

รวมข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ  
International Mathematical Olympiad

**IMO**

Problems and Solutions

1959 - 1982

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา  
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์  
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
คณิตศาสตร์ปริทัศน์ เล่มที่ 33

## รวมข้อสอบแข่งขัน

### คณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

International Mathematical Olympiad IMO

Problems and Solutions 1959 - 1982

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 33

รวมข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ 1958 - 1982

International Mathematical Olympiad (IMO)

Problems and Solutions 1958 - 1982

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : ธันวาคม พ.ศ. 2560

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-445-937-3

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## คำนำ

การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ (International Mathematical Olympiad : IMO) จัดขึ้นครั้งแรกที่ประเทศโรมาเนีย ในปี ค.ศ. 1959 ประเทศไทยได้จัดส่งทีมนักเรียนเข้าแข่งขันครั้งแรก ในปี ค.ศ. 1989 ณ ประเทศสหพันธ์สาธารณรัฐเยอรมัน ซึ่งเป็นการแข่งขันครั้งที่ 30 ผลงานในการแข่งขันครั้งแรกของประเทศไทยถือได้ว่าประสบความสำเร็จเป็นอย่างมากคือ ได้รับรางวัลเหรียญทองแดง 1 รางวัล และ รางวัลเกียรติคุณประกาศ 2 รางวัล ผลงานต่อมาในช่วงปี 2532-2559 นักเรียนไทยได้รับรางวัลเป็นเหรียญทอง 18 เหรียญ เหรียญเงิน 50 เหรียญ เหรียญทองแดง 45 เหรียญ เกียรติคุณประกาศ 22 รางวัล และ Best Solution 1 รางวัล เพื่อสนับสนุนให้นักเรียนได้ทำข้อสอบอัตโนมัติ และมีประสบการณ์ตรงในการทำข้อสอบ IMO ตัวจริง ผู้เขียนจึงได้รวบรวมข้อสอบ IMO ตั้งแต่ปี ค.ศ. 1959 - ค.ศ. 1982 และเฉลยอย่างละเอียด

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

# สารบัญ

| ครั้งที่ | ค.ศ. | เมือง และ ประเทศ                                       | หน้า      |
|----------|------|--------------------------------------------------------|-----------|
| 1        | 1959 | Bucharest – Brasov, Romania, 23 – 31 July 1959         | 1 – 14    |
| 2        | 1960 | Bucharest – Sinaia, Romania, 18 – 25 July 1960         | 15 – 30   |
| 3        | 1961 | Budapest – Veszprem, Hungary, 6 – 16 July 1961         | 31 – 44   |
| 4        | 1962 | Prague – Hiuboka, Czechoslovakia, 7 – 15 July 1962     | 45 – 68   |
| 5        | 1963 | Wroclaw, Poland, 5 – 13 July 1963                      | 69 – 84   |
| 6        | 1964 | Moscow, Soviet Union, 30 June – 10 July 1964           | 85 – 98   |
| 7        | 1965 | Berlin, DR Germany, 3 – 13 July 1965                   | 99 – 122  |
| 8        | 1966 | Sofia, Bulgaria, 3 – 13 July 1966                      | 123 – 140 |
| 9        | 1967 | Cetinje, Yugoslavia, 2 – 13 July 1967                  | 141 – 162 |
| 10       | 1968 | Moscow – Leningrad, Soviet Union, 5 – 18 July 1968     | 163 – 180 |
| 11       | 1969 | Bucharest, Romania, 5 – 20 July 1969                   | 181 – 200 |
| 12       | 1970 | Budapest – Keszthely, Hungary, 8 – 22 July 1970        | 201 – 220 |
| 13       | 1971 | Bratislava – Zilina, Czechoslovakia, 10 – 21 July 1971 | 221 – 240 |
| 14       | 1972 | Warsaw – Toruna, Poland, 5 – 17 July 1972              | 241 – 252 |
| 15       | 1973 | Moscow, Soviet Union, 5 – 16 July 1973                 | 253 – 266 |
| 16       | 1974 | Erfurt – Berlin, DR Germany, 4 – 17 July 1974          | 267 – 286 |
| 17       | 1975 | Burgas – Sofia, Bulgaria, 3 – 16 July 1975             | 287 – 300 |
| 18       | 1976 | Vienna – Linz, Austria, 7 – 21 July 1976               | 301 – 312 |
| 19       | 1977 | Belgrade – Arandjelovac, Yugoslavia, 1 – 13 July 1977  | 313 – 328 |
| 20       | 1978 | Bucharest, Romania, 3 – 10 July 1978                   | 329 – 342 |
| 21       | 1979 | London, United Kingdom, 30 June – 9 July 1979          | 343 – 352 |
| 22       | 1981 | Washington DC, USA, 8 – 20 July 1981                   | 353 – 372 |
| 23       | 1982 | Budapest, Hungary, 5 – 14 July 1982                    | 373 – 396 |

หมายเหตุ ปี ค.ศ. 1980 ไม่มีการสอบ

# The First International Mathematical Olympiad

Bucharest – Brasov, Romania

23 – 31 July 1959

## Day I

1. จงแสดงว่า  $\frac{21n+4}{14n+3}$  เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ ทุกจำนวนเต็มบวก  $n$
2. จงหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนจริงของ  $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = A$   
เมื่อ 2.1  $A = \sqrt{2}$       2.2  $A = 1$       2.3  $A = 2$
3. ให้  $a, b, c$  เป็นจำนวนจริง พหุนามกำลังสองในเทอมของ  $\cos x$   
กำหนดโดย  $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$  มีรากสมการเป็น  $\cos x = \cos x_1, \cos x_2$ 
  - 3.1 จงใช้  $a, b, c$  ข้างต้นหาพหุนามกำลังสองในเทอมของ  $\cos 2x$   
ที่มีรากเป็น  $\cos 2x = \cos 2x_1, \cos 2x_2$
  - 3.2 กำหนดให้  $a = 4, b = 2, c = -1$   
จงหามุมบวกค่าน้อยที่สุดสองจำนวน  $x_1, x_2$  ที่ทำให้พหุนามกำลังสองในเทอมของ  $\cos x$   
ซึ่งกำหนดโดย  $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$  มีรากเป็น  $\cos x = \cos x_1, \cos x_2$

## Day II

4. กำหนดให้  $\triangle ABC$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี  $\angle C = 90^\circ$  และ  $BC = a, CA = b, AB = c$   
ให้  $CO$  เป็นเส้นมัธยฐาน และ ความยาว  $OC$  เท่ากับค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ  $a, b$ 
  - 4.1 จงสร้าง  $\triangle ABC$  ตามเงื่อนไขข้างต้น
  - 4.2 จงหามุมที่  $OC$  ทำกับ  $AB$
5. ให้  $M$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $AB$  และ  $M$  อยู่ระหว่าง  $A$  และ  $B$   $\square AMCD, \square MBEF$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส  
บนด้านเดียวกันของ  $AB$  และมี  $AM, MB$  เป็นฐานของรูปสี่เหลี่ยม ตามลำดับ  
ให้  $\text{Cir}_{AMCD}, \text{Cir}_{MBEF}$  เป็นวงกลมล้อมรอบ  $\square AMCD, \square MBEF$  ตามลำดับ  
ให้  $P, Q$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $\text{Cir}_{AMCD}, \text{Cir}_{MBEF}$  ตามลำดับ  
ให้วงกลม  $\text{Cir}_{AMCD}, \text{Cir}_{MBEF}$  ตัดกันที่จุด  $M$  และ  $N$  ให้  $N'$  เป็นจุดตัดของเส้นตรงที่ผ่าน  $AF$  และ  $BC$ 
  - 5.1 จงแสดงว่า  $N$  และ  $N'$  เป็นจุดเดียวกัน
  - 5.2 จงแสดงว่า มีจุดคงที่  $S$  ที่อยู่บนเส้นตรงที่ผ่าน  $MN$  ทุกตำแหน่งของจุด  $M$  บน  $AB$
  - 5.3 จงหาทางเดินของจุดกึ่งกลางของ  $PQ$  เมื่อ  $M$  เคลื่อนที่ระหว่าง  $A$  และ  $B$
6. กำหนดให้ ระนาบ  $P$  และระนาบ  $Q$  มีรอยตัดกันเป็นเส้นตรง  $p$   
ให้  $A$  เป็นจุดบนระนาบ  $P$  และ  $C$  เป็นจุดบนระนาบ  $Q$  ทั้งจุด  $A$  และ  $C$  ไม่อยู่บนเส้นตรง  $p$   
จงสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว  $\square ABCD$  ( $AB$  ขนานกับ  $CD$ ) และมีวงกลมแนบใน  $\square ABCD$   
โดยที่  $B$  เป็นจุดบนระนาบ  $P$  และ  $D$  เป็นจุดบนระนาบ  $Q$   
หมายเหตุ รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว (isosceles trapezoid) คือรูปสี่เหลี่ยมคางหมูซึ่งด้านที่ไม่ขนานกัน  
มีความยาวเท่ากัน

## The First International Mathematical Olympiad Solutions

Bucharest – Brasov, Romania, 23 – 31 July 1959

1. แนวคิด แบบที่ 1  $(21n + 4) = (1)(14n + 3) + (7n + 1)$   
 $(14n + 3) = (2)(7n + 1) + 1$   
 $(7n + 1) = (1)(7n + 1) + 0$

เพราะฉะนั้นโดยขั้นตอนการหารของยุคลิดจะได้  $\gcd(21n + 4, 14n + 3) = 1$

เพราะฉะนั้น  $\frac{21n+4}{14n+3}$  เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ ทุกจำนวนเต็มบวก  $n$

แบบที่ 2 ให้  $k = \gcd(21n + 4, 14n + 3)$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม  $a, b$  ที่ทำให้  $21n + 4 = ak$  และ  $14n + 3 = bk$

เพราะว่า  $k(3b - 2a) = 3kb - 2ka$   
 $= 3(14n + 3) - 2(21n + 4)$   
 $= (42n + 9) - (42n + 8)$   
 $= 1$

เพราะฉะนั้น  $k \mid 1$  เพราะฉะนั้น  $k = 1$

เพราะฉะนั้น  $\frac{21n+4}{14n+3}$  เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ ทุกจำนวนเต็มบวก  $n$  □

2. แนวคิด เพราะว่าโจทย์มีพจน์ของ  $\sqrt{2x-1}$  เพราะฉะนั้น  $2x - 1 \geq 0$

เพราะฉะนั้น  $\frac{1}{2} \leq x$  ... (1)

เพราะว่า  $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} = A$

เพราะฉะนั้น  $A^2 = (x + \sqrt{2x-1}) + 2\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}\sqrt{x-\sqrt{2x-1}} + (x - \sqrt{2x-1})$   
 $= 2x + 2\sqrt{x^2 - (2x-1)}$   
 $= 2x + 2\sqrt{(x-1)^2}$   
 $= 2x + 2|x - 1|$

เพราะฉะนั้น  $\frac{A^2}{2} = x + |x - 1|$  ... (2)

2.1  $A = \sqrt{2}$  จาก (2) จะได้  $x + |x - 1| = 1$  ... (3)

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  จาก (3) จะได้  $x + (-(x - 1)) = 1$  เป็นจริง

$1 < x$  จาก (3) จะได้  $x + (x - 1) = 1$  เพราะฉะนั้น  $x = 1$  ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นกรณี  $A = \sqrt{2}$  จะได้  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

2.2  $A = 1$  จาก (2) จะได้  $x + |x - 1| = \frac{1}{2}$  ... (4)

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  จาก (5) จะได้  $x + (-(x - 1)) = \frac{1}{2}$  เป็นไปไม่ได้

$1 < x$  จาก (5) จะได้  $x + (x - 1) = \frac{1}{2}$  เพราะฉะนั้น  $x = \frac{3}{4}$

2.3  $A = 2$  จาก (2) จะได้  $x + |x - 1| = 2$  ... (5)

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$  จาก (5) จะได้  $x + (-(x - 1)) = 2$  เป็นไปไม่ได้

$1 < x$  จาก (5) จะได้  $x + (x - 1) = 2$  เพราะฉะนั้น  $x = \frac{3}{2}$  □

### 3. แนวคิด

3.1 แบบที่ 1 จากสมการ  $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$  ... (1)

แทนค่า  $\cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$  จะได้  $a\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \pm b\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} + c = 0$

$$a\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) + c = \pm b\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$a(1 + \cos 2x) + 2c = \pm 2b\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$(a(1 + \cos 2x) + 2c)^2 = (\pm 2b\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}})^2$$

$$a^2(1 + \cos 2x)^2 + 4ac(1 + \cos 2x) + 4c^2 = 2b^2(1 + \cos 2x)$$

$$a^2(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) + 4ac + 4ac\cos 2x + 4c^2 - 2b^2 - 2b^2\cos 2x = 0$$

$$a^2 \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2)\cos 2x + (a^2 + 4ac + 4c^2 - 2b^2) = 0 \quad \dots (2)$$

เพราะฉะนั้น (2) เป็นพหุนามกำลังสองในเทอมของ  $\cos 2x$  ที่มีรากเป็น  $\cos 2x = \cos 2x_1, \cos 2x_2$

และ

$\{\cos x_1, \cos x_2\}$  เป็นเซตของรากสมการ (1) ก็ต่อเมื่อ  $\{\cos 2x_1, \cos 2x_2\}$  เป็นเซตของรากสมการ (2)

แบบที่ 2 ให้  $t = \cos x$  และพหุนามกำลังสองในเทอมของ  $\cos x$  กำหนดโดย  $a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$

เพราะฉะนั้นพหุนามกำลังสองในเทอมของ  $t$  คือ  $at^2 + bt + c = 0$

ให้  $t = t_1 = \cos x_1, t = t_2 = \cos x_2$  เป็นรากของ  $at^2 + bt + c = 0$  ... (3)

เพราะฉะนั้น  $t_1 + t_2 = -\frac{b}{a}, t_1 t_2 = \frac{c}{a}$  ... (4)

ให้  $w = \cos 2x$  และ  $pw^2 + qw + r = 0$  ... (5)

เป็นพหุนามกำลังสองในเทอมของ  $\cos 2x$  ที่มีรากเป็น  $\cos 2x = \cos 2x_1, \cos 2x_2$

ให้  $w_1 = \cos 2x_1, w_2 = \cos 2x_2$  เป็นรากของ  $pw^2 + qw + r = 0$

เพราะฉะนั้น  $w_1 + w_2 = -\frac{q}{p}$  และ  $w_1 w_2 = \frac{r}{p}$

เพราะว่า  $-\frac{q}{p} = w_1 + w_2$

$$= \cos 2x_1 + \cos 2x_2$$

$$= (2\cos^2 x_1 - 1) + (2\cos^2 x_2 - 1)$$

$$= (2t_1^2 - 1) + (2t_2^2 - 1) \quad \text{(จาก (3))}$$

$$= 2(t_1^2 + t_2^2) - 2$$

$$= 2(t_1^2 + 2t_1 t_2 + t_2^2) - 4t_1 t_2 - 2$$

$$= 2(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2 - 2$$

$$= 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right) - 2 \quad (\text{จาก (4)})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } q = -p\left(2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right) - 2\right) \quad \dots (6)$$

$$\text{เพราะว่า } \frac{r}{p} = w_1 w_2$$

$$\begin{aligned} &= (\cos 2x_1)(\cos 2x_2) \\ &= (2\cos^2 x_1 - 1)(2\cos^2 x_2 - 1) \\ &= (2t_1^2 - 1)(2t_2^2 - 1) \quad (\text{จาก (3)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 4t_1^2 t_2^2 - 2t_1^2 - 2t_2^2 + 1 \\ &= 4t_1^2 t_2^2 - 2(t_1^2 + t_2^2) + 1 \\ &= 4t_1^2 t_2^2 - 2(t_1^2 + 2t_1 t_2 + t_2^2) + 4t_1 t_2 + 1 \\ &= 4t_1^2 t_2^2 - 2(t_1 + t_2)^2 + 4t_1 t_2 + 1 \\ &= 4\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a}\right) + 1 \quad (\text{จาก (4)}) \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } r = p\left(4\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a}\right) + 1\right) \quad \dots (7)$$

จาก (5), (6) และ (7) จะได้

$$p w^2 + \left(-p\left(2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right) - 2\right)\right)w + \left(p\left(4\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a}\right) + 1\right)\right) = 0$$

$$w^2 + \left(-\left(2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\left(\frac{c}{a}\right) - 2\right)\right)w + \left(\left(4\left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2\left(-\frac{b}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{c}{a}\right) + 1\right)\right) = 0$$

$$a^2 w^2 + (-2b^2 + 4ac + 2a^2)w + (4c^2 - 2b^2 + 4ac + a^2) = 0$$

$$a^2 w^2 + (2a^2 + 4ac - 2b^2)w + (4c^2 - 2b^2 + 4ac + a^2) = 0$$

แทนค่า  $w = \cos 2x$

จะได้พหุนามกำลังสองในเทอมของ  $\cos 2x$  ที่มีรากเป็น  $\cos 2x = \cos 2x_1, \cos 2x_2$  คือ

$$a^2 \cos^2 2x + (2a^2 + 4ac - 2b^2) \cos 2x + (a^2 + 4ac + 4c^2 - 2b^2) = 0$$

**3.2** ให้  $a = 4, b = 2, c = -1$

จากสมการ (1) จะได้

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0 \quad \dots (8)$$

ซึ่งมีเซตคำตอบ  $\{\cos x_1, \cos x_2\} = \{t_1, t_2\}$  เมื่อ  $t_1, t_2$  เป็นรากของ  $4t^2 + 2t - 1 = 0$

จากสมการ (2) จะได้

$$16 \cos^2 2x + (32 - 16 - 8) \cos 2x + (16 - 16 + 4 - 8) = 0$$

$$16 \cos^2 2x + 8 \cos 2x - 4 = 0$$

$$4(4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 1) = 0$$

$$4 \cos^2 2x + 2 \cos 2x - 1 = 0 \quad \dots (9)$$

ซึ่งมีเซตคำตอบ  $\{\cos 2x_1, \cos 2x_2\} = \{t_1, t_2\}$  เมื่อ  $t_1, t_2$  เป็นรากของ  $4t^2 + 2t - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น  $\{\cos x_1, \cos x_2\} = \{\cos 2x_1, \cos 2x_2\}$

**กรณีที่ 1**  $\cos 2x_1 = \cos x_1$  และ  $\cos 2x_2 = \cos x_2$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2x_1 = 2\pi \pm x_1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2x_1 = 2\pi + x_1, 2\pi - x_1$$

เพราะฉะนั้น  $x_1 = 2\pi$  หรือ  $3x_1 = 2\pi$

เพราะฉะนั้น  $x_1 = 2\pi$  หรือ  $x_1 = \frac{2\pi}{3}$

กรณีที่ 1.1  $x_1 = 2\pi$

จะได้  $4\cos^2 2\pi + 2\cos 2\pi - 1 = 4 + 2 - 1 \neq 0$  ขัดแย้งกับ (8)

กรณีที่ 1.2  $x_1 = \frac{2\pi}{3}$

จะได้  $4\cos^2 \frac{2\pi}{3} + 2\cos \frac{2\pi}{3} - 1 = 1 + 1 - 1 \neq 0$  ขัดแย้งกับ (8)

เพราะฉะนั้นกรณีที่ 1 เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2  $\cos 2x_1 = \cos x_2$  และ  $\cos 2x_2 = \cos x_1$

เพราะฉะนั้น  $2x_1 = 2n\pi \pm x_2$  และ  $2x_2 = 2n\pi \pm x_1$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2.1  $2x_1 = 2n\pi + x_2$  และ  $2x_2 = 2n\pi + x_1$

$2x_1 - x_2 = 2n\pi$  และ  $2x_2 - x_1 = 2n\pi$

เพราะฉะนั้น  $2x_1 - x_2 = 2x_2 - x_1$

เพราะฉะนั้น  $x_1 = x_2$

เพราะฉะนั้น  $x_1 = x_2 = \frac{2\pi}{3}$  เป็นไปไม่ได้เหมือนกรณีที่ 1

กรณีที่ 2.2  $2x_1 = 2n\pi - x_2$  และ  $2x_2 = 2n\pi - x_1$

$2x_1 + x_2 = 2n\pi$  และ  $2x_2 + x_1 = 2n\pi$

เพราะฉะนั้น  $2x_1 + x_2 = 2x_2 + x_1$  เพราะฉะนั้น  $x_1 = x_2$

เพราะฉะนั้น  $x_1 = x_2 = \frac{2\pi}{3}$  เป็นไปไม่ได้เหมือนกรณีที่ 1

กรณีที่ 2.3  $2x_1 = 2n\pi + x_2$  และ  $2x_2 = 2n\pi - x_1$  ... (10)

$2x_1 - x_2 = 2n\pi$  และ  $2x_2 + x_1 = 2n\pi$

เพราะฉะนั้น  $2x_1 - x_2 = 2x_2 + x_1$

เพราะฉะนั้น  $x_1 = 3x_2$  ... (11)

จาก (10) และ (11) จะได้  $6x_2 = 2n\pi + x_2$  และ  $2x_2 = 2n\pi - 3x_2$

เพราะฉะนั้น  $5x_2 = 2n\pi$  เพราะฉะนั้น  $x_2 = \frac{2n\pi}{5}$

เพราะฉะนั้น  $x_2 = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}, \frac{8\pi}{5}$  และ  $x_1 = \frac{6\pi}{5}, \frac{12\pi}{5}, \frac{18\pi}{5}, \frac{24\pi}{5}$

กรณีที่ 2.4  $2x_1 = 2n\pi - x_2$  และ  $2x_2 = 2n\pi + x_1$  ... (12)

$2x_1 + x_2 = 2n\pi$  และ  $2x_2 - x_1 = 2n\pi$

เพราะฉะนั้น  $2x_1 + x_2 = 2x_2 - x_1$  เพราะฉะนั้น  $x_2 = 3x_1$  ... (13)

จาก (12) และ (13) จะได้  $2x_1 = 2n\pi - 3x_1$  และ  $6x_1 = 2n\pi + x_1$

เพราะฉะนั้น  $5x_1 = 2n\pi$  เพราะฉะนั้น  $x_1 = \frac{2n\pi}{5}$

เพราะฉะนั้น  $\frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}$  เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดสองจำนวนที่ทำให้  $\cos x = \cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{4\pi}{5}$

เป็นรากของ  $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

หมายเหตุ พหุนามดีกรีสองในเทอมของ  $\cos x$  กำหนดโดย  $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$

มีผลบวกราก =  $-\frac{1}{2}$  และ ผลคูณราก =  $-\frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น  $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$  และ  $\cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}$

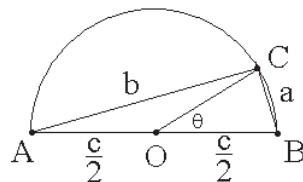
เพราะว่ารากสมการ  $4 \cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$

$$\begin{aligned} \text{คือ } \cos x &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} \\ &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

เพราะว่า  $\cos \frac{2\pi}{5} > \cos \frac{4\pi}{5}$  เพราะฉะนั้น  $\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$  และ  $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$  □

#### 4. แนวคิด

##### 4.1



รูปที่ 1959.4.1

เพราะว่า  $\triangle ABC$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ  $\hat{ACB} = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น  $\triangle ABC$  แนบในวงกลมรัศมี  $r = \frac{c}{2}$  โดยมี  $AB$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ  $O$  เป็นจุดศูนย์กลาง

การหาตำแหน่งของจุด  $C$  พิจารณาดังนี้

เพราะว่า  $OC$  เป็นเส้นมีฐาน เพราะฉะนั้น  $OC$  ยาวเท่ากับรัศมีวงกลม

$$\text{เพราะฉะนั้น } OC = \frac{c}{2}$$

เพราะว่าความยาว  $OC$  เท่ากับค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ  $a, b$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{c}{2} = OC = \sqrt{ab} \quad \text{เพราะฉะนั้น } c^2 = 4ab \quad \dots (1)$$

ให้  $h$  เป็นส่วนสูงของ  $\triangle ABC$  ที่ลากจาก  $C$  มาตั้งฉากกับฐาน  $AB$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \Delta_{ABC} = \text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} (AB)(h) = \frac{1}{2} ch \quad \dots (2)$$

เพราะว่า  $\triangle ABC$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ  $\hat{ACB} = 90^\circ$

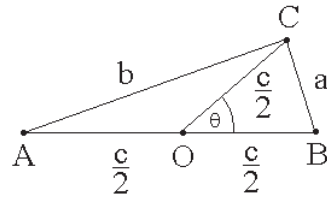
$$\text{เพราะฉะนั้น } \Delta_{ABC} = \frac{1}{2} ab \quad \dots (3)$$

$$\text{จาก (2) และ (3) จะได้ } ch = ab \quad \dots (4)$$

$$\text{จาก (1) และ (4) จะได้ } 4ch = c^2 \quad \text{เพราะฉะนั้น } h = \frac{c}{4}$$

เพราะฉะนั้นจุด  $C$  คือตำแหน่งของจุดที่ทำให้ความสูงจากฐาน  $AB$  เท่ากับมีค่า  $\frac{c}{4}$

## 4.2



รูปที่ 1959.4.2

ให้  $\angle BOC = \theta$

เพราะฉะนั้น  $\angle AOC = \pi - \theta$

ใน  $\triangle OBC$  โดยกฎของโคไซน์  $BC^2 = OB^2 + OC^2 - 2 OB OC \cos \angle BOC$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } a^2 &= \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} - 2\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right) \cos \theta \\ &= \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{2} \cos \theta \\ &= c^2 \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right) \end{aligned}$$

... (5)

ใน  $\triangle OAC$  โดยกฎของโคไซน์  $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2 OA OC \cos \angle AOC$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } b^2 &= \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} - 2\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right) \cos(\pi - \theta) \\ &= \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} \cos \theta \\ &= c^2 \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \end{aligned}$$

... (6)

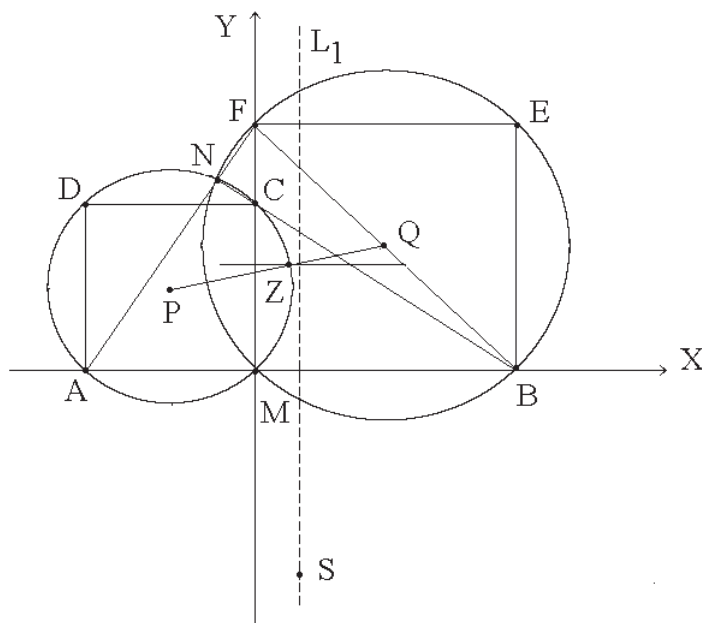
$$\begin{aligned} \text{จาก (5) และ (6) จะได้ } a^2 b^2 &= c^2 \left( \frac{1 - \cos \theta}{2} \right) c^2 \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) \\ &= \frac{c^4}{4} (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \frac{c^4}{4} \sin^2 \theta \\ ab &= \frac{c^2}{2} \sin \theta \\ \sin \theta &= \frac{2ab}{c^2} \end{aligned}$$

จาก (1) จะได้  $c^2 = 4ab$  เพราะฉะนั้น  $\sin \theta = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น  $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

□

## 5. แนวคิด



รูปที่ 1959.5.1

แบบที่ 1 5.1 ให้  $AM = a$  และ  $MB = b$

ให้ แกน  $X$  ทับด้าน  $AB$  แกน  $Y$  ทับด้าน  $MF$  และ  $M$  เป็นจุดกำเนิด

เพราะฉะนั้นจะได้พิกัด  $M(0, 0)$ ,  $A(-a, 0)$ ,  $C(0, a)$ ,  $D(-a, a)$ ,  $B(b, 0)$ ,  $E(b, b)$ ,  $F(0, b)$

เพราะว่า  $\square AMCD$ ,  $\square MBEF$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

และ  $\text{Cir}_{AMCD}$ ,  $\text{Cir}_{MBEF}$  เป็นวงกลมล้อมรอบ  $\square AMCD$ ,  $\square MBEF$  ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น  $MD$ ,  $BF$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม  $\text{Cir}_{AMCD}$ ,  $\text{Cir}_{MBEF}$  ตามลำดับ

เพราะฉะนั้นพิกัด  $P, Q$  คือ  $P(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  และ  $Q(\frac{b}{2}, \frac{b}{2})$

$$\text{รัศมีของวงกลม } \text{Cir}_{AMCD} = |MP| = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$$

$$\text{รัศมีของวงกลม } \text{Cir}_{MBEF} = |MQ| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2}}$$

$$\text{สมการวงกลม } \text{Cir}_{AMCD} \text{ คือ } \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} \text{ หรือ } x^2 + ax + y^2 - ay = 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{สมการวงกลม } \text{Cir}_{MBEF} \text{ คือ } \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{2} \text{ หรือ } x^2 - bx + y^2 - by = 0 \quad \dots (2)$$

(1) - (2) จะได้

$$ax - ay + bx + by = 0$$

$$(a + b)x - (b - a) = 0$$

$$x = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)y \quad \dots (3)$$

$$\text{จาก (1) และ (3) จะได้ } \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 y^2 + a\left(\frac{a-b}{a+b}\right)y + y^2 - ay = 0 \quad \dots (4)$$

เพราะว่า  $\text{Cir}_{AMCD}$ ,  $\text{Cir}_{MBEF}$  ตัดกันที่  $M$  และอีกหนึ่งจุดในควอดรนต์ที่ 2 เพราะฉะนั้นเราสนใจกรณี  $y \neq 0$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (4) จะได้ } \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 y + a\left(\frac{a-b}{a+b}\right) + y - a = 0$$

$$y\left(\frac{a^2 - 2ab + b^2}{(a+b)^2} + 1\right) = a - a\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$$

$$y\left(\frac{(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 + 2ab + b^2)}{(a+b)^2}\right) = \frac{a(a+b) - a(a-b)}{a+b}$$

$$y\left(\frac{2a^2 + 2b^2}{(a+b)^2}\right) = \frac{2ab}{a+b}$$

$$y = \frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2}$$

แทนค่า  $y = \frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2}$  ใน (3) จะได้  $x = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)y = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)\frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2} = \frac{ab(a-b)}{a^2 + b^2}$

เพราะฉะนั้นพิกัด N คือ  $N\left(\frac{ab(a-b)}{a^2 + b^2}, \frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2}\right)$

เพราะว่า  $A(-a, 0)$ ,  $F(0, b)$

เพราะฉะนั้น ความชัน  $AN = \frac{\frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2} - 0}{\frac{ab(a-b)}{a^2 + b^2} + a} = \frac{b(a+b)}{b(a-b) + a^2 + b^2} = \frac{b(a+b)}{a(a+b)} = \frac{b}{a}$

และ ความชัน  $AF = \frac{b-0}{0+a} = \frac{b}{a}$

เพราะว่า ความชัน  $AN =$  ความชัน  $AF$  เพราะฉะนั้น  $A, N, F$  อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เพราะว่า  $B(b, 0)$ ,  $C(0, a)$  เพราะฉะนั้น

ความชัน  $BN = \frac{\frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2} - 0}{\frac{ab(a-b)}{a^2 + b^2} - b} = \frac{ab(a+b)}{ab(a-b) - b(a^2 + b^2)} = \frac{a(a+b)}{a(a-b) - (a^2 + b^2)} = \frac{a(a+b)}{-b(a+b)} = -\frac{a}{b}$

และ ความชัน  $BC = \frac{a-0}{0-b} = -\frac{a}{b}$

เพราะว่า ความชัน  $BN =$  ความชัน  $BC$  เพราะฉะนั้น  $B, C, N$  อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เพราะว่า ถ้า  $N'$  เป็นจุดตัดของเส้นตรงที่ผ่าน  $AF$  และ  $BC$  แล้ว  $N$  และ  $N'$  เป็นจุดเดียวกัน

## 5.2 ให้เส้นตรง $L_1$ เป็นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ $AB$

เพราะว่าพิกัด  $A(-a, 0)$  และ  $B(b, 0)$  เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรง  $L_1$  คือ  $x = \frac{b-a}{2}$  ... (5)

เพราะว่าพิกัด  $M(0, 0)$  และ  $N\left(\frac{ab(a-b)}{a^2 + b^2}, \frac{ab(a+b)}{a^2 + b^2}\right)$

ให้  $L_{MN}$  เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด  $M, N$  เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรง  $L_{MN}$  คือ  $y = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)x$  ... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้เส้นตรง  $L_1$  และ เส้นตรง  $L_{MN}$  ตัดกันที่จุด  $S\left(\frac{b-a}{2}, -\frac{a+b}{2}\right)$

เพราะว่า  $a + b = AB$  เป็นค่าคงตัวที่โจทย์กำหนดมาให้

เพราะฉะนั้น  $S\left(\frac{b-a}{2}, -\frac{a+b}{2}\right)$  เป็นจุดคงที่ซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่ผ่าน  $MN$  ทุกตำแหน่งของจุด  $M$  บน  $AB$

## 5.3 ให้ $Z(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $P, Q$

เพราะว่าพิกัด  $P\left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$  และ  $Q\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$  เพราะฉะนั้นพิกัด  $Z$  คือ  $(x, y) = \left(\frac{b-a}{4}, \frac{a+b}{4}\right)$

เพราะว่า  $a + b$  เป็นค่าคงตัวที่โจทย์กำหนดมาให้ เพราะฉะนั้น  $a + b$  เป็นค่าคงตัว

เพราะฉะนั้นทางเดินของจุดกึ่งกลางของ  $PQ$  อยู่บนเส้นตรง  $y = \frac{a+b}{4}$  และ  $x$  อยู่บนช่วง  $\left[-\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right]$



5.3 ให้  $Z$  เป็นจุดกึ่งกลางของ  $PQ$

ให้  $P', Q', Z'$  เป็นจุดบน  $AB$  และ  $PP' \perp AB, QQ' \perp AB$  และ  $ZZ' \perp AB$

เพราะฉะนั้น  $PP', ZZ'$  และ  $QQ'$  ขนานกัน และ  $P'$  เป็นจุดกึ่งกลาง  $AM$  และ  $Q'$  เป็นจุดกึ่งกลาง  $MB$

เพราะว่า  $P$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสี่เหลี่ยมจัตุรัส  $AMCD$

$$\text{เพราะฉะนั้น } PP' = AP' = P'M = \frac{1}{2}AM \quad \dots (8)$$

$$\text{ในทำนองเดียวกันจะได้ } Q'Q = MQ' = Q'B = \frac{1}{2}MB \quad \dots (9)$$

เพราะว่า  $PP'$  และ  $QQ'$  ขนานกัน เพราะฉะนั้น  $\square PP'Q'Q$  เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู

ให้  $P'(-x, 0), Z'(0, 0), Q'(x, 0), P(-x, y_1), Z(0, y), Q(x, y_2)$

เพราะว่า  $Z$  เป็นจุดกึ่งกลาง  $PQ$  เพราะฉะนั้นพิกัด  $Z$  คือ  $Z(0, \frac{y_1 + y_2}{2})$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } ZZ' &= \frac{y_1 + y_2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ &= \frac{1}{2}(PP' + QQ') \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AM + \frac{1}{2}MB\right) && \text{(จาก (7) และ (8))} \\ &= \frac{1}{4}(AM + MB) \\ &= \frac{1}{4}(AB) \end{aligned}$$

เพราะว่า  $\frac{1}{4}(AB)$  เป็นค่าคงตัว

เพราะฉะนั้นระยะทางจากจุด  $Z$  มายัง  $AB$  เป็นค่าคงตัวและมีค่าเท่ากับ  $\frac{1}{4}(AB)$

เพราะว่า ถ้า  $M = A$  แล้ว  $P' = A$  และ  $AQ' = \frac{AB}{2}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } AZ' = \frac{1}{4}(AB)$$

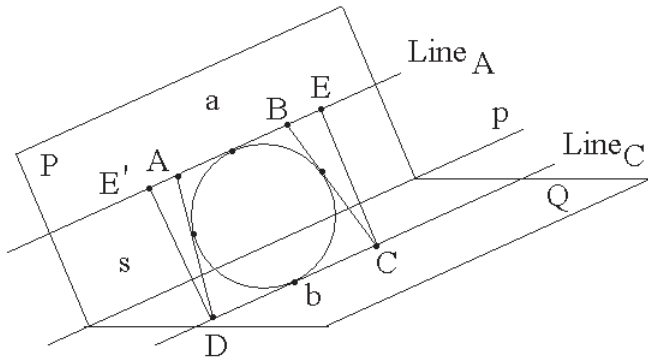
และ ถ้า  $M = B$  แล้ว  $Q' = B$  และ  $P'B = \frac{AB}{2}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } Z'B = \frac{1}{4}(AB)$$

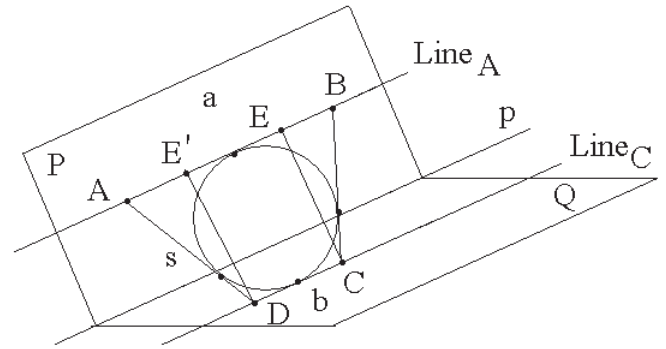
เพราะฉะนั้นทางเดินของจุด  $Z$  คือ

ส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากับ  $\frac{1}{2}(AB)$  ขนานกับ  $AB$  และ ห่างจาก  $AB$  เป็นระยะ  $\frac{1}{4}(AB)$  □

## 6. แนวคิด



รูปที่ 1959.6.1.1



รูปที่ 1959.6.1.2

พิจารณาเงื่อนไขที่จำเป็นก่อนเข้าสู่ขั้นตอนการสร้าง

1. ถ้า  $\square ABCD$  มีวงกลมแนบใน แล้ว  $AB + CD = AD + BC$

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์จากทฤษฎีบท 8.6 คณิตศาสตร์ปริญ เล่มที่ 31 โลกตรีโกณมิติ หน้า 240

2. เพราะว่า  $\square ABCD$  รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว และ  $AB$  ขนานกับ  $CD$  เพราะฉะนั้น  $AD = BC$

ให้  $AB = a$ ,  $CD = b$  และ  $s = AD = BC$  เพราะฉะนั้น  $a + b = 2s$  หรือ  $s = \frac{1}{2}(a + b)$  ... (1)

3. เพราะว่า  $AB$  ขนานกับ  $CD$  และ  $AB$  อยู่บนระนาบ  $P$  และ  $CD$  อยู่บนระนาบ  $Q$

เพราะฉะนั้น  $AB$  และ  $CD$  ต้องขนานกับเส้นตรง  $p$  ซึ่งเป็นรอยตัดของระนาบ  $P$  และระนาบ  $Q$

4. เมื่อ  $E$  เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่าน  $AB$  และ  $CE \perp AB$

ให้  $E'$  เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่าน  $AB$  และ  $DE' \perp AB$

เพราะว่า  $\square ABCD$  รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว เพราะฉะนั้น  $CE = DE'$  และ  $BE = AE'$  ... (2)

กรณีที่ 4.1  $a < b$  (รูปที่ 1959.6.1.1)

เพราะว่า  $b = CD = E'A + AB + BE$

$$= BE + a + BE \quad (\text{จาก (2)})$$

$$= a + 2BE$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } BE = \frac{1}{2}(b - a)$$

$$AE = AB + BE = a + BE = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b) = s$$

กรณีที่ 4.2  $a > b$  (รูปที่ 1959.6.1.2)

เพราะว่า  $b = CD = AB - BE - AE'$

$$= AB - BE - BE \quad (\text{จาก (2)})$$

$$= a - 2BE$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } BE = \frac{1}{2}(a - b)$$

$$AE = a - BE = a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b) = s$$

จากทั้งสองกรณีจะได้  $AE = s$

... (3)

หมายเหตุ กรณี  $a = b$  จะได้  $\square ABCD$  มีวงกลมแนบใน ก็ต่อเมื่อ  $\square ABCD$  เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ขั้นตอนการสร้างรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว  $\square ABCD$  ( $AB$  ขนานกับ  $CD$ ) และมีวงกลมแนบใน  $\square ABCD$  โดยที่  $B$  เป็นจุดบนระนาบ  $P$  และ  $D$  เป็นจุดบนระนาบ  $Q$

1. บนระนาบ  $P$  เขียนเส้นตรง  $Line_A$  ผ่านจุด  $A$  และขนานกับเส้นตรง  $p$   
บนระนาบ  $Q$  เขียนเส้นตรง  $Line_C$  ผ่านจุด  $C$  และขนานกับเส้นตรง  $p$
2. จากจุด  $C$  ลากเส้นตรงตั้งฉากกับเส้นตรง  $Line_C$  และไปตัดกับเส้นตรง  $Line_A$  ที่จุด  $E$
3. เขียนวงกลมจุดศูนย์กลาง  $C$  และมีรัศมีเท่ากับ  $AE$  ตัดเส้นตรง  $Line_A$  ที่จุด  $B$
4. เขียนวงกลมจุดศูนย์กลาง  $A$  และมีรัศมีเท่ากับ  $AE$  ตัดเส้นตรง  $Line_C$  ที่จุด  $D$

เพราะฉะนั้น  $AD = BC = AE$

... (4)

เพราะฉะนั้น  $\square ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว

สมมติ  $CE > AE$

จาก (3) และ  $CE > AE$  จะได้  $CE > s$  เพราะว่า  $BC = s$  (จาก (1)) เพราะฉะนั้น  $CE > s = BC$

เพราะว่า  $CE$  เป็นระยะตั้งฉาก เพราะฉะนั้น  $CE \leq BC$  ขัดแย้งกับ  $CE > BC$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ  $CE > AE$  ไม่จริง

เพราะฉะนั้น  $CE \leq AE$

**กรณีที่ 1**  $CE = AE$

เพราะฉะนั้น  $CE = AE = s = BC$  (จาก (1) และ (3)) เพราะฉะนั้น  $CE, BC$  เป็นเส้นตรงเดียวกัน

เพราะฉะนั้น  $BC \perp AB$

เพราะฉะนั้น  $\square ABCD$  เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส เพราะฉะนั้น  $\square ABCD$  จะมีวงกลมแนบใน

**กรณีที่ 2**  $CE < AE$

จาก (3) จะได้  $CE < s$  ให้  $M_{AB}$  เป็นจุดกึ่งกลางด้าน  $AB$  และ  $M_{CD}$  เป็นจุดกึ่งกลางด้าน  $CD$

ให้  $M$  เป็นจุดกึ่งกลางด้าน  $M_{AB}M_{CD}$

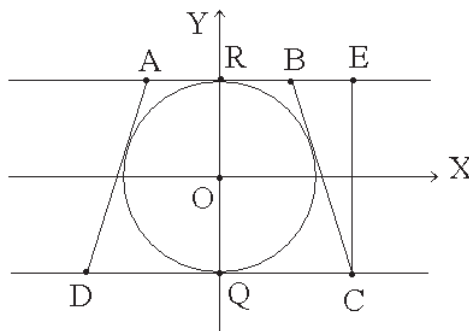
เขียนวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุด  $M$  และมีรัศมี  $= \frac{1}{2}CE$  จะได้วงกลมแนบใน  $\square ABCD$  (บทช่วย 1)  $\square$

**บทช่วย 1** กำหนดให้  $\square ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วมี  $AB$  ขนานกับ  $CD$

$AB = a, CD = b, BC = AD = s = \frac{1}{2}(a + b)$  และ  $CE \perp AE$

ให้  $R$  เป็นจุดกึ่งกลางด้าน  $AB$  และ  $Q$  เป็นจุดกึ่งกลางด้าน  $CD$  และ  $O$  เป็นจุดกึ่งกลางด้าน  $RQ$

จะได้วงกลมจุดศูนย์กลาง  $O$  และมีรัศมี  $r = \frac{\sqrt{ab}}{2}$  เป็นวงกลมแนบใน  $\square ABCD$



รูปที่ 1959.6.2

ข้อพิสูจน์ให้  $O$  เป็นจุดกำเนิด แกน  $Y$  ทับด้าน  $RQ$  เพราะฉะนั้น  $RE = QC = \frac{DC}{2} = \frac{b}{2}$

เพราะฉะนั้น  $BE = RE - RB = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(b + a) - a = s - a$

เพราะว่า  $s = \frac{1}{2}(a + b)$  เพราะฉะนั้น  $2s - a = b$

เพราะว่า  $\triangle BEC$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้น  $EC^2 = BC^2 - BE^2 = s^2 - (s - a)^2 = (s - (s - a))(s + (s - a)) = a(2s - a) = ab$

เพราะฉะนั้น  $EC = \sqrt{ab}$

เพราะว่า  $RQ = CE$  และ  $O$  เป็นจุดกึ่งกลาง  $RQ$  เพราะฉะนั้น  $RO = OQ = \frac{\sqrt{ab}}{2}$

เพราะฉะนั้นพิกัด  $B, C$  คือ  $B(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{ab}}{2}), C(\frac{b}{2}, -\frac{\sqrt{ab}}{2})$

ให้  $Cir_1$  เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง  $O$  รัศมี  $\frac{\sqrt{ab}}{2}$  ... (1)

เพราะฉะนั้น วงกลม  $Cir_1$  สัมผัสด้าน  $AB$  และ  $CD$

ให้  $Line_{BC}$  เป็นเส้นตรงที่ผ่าน  $B, C$

เพราะฉะนั้น  $Line_{BC}$  มีสมการเป็น 
$$\frac{y - \frac{\sqrt{ab}}{2}}{x - \frac{a}{2}} = \frac{-\frac{\sqrt{ab}}{2} - \frac{\sqrt{ab}}{2}}{\frac{b}{2} - \frac{a}{2}}$$

เพราะฉะนั้น  $(2y - \sqrt{ab})(b - a) = -2\sqrt{ab}(2x - a)$

$$4\sqrt{ab}x + 2(b - a)y - \sqrt{ab}(b - a) - 2a\sqrt{ab} = 0$$

$$4\sqrt{ab}x + 2(b - a)y - \sqrt{ab}(a + b) = 0$$

ระยะห่างระหว่างจุด  $O$  กับเส้นตรง  $Line_{BC}$  เท่ากับ 
$$\frac{|\sqrt{ab}(a + b)|}{\sqrt{(4\sqrt{ab})^2 + (2(b - a))^2}}$$
 ... (2)

เพราะว่า 
$$\begin{aligned} (4\sqrt{ab})^2 + (2(b - a))^2 &= 16ab + 4b^2 - 8ab + 4a^2 \\ &= 4a^2 + 8ab + 4b^2 \\ &= 4(a + b)^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น 
$$\frac{|a + b|}{\sqrt{(4\sqrt{ab})^2 + (2(b - a))^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{|\sqrt{ab}(a + b)|}{\sqrt{(4\sqrt{ab})^2 + (2(b - a))^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{2} \quad \dots (3)$$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้วงกลม  $Cir_1$  สัมผัสด้าน  $BC$

ในทำนองเดียวกันจะได้วงกลม  $Cir_1$  สัมผัสด้าน  $AD$

เพราะฉะนั้นวงกลม  $Cir_1$  เป็นวงกลมแนบในรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว  $\square ABCD$  □

## The Second International Mathematical Olympiad

Bucharest – Sinaia, Romania

18 – 25 July 1960

### Day I

1. จงหาจำนวนเต็มบวก 3 หลัก  $N$  โดยที่  $11 \mid N$  และ  $\frac{N}{11}$  เท่ากับผลบวกกำลังสองของตัวเลขหลักของ  $N$
2. จงหาเซตคำตอบของอสมการ  $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$
3. กำหนดให้  $\triangle ABC$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี  $BC$  เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก และ  $BC = a$   
ให้  $n$  เป็นจำนวนเต็มบวกคี่และแบ่งด้าน  $BC$  ออกเป็นส่วนของเส้นตรง  $n$  ส่วนเท่าๆ กัน  
ให้ส่วนของเส้นตรง (ที่ถูกแบ่งแล้ว) ซึ่งอยู่กึ่งกลาง  $BC$  รองรับมุมที่จุดยอด  $A$  เท่ากับ  $\alpha$   
ให้  $h$  เป็นความสูงของ  $\triangle ABC$  จากจุด  $A$  มายังฐาน  $BC$   
จงแสดงว่า  $\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$

### Day II

4. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  เมื่อกำหนดค่าของความยาวของส่วนสูงที่ลากจากจุดยอด  $A$  และ  $B$   
ไปยังด้านตรงข้ามและความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุด  $A$  ไปยัง  $BC$
5. กำหนดให้ ลูกบาศก์  $ABCD A'B'C'D'$  โดยที่  $A'$  อยู่เหนือ  $A$  และ  $B'$  อยู่เหนือ  $B$  และ  $C'$  อยู่เหนือ  $C$   
และ  $D'$  อยู่เหนือ  $D$   
ให้  $X$  อยู่บนส่วนเส้นตรง  $AC$  และ  $Y$  อยู่บนส่วนเส้นตรง  $B'D'$ 
  - 5.1 จงหาทางเดินของจุด  $P$  ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ  $XY$
  - 5.2 จงหาทางเดินของจุด  $Z$  ซึ่งเป็นจุดบนส่วนเส้นตรง  $XY$  และ  $ZY = 2XZ$
6. กรวยกลมตรง (A cone of revolution) มีทรงกลมบรรจุในโดยที่ผิวของทรงกลมสัมผัสผิวข้างของกรวย  
และฐานของกรวยพอดี ทรงกระบอกที่ล้อมรอบทรงกลมข้างต้นพอดีและวางบนฐานเดียวกับกรวย  
ให้  $V_1$  เป็นปริมาตรของกรวย และ  $V_2$  เป็นปริมาตรของทรงกระบอก
  - 6.1 จงแสดงว่า  $V_1 \neq V_2$
  - 6.2 จงหาค่าต่ำสุดของ  $\frac{V_1}{V_2}$  และหาขนาดมุมที่ฐานของกรวย
7. กำหนดให้  $\square ABCD$  เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว (isosceles trapezoid) โดยมี  $AB$  ขนานกับ  $CD$   
ให้  $AB = a$  และ  $CD = c$  และระยะตั้งฉากจาก  $A$  มายัง  $CD$  มีค่าเท่ากับ  $h$   
จงหาจุด  $X$  ทั้งหมดบนแกนสมมาตรของ  $\square ABCD$  ที่ทำให้  $\angle BXC = \angle AXD = 90^\circ$   
และจงหาระยะทางจากจุด  $X$  ไปยัง  $AB$  และ  $CD$  และหาเงื่อนไขที่ทำให้จุด  $X$  หาได้  
หมายเหตุ รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว (isosceles trapezoid) คือรูปสี่เหลี่ยมคางหมูซึ่งด้านที่ไม่ขนานกัน  
มีความยาวเท่ากัน

## The Second International Mathematical Olympiad Solutions

Bucharest – Sinaia, Romania, 18 – 25 July 1960

1. แนวคิด เพราะว่า  $N$  เป็นจำนวนเต็มบวก 3 หลัก เพราะฉะนั้น  $\frac{N}{11}$  เป็นจำนวนเต็มบวก 2 หลัก

ให้  $\frac{N}{11} = (ab)_{10}$  เมื่อ  $a, b$  เป็นเลขโดด  $0, 1, \dots, 9$  เพราะฉะนั้น  $\frac{N}{11} = (ab)_{10} = 10a + b \quad \dots (1)$

กรณีที่ 1  $0 < a + b \leq 9$

$$N = 11(10a + b) = 110a + 11b = 100a + 10a + 10b + b = 100a + 10(a + b) + b = (a(a + b)b)_{10}$$

เพราะว่า  $\frac{N}{11}$  เท่ากับผลบวกกำลังสองของตัวเลขทุกหลักของ  $N$  และ  $N = (a(a + b)b)_{10}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 10a + b = \frac{N}{11} = a^2 + (a + b)^2 + b^2 = 2a^2 + 2ab + 2b^2 \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b = 2a^2 + 2ab + 2b^2 - 10a$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b = 2a(a - 5) + 2ab + 2b^2 \quad \dots (3)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2 \mid b \text{ ให้ } x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ } b = 2x \quad \dots (4)$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (3) และ (4) จะได้ } x = a(a - 5) + 2ax + 4x^2$$

เพราะว่า  $a(a - 5)$  เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น  $a(a - 5) + 2ax + 4x^2$  เป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้น  $x$  เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น  $4 \mid 2x$  เพราะว่า  $b = 2x$  และ  $4 \mid 2x$  เพราะฉะนั้น  $4 \mid b$

เพราะว่า  $b$  เป็นเลขโดด และ  $4 \mid b$  เพราะฉะนั้น  $b$  มีค่าที่เป็นไปได้ 3 ค่าคือ  $0, 4, 8$

เพราะฉะนั้น  $b = 0, 4, 8$

$$\text{กรณีที่ 1.1 } b = 0 \quad \text{จาก (3) และ } a > 0 \text{ จะได้ } a = 5 \text{ เพราะฉะนั้น } N = (a(a + b)b)_{10} = 550$$

$$\text{กรณีที่ 1.2 } b = 4 \quad \text{จาก (3) จะได้ } 4 = 2a(a - 5) + 8a + 32$$

$$4 = 2a^2 - 10a + 8a + 32$$

$$0 = a^2 - a + 14$$

$$a(a - 1) = -(2)(7)$$

เพราะว่า  $a$  เป็นเลขโดด เพราะฉะนั้นไม่มี  $a$  ที่ทำให้  $a(a - 1) = -(2)(7)$

เพราะฉะนั้น  $b = 4$  ไม่ได้

$$\text{กรณีที่ 1.3 } b = 8 \quad \text{เพราะว่า } 0 < a + b \leq 9 \text{ เพราะฉะนั้น } a = 0, 1$$

จาก (3)  $b = 8$  และ  $a = 0$  ไม่ได้

จาก (3)  $b = 8$  และ  $a = 1$  ไม่ได้

กรณีที่ 2  $9 < a + b$

$$N = 11(10a + b) = 110a + 11b = 100a + 10a + 10b + b = 100a + 10(a + b) + b$$

$$= 100a + 10(10 + (a + b - 10)) + b$$

$$= 100a + 100 + 10(a + b - 10) + b$$

$$= 100(a + 1) + 10(a + b - 10) + b$$

$$= ((a + 1)(a + b - 10)b)_{10} \quad \dots (5)$$

เพราะว่า  $\frac{N}{11}$  เท่ากับผลบวกกำลังสองของตัวเลขทุกหลักของ  $N$

เพราะฉะนั้นจาก (1) และ (5) จะได้  $10a + b = (a + 1)^2 + (a + b - 10)^2 + b^2$

$$2a^2 + 2ab + 2b^2 - 28a - 21b + 101 = 0$$

$$2a^2 + 2ab + 2b^2 - 28a = 21b - 101$$

... (6)

เพราะฉะนั้น  $21b - 101$  ต้องเป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น  $b$  ต้องเป็นเลขคี่

ให้  $y$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้  $b = 2y + 1$  แทนค่า  $b = 2y + 1$  ใน (6) จะได้

$$2a^2 + 2a(2y + 1) + 2(2y + 1)^2 - 28a = 21(2y + 1) - 101 = 42y - 80$$

$$a^2 + 2ay + 4y^2 - 13a - 17y + 41 = 0$$

$$a^2 - 13a = 17y - 2ay - 4y^2 - 41$$

$$a(a - 13) = 17y - 2ay - 4y^2 - 41$$

เพราะว่า  $a(a - 13)$  เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น  $17y - 2ay - 4y^2 - 41$  เป็นเลขคู่

เพราะว่า  $-2ay - 4y^2$  เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น  $17y - 41$  เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น  $y$  ต้องเป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้น  $y = 1, 3, 5, 7, 9$

เพราะฉะนั้น  $2y + 1 = 3, 7, 11, 15, 19$

เพราะว่า  $b = 2y + 1$  และ  $b$  เป็นเลขโดด เพราะฉะนั้น  $b = 3, 7$

**กรณีที่ 2.1**  $b = 3$  จาก (6) จะได้  $2a^2 + 6a + 18 - 28a = 63 - 101$

$$2a^2 - 22a + 56 = 0$$

$$a^2 - 11a + 28 = 0$$

$$(a - 4)(a - 8) = 0$$

$$a = 4, 8$$

เพราะว่า  $9 < a + b$  เพราะฉะนั้น  $a = 8$  เพราะฉะนั้น  $N = (a(a + b)b)_{10} = 803$

**กรณีที่ 2.2**  $b = 7$  จาก (6) จะได้  $2a^2 + 14a + 98 - 28a = 147 - 101$

$$2a^2 - 14a + 52 = 0$$

$$a^2 - 7a + 26 = 0$$

$$a(a - 7) = -(2)(13)$$

เพราะว่า  $a$  เป็นเลขโดด เพราะฉะนั้นไม่มี  $a$  ที่ทำให้  $a(a - 7) = -(2)(13)$  เพราะฉะนั้น  $b = 7$  ไม่ได้

สรุป  $N = 550, 803$

**แบบที่ 2** ให้  $N = (htu)_{10} = 100h + 10t + u$  เมื่อ  $h, t, u$  เป็นเลขโดด

... (1)

เพราะว่า  $\frac{N}{11}$  เท่ากับผลบวกกำลังสองของตัวเลขหลักของ  $N$

$$\text{เพราะฉะนั้น } N = 11(h^2 + t^2 + u^2)$$

... (2)

$$N = 100h + 10t + u = (99 + 1)h + (11 - 1)t + u = (99h + 11t) + (h - t + u)$$

... (3)

$$\text{จาก (1), (2) และ (3) จะได้ } (99h + 11t) + (h - t + u) = 11(h^2 + t^2 + u^2)$$

... (4)

เพราะว่า  $11 \mid N$  และ  $11 \mid (99h + 11t)$  เพราะฉะนั้น  $11 \mid (h - t + u)$

เพราะว่า  $h, t, u$  เป็นเลขโดด เพราะฉะนั้น  $-9 \leq h - t + u \leq 18$

เพราะฉะนั้น  $h - t + u = 0$  หรือ  $11$

กรณีที่ 1  $h - t + u = 0$

จาก (4) จะได้  $(99h + 11t) + (0) = 11(h^2 + t^2 + u^2)$

แทนค่า  $t = h + u$  จะได้  $(99h + 11(h + u)) + (0) = 11(h^2 + (h + u)^2 + u^2)$

เพราะฉะนั้น  $10h + u = 2(h^2 + hu + u^2)$  ... (5)

เพราะฉะนั้น  $10h + u$  ต้องเป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น  $u$  ต้องเป็นเลขคู่ ... (6)

จาก (5) จะได้  $2h^2 + (2u - 10)h + 2u^2 - u = 0$

เพราะว่า  $2h^2 + (2u - 10)h + 2u^2 - u = 0$  มีรากเป็นจำนวนเต็มบวก  $h$

เพราะฉะนั้นค่า discriminant  $(2u - 10)^2 - 4(2)(2u^2 - u)$  ต้องเป็นกำลังสองสมบูรณ์

เพราะว่า  $(2u - 10)^2 - 4(2)(2u^2 - u) = 4(25 - 8u - 3u^2)$

เพราะฉะนั้น ถ้า  $u \geq 2$  แล้ว  $25 - 8u - 3u^2 < 0$  เพราะฉะนั้น  $u = 0$

เพราะว่า  $h - t + u = 0$  เพราะฉะนั้น  $h = t$

จาก (5) จะได้  $10h = 2h^2$  เพราะฉะนั้น  $h = 5$

เพราะฉะนั้น  $h = 5, t = 5$  และ  $u = 0$  เพราะฉะนั้น  $N = (htu)_{10} = 550$

กรณีที่ 2  $h - t + u = 11$

เพราะฉะนั้น  $t = h + u - 11$  ... (7)

จาก (4) จะได้  $(99h + 11t) + (11) = 11(h^2 + t^2 + u^2)$

$$(9h + t) + 1 = h^2 + t^2 + u^2$$

$$9h + (h + u - 11) + 1 = h^2 + (h + u - 11)^2 + u^2 \quad (\text{จาก (7)})$$

$$10h + u - 10 = 2(h^2 + hu + u^2 - 11(h + u)) + 121 \quad \dots (8)$$

เพราะฉะนั้น  $10h + u - 10$  เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น  $u$  ต้องเป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น  $u \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

จาก (8) จะได้  $2h^2 + (2u - 32)h + 2u^2 - 23u + 131 = 0$

เพราะว่า  $2h^2 + (2u - 32)h + 2u^2 - 23u + 131 = 0$  มีรากเป็นจำนวนเต็มบวก  $h$

เพราะฉะนั้นค่า discriminant  $(2u - 32)^2 - 4(2)(2u^2 - 23u + 131)$  ต้องเป็นกำลังสองสมบูรณ์

เพราะว่า  $(2u - 32)^2 - 4(2)(2u^2 - 23u + 131) = 4(-3u^2 + 14u - 6)$

เพราะฉะนั้น  $(-3u^2 + 14u - 6)$  ต้องเป็นกำลังสองสมบูรณ์

เพราะว่า  $u \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$  และ  $(-3u^2 + 14u - 6)$  ต้องเป็นกำลังสองสมบูรณ์ เพราะฉะนั้น  $u = 3$

แทนค่า  $u = 3$  ใน (8) จะได้  $10h + 3 - 10 = 2(h^2 + 3h + 9 - 11(h + 3)) + 121$

$$10h - 7 = 2(h^2 - 8h - 24) + 121$$

$$= 2h^2 - 16h - 48 + 121$$

$$2h^2 - 26h + 80 = 0$$

เพราะฉะนั้น  $(h - 5)(h - 8) = 0$

เพราะฉะนั้น  $h = 5, 8$

เพราะว่า ถ้า  $h = 5$  แล้ว  $t = h + u - 11 = 5 - 3 - 11 = -3$  เพราะฉะนั้น  $h = 5$  ไม่ได้

เพราะฉะนั้น  $h = 8$  เพราะฉะนั้น  $t = h + u - 11 = 8 - 3 - 11 = 0$

เพราะว่า  $h = 8, t = 0, u = 3$  เพราะฉะนั้น  $N = (htu)_{10} = 803$

แบบที่ 3 เลข 3 หลักที่หารด้วย 11 ลงตัวคือ 110, 121, ... , 550, ... , 803, ... , 990 มีทั้งหมด 81 ตัว  
หารด้วย 11 จะได้  $10, 11, \dots, 10, \dots, 73, \dots, 90$

โดยการแจกแจงจะได้  $N = 550, 803$

หมายเหตุ การทำแบบที่ 3 จะได้คะแนนเต็ม 7 คะแนน หรือ ได้รับรางวัล Best solution หรือไม่ □

2. แนวคิด เพราะว่าในโจทย์มีพจน์  $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2}$  เพราะฉะนั้น  $1 + 2x \geq 0$  และ  $x \neq 0$

เพราะฉะนั้น  $-\frac{1}{2} \leq x$  และ  $x \neq 0$  ... (1)

$$\begin{aligned} 2x + 9 &> \frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} \\ &= \frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} \frac{(1+\sqrt{1+2x})^2}{(1+\sqrt{1+2x})^2} \\ &= \frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{(1-(1+2x))^2} \\ &= \frac{4x^2(1+\sqrt{1+2x})^2}{4x^2} \\ &= 1 + 2\sqrt{1+2x} + (1+2x) \end{aligned} \quad \text{(จาก (1) } x \neq 0)$$

$$7 > 2\sqrt{1+2x}$$

$$49 > 4(1+2x)$$

$$1 + 2x < \frac{49}{4}$$

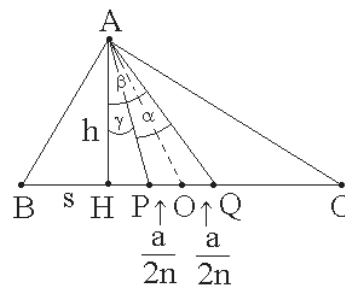
$$x < \frac{45}{8}$$

... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้  $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{45}{8}$  และ  $x \neq 0$

เพราะฉะนั้น  $\{x \mid \frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9\} = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{45}{8})$  □

3. แนวคิด แบบที่ 1



รูปที่ 1960.3.1

ให้  $BC = a$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ ,  $\angle PAQ = \alpha$ ,  $AH \perp BC$

ให้  $\angle HAQ = \beta$ ,  $\angle HAP = \gamma$ ,  $BH = s$  เพราะฉะนั้น  $\alpha = \beta - \gamma$

ให้ O เป็นจุดกึ่งกลาง BC ให้ P, Q เป็นจุดบน BC โดยที่  $PQ = \frac{1}{n} BC$  และ O อยู่ระหว่าง PQ

เพราะฉะนั้น PQ เป็นส่วนเส้นตรงที่อยู่กึ่งกลาง BC

ให้  $h = AH$  เมื่อ AH เป็นความสูงของ  $\triangle ABC$  จากจุด A มายังฐาน BC

เพราะว่าแบ่งเส้นตรง BC ออกเป็น  $n$  ส่วนเท่าๆ กัน และจุดกึ่งกลางของ BC คือจุด O อยู่บน PQ

$$\text{เพราะฉะนั้น } PO = OQ = \frac{1}{2} \left( \frac{BC}{n} \right) = \frac{a}{2n}$$

$$\text{ใน } \triangle AHQ \text{ จะได้ } \tan \beta = \tan \hat{H}AQ = \frac{HQ}{HA} = \frac{BO - BH + OQ}{h} = \frac{\frac{a}{2} - s + \frac{a}{2n}}{h} = \frac{a - 2s}{2h} + \frac{a}{2nh}$$

$$\text{ใน } \triangle AHP \text{ จะได้ } \tan \gamma = \tan \hat{H}AP = \frac{HP}{HA} = \frac{BO - BH - OP}{h} = \frac{\frac{a}{2} - s - \frac{a}{2n}}{h} = \frac{a - 2s}{2h} - \frac{a}{2nh}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \tan \alpha &= \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma} = \frac{\frac{a}{nh}}{1 + \left( \left( \frac{a - 2s}{2h} \right)^2 - \left( \frac{a}{2nh} \right)^2 \right)} \\ &= \frac{a}{nh} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{4n^2 h^2} (n^2 (a - 2s)^2 - a^2)} \right) = \frac{a}{nh} \left( \frac{4n^2 h^2}{4n^2 h^2 + n^2 (a^2 - 4as + 4s^2) - a^2} \right) \\ &= \frac{4nah}{4n^2 h^2 + a^2 (n^2 - 1) - 4n^2 s(a - s)} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

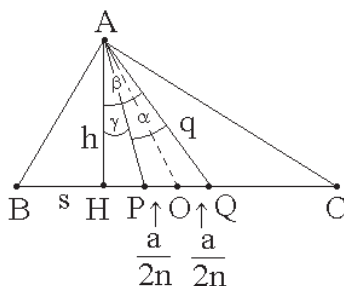
เพราะว่า  $\triangle ABH$ ,  $\triangle AHC$  เป็นสามเหลี่ยมคล้าย เพราะฉะนั้น  $\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC}$

เพราะว่า  $BH = s$ ,  $HC = a - s$ ,  $AH = h$  เพราะฉะนั้น  $\frac{s}{h} = \frac{h}{a - s}$

เพราะฉะนั้น  $h^2 = s(a - s)$  แทนค่าใน (1) จะได้

$$\tan \alpha = \frac{4nah}{4n^2 h^2 + a^2 (n^2 - 1) - 4n^2 s(a - s)} = \frac{4nah}{4n^2 h^2 + a^2 (n^2 - 1) - 4n^2 h^2} = \frac{4nah}{a^2 (n^2 - 1)} = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}$$

แบบที่ 2 ให้  $p = AP$ ,  $q = AQ$



รูปที่ 1960.3.2

เพราะว่า  $\angle BAC = 90^\circ$  เพราะฉะนั้น O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ  $\triangle ABC$  และ  $OB = OC = OA = \frac{a}{2}$

ในทำนองเดียวกันกับแบบที่ 1 จะได้  $OP = OQ = \frac{a}{2n}$  และ  $PQ = \frac{a}{n}$

ใน  $\triangle AOP$  โดยกฎของโคไซน์

$$AP^2 = OA^2 + OP^2 - 2 OA OP \cos \hat{AOP}$$

$$(p)^2 = \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \frac{a}{2n} \right)^2 - 2 \left( \frac{a}{2} \right) \left( \frac{a}{2n} \right) \cos \hat{AOP}$$

$$p^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4n^2} - \frac{a^2}{2n} \cos \hat{AOP} \quad \dots (1)$$

ใน  $\triangle AOQ$  โดยกฎของโคไซน์

$$AQ^2 = OA^2 + OQ^2 - 2 OA OQ \cos \hat{AOQ}$$

$$(q)^2 = \left( \frac{a}{2} \right)^2 + \left( \frac{a}{2n} \right)^2 - 2 \left( \frac{a}{2} \right) \left( \frac{a}{2n} \right) \cos(180^\circ - \hat{AOP})$$

$$q^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4n^2} + \frac{a^2}{2n} \cos \hat{AOP} \quad \dots (2)$$

$$(1) + (2) \text{ จะได้ } p^2 + q^2 = 2\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4n^2}\right) = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2n^2} = \frac{a^2(n^2+1)}{2n^2} \quad \dots (3)$$

$$\text{เพราะว่า } \text{พื้นที่ } \triangle APQ = \frac{1}{2} PQ \cdot AH = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{n}\right)(h) = \frac{ah}{2n} \quad \dots (4)$$

$$\text{และ } \text{พื้นที่ } \triangle APQ = \frac{1}{2} AP \cdot AQ \sin \alpha = \frac{1}{2} pq \sin \alpha \quad \dots (5)$$

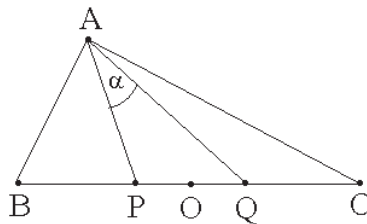
$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (4) และ (5) จะได้ } \frac{ah}{2n} = \frac{1}{2} pq \sin \alpha \text{ เพราะฉะนั้น } \sin \alpha = \frac{ah}{pqn} \quad \dots (6)$$

$$\begin{aligned} \text{ใน } \triangle APQ \text{ โดยกฎของโคไซน์} \quad PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 - 2 AP \cdot AQ \cos \alpha \\ \left(\frac{a}{n}\right)^2 &= (p)^2 + (q)^2 - 2(p)(q) \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \cos \alpha &= \frac{1}{2pq} \left(p^2 + q^2 - \frac{a^2}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2pq} \left(\frac{a^2(n^2+1)}{2n^2} - \frac{a^2}{n^2}\right) \quad (\text{จาก (3)}) \\ &= \frac{1}{2pq} \left(\frac{a^2(n^2+1) - 2a^2}{2n^2}\right) \\ &= \frac{a^2(n^2-1)}{4pqn^2} \quad \dots (7) \end{aligned}$$

$$\text{จาก (6) และ (7) จะได้ } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \left(\frac{ah}{pqn}\right) \left(\frac{4pqn^2}{a^2(n^2-1)}\right) = \frac{4nh}{(n^2-1)a} \quad \square$$

### แบบที่ 3



### รูปที่ 1960.3.3

$$\begin{aligned} \text{ในทำนองเดียวกันกับแบบที่ 1 จะได้ } OP &= OQ = \frac{a}{2n} \text{ และ } PQ = \frac{a}{n} \\ \text{เพราะว่า } \text{พื้นที่ } \triangle APQ &= \frac{1}{2} AP \cdot AQ \sin \alpha \text{ และ } \text{พื้นที่ } \triangle APQ = \frac{1}{2} h \cdot PQ = \frac{1}{2} h \left(\frac{a}{n}\right) \\ \text{เพราะฉะนั้น } \frac{1}{2} AP \cdot AQ \sin \alpha &= \frac{1}{2} h \left(\frac{a}{n}\right) \text{ เพราะฉะนั้น } AP \cdot AQ \sin \alpha = \frac{ah}{n} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ใน } \triangle APQ \text{ โดยกฎของโคไซน์ } PQ^2 &= AP^2 + AQ^2 - 2 AP \cdot AQ \cos \alpha \\ \text{เพราะฉะนั้น } 2 AP \cdot AQ \cos \alpha &= AP^2 + AQ^2 - PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - \frac{a^2}{n^2} \quad \dots (2) \end{aligned}$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } \tan \alpha = \frac{ah}{n} \cdot \frac{1}{AP^2 + AQ^2 - \frac{a^2}{n^2}} \text{ ต่อไปพิจารณาจากเงื่อนไข}$$

$$\frac{ah}{n} \cdot \frac{1}{AP^2 + AQ^2 - \frac{a^2}{n^2}} = \tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a} \text{ ก็ต่อเมื่อ } \frac{1}{n^2 AP^2 + n^2 AQ^2 - a^2} = \frac{2}{(n^2-1)a^2}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } n^2 AP^2 + n^2 AQ^2 - a^2 = \frac{1}{2} a^2 (n^2 - 1) \quad \dots (3)$$

เพราะว่า  $BP = \frac{a}{n} \left( \frac{n-1}{2} \right)$ ,  $CP = \frac{a}{n} \left( \frac{n+1}{2} \right)$ ,  $BQ = \frac{a}{n} \left( \frac{n+1}{2} \right)$ ,  $CQ = \frac{a}{n} \left( \frac{n-1}{2} \right)$

และ  $\triangle ABC$  มี  $AP$  เป็นเส้นที่ลากจากจุดยอด  $A$  มาที่ฐาน  $BC$

เพราะฉะนั้นโดยบทช่วย 1 (Stewart's Theorem) จะได้

$$CP AB^2 + BP AC^2 = BC (AP^2 + CP BP)$$

$$\frac{a}{n} \left( \frac{n+1}{2} \right) AB^2 + \frac{a}{n} \left( \frac{n-1}{2} \right) AC^2 = a \left( AP^2 + \frac{a}{n} \left( \frac{n+1}{2} \right) \frac{a}{n} \left( \frac{n-1}{2} \right) \right)$$

$$\left( \frac{n+1}{2} \right) AB^2 + \left( \frac{n-1}{2} \right) AC^2 = n AP^2 + \frac{a^2}{n} \left( \frac{n^2-1}{4} \right) \quad \dots (4)$$

ในทำนองเดียวกัน  $\triangle ABC$  มี  $AQ$  เป็นเส้นที่ลากจากจุดยอด  $A$  มาที่ฐาน  $BC$  จะได้

$$\left( \frac{n-1}{2} \right) AB^2 + \left( \frac{n+1}{2} \right) AC^2 = n AQ^2 + \frac{a^2}{n} \left( \frac{n^2-1}{4} \right) \quad \dots (5)$$

$$(4) + (5) \text{ จะได้ } n AB^2 + n AC^2 = n AP^2 + n AQ^2 + \frac{a^2}{n} \left( \frac{n^2-1}{2} \right) \quad \dots (6)$$

เพราะว่า  $\triangle ABC$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก  $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$$\text{เพราะฉะนั้น } n BC^2 = n AB^2 + n AC^2 \quad \dots (7)$$

$$\text{จาก (6) และ (7) จะได้ } n BC^2 = n AP^2 + n AQ^2 + \frac{a^2}{n} \left( \frac{n^2-1}{2} \right)$$

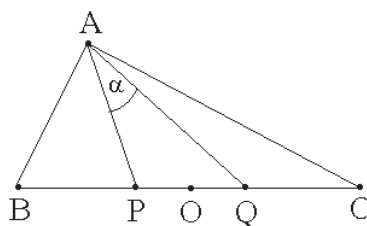
$$n a^2 = n AP^2 + n AQ^2 + \frac{a^2}{n} \left( \frac{n^2-1}{2} \right)$$

$$n^2 a^2 = n^2 AP^2 + n^2 AQ^2 + a^2 \left( \frac{n^2-1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } n^2 AP^2 + n^2 AQ^2 - a^2 &= n^2 a^2 - a^2 - a^2 \left( \frac{n^2-1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} a^2 (n^2 - 1) \quad \dots (8) \end{aligned}$$

$$\text{จาก (3) และ (8) จะได้ } \tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a}$$

**แบบที่ 4**



**รูปที่ 1960.3.4**

$$\text{ให้ } \vec{b} = \vec{AB}, \vec{c} = \vec{AC}, \vec{p} = \vec{AP}, \vec{q} = \vec{AQ}, \vec{o} = \vec{AO} \quad \dots (1)$$

$$\text{ให้ } b = |\vec{b}|, c = |\vec{c}|, p = |\vec{p}|, q = |\vec{q}| \text{ และ } o = |\vec{o}| \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะว่า } \angle BAC = 90^\circ \text{ เพราะฉะนั้น } \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \quad \dots (3)$$

$$\text{จาก (6) ของแบบที่ 2 จะได้ } pq \sin \alpha = \frac{ah}{n} \quad \dots (4)$$

$$\text{เพราะว่า } O \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง } BC \text{ เพราะฉะนั้น } \vec{AO} = \frac{1}{2} (\vec{b} + \vec{c}) \quad \dots (5)$$

$$\text{เพราะว่า } OP = \frac{1}{2n} BC \text{ เพราะฉะนั้น } \vec{OP} = \frac{1}{2n} (\vec{b} - \vec{c}) \quad \dots (6)$$

$$\text{เพราะว่า } OQ = \frac{1}{2n} BC \text{ เพราะฉะนั้น } \vec{OQ} = \frac{1}{2n} (\vec{c} - \vec{b}) \quad \dots (7)$$

เพราะฉะนั้น  $\vec{p} = \vec{AP} = \vec{AO} + \vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{2n}(\vec{b} - \vec{c})$  (จาก (5) และ (6))

$$= \frac{(n+1)\vec{b} + (n-1)\vec{c}}{2n} \quad \dots (8)$$

$$\vec{q} = \vec{AQ} = \vec{AO} + \vec{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \frac{1}{2n}(\vec{c} - \vec{b}) \quad \text{(จาก (5) และ (7))}$$

$$= \frac{(n-1)\vec{b} + (n+1)\vec{c}}{2n} \quad \dots (9)$$

$$pq \cos \alpha = \vec{p} \cdot \vec{q} = \frac{(n+1)\vec{b} + (n-1)\vec{c}}{2n} \cdot \frac{(n-1)\vec{b} + (n+1)\vec{c}}{2n} \quad \text{(จาก (8) และ (9))}$$

$$= \frac{1}{4n^2} ((n^2 - 1)\vec{b} \cdot \vec{b} + (n+1)^2 \vec{b} \cdot \vec{c} + (n-1)^2 \vec{b} \cdot \vec{c} + (n^2 - 1)\vec{c} \cdot \vec{c})$$

$$= \frac{1}{4n^2} ((n^2 - 1)\vec{b} \cdot \vec{b} + (n+1)^2 (0) + (n-1)^2 (0) + (n^2 - 1)\vec{c} \cdot \vec{c}) \quad (\vec{b} \cdot \vec{c} = 0)$$

$$= \frac{1}{4n^2} ((n^2 - 1)b^2 + (n^2 - 1)c^2) = \frac{1}{4n^2} (n^2 - 1)(b^2 + c^2)$$

$$= \frac{1}{4n^2} (n^2 - 1)a^2 \quad (\triangle ABC \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก}) \quad \dots (10)$$

จาก (4) และ (10) จะได้  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{pq \sin \alpha}{pq \cos \alpha} = \frac{pq \sin \alpha}{\vec{p} \cdot \vec{q}} = \frac{ah4n^2}{(n^2 - 1)a^2}$

**แบบที่ 5** เพราะว่าปัญหาค้นหาข้อนี้ถามเกี่ยวกับค่าอัตราส่วน  $\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}$

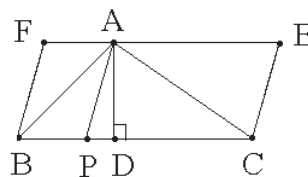
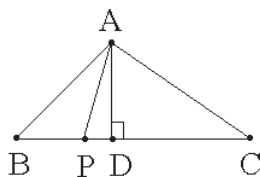
เพราะฉะนั้นการย่อหรือการขยายรูป  $\triangle ABC$  ที่คล้ายกับสามเหลี่ยมรูปเดิมค่าของ  $\tan \alpha$  จะต้องเท่ากัน  
 เพราะฉะนั้นโดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้  $a = n$

ในการคำนวณแบบที่ 3 เราอาจได้ว่า  $\frac{a}{n} = 1$  จะทำให้ง่ายและได้ค่า  $\tan \alpha = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}$  เหมือนกัน  $\square$

### บทช่วย 1 Stewart's Theorem

P อยู่บนเส้นตรงที่ผ่าน BC ของ  $\triangle ABC$  จะได้  $CP AB^2 + BP AC^2 = AP^2 BC + PB PC BC$

ข้อพิสูจน์ ให้  $AD \perp BC$  เพราะฉะนั้น  $AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2 PC PD$   $\dots (1)$



### รูปที่ 1960.3.5

หมายเหตุ การพิสูจน์ (1) ใช้ทฤษฎีบท 55 คณิตศาสตร์ปริญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต หน้า 80

หรือพิสูจน์ (1) โดยใช้เนื้อหาเวกเตอร์ดังนี้ ให้ E เป็นจุดที่ทำให้  $\square APCE$  เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$AC^2 = AP^2 + AE^2 + 2 AP AE \cos \hat{PAE}$$

$$= AP^2 + PC^2 + 2 AP PC \cos(180^\circ - \hat{APC}) \quad (\square APCE \text{ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน})$$

$$= AP^2 + PC^2 - 2 AP PC \cos \hat{APC} = AP^2 + PC^2 - 2 AP PC \left(\frac{PD}{AP}\right) = AP^2 + PC^2 - 2 PC PD$$

ในทำนองเดียวกันจะได้  $AB^2 = BP^2 + AP^2 + 2 PB PD$   $\dots (2)$

$$PB \times (1) \text{ จะได้ } AC^2 PB = AP^2 PB + PC^2 PB - 2 PC PD PB \quad \dots (3)$$

$$PC \times (2) \text{ จะได้ } AB^2 PC = BP^2 PC + AP^2 PC + 2 PB PD PC \quad \dots (4)$$

$$(3) + (4) \text{ จะได้ } AC^2 PB + AB^2 PC = AP^2 PB + PC^2 PB + BP^2 PC + AP^2 PC$$

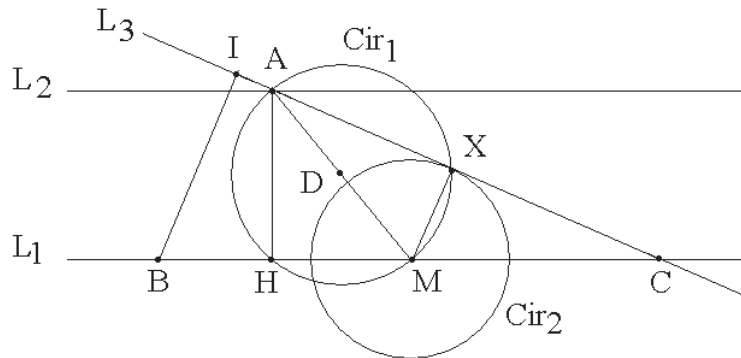
$$CP AB^2 + BP AC^2 = AP^2 (PB + PC) + (PC^2 PB + BP^2 PC)$$

$$= AP^2 BC + PB PC (PC + BP)$$

$$= AP^2 BC + PB PC BC$$

□

#### 4. แนวคิด



รูปที่ 1960.4.1

ให้ความสูงจาก A, B ไปยังฐานด้านตรงข้ามเป็น  $h_A$ ,  $h_B$  ตามลำดับ

ให้ความยาวของเส้นมัธยฐานจากจุด A ไปยังด้าน BC ยาว  $m_A$

ขั้นตอนการสร้าง

1. ลากเส้นตรง  $L_1$ ,  $L_2$  ให้ขนานกันและห่างกันเท่ากับ  $h_A$
2. ให้ H อยู่บนเส้นตรง  $L_1$  และ A อยู่บนเส้นตรง  $L_2$  และ  $AH \perp L_1$  เพราะฉะนั้น  $AH = h_A$
3. เขียนส่วนโค้งของวงกลมจุดศูนย์กลาง A และรัศมีเท่ากับ  $m_A$  ตัดเส้นตรง  $L_1$  ที่จุด M เพราะฉะนั้น  $AM = m_A$
4. ให้ D เป็นจุดกึ่งกลาง AM เขียนวงกลม  $Cir_1$  จุดศูนย์กลาง D และรัศมีเท่ากับ  $\frac{1}{2} m_A$
5. เขียนวงกลม  $Cir_2$  จุดศูนย์กลาง M และ รัศมีเท่ากับ  $\frac{1}{2} h_B$
6. ลากเส้นตรง  $L_3$  ผ่านจุด A และสัมผัสวงกลม  $Cir_2$  ที่จุด X เพราะฉะนั้น  $MX = \frac{1}{2} h_B$
7. ให้เส้นตรง  $L_1$  และ  $L_3$  ตัดกันที่จุด C
8. ให้ B อยู่บน  $L_1$  แต่อยู่คนละด้านกับจุด C และ  $MC = BM$
9. ให้ I อยู่บนเส้นตรง  $L_3$  และ  $BI \perp L_3$

จากข้อ 2 จะได้  $AH = h_A$

จากข้อ 3 จะได้ความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุด A ไปยัง BC เท่ากับ  $m_A$

เพราะว่า  $MX \perp CI$  และ  $BI \perp CI$  เพราะฉะนั้น  $\triangle CBI$ ,  $\triangle CMX$  เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

เพราะฉะนั้น  $\frac{BI}{MX} = \frac{BC}{MC} = \frac{2MC}{MC}$  (จากข้อ 8)

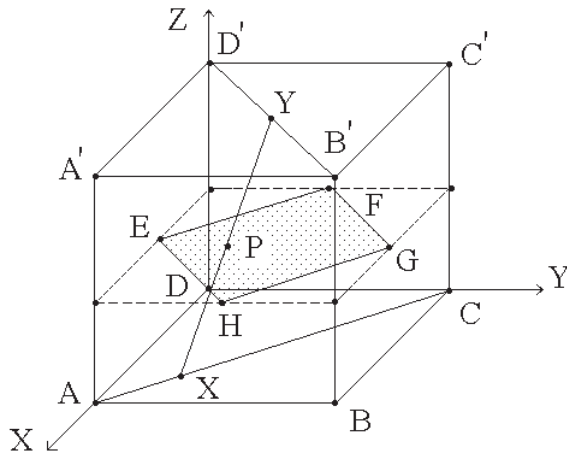
เพราะฉะนั้น  $BI = 2MX = h_B$  (จากข้อ 6)

เพราะฉะนั้น  $\triangle ABC$  เป็นสามเหลี่ยมที่ต้องการ

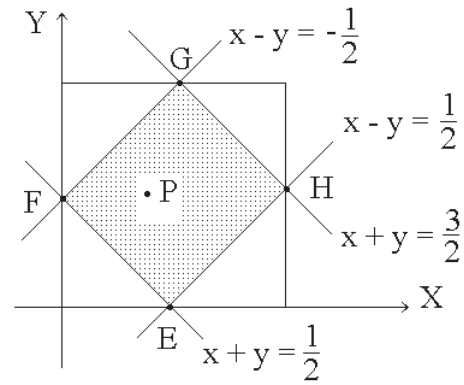
□

## 5. แนวคิด

## 5.1



รูปที่ 1960.5.1.1



รูปที่ 1960.5.1.2

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้  $ABCD A'B'C'D'$  เป็นลูกบาศก์หนึ่งหน่วย กำหนดพิกัด  $A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 0)$

$$A'(1, 0, 1), B'(1, 1, 1), C'(0, 1, 1), D'(0, 0, 1)$$

ให้  $X$  อยู่บนส่วนเส้นตรง  $AC$  และ  $X$  เคลื่อนที่จาก  $A$  ไป  $C$

เพราะฉะนั้น 
$$\begin{aligned} X &= (1-s)A + sC && \text{เมื่อ } 0 \leq s \leq 1 \\ &= (1-s)(1, 0, 0) + s(0, 1, 0) = (1-s, 0, 0) + (0, s, 0) \\ &= (1-s, s, 0) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

ให้  $Y$  อยู่บนส่วนเส้นตรง  $B'D'$  และ  $Y$  เคลื่อนที่จาก  $D'$  ไป  $B'$

เพราะฉะนั้น 
$$\begin{aligned} Y &= (1-t)D' + tB' && \text{เมื่อ } 0 \leq t \leq 1 \\ &= (1-t)(0, 0, 1) + t(1, 1, 1) = (0, 0, 1-t) + (t, t, t) \\ &= (t, t, 1) \end{aligned} \quad \dots (2)$$

เพราะว่า  $P$  ซึ่งเป็นจุดกึ่งกลางของ  $XY$  เพราะฉะนั้นจาก (1) และ (2) จะได้

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}(X + Y) = \frac{1}{2}((1-s, s, 0) + (t, t, 1)) \quad \text{เมื่อ } 0 \leq s \leq 1 \text{ และ } 0 \leq t \leq 1 \\ &= \left( \frac{t-s+1}{2}, \frac{t+s}{2}, \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจุด  $P$  อยู่บนระนาบ  $z = \frac{1}{2}$

การหาทางเดินของจุด  $P$  บนระนาบ  $z = \frac{1}{2}$  ให้  $x = \frac{t-s+1}{2}$  และ  $y = \frac{t+s}{2}$

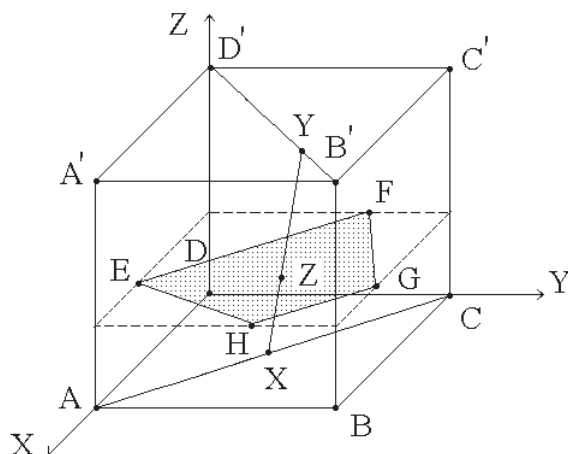
เพราะฉะนั้น 
$$\begin{aligned} x + y &= \frac{2t+1}{2} = t + \frac{1}{2} && \text{และ} && x - y = \frac{1-2s}{2} = \frac{1}{2} - s \\ x + y - \frac{1}{2} &= t && \text{และ} && x - y - \frac{1}{2} = -s \end{aligned}$$

เพราะว่า  $0 \leq s \leq 1$  และ  $0 \leq t \leq 1$  เพราะฉะนั้น

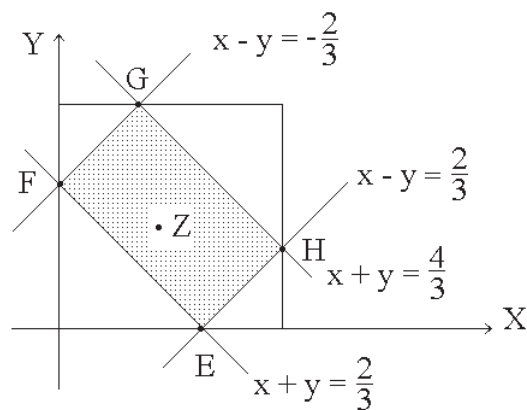
$$\begin{aligned} 0 \leq x + y - \frac{1}{2} \leq 1 &&& \text{และ} && -1 \leq x - y - \frac{1}{2} \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2} &&& \text{และ} && -\frac{1}{2} \leq x - y \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นทางเดินของจุด  $P$  คือ  $\{(x, y, z) \mid \frac{1}{2} \leq x + y \leq \frac{3}{2} \text{ และ } -\frac{1}{2} \leq x - y \leq \frac{1}{2} \text{ และ } z = \frac{1}{2}\}$

5.2



รูปที่ 1960.5.2.1



รูปที่ 1960.5.2.2

เพราะว่า  $X = (1 - s, s, 0)$  เมื่อ  $0 \leq s \leq 1$  และ  $Y = (t, t, 1)$  เมื่อ  $0 \leq t \leq 1$  และ  $ZY = 2XZ$

เพราะฉะนั้น  $2\vec{XZ} = \vec{ZY}$  เพราะฉะนั้น  $2(\vec{Z} - \vec{X}) = \vec{Y} - \vec{Z}$  เพราะฉะนั้น  $3\vec{Z} = 2\vec{X} + \vec{Y}$

เพราะฉะนั้น  $Z = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}Y = \frac{2}{3}(1 - s, s, 0) + \frac{1}{3}(t, t, 1)$  (จาก (1) และ (2))  
 $= (\frac{t-2s+2}{3}, \frac{t+2s}{3}, \frac{1}{3})$

เพราะฉะนั้นจุด  $Z$  อยู่บนระนาบ  $z = \frac{1}{3}$

การหาทางเดินของจุด  $Z$  บนระนาบ  $z = \frac{1}{3}$  ให้  $x = \frac{t-2s+2}{3}$  และ  $y = \frac{t+2s}{3}$

เพราะฉะนั้น  $x + y = \frac{2t+2}{3} = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}$  และ  $x - y = \frac{-4s+2}{3} = -\frac{4}{3}s + \frac{2}{3}$   
 $x + y - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}t$  และ  $x - y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}s$

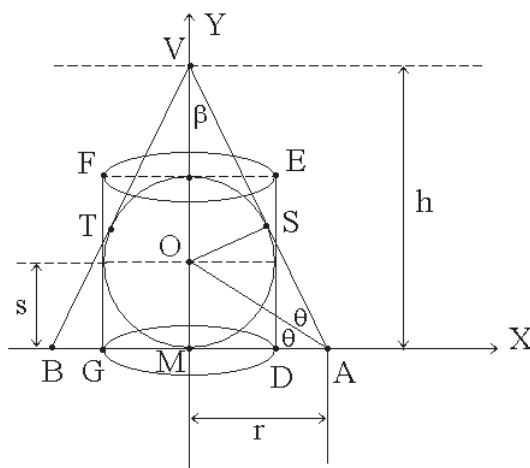
เพราะว่า  $0 \leq s \leq 1$  และ  $0 \leq t \leq 1$  เพราะฉะนั้น

$$0 \leq x + y - \frac{2}{3} \leq \frac{2}{3} \quad \text{และ} \quad -\frac{4}{3} \leq x - y - \frac{2}{3} \leq 0$$

$$\frac{2}{3} \leq x + y \leq \frac{4}{3} \quad \text{และ} \quad -\frac{2}{3} \leq x - y \leq \frac{2}{3}$$

เพราะฉะนั้นทางเดินของจุด  $Z$  คือ  $\{(x, y, z) \mid \frac{2}{3} \leq x + y \leq \frac{4}{3} \text{ และ } -\frac{2}{3} \leq x - y \leq \frac{2}{3} \text{ และ } z = \frac{1}{3}\}$   $\square$

## 6. แนวคิด



รูปที่ 1960.6.1

ให้  $M$  เป็นจุดศูนย์กลางที่ฐานของกรวย

$O$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่บรรจุในกรวย

$V$  เป็นจุดยอดของกรวย

ให้เส้นตรง  $\overline{BMA}$  เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่ขอบกรวย (ฐานของกรวย)

พิจารณาภาคตัดของกรวย ให้แกน  $X$  ทับเส้นตรง  $\overline{BMA}$  และแกน  $Y$  ทับเส้นตรง  $VM$

เพราะฉะนั้น  $M(0, 0)$  เป็นจุดกำเนิด

ให้  $r$  เป็นรัศมีของฐานกรวย เพราะฉะนั้น  $MA = r$  เพราะฉะนั้นพิกัด  $A, B$  คือ  $A(r, 0), B(-r, 0)$

ให้  $s$  เป็นรัศมีของทรงกลม เพราะฉะนั้น  $OM = s$  เพราะฉะนั้นพิกัด  $O$  คือ  $O(0, s)$

ให้  $h$  เป็นความสูงของกรวย เพราะฉะนั้นพิกัด  $V$  คือ  $V(0, h)$  และ  $MV = h$

ให้  $Cir_l$  เป็นวงกลมแนบใน  $\triangle ABV$

เพราะฉะนั้น  $O(0, s)$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม  $Cir_l$

ให้  $AV, BV$  สัมผัสวงกลม  $Cir_l$  ที่จุด  $S, T$  ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น  $\widehat{MAO} = \widehat{SAO}$  เพราะฉะนั้น  $\widehat{MAO} = \widehat{VAO}$

ให้  $\theta = \widehat{MAO} = \widehat{VAO}$  เพราะฉะนั้น  $\widehat{MAV} = 2\theta$

เพราะว่า  $\triangle MAV$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะฉะนั้น  $\tan \widehat{MAV} = \frac{MV}{MA} = \frac{h}{r}$  ... (1)

เพราะฉะนั้น  $\tan 2\theta = \frac{h}{r}$  เพราะฉะนั้น  $r \tan 2\theta = h$  ... (2)

$$V_1 = \text{ปริมาตรของกรวย} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^3 \tan 2\theta \quad (\text{จาก (2)})$$

$$= \frac{2\pi r^3 \tan \theta}{3(1 - \tan^2 \theta)} \quad \dots (3)$$

เพราะว่า  $\triangle MAO$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะฉะนั้น  $\tan \theta = \tan \widehat{MAO} = \frac{MO}{MA} = \frac{s}{r}$  ... (4)

เพราะฉะนั้น  $r \tan \theta = s$  ... (5)

เพราะว่าทรงกลมมีรัศมี  $s$  เพราะฉะนั้นความสูงของทรงกระบอกเท่ากับ  $2s$

เพราะฉะนั้น  $V_2 = \text{ปริมาตรของทรงกระบอก}$

$$= \pi(s^2)(2s)$$

$$= 2\pi s^3$$

$$= 2\pi r^3 \tan^3 \theta \quad (\text{จาก (5)})$$

เพราะฉะนั้นจาก (3) และ (6) จะได้  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2\pi r^3 \tan \theta}{3(1 - \tan^2 \theta)} \frac{1}{2\pi r^3 \tan^3 \theta} = \frac{1}{3(1 - \tan^2 \theta) \tan^2 \theta}$  ... (6)

**6.1 สมมติ  $V_1 = V_2$**

เพราะฉะนั้น  $\frac{V_1}{V_2} = 1$  เพราะฉะนั้นมี  $\theta$  ที่ทำให้  $\frac{1}{3(1 - \tan^2 \theta) \tan^2 \theta} = 1$  (จาก (6))

$$3(1 - \tan^2 \theta) \tan^2 \theta = 1$$

$$3 \tan^4 \theta - 3 \tan^2 \theta + 1 = 0$$

เพราะว่าค่าของ discriminant  $(-3)^2 - 4(3)(1) = -3 < 0$

เพราะฉะนั้น  $3 \tan^4 \theta - 3 \tan^2 \theta + 1 = 0$  ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้นไม่มี  $\theta$  ที่ทำให้  $\frac{1}{3(1 - \tan^2 \theta) \tan^2 \theta} = 1$  จึงเกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้นที่สมมติ  $V_1 = V_2$  ไม่จริง

เพราะฉะนั้น  $V_1 \neq V_2$

**6.2 แบบที่ 1** ให้  $k = \frac{V_1}{V_2}$  เพราะฉะนั้นจาก (6) จะได้  $k = \frac{1}{3(1 - \tan^2 \theta) \tan^2 \theta}$

เพราะฉะนั้น  $(1 - \tan^2 \theta) \tan^2 \theta = \frac{1}{3k}$

โดยอสมการ A.M. - G.M. จะได้  $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$  เมื่อ  $x > 0, y > 0$  และ  $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$  ก็ต่อเมื่อ  $x = y$

เพราะฉะนั้น  $\frac{1}{3k} = (1 - \tan^2 \theta) \tan^2 \theta \leq \left(\frac{1}{2}((1 - \tan^2 \theta) + (\tan^2 \theta))\right)^2 = \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น  $\frac{1}{3k} \leq \frac{1}{4}$  เพราะฉะนั้น  $\frac{4}{3} \leq k$

และ  $\frac{4}{3} = k$  ก็ต่อเมื่อ  $1 - \tan^2 \theta = \tan^2 \theta$

ก็ต่อเมื่อ  $2 \tan^2 \theta = 1$

ก็ต่อเมื่อ  $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ก็ต่อเมื่อ  $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2(-\frac{1}{\sqrt{2}})}{1 - \frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$

ก็ต่อเมื่อ  $\frac{h}{r} = \tan 2\theta = 2\sqrt{2}$  (จาก (2))

เพราะฉะนั้น  $k$  มีค่าต่ำสุดเท่ากับ  $\frac{4}{3}$  เมื่อ  $h = 2\sqrt{2} r$

เพราะฉะนั้น  $\frac{V_1}{V_2}$  มีค่าต่ำสุดเท่ากับ  $\frac{4}{3}$  เมื่อ  $h = 2\sqrt{2} r$  และ  $M\hat{A}V = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$

**แบบที่ 2** ให้  $M\hat{V}A = \beta$

เพราะว่า  $S$  เป็นจุดที่  $VA$  สัมผัสทรงกลม

เพราะฉะนั้น  $\triangle VOS$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ  $OS =$  รัศมีทรงกลม  $= s$

เพราะฉะนั้น  $\sin \beta = \sin O\hat{V}S = \frac{OS}{VO} = \frac{s}{VO}$  เพราะฉะนั้น  $VO = \frac{s}{\sin \beta}$

เพราะฉะนั้น  $h = MV = MO + OV = s + \frac{s}{\sin \beta} = s(1 + \frac{1}{\sin \beta})$  ... (7)

เพราะว่า  $\triangle VMA$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก เพราะฉะนั้น  $\tan M\hat{V}A = \frac{MA}{MV}$  เพราะฉะนั้น  $\tan \beta = \frac{MA}{MV}$

เพราะฉะนั้น  $MA = MV \tan \beta = s(1 + \frac{1}{\sin \beta}) \tan \beta$  ... (8)

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}\pi(MA^2)(h)}{\pi(MD^2)(DE)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(s(1 + \frac{1}{\sin \beta}) \tan \beta)^2 (s(1 + \frac{1}{\sin \beta}))}{3(s^2)(2s)} \quad (\text{จาก (8) และ } MD = s, DE = 2s) \\
 &= \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{\sin \beta})^3 \tan^2 \beta \quad \dots (9)
 \end{aligned}$$

ให้  $t = \sin \beta$  เพราะฉะนั้น  $t > 0$  และจาก (9) จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{V_1}{V_2} &= \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{\sin \beta})^3 \tan^2 \beta = \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{t})^3 \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \\
 &= \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{t})^3 \frac{t^2}{1 - \sin^2 \beta} = \frac{1}{6} (1 + \frac{1}{t})^3 \frac{t^2}{1 - t^2} \\
 &= \frac{1}{6} (t + 1)^3 \frac{1}{t(1 - t^2)} \quad \dots (10)
 \end{aligned}$$

เพราะว่า  $(1 - 3t)^2 (1 + t) \geq 0 \quad \dots (11)$

$$1 - 5t + 3t^2 + 9t^3 \geq 0$$

$$1 + 3t + 3t^2 + t^3 \geq 8t - 8t^3$$

$$(t + 1)^3 \geq 8t(1 - t^2)$$

$$(t + 1)^3 \frac{1}{t(1 - t^2)} \geq 8 \quad (1 - t^2 = 1 - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta > 0)$$

$$\frac{1}{6} (t + 1)^3 \frac{1}{t(1 - t^2)} \geq \frac{4}{3} \quad \dots (12)$$

เพราะฉะนั้นจาก (10) และ (12) จะได้  $\frac{V_1}{V_2} \geq \frac{4}{3}$

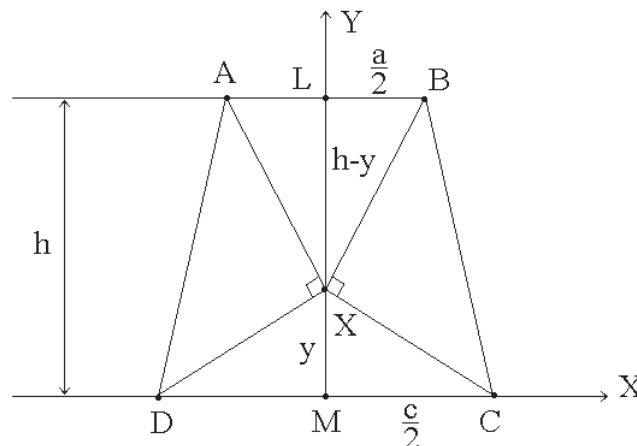
และ  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}$  ก็ต่อเมื่อ  $1 - 3t = 0 \quad (\text{จาก (11)})$

ก็ต่อเมื่อ  $t = \frac{1}{3}$

ก็ต่อเมื่อ  $\sin \beta = \frac{1}{3}$

□

## 7. แนวคิด



รูปที่ 1960.7.1

ให้ L, M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB, CD ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น  $AL = LB = \frac{a}{2}$  และ  $DM = MC = \frac{c}{2}$  และ  $LM = h \quad \dots (1)$

และ LM เป็นแกนสมมาตรของ  $\square ABCD$

ให้ X เป็นจุดบน LM ที่ทำให้  $\hat{BXC} = 90^\circ$

เพราะว่า LM เป็นแกนสมมาตรของ  $\square ABCD$  เพราะฉะนั้น  $\hat{AXD} = 90^\circ$

ให้ แกน X ทับด้าน CD แกน Y ทับด้าน ML

เพราะฉะนั้น M เป็นจุดกำเนิด

ให้  $MX = y$  เพราะฉะนั้น  $XL = h - y$

... (2)

เพราะว่า  $XL \perp LB$  และ  $XM \perp MC$

เพราะฉะนั้น  $\triangle LBX, \triangle MCX$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก  $\hat{XLB} = \hat{XMC} = 90^\circ$

$$\hat{LXB} = 180^\circ - \hat{BXC} - \hat{MXC}$$

$$= 180^\circ - 90^\circ - \hat{MXC}$$

$$= 90^\circ - \hat{MXC}$$

$$= \hat{MCX}$$

เพราะว่า  $\triangle LBX, \triangle MCX$  เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ  $\hat{LXB} = \hat{MCX}$

เพราะฉะนั้น  $\triangle LBX, \triangle MCX$  เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{LB}{MX} = \frac{XL}{CM} = \frac{BX}{XC}$$

$$\text{เพราะว่า } \frac{LB}{MX} = \frac{XL}{CM} \text{ และจาก (1) และ (2)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจะได้} \quad \frac{\frac{a}{2}}{y} = \frac{y-h}{\frac{c}{2}}$$

$$\frac{c}{2(h-y)} = \frac{2y}{a}$$

$$(2y)(2(h-y)) = ac$$

$$4hy - 4y^2 = ac$$

$$4y^2 - 4hy + ac = 0$$

$$y = \frac{4h \pm \sqrt{16h^2 - 16ac}}{8}$$

เพราะฉะนั้น y เป็นจำนวนจริงบวก ก็ต่อเมื่อ  $16h^2 - 16ac \geq 0$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad h^2 \geq ac$$

เพราะฉะนั้น ถ้า  $h^2 < ac$  แล้ว ไม่มีจุด X ที่ทำให้  $\hat{XLB} = \hat{XMC} = 90^\circ$

ถ้า  $h^2 \geq ac$  แล้ว มีจุด X ที่ทำให้  $\hat{XLB} = \hat{XMC} = 90^\circ$

□

# The Third International Mathematical Olympiad

Budapest – Veszprem, Hungary

6 – 16 July 1961

## Day I

1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$x + y + z = a$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$

$$xy = z^2$$

เมื่อ  $a, b$  เป็นค่าคงตัว และหาเงื่อนไขที่ทำให้  $x, y, z$  เป็นจำนวนจริงบวกและมีค่าต่างกัน

2. กำหนดให้  $a, b, c$  เป็นความยาวด้านของ  $\triangle ABC$  และ  $\Delta$  เป็นพื้นที่  $\triangle ABC$

$$\text{จงแสดงว่า } a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \Delta$$

และ สมการเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ  $\triangle ABC$  เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

3. กำหนดให้  $n$  เป็นจำนวนนับ

$$\text{จงหาผลเฉลยของสมการ } \cos^n x - \sin^n x = 1$$

## Day II

4. กำหนดให้  $P$  เป็นจุดภายใน  $\triangle ABC$  มี  $AP, BP, CP$  ตัดกับ  $BC, CA, AB$  ที่จุด  $D, E, F$  ตามลำดับ  
จงแสดงว่า ในบรรดาจำนวนจริงสามจำนวน  $\frac{AP}{PD}, \frac{BP}{PE}, \frac{CP}{PF}$  มีอย่างน้อยหนึ่งจำนวนมีค่าไม่เกิน 2  
และ มีอย่างน้อยหนึ่งจำนวนมีค่ามากกว่า 2

5. จงสร้าง  $\triangle ABC$  เมื่อ  $AC = b, AB = c, \angle A = \omega, M$  เป็นจุดกึ่งกลาง  $BC$  และ  $\omega < 90^\circ$

$$\text{จงแสดงว่า มีรูป } \triangle ABC \text{ ก็ต่อเมื่อ } b \tan \frac{\omega}{2} \leq c < b$$

และ หาเงื่อนไขที่ทำให้สมการเป็นจริง

6. กำหนดให้  $E$  เป็นระนาบในปริภูมิสามมิติ

$A, B, C$  เป็นจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและไม่อยู่บนระนาบ  $E$  และอยู่ด้านเดียวกันของระนาบ  $E$

ให้  $A', B', C'$  เป็นจุดบนระนาบ  $E$  และ  $L, M, N$  เป็นจุดกึ่งกลางด้าน  $A'A, B'B, C'C$  ตามลำดับ

และ  $\triangle LMN$  เป็นรูปสามเหลี่ยม

(หมายเหตุ เราไม่สนใจกรณีของจุด  $A', B', C'$  ที่ไม่ทำให้เกิดรูป  $\triangle LMN$ )

ให้  $G$  เป็นจุดเซนทรอยด์ของ  $\triangle LMN$

จงหาทางเดินของจุด  $G$

## The Third International Mathematical Olympiad Solutions

Budapest – Veszprem, Hungary, 6 – 16 July 1961

## 1. แนวคิด

$$x + y + z = a \quad \dots (1)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2 \quad \dots (2)$$

$$xy = z^2 \quad \dots (3)$$

จาก (2) และ (3) จะได้  $x^2 + y^2 + xy = b^2 \quad \dots (4)$

จาก (1) จะได้  $((x + y) - a)^2 = z^2$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2a(x + y) + a^2 = xy \quad \text{(จาก (3))}$$

$$x^2 + xy + y^2 - 2a(x + y) = -a^2 \quad \dots (5)$$

จาก (4) และ (5) จะได้  $2a(x + y) = b^2 + a^2$  เพราะฉะนั้น  $x + y = \frac{a^2 + b^2}{2a} \quad \dots (6)$

จาก (1) และ (6) จะได้  $z = a - (x + y) = a - \frac{a^2 + b^2}{2a} = \frac{a^2 - b^2}{2a} \quad \dots (7)$

จาก (3) และ (7) จะได้  $xy = \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 \quad \dots (8)$

จาก (6) และ (8) จะได้  $x, y$  เป็นรากของสมการ  $w^2 - \frac{a^2 + b^2}{2a}w + \left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2 = 0 \quad \dots (9)$

ให้  $\Delta = \text{discriminant}$  ของ (9) เพราะฉะนั้น  $\Delta = \left(\frac{a^2 + b^2}{2a}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{a^2 - b^2}{2a}\right)^2$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \Delta &= \left(\frac{a^2 + b^2}{2a} - \frac{a^2 - b^2}{a}\right)\left(\frac{a^2 + b^2}{2a} + \frac{a^2 - b^2}{a}\right) = \left(\frac{-a^2 + 3b^2}{2a}\right)\left(\frac{3a^2 - b^2}{2a}\right) \\ &= \frac{1}{4a^2}(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2) \end{aligned}$$

เพราะว่า  $z > 0$  และจาก (7) เพราะฉะนั้น  $\frac{a^2 - b^2}{2a} > 0$  เพราะฉะนั้น  $a^2 > b^2$

เพราะฉะนั้น  $3a^2 > b^2$  เพราะฉะนั้น  $3a^2 - b^2 > 0 \quad \dots (10)$

เพราะว่า  $x, y$  เป็นจำนวนจริงบวกและมีค่าต่างกัน เพราะฉะนั้น  $\Delta = \frac{1}{4a^2}(3a^2 - b^2)(3b^2 - a^2) > 0$

เพราะฉะนั้น  $(3b^2 - a^2) > 0$  เพราะฉะนั้น  $3b^2 > a^2 \quad \dots (11)$

จาก (10) และ (11) จะได้  $b^2 < 3a^2 < 9b^2$  เพราะฉะนั้น  $|b| < \sqrt{3}|a| < 3|b|$

จาก (9) และ  $x, y$  มีค่าต่างกัน เพราะฉะนั้น  $x = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$  และ  $y = \frac{a^2 + b^2}{4a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

เพราะว่า  $z = \sqrt{xy}$  เพราะฉะนั้น  $z$  อยู่ระหว่าง  $x, y$  และ  $z \neq x$  และ  $z \neq y$

เพราะฉะนั้น  $x = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, y = \frac{a^2 + b^2}{4a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, z = \frac{a^2 - b^2}{2a}$  เป็นรากของ (1) - (3) ที่มีค่าต่างกัน

**แบบที่ 2** โดยคุณสมบัติของสมการพหุนาม  $x, y, z$  เป็นรากของสมการ  $p^3 + s_1 p^2 + s_2 p + s_3 = 0$

เมื่อ  $s_1 = -(x + y + z) = -a \quad \text{(จาก (1))}$

$$s_2 = xy + yz + zx = \frac{1}{2}((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \quad \text{(จาก (1) และ (2))}$$

$$s_3 = -xyz = -z^3 \quad \text{(จาก (3))}$$

หมายเหตุ การพิสูจน์นี้ได้จากคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 24 เสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก หน้า 319

เพราะฉะนั้น  $x, y, z$  เป็นรากของสมการ  $p^3 - ap^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)p - z^3 = 0$

เพราะฉะนั้น  $z^3 - az^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)z - z^3 = 0$

$$-az^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)z = 0$$

$$z(-az + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)) = 0$$

เพราะว่า  $z \neq 0$  เพราะฉะนั้น  $z = \frac{a^2 - b^2}{2a}$  จาก (1) จะได้  $x + y = a - z = a - \frac{a^2 - b^2}{2a} = \frac{a^2 + b^2}{2a}$

และ  $xy = z^2 = (\frac{a^2 - b^2}{2a})^2$  ในทำนองเดียวกันจะได้  $|b| < \sqrt{3}|a| < 3|b|$

ทำให้  $x = \frac{a^2 + b^2}{4a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, y = \frac{a^2 + b^2}{4a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, z = \frac{a^2 - b^2}{2a}$  เป็นรากของ (1) - (3) ที่มีค่าต่างกัน

หมายเหตุ ในปริภูมิสามมิติ

$x + y + z = a$  เป็นสมการระนาบที่ห่างจากจุด  $(0, 0, 0)$  เป็นระยะทาง  $= \left| \frac{a}{\sqrt{3}} \right|$

$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$  เป็นสมการผิวทรงกลมจุดศูนย์กลาง  $(0, 0, 0)$  และรัศมี  $= |b|$

เพราะฉะนั้น  $x + y + z = a$  และ  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$  มีจุดตัดรวมกันได้ ก็ต่อเมื่อ  $\left| \frac{a}{\sqrt{3}} \right| \leq |b|$

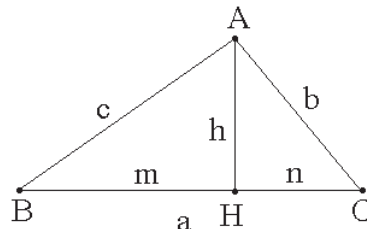
ก็ต่อเมื่อ  $|a| \leq \sqrt{3}|b|$

ในกรณี  $|a| = \sqrt{3}|b|$  จะได้ระนาบ  $x + y + z = a$  และทรงกลม  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$  สัมผัสกัน  $\square$

## 2. แนวคิด แบบที่ 1

เพราะว่าเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอดของ  $\triangle ABC$  มายังด้านตรงข้ามต้องมียาวอย่างน้อยหนึ่งเส้นที่อยู่ใน  $\triangle ABC$

เพราะฉะนั้นโดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้  $H$  อยู่บน  $BC$  และ  $AH \perp BC$



รูปที่ 1961.2.1

ให้  $AH = h, BH = m, CH = n$

เพราะฉะนั้น  $b^2 = n^2 + h^2, c^2 = m^2 + h^2$  และ  $\Delta = \text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}(m+n)h \quad \dots (1)$

โดยใช้เทคนิคการพิสูจน์แบบย้อนกลับ (ศึกษาเพิ่มเติมจาก คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 29 โลกอสมการ)

พิจารณาอสมการ  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta \quad \dots (2)$

$$(m+n)^2 + (n^2 + h^2) + (m^2 + h^2) \geq 4\sqrt{3} \left( \frac{1}{2}(m+n)h \right) \quad (\text{จาก (1)})$$

$$m^2 + 2mn + n^2 + (n^2 + h^2) + (m^2 + h^2) \geq 2\sqrt{3}(m+n)h$$

$$2m^2 + 2mn + 2n^2 + 2h^2 \geq 2\sqrt{3}(m+n)h$$

$$m^2 + mn + n^2 + h^2 \geq \sqrt{3}(m+n)h$$

$$h^2 - \sqrt{3}(m+n)h + m^2 + mn + n^2 \geq 0 \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned}
& \text{เพราะว่า } h^2 - \sqrt{3}(m+n)h + m^2 + mn + n^2 \\
&= h^2 - \sqrt{3}(m+n)h + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right)^2 + m^2 + mn + n^2 \\
&= \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right)^2 - \frac{3}{4}(m^2 + 2mn + n^2) + m^2 + mn + n^2 \\
&= \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right)^2 - \frac{1}{4}(3m^2 + 6mn + 3n^2 - 4m^2 - 4mn - 4n^2) \\
&= \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right)^2 - \frac{1}{4}(-m^2 + 2mn - n^2) \\
&= \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right)^2 + \frac{1}{4}(m^2 - 2mn + n^2) \\
&= \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right)^2 + \frac{1}{4}(m-n)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น (3) เป็นจริง เพราะฉะนั้น (2) เป็นจริง เพราะฉะนั้น  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta$  เป็นจริง

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}\Delta & \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right)^2 + \frac{1}{4}(m-n)^2 = 0 \\
& \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \left(h - \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n)\right)^2 = 0 \quad \text{และ} \quad \frac{1}{4}(m-n)^2 = 0 \\
& \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2}(m+n) \quad \text{และ} \quad m = n \\
& \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad h = \sqrt{3}m \quad \text{และ} \quad m = n \\
& \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad h = \sqrt{3}BH \quad \text{และ} \quad BH = HC \\
& \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad AH \text{ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฐาน และ } h = \sqrt{3}BH \\
& \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad AH \text{ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฐาน และ } \frac{h}{BH} = \sqrt{3} \\
& \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad AH \text{ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฐาน และ } \tan \hat{ABH} = \sqrt{3} \\
& \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad AH \text{ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฐาน และ } \hat{ABH} = 60^\circ \\
& \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \triangle ABC \text{ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า}
\end{aligned}$$

$$\text{แบบที่ 2} \quad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{เมื่อ } s = \frac{a+b+c}{2} \quad \dots (1)$$

$$\begin{aligned}
(4\sqrt{3}\Delta)^2 &= 48\Delta^2 = 48s(s-a)(s-b)(s-c) && \text{(จาก (1))} \\
&= 48\left(\frac{1}{2}(a+b+c)\right)\left(\frac{1}{2}(-a+b+c)\right)\left(\frac{1}{2}(a-b+c)\right)\left(\frac{1}{2}(a+b-c)\right) \\
&= 3(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\
&= 3[(a+b+c)(a+b-c)][(a-b+c)(-a+b+c)] \\
&= 3[((a+b)+c)((a+b)-c)][(c+(a-b))(c-(a-b))] \\
&= 3((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) \\
&= 3(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab)(-a^2 - b^2 + c^2 + 2ab) \\
&= 3(2ab + (a^2 + b^2 - c^2))(2ab - (a^2 + b^2 - c^2)) \\
&= 3((2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2) = 3(4a^2b^2 - (a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2)) \\
&\text{เพราะฉะนั้น } (4\sqrt{3}\Delta)^2 = 3(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2) && \dots (2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{จาก (2) จะได้ } (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (4\sqrt{3}\Delta)^2 &= (a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)) \\
&\quad - (3(-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2)) \\
&= 4a^4 + 4b^4 + 4c^4 - 4a^2b^2 - 4b^2c^2 - 4c^2a^2 \\
&= 4(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2) \quad \dots (3)
\end{aligned}$$

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq (a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \text{ เพราะฉะนั้น } a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2 \quad \dots (4)$$

$$\text{ในทำนองเดียวกันจะได้ } b^4 + c^4 \geq 2b^2c^2 \quad \dots (5)$$

$$c^4 + a^4 \geq 2c^2a^2 \quad \dots (6)$$

$$\begin{aligned}
\text{จาก (4), (5) และ (6) จะได้ } 2(a^4 + b^4 + c^4) &\geq 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \\
\text{เพราะฉะนั้น } a^4 + b^4 + c^4 &\geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \quad \dots (7)
\end{aligned}$$

หมายเหตุ (7) ให้อ้างสมการเชบีเชฟก็ได้ จากคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 29 โลกอสสมการ หน้า 345

$$\text{จาก (7) จะได้ } a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2 \geq 0 \quad \dots (8)$$

$$\begin{aligned}
\text{จาก (3) และ (8) จะได้ } (a^2 + b^2 + c^2)^2 - (4\sqrt{3}\Delta)^2 &\geq 0 \\
(a^2 + b^2 + c^2)^2 &\geq (4\sqrt{3}\Delta)^2 \\
\text{เพราะฉะนั้น } a^2 + b^2 + c^2 &\geq 4\sqrt{3}\Delta \quad \dots (9)
\end{aligned}$$

สมการ (9) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมการ (4), (5) และ (6) เป็นจริง

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } a^2 = b^2, b^2 = c^2 \text{ และ } c^2 = a^2$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } a = b = c$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } \triangle ABC \text{ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า}$$

$$\text{แบบที่ 3 เพราะ } b^2 - 2bc + c^2 = (b - c)^2 \geq 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b^2 + c^2 \geq 2bc = 2bc(1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b^2 + c^2 \geq 2bc \sin(A + 30^\circ) \quad (\text{เพราะว่า } 1 \geq \sin(A + 30^\circ)) \quad \dots (2)$$

$$= 2bc(\sin A \sin 30^\circ + \cos A \sin 30^\circ)$$

$$= 2bc\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin A + \frac{1}{2} \cos A\right)$$

$$= \sqrt{3} bc \sin A + bc \cos A$$

$$= \sqrt{3} bc \sin A + \frac{1}{2}(2bc \cos A)$$

$$= \sqrt{3} bc \sin A + \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) \quad (\text{โดยกฎของโคไซน์})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2b^2 + 2c^2 \geq 2\sqrt{3} bc \sin A + b^2 + c^2 - a^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a^2 + b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{3} bc \sin A = 4\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} bc \sin A\right) = 4\sqrt{3} \Delta \quad (\text{จาก } \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} \Delta \quad \dots (3)$$

สมการ (3) เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมการ (1) และ (2) เป็นจริง

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } b = c \text{ และ } \sin(A + 30^\circ) = 1$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } b = c \text{ และ } A = 60^\circ$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } \triangle ABC \text{ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า}$$