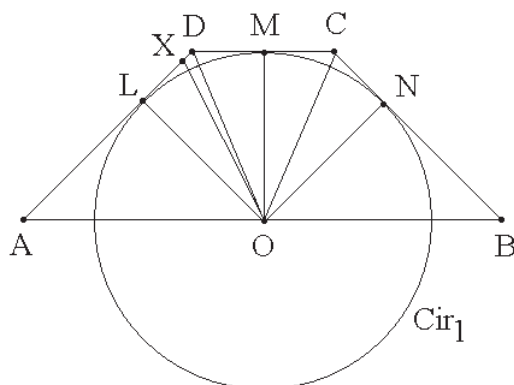
Day II (5 July 1985)

- ให้ M เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก 1985 ตัว โดยที่ไม่มีสมาชิกของ M แม้แต่ตัวเดียวที่มีตัวประกอบจำนวนเฉพาะที่มีค่ามากกว่า 23
จงแสดงว่า มีสับเซตที่มีสมาชิก 4 ตัวของ M คูณกันเป็นกำลังสี่ของจำนวนเต็มบางค่า
- ให้วงกลมที่มีจุด O เป็นจุดศูนย์กลางผ่านจุดยอด A, C ของ $\triangle ABC$ และตัดส่วนเส้นตรง AB, BC ที่จุด K, N ตามลำดับ
ให้วงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC, \triangle KBN$ ตัดกันสองจุดต่างกันว่า B และ M
จงแสดงว่า OMB เป็นมุมฉาก
- สำหรับจำนวนจริง x_1 เราสร้างลำดับ $x_1, x_2, x_3, \dots$
กำหนดโดย $x_{n+1} = x_n \left(x_n + \frac{1}{n} \right)$
จงแสดงว่า มี x_1 เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ ทุกค่า $n = 1, 2, \dots$

The Twenty – Sixth International Mathematical Olympiad Solutions

Joutsa, Finland, 29 June – 11 July 1985

1. แนวคิด แบบที่ 1

กรณีที่ 1 $AD \geq AO$ 

รูปที่ 1985.1.1.1

ให้ AD, DC, CB สัมผัสวงกลม Cir_1 ที่จุด L, M, N ตามลำดับเพราะฉะนั้น $LD = DM$ และ $MC = CN$

... (1)

เพราะว่า CM, CN เป็นเส้นสัมผัส เพราะฉะนั้น $\angle OCM = \angle NCO = \frac{1}{2} \angle DCB$

... (2)

ให้ X เป็นจุดบน AD และ $AX = AO$

... (3)

เพราะฉะนั้น $\angle AXO = \angle AOX = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle XAO) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle DAB)$

... (4)

เพราะว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม เพราะฉะนั้น $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$

... (5)

จาก (4) และ (5) จะได้ $\angle AXO = \angle AOX = \frac{1}{2} \angle DCB$

... (6)

พิจารณา $\triangle OLX$ และ $\triangle OMC$ มี $OL = OM$ (รัศมีวงกลม Cir_1)

$$\angle O\hat{L}X = 90^\circ = \angle O\hat{M}C$$

(รัศมีตั้งฉากกับเส้นสัมผัส)

และ

$$\angle O\hat{X}L = \angle O\hat{X}A$$

$$= \frac{1}{2} \angle DCB$$

(จาก (6))

$$= \angle O\hat{C}M$$

(จาก (2))

เพราะฉะนั้น $\triangle OLX$ และ $\triangle OMC$ เท่ากันทุกประการ เพราะฉะนั้น $LX = MC$

... (7)

จาก (3) จะได้ $OA = AX = AL + LX$

$$OA = AL + MC$$

(จาก (7))

... (8)

ในทำนองเดียวกันจะได้ $OB = BN + MD$

... (9)

เพราะฉะนั้น

$$AB = AO + OB$$

$$= (AL + MC) + (BN + MD)$$

(จาก (8) และ (9))

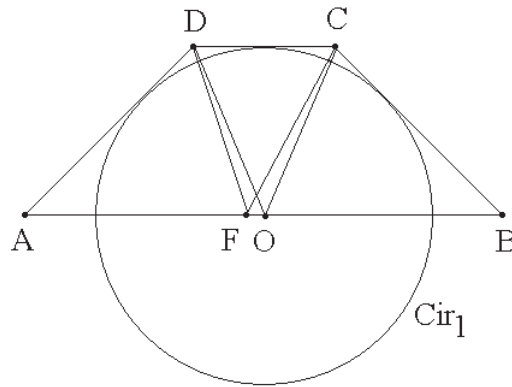
$$= (AL + CN) + (BN + DL)$$

(จาก (1))

$$= (AL + LD) + (BN + CN)$$

$$= AD + BC$$

กรณีที่ 2 $AD < AO$



รูปที่ 1985.1.2

ให้ F เป็นจุดบน AD และ $AD = AF$ เพราะฉะนั้น $\hat{AFD} = \hat{ADF} = \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{DAF})$... (10)

เพราะว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม

เพราะฉะนั้น $\hat{BAD} + \hat{BCD} = 180^\circ$ และ $\hat{ADC} + \hat{ABC} = 180^\circ$... (11)

เพราะว่า BC, CD เป็นเส้นสัมผัสวงกลม Cir_1 เพราะฉะนั้น $\hat{DCO} = \hat{BCO} = \frac{1}{2} \hat{BCD}$... (12)

เพราะว่า DC, DA เป็นเส้นสัมผัสวงกลม Cir_1 เพราะฉะนั้น $\hat{ODC} = \hat{ODA} = \frac{1}{2} \hat{ADC}$... (13)

$$\begin{aligned}
 \text{เพราะฉะนั้น } \hat{AFD} &= \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{DAF}) && (\text{จาก (10)}) \\
 &= 90^\circ - \frac{1}{2} \hat{DAB} && (A, F, B \text{ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน}) \\
 &= 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{BCD}) && (\text{จาก (11)}) \\
 &= \frac{1}{2} \hat{BCD} \\
 &= \hat{OCD} && (\text{จาก (12)}) \quad \dots (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{OCD} + \hat{OFD} &= \hat{AFD} + \hat{OFD} && (\text{จาก (14) } \hat{OCD} = \hat{AFD}) \\
 &= \hat{AFD} + \hat{BFD} && (A, O, B \text{ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน}) \\
 &= 180^\circ && (\hat{AFD}, \hat{BFD} \text{ เป็นมุมประชิดของเส้นตรง})
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\square DCOF$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ ... (15)

ให้ Cir_{DCOF} เป็นวงกลมล้อมรอบ $\square DCOF$

$$\begin{aligned}
 \hat{BFC} &= \hat{OFC} && (F, O, B \text{ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน}) \\
 &= \hat{ODC} && (\text{มุมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกันของ } Cir_{DCOF}) \\
 &= \frac{1}{2} \hat{ADC} && (\text{จาก (13)}) \\
 &= \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{ABC}) && (\text{จาก (11)}) \\
 &= 90^\circ - \frac{1}{2} \hat{ABC} && \dots (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{FCB} &= 180^\circ - \hat{BFC} - \hat{FBC} && (\text{ผลบวกมุมภายใน } \triangle BCF) \\
 &= 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2} \hat{ABC}) - \hat{ABC} && (\text{จาก (16) และ } \hat{BFC}, \hat{ABC} \text{ มุมเดียวกัน}) \\
 &= 90^\circ - \frac{1}{2} \hat{ABC}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\hat{BFC} = \hat{FCB}$ เพราะฉะนั้น $BF = BC$

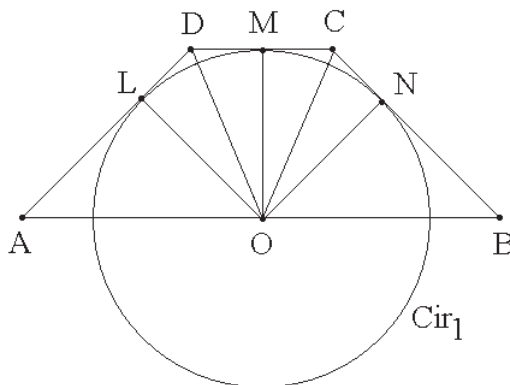
... (17)

เพราะฉะนั้น $AD = AF + FB$

$$= AF + BC \quad (\text{จาก (17)})$$

$$= AD + BC \quad (\text{จาก (10)})$$

แบบที่ 2



รูปที่ 1985.1.3

ให้ AD, DC, CB เส้นสัมผัสวงกลม Cir_1 ที่จุด L, M, N ตามลำดับ

... (1)

เพราะฉะนั้น $OL \perp AL, OL \perp LD$ และ $ON \perp CN, ON \perp ND$

... (2)

ให้ r เป็นรัศมีของวงกลม Cir_1 เพราะฉะนั้น $OL = ON = r$

... (3)

เพราะฉะนั้น $\triangle AOL, \triangle DOL, \triangle OND, \triangle ONC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

... (4)

$$\cot \hat{OAL} = \frac{AL}{OL} \quad (\triangle AOL \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก})$$

$$\cot \hat{DAB} = \frac{AL}{r} \quad (\hat{DAB}, \hat{OAL} \text{ มุมเดียวกัน และจาก (3) } OL = r)$$

$$AL = r \cot \hat{DAB}$$

... (5)

ในทำนองเดียวกันจะได้ $BN = r \cot \hat{ABC}$

... (6)

จาก (1) จะได้ $\hat{LDO} = \frac{1}{2} \hat{LDC}$ เพราะฉะนั้น $\hat{LDO} = \frac{1}{2} \hat{ADC}$

... (7)

$$\cot \hat{LDO} = \frac{LD}{LO} \quad (\text{จาก (4) } \triangle DOL \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก})$$

$$\cot\left(\frac{1}{2} \hat{ADC}\right) = \frac{LD}{r} \quad (\text{จาก (3) และ (7)})$$

$$LD = r \cot\left(\frac{1}{2} \hat{ADC}\right)$$

... (8)

เพราะว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม เพราะฉะนั้น $\hat{ABC} + \hat{ADC} = 180^\circ$

... (9)

จาก (8) และ (9) จะได้ $LD = r \cot\left(\frac{1}{2}(180^\circ - \hat{ABC})\right)$

$$= r \cot\left(90^\circ - \frac{1}{2} \hat{ABC}\right)$$

เพราะฉะนั้น $LD = r \tan\left(\frac{1}{2} \hat{ABC}\right)$

... (10)

ในทำนองเดียวกันจะได้ $NC = r \tan\left(\frac{1}{2} \hat{DAB}\right)$

... (11)

จาก (4) $\triangle AOL, \triangle ONB$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้น $\sin \hat{LAO} = \frac{LO}{OA}$ และ $\sin \hat{OBN} = \frac{ON}{OB}$

$$AO = \frac{LO}{\sin \hat{L}AO} \text{ และ } OB = \frac{ON}{\sin \hat{O}BN}$$

จาก (3) $LO = ON = r$ และ $\hat{D}AB$, $\hat{L}AO$ เป็นมุมเดียวกัน และ $\hat{O}BN$, $\hat{A}BC$ เป็นมุมเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $AO = \frac{r}{\sin \hat{D}AB}$ และ $OB = \frac{r}{\sin \hat{A}BC}$... (12)

$$AB = AO + OB$$

$$= \frac{r}{\sin \hat{D}AB} + \frac{r}{\sin \hat{A}BC} \quad (\text{จาก (12)})$$

$$= r \left(\frac{1}{\sin \hat{D}AB} + \frac{1}{\sin \hat{A}BC} \right)$$

$$= r \left(\cot \hat{D}AB + \tan \frac{\hat{D}AB}{2} + \cot \hat{A}BC + \tan \frac{\hat{A}BC}{2} \right) \quad (\text{บทช่วย 1})$$

$$= r \cot \hat{D}AB + r \tan \frac{\hat{D}AB}{2} + r \cot \hat{A}BC + r \tan \frac{\hat{A}BC}{2}$$

$$= AL + NC + BN + LD \quad (\text{จาก (5), (11), (6) และ (10)})$$

$$= (AL + LD) + (NC + BN)$$

$$= AD + BC$$

□

บทช่วย 1 $\frac{1}{\sin x} = \cot x + \tan \frac{x}{2}$

ข้อพิสูจน์ $\sin x (\cot x + \tan \frac{x}{2}) = \sin x \left(\frac{\cos x}{\sin x} + \tan \frac{x}{2} \right)$

$$= \cos x + \sin x \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$= 1$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sin x} = \cot x + \tan \frac{x}{2}$

□

2. แนวคิด ข้อตกลง สำหรับ $a, b \in M$ กำหนดให้ a และ b มีสีเดียวกันใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $a \sim b$

เพราะว่า คุณสมบัติ (i) i และ $n - i$ มีสีเดียวกัน ทุกค่า $i \in M$

เพราะฉะนั้น คุณสมบัติ (i) $i \sim (n - i)$ ทุกค่า $i \in M$

เพราะว่า คุณสมบัติ (ii) i และ $|i - k|$ มีสีเดียวกัน ทุกค่า $i \in M$ และ $i \neq k$

เพราะฉะนั้น คุณสมบัติ (ii) $i \sim |i - k|$ ทุกค่า $i \in M$ และ $i \neq k$

ตัวอย่างเสริมความเข้าใจ $n = 15, k = 4, M = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 14\}$

โดยคุณสมบัติ (i) และ (ii) จะได้

$$1 \sim (15 - 1 = 14) \quad 1 \sim (|1 - 4| = 3) \quad 2 \sim (15 - 2 = 13) \quad 2 \sim (|2 - 4| = 2)$$

$$3 \sim (15 - 3 = 12) \quad 3 \sim (|3 - 4| = 1) \quad 4 \sim (15 - 4 = 11)$$

$$5 \sim (15 - 5 = 10) \quad 5 \sim (|5 - 4| = 1) \quad 6 \sim (15 - 6 = 9) \quad 6 \sim (|6 - 4| = 2)$$

$$\begin{array}{llll}
7 \sim (15 - 7 = 8) & 7 \sim (|7 - 4| = 3) & 8 \sim (15 - 8 = 7) & 8 \sim (|8 - 4| = 4) \\
9 \sim (15 - 9 = 6) & 9 \sim (|9 - 4| = 5) & 10 \sim (15 - 10 = 5) & 10 \sim (|10 - 4| = 6) \\
11 \sim (15 - 11 = 4) & 11 \sim (|11 - 4| = 7) & 12 \sim (15 - 12 = 3) & 12 \sim (|12 - 4| = 8) \\
13 \sim (15 - 13 = 2) & 13 \sim (|13 - 4| = 9) & 14 \sim (15 - 14 = 1) & 14 \sim (|14 - 4| = 10)
\end{array}$$

จากการแจกแจงกรณีข้างต้นจะได้ตัวเลขหนึ่งตัวมีตัวเลขอีกอย่างน้อยหนึ่งตัวมีสีเดียวกัน

เพราะว่า $1 \sim 14 \sim 10 \sim 6 \sim 2 \sim 13 \sim 9 \sim 5$ เพราะฉะนั้น 1, 14, 10, 6, 2, 13, 9, 5 มีสีเดียวกัน

เพราะว่า $1 \sim 3 \sim 12 \sim 8 \sim 4 \sim 11 \sim 7$ เพราะฉะนั้น 1, 3, 12, 8, 4, 11, 7 มีสีเดียวกัน

เพราะฉะนั้น 1, 2, 3, ..., 14 มีสีเดียวกัน

ข้อพิสูจน์สำหรับกรณีทั่วไป แบบที่ 1

เพราะว่า $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ เป็นเซตสมมูลของเศษเหลือตกค้างที่ลงรอยกับ n และ $\gcd(k, n) = 1$

เพราะฉะนั้น $\{0, k, 2k, 3k, \dots, (n-1)k\}$ เป็นเซตสมมูลของเศษเหลือตกค้างที่ลงรอยกับ n

ให้ $\langle x \rangle$ แทนจำนวนเต็มบวกค่าน้อยสุดที่ทำให้ $\langle x \rangle \equiv x \pmod{n}$

เพราะฉะนั้น $\{\langle 0 \rangle, \langle k \rangle, \langle 2k \rangle, \dots, \langle (n-1)k \rangle\}$ เป็นเซตสมมูลของเศษเหลือตกค้างที่ลงรอยกับ n

เพราะฉะนั้น $\{1, 2, \dots, n-1\} = \{\langle k \rangle, \langle 2k \rangle, \dots, \langle (n-1)k \rangle\}$

เพราะฉะนั้นมีการเรียงสับเปลี่ยน P ของ $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \dots, \langle n-1 \rangle$

ที่ทำให้ $P = \langle k \rangle, \langle 2k \rangle, \dots, \langle (n-1)k \rangle$

ให้ $i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$

เพราะฉะนั้นต้องมี $r, s \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ที่ทำให้ $\langle k \rangle = \langle r \rangle$ และ $\langle (i+1)k \rangle = \langle s \rangle$... (1)

เพราะฉะนั้น $ik \equiv r \pmod{n}$ และ $(i+1)k \equiv s \pmod{n}$

เพราะฉะนั้น $(i+1)k - ik \equiv (s - r) \pmod{n}$

$$k \equiv (s - r) \pmod{n}$$

$$k + r \equiv s \pmod{n}$$

เพราะฉะนั้น $n \mid (r + k - s)$

เพราะว่า $0 < k < n, 0 < r < n, 0 < s < n$ และ $n \mid (r + k - s)$ เพราะฉะนั้น $s = r + k$ หรือ $s = r + k - n$

กรณีที่ 1 $s = r + k$

เพราะฉะนั้น $r = s - k$ เพราะว่า $r > 0$ เพราะฉะนั้น $r = |s - k|$

เพราะว่าจากคุณสมบัติ (ii) $|s - k| \sim s$ และ $r = |s - k|$ เพราะฉะนั้น $r \sim s$

เพราะฉะนั้น $\langle r \rangle \sim \langle s \rangle$

... (2)

เพราะฉะนั้นจาก (1) และ (2) จะได้ $\langle ik \rangle \sim \langle (i+1)k \rangle$

กรณีที่ 2 $s = r + k - n$

เพราะฉะนั้น $r = n - (k - s)$

เพราะว่าจากคุณสมบัติ (i) $(k - s) \sim (n - (k - s))$ และ $r = n - (k - s)$ เพราะฉะนั้น $k - s \sim r$

เพราะว่า $r = n - (k - s)$ และ $0 < r < n$ เพราะฉะนั้น $k - s > 0$

เพราะฉะนั้น $|s - k| = |k - s| = k - s$

เพราะว่า $k - s \sim r$ เพราะฉะนั้น $|s - k| \sim r$

เพราะว่าจากคุณสมบัติ (ii) $|s - k| \sim s$ และ $|s - k| \sim r$ เพราะฉะนั้น $r \sim s$

เพราะว่า $r \sim s$ เพราะฉะนั้น $\langle r \rangle \sim \langle s \rangle$

เพราะฉะนั้น $\langle ik \rangle \sim \langle (i + 1)k \rangle$

เพราะว่า $i \in \{1, 2, \dots, n - 2\}$ เพราะฉะนั้น $\langle k \rangle, \langle 2k \rangle, \dots, \langle (n - 1)k \rangle$ มีสิเดียวกัน

เพราะว่า $P = (\langle k \rangle, \langle 2k \rangle, \dots, \langle (n - 1)k \rangle)$ และ P เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \dots, \langle n - 1 \rangle$

เพราะฉะนั้น $\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \dots, \langle n - 1 \rangle$ มีสิเดียวกัน เพราะฉะนั้น $1, 2, \dots, n - 1$ มีสิเดียวกัน

ข้อพิสูจน์สำหรับกรณีทั่วไป แบบที่ 2

ให้ $a \in M$ โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ a ถูกกำหนดเป็นสีฟ้า

โดยคุณสมบัติ (i) จะได้ a และ $n - a$ เป็นสีฟ้า

... (1)

โดยคุณสมบัติ (ii) จะได้ $a + k$ และ $|(a + k) - k|$ สีเดียวกัน

เพราะว่า $|(a + k) - k| = a$ และ a เป็นสีฟ้า เพราะฉะนั้น $a + k$ เป็นสีฟ้า

... (2)

ในทำนองเดียวกันจะได้ $a + kt$ เป็นสีฟ้าทุกค่า $t = 0, 1, 2, 3, \dots$

... (3)

เพราะว่า $k - (-a) = k + a > 0$ เพราะฉะนั้น $|(-a) - k| = |k - (-a)| = k + a$

เพราะว่า $k + a$ เป็นสีฟ้า เพราะฉะนั้น $|(-a) - k|$ เป็นสีฟ้า

โดยคุณสมบัติ (ii) จะได้ $-a$ และ $|(-a) - k|$ สีเดียวกัน เพราะฉะนั้น $-a$ เป็นสีฟ้า

ในทำนองเดียวกันจะได้ $-a + ku$ เป็นสีฟ้า ทุกค่า $u = 0, 1, 2, 3, \dots$

เพราะฉะนั้น $a - ku = -(-a + ku)$ เป็นสีฟ้า ทุกค่า $u = 0, 1, 2, 3, \dots$

... (4)

จาก (3) และ (5) สรุปได้ว่า ถ้า a เป็นสีฟ้า แล้ว $a \pmod k$ เป็นสีฟ้า

เพราะฉะนั้นทุกสมาชิก $b \in M$ ถ้า b เป็นสีฟ้า แล้ว $b \pmod k$ เป็นสีฟ้า

... (5)

และ ทุกสมาชิก $b \in M$ ถ้า b เป็นสีฟ้า แล้ว $-b$ เป็นสีฟ้า

... (6)

เพราะฉะนั้น $a \pmod k$ และ $-a \pmod k$ เป็นสีฟ้า

... (7)

ให้ $P(m)$ แทนข้อความ “ $mn + a$ เป็นสีฟ้า”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $n + a \sim n - (n + a) = -a$ และ $-a$ เป็นสีฟ้า เพราะฉะนั้น $n + a, -a$ เป็นสีฟ้า

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(m)$ เป็นจริง เมื่อ $m \geq 1$ แล้ว $P(m + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(m)$ เป็นจริง เมื่อ $m \geq 1$ เพราะฉะนั้น $mn + a$ เป็นสีฟ้า จาก (6) จะได้ $-(mn + a)$ เป็นสีฟ้า

เพราะฉะนั้นโดยคุณสมบัติ (i) จะได้ $n - (-(mn + a))$ เป็นสีฟ้า

เพราะว่า $n - (-(mn + a)) = (m + 1)n + a$ เพราะฉะนั้น $(m + 1)n + a$ เป็นสีฟ้า

เพราะฉะนั้น $P(m + 1)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ $P(m)$ เป็นจริง ทุกค่า m