



คณิตศาสตร์ปรัญ
เล่มที่ 31

โลกตรีโกณมิติ

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปณัย เล่มที่ 31

โลกตรีโกณมิติ

เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 31 โลกตรีโกณมิติ

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : พฤษภาคม พ.ศ. 2561

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-468-287-0

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

ความสำคัญของ **ตรีโกณมิติ** เคยเป็นชื่อหนึ่งของวิชาคณิตศาสตร์ที่ต้องปรากฏในตารางสอนของนักเรียนควบคู่ไปกับ วิชาเลขคณิต วิชาพีชคณิต วิชาเรขาคณิต วิชาสถิติ นักเรียนจะเห็นความสำคัญของตรีโกณมิติชัดเจนมากขึ้น เมื่อมองดูข้อสอบ Entrance ในอดีตสมัยที่ข้อสอบ Entrance มี 8 ข้อและต้องแสดงวิธีทำทุกข้อ จะมีข้อสอบตรีโกณมิติออกสอบอย่างน้อย 1 ข้อ เสมอ

ในช่วงประมาณปี พ.ศ. 2518 - ปัจจุบัน วิชาเลขคณิต วิชาเรขาคณิต วิชาตรีโกณมิติ วิชาพีชคณิต วิชาสถิติ ได้ถูกยุบรวมกันเรียกว่าวิชาคณิตศาสตร์ แต่ความสำคัญของตรีโกณมิติไม่ได้หายไป เห็นได้จากข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข. คณิตศาสตร์ ๑. คณิตศาสตร์ ๒. คณิตศาสตร์ O-Net คณิตศาสตร์ A-Net และ ข้อสอบคัดเลือกเพื่อเป็นตัวแทนนักเรียนไทยไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกนานาชาติ ต้องออกข้อสอบตรีโกณมิติแน่นอน และ ต้องออกหลายข้อด้วย นอกจากนั้นข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกนานาชาติ (IMO) ที่เริ่มสอบครั้งแรก ปี ค.ศ. 1959 ซึ่งออกสอบปีละ 6 ข้อ ยังต้องออกข้อสอบตรีโกณมิติ ตัวอย่างเช่น

ปี 1961 ข้อ 2. กำหนดให้ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเป็น a, b, c และ $\Delta =$ พื้นที่ ΔABC

$$\text{จงแสดงว่า } 4\sqrt{3} \Delta \leq a^2 + b^2 + c^2 \quad (\text{ดูวิธีทำได้ข้อ 28. บทที่ 10.})$$

ปี 1963 ข้อ 5. จงแสดงว่า $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$ (ดูวิธีทำได้ข้อ 10. บทที่ 13.)

หนังสือ **โลกตรีโกณมิติ** จะนำเสนอเนื้อหาตั้งแต่มัธยมศึกษาตอนต้นซึ่งเริ่มต้นด้วย $\sin \cos \tan$ จากอัตราส่วนของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ต่อไประดับมัธยมศึกษาตอนปลายให้ความหมายของ $\sin \cos$ ผ่านทางบทนิยามของวงกลมหน่วย เนื่องจากข้อจำกัดเกี่ยวกับเวลาและเนื้อหาวิชาทำให้ครูผู้สอนและนักเรียนอาจจะไม่มีเวลาเชื่อมโยงเนื้อหาของตรีโกณมิติกับเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์อื่นๆ ไม่สามารถสอนเอกลักษณ์ที่มีการประยุกต์ใช้งานในการศึกษาชั้นสูง ผู้เขียนจึงได้รวบรวมความสัมพันธ์ที่สำคัญเช่น ตรีโกณมิติ กับ จำนวนเชิงซ้อน เรขาคณิต เวกเตอร์ ความสัมพันธ์ของ สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม วงกลม สรุปลงเป็นทฤษฎีบทและเอกลักษณ์ที่สำคัญ เพื่อจะได้นำไปใช้ประโยชน์ในโอกาสต่อไป

เพื่อให้นักเรียนและครูผู้สอนได้มีเครื่องมือทางคณิตศาสตร์สำหรับแก้ปัญหาได้มากยิ่งขึ้น ผู้เขียนจึงได้เพิ่มเนื้อหา ลิมิต อนุพันธ์ และ อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และตัวอย่างการประยุกต์ใช้งานชั้นสูง เช่น

$$\text{การพิสูจน์สูตรพื้นที่ของวงรี} \quad (\text{ทฤษฎีบท 9.9})$$

$$\text{สูตรออยเลอร์ } e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{ทฤษฎีบท 13.2})$$

$$\text{สูตรการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก } S(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{ทฤษฎีบท 2.9})$$

ขอขอบคุณผู้อ่านทุกท่านที่ติดตามผลงานของผู้เขียนมาโดยตลอด

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

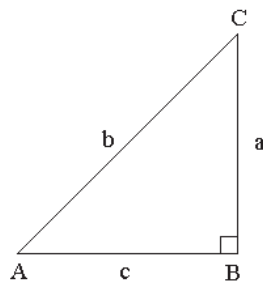
บทที่ 1.	ตรีโกณมิติเบื้องต้น	1 – 28
บทที่ 2.	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมผลบวกและผลต่าง	29 – 60
บทที่ 3.	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมทวีคูณและมุมครึ่ง	61 – 102
บทที่ 4.	อินเวอร์สฟังก์ชันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	103 – 128
บทที่ 5.	พื้นที่สามเหลี่ยมและเอกลักษณ์	129 – 154
บทที่ 6.	กฎของไซน์ และ กฎของโคไซน์	155 – 182
บทที่ 7.	วงกลมและสามเหลี่ยม	183 – 234
บทที่ 8.	วงกลมและสี่เหลี่ยม	235 – 250
บทที่ 9.	ลิมิต อนุพันธ์ และ อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	251 – 284
บทที่ 10.	อสมการ $\sin$, $\cos$, $\tan$	285 – 332
บทที่ 11	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ ฟังก์ชันพหุนาม	333 – 350
บทที่ 12.	ตรีโกณมิติกับจำนวนเชิงซ้อน	351 – 370
บทที่ 13.	รากที่ n ของ 1 กับปัญหาตรีโกณมิติ	371 – 430
บทที่ 14.	สูตร $\cos nx$ และ $\sin nx$ ในเทอมของ $\sin x$ และ $\cos x$	431 – 456
บทที่ 15.	เวกเตอร์ ตรีโกณมิติ จำนวนเชิงซ้อน ร่วมด้วยช่วยกัน	457 – 472

บทที่ 1

ตรีโกณมิติเบื้องต้น

ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นเนื้อหาคณิตศาสตร์ภาคบังคับที่นักเรียนของประเทศไทย เริ่มเรียนกันตั้งแต่ชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โดยเริ่มตั้งแต่ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมภายในสามเหลี่ยมมุมฉาก ต่อไปในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย มีการให้บทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงผ่านทางวงกลมหน่วย ในบทแรกนี้เป็นการทบทวนเนื้อหาของฟังก์ชันตรีโกณมิติเบื้องต้นที่สำคัญ เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาเนื้อหาในระดับสูงขึ้นจนถึงระดับอุดมศึกษา และ เพื่อใช้ในการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิก

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมภายในสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก



รูปที่ 1.1

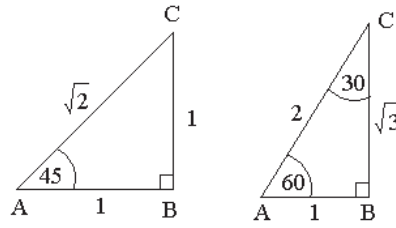
บทนิยาม 1.1 $\sin A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{BC}{AC}$

$$\cos A = \frac{\text{ด้านประชิดมุม } A}{\text{ด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{ด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ด้านประชิดมุม } A} = \frac{BC}{AB}$$

และ $\sec A = \frac{1}{\cos A}, \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}, \cot A = \frac{1}{\tan A}$

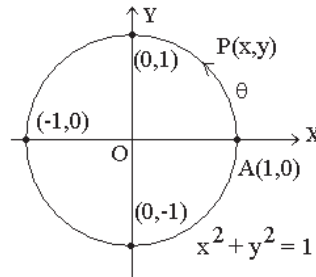
ตัวอย่างการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ



รูปที่ 1.2

$$\begin{array}{lll} \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \tan 45^\circ = 1 \\ \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}, & \sec 45^\circ = \sqrt{2}, & \cot 45^\circ = 1 \\ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, & \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, & \sec 60^\circ = 2, & \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, & \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \operatorname{cosec} 30^\circ = 2, & \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, & \cot 30^\circ = \sqrt{3} \end{array}$$

2. วงกลมหน่วย คือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (0, 0) และ รัศมี 1



รูปที่ 1.3

เซตของจุดบนวงกลมหน่วยคือ $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

ให้ θ เป็นความยาวส่วนโค้ง AP ที่วัดจากจุด (1, 0) ให้พิกัดจุด P คือ (x, y)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ $\sin, \cos$ กำหนดโดย $\sin \theta = y$ และ $\cos \theta = x$

ข้อตกลง θ วัดทวนเข็มนาฬิกามีค่าเป็นบวก และ θ วัดตามเข็มนาฬิกามีค่าเป็นลบ และ π เรเดียน = 180 องศา

คำแนะนำ ให้จำลำดับของตัวอักษร c มาก่อน s และ x มาก่อน y ช่วยในการจำว่า $\cos \theta = x$ และ $\sin \theta = y$

บทนิยาม 1.2 เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ เรเดียน

ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือเซตของคู่อันดับ (θ, y)

และ **ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine)** คือเซตของคู่อันดับ (θ, x)

ตัวอย่างของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง

$$\begin{array}{lll} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, & \tan \frac{\pi}{4} = 1 \\ \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, & \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, & \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{array}$$

หมายเหตุ จุด $P(x, y)$ หนึ่งจุดอาจเป็นจุดปลายของมุม θ ได้หลายค่า

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(4\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{7\pi}{4})$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(4\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{7\pi}{4})$$

เพราะฉะนั้น $\sin$ และ $\cos$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

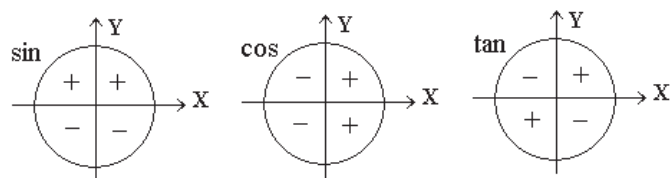
เพราะว่า (x, y) เป็นจุดบนวงกลมรัศมี 1 และจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$

เพราะฉะนั้น $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$ เพราะฉะนั้น $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ และ $-1 \leq \cos \theta \leq 1$

โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$\sin$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
$\cos$	$(-\infty, \infty)$	$[-1, 1]$
$\tan$	$(-\infty, \infty) - \{\theta \mid \cos \theta = 0\}$	$(-\infty, \infty)$
cosec	$(-\infty, \infty) - \{\theta \mid \sin \theta = 0\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\sec$	$(-\infty, \infty) - \{\theta \mid \cos \theta = 0\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\cot$	$(-\infty, \infty) - \{\theta \mid \sin \theta = 0\}$	$(-\infty, \infty)$

ค่าของ $\sin$, $\cos$, $\tan$ มีค่าเป็นบวกหรือลบในแต่ละควอดรนต์ เป็นดังนี้



รูปที่ 1.4

ตัวอย่างเช่น $\sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

เพราะว่า $x^2 + y^2 = 1$

เพราะฉะนั้นเราจะได้อีกเอกลักษณ์ที่สำคัญคือ

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \operatorname{cosec}^2 \theta$$

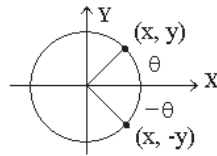
3. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อตำแหน่งของ θ อยู่บนแกน X หรือ แกน Y

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	∞	0	∞	0

4. ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม $30^\circ (\frac{\pi}{6})$, $60^\circ (\frac{\pi}{3})$, $45^\circ (\frac{\pi}{4})$

θ	$45^\circ, \frac{\pi}{4}$	$30^\circ, \frac{\pi}{6}$	$60^\circ, \frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$

5. สูตรตรีโกณมิติของมุมลบ



รูปที่ 1.5

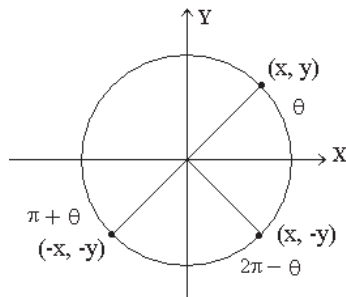
(x, y) เป็นจุดปลายของส่วนโค้ง θ และ $(x, -y)$ เป็นจุดปลายของส่วนโค้ง $-\theta$

เพราะว่า $\sin(-\theta) = -y$ และ $\sin \theta = y$ เพราะฉะนั้น $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

ในทำนองเดียวกัน $\cos(-\theta) = \cos \theta$

และ $\tan(-\theta) = -\tan \theta$

6. สูตร $\sin$, $\cos$, $\tan$ ของมุม $n\pi \pm \theta$ และ $\frac{2n+1}{2}\pi \pm \theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม



รูปที่ 1.6.1

จากรูปที่ 1.6.1

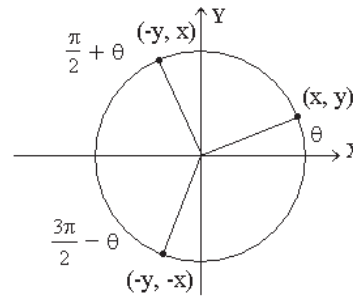
$$\sin(\pi + \theta) = -y = -\sin \theta$$

$$\sin(2\pi - \theta) = -y = -\sin \theta$$

จากรูปที่ 1.6.2

$$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = x = \cos \theta$$

$$\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -x = -\cos \theta$$



รูปที่ 1.6.2

$$\cos(\pi + \theta) = -x = -\cos \theta$$

$$\cos(2\pi - \theta) = x = \cos \theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -y = -\cos \theta$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -y = -\sin \theta$$

6.1 การจำสูตรของ $\sin(n\pi \pm \theta)$, $\sin(\frac{2n+1}{2}\pi \pm \theta)$ การจำสูตรต้องคิดว่า θ เป็นมุมเล็กๆ

6.1.1 $\sin(n\pi \pm \theta)$ ต้องมีค่าเป็น $\sin$

$\sin(\frac{2n+1}{2}\pi \pm \theta)$ ต้องมีค่าเป็น $\cos$

6.1.2 ถ้า $n\pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรนต์ที่ $\sin$ เป็นบวก (Q_1, Q_2) แล้ว $\sin(n\pi \pm \theta) = \sin \theta$

ถ้า $n\pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรนต์ที่ $\sin$ เป็นลบ (Q_3, Q_4) แล้ว $\sin(n\pi \pm \theta) = -\sin \theta$

ถ้า $\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\sin$ เป็นบวก (Q_1, Q_2) แล้ว $\sin(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta) = \cos \theta$
 ถ้า $\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\sin$ เป็นลบ (Q_3, Q_4) แล้ว $\sin(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta) = -\cos \theta$

ตัวอย่างเช่น $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$ $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$
 $\sin(4\pi + \theta) = \sin \theta$ $\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos \theta$ $\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos \theta$
 $\sin(7\pi + \theta) = -\sin \theta$ $\sin(\frac{5\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$ $\sin(\frac{7\pi}{2} + \theta) = -\cos \theta$

หมายเหตุ cosec มีหลักการทำงานเดียวกัน เช่น $\operatorname{cosec}(7\pi + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta$, $\operatorname{cosec}(\frac{5\pi}{2} - \theta) = \sec \theta$

6.2 การจำสูตรของ $\cos(n\pi \pm \theta)$, $\cos(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta)$ การจำสูตรต้องคิดว่า θ เป็นมุมเล็ก ๆ

6.2.1 $\cos(n\pi \pm \theta)$ ต้องมีค่าเป็น $\cos$
 $\cos(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta)$ ต้องมีค่าเป็น $\sin$

6.2.2 ถ้า $n\pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\cos$ เป็นบวก (Q_1, Q_4) แล้ว $\cos(n\pi \pm \theta) = \cos \theta$
 ถ้า $n\pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\cos$ เป็นลบ (Q_2, Q_3) แล้ว $\cos(n\pi \pm \theta) = -\cos \theta$
 ถ้า $\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\cos$ เป็นบวก (Q_1, Q_4) แล้ว $\cos(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta) = \sin \theta$
 ถ้า $\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\cos$ เป็นลบ (Q_2, Q_3) แล้ว $\cos(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta) = -\sin \theta$

ตัวอย่างเช่น $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ $\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin \theta$
 $\cos(4\pi + \theta) = \cos \theta$ $\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin \theta$ $\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin \theta$

หมายเหตุ sec มีหลักการทำงานเดียวกัน เช่น $\sec(4\pi + \theta) = \sec \theta$, $\sec(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \operatorname{cosec} \theta$

6.3 การจำสูตรของ $\tan(n\pi \pm \theta)$, $\tan(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta)$ การจำสูตรต้องคิดว่า θ เป็นมุมเล็ก ๆ

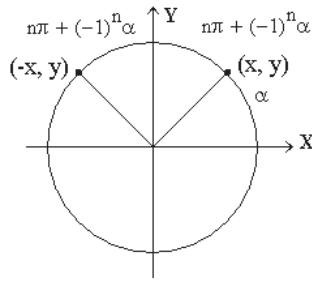
6.3.1 $\tan(n\pi \pm \theta)$ ต้องมีค่าเป็น $\tan$
 $\tan(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta)$ ต้องมีค่าเป็น $\cot$

6.3.2 ถ้า $n\pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\tan$ เป็นบวก (Q_1, Q_3) แล้ว $\tan(n\pi \pm \theta) = \tan \theta$
 ถ้า $n\pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\tan$ เป็นลบ (Q_2, Q_4) แล้ว $\tan(n\pi \pm \theta) = -\tan \theta$
 ถ้า $\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\tan$ เป็นบวก (Q_1, Q_3) แล้ว $\tan(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta) = \cot \theta$
 ถ้า $\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันทที่ $\tan$ เป็นลบ (Q_2, Q_4) แล้ว $\tan(\frac{2n+1}{2} \pi \pm \theta) = -\cot \theta$

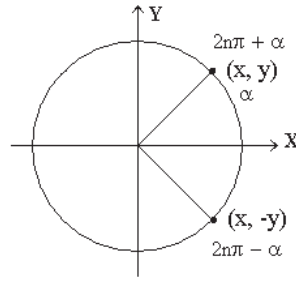
ตัวอย่างเช่น $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\tan(\pi + \theta) = \tan \theta$ $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$
 $\tan(4\pi + \theta) = \tan \theta$ $\tan(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cot \theta$ $\tan(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \cot \theta$

หมายเหตุ cot มีหลักการทำงานเดียวกัน เช่น $\cot(4\pi + \theta) = \cot \theta$, $\cot(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\tan \theta$

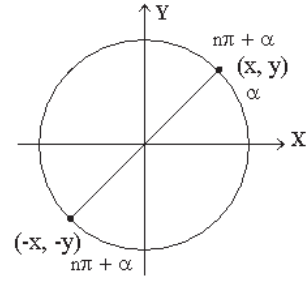
7. สูตรในรูปแบบของมุมทั่วไป



รูปที่ 1.7.1



รูปที่ 1.7.2



รูปที่ 1.7.3

- จากรูปที่ 1.7.1 ถ้า α เป็นมุมที่ทำให้ $\sin \theta = \sin \alpha$ แล้ว $\theta = n\pi + (-1)^n \alpha$
 จากรูปที่ 1.7.2 ถ้า α เป็นมุมที่ทำให้ $\cos \theta = \cos \alpha$ แล้ว $\theta = 2n\pi \pm \alpha$
 จากรูปที่ 1.7.3 ถ้า α เป็นมุมที่ทำให้ $\tan \theta = \tan \alpha$ แล้ว $\theta = n\pi + \alpha$
 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

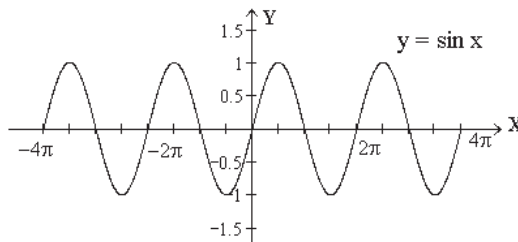
ผลจากสูตรข้างต้นจะได้ สูตรในรูปแบบของมุมทั่วไป

$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(2n\pi + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(2n\pi + \theta) = \tan \theta$$

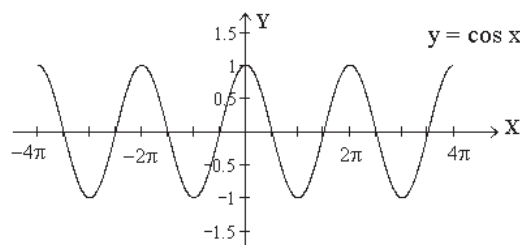
8. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

8.1 กราฟของ $y = \sin x$ 

รูปที่ 1.8

ลักษณะของฟังก์ชัน $\sin$

1. โดเมนของฟังก์ชัน $\sin$ คือ $(-\infty, \infty)$
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน $\sin$ คือ ช่วง $[-1, 1]$ เพราะฉะนั้น $-1 \leq \sin x \leq 1$
3. $\sin$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 บนช่วง $(-\infty, \infty)$
4. $\sin$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 บนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
5. $\sin$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

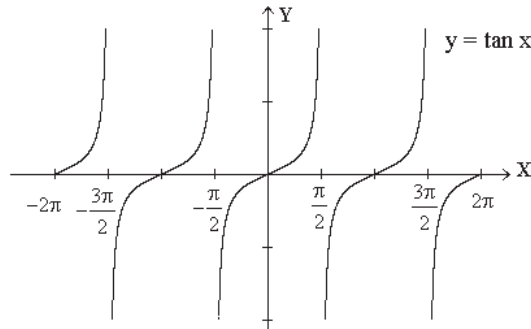
8.2 กราฟของ $y = \cos x$ 

รูปที่ 1.9

ลักษณะของฟังก์ชัน $\cos$

1. โดเมนของฟังก์ชัน $\cos$ คือ $(-\infty, \infty)$
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน $\cos$ คือ ช่วง $[-1, 1]$ เพราะฉะนั้น $-1 \leq \cos x \leq 1$
3. $\cos$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บนช่วง $(-\infty, \infty)$
4. $\cos$ เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บนช่วง $[0, \pi]$
5. $\cos$ เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $[0, \pi]$

8.3 กราฟของ $y = \tan x$

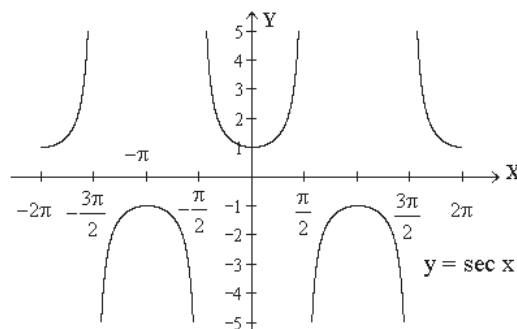


รูปที่ 1.10

ลักษณะของฟังก์ชัน $\tan x$

1. โดเมนของฟังก์ชัน $\tan$ คือ $D_{\tan} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\}$
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน $\tan$ คือ $(-\infty, \infty)$
3. $\tan$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บน $D_{\tan}$
4. $\tan$ เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บนช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
5. $\tan$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

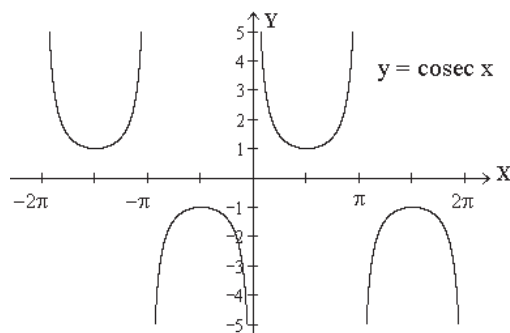
8.4 กราฟของ $y = \sec x$



รูปที่ 1.11

ลักษณะของฟังก์ชัน $y = \sec x$

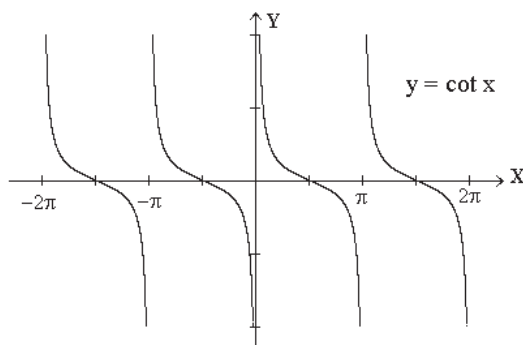
1. โดเมนของฟังก์ชัน $\sec$ คือ $D_{\sec} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\}$
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน $\sec$ คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
3. $\sec$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บน $D_{\sec}$
4. $\sec$ เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บนช่วง $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

8.5 กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$ 

รูปที่ 1.12

ลักษณะของฟังก์ชัน $y = \operatorname{cosec} x$

1. โดเมนของฟังก์ชัน cosec คือ $D_{\operatorname{cosec}} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน cosec คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
3. cosec ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บน D_{cosec}
4. cosec เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

8.6 กราฟของ $y = \cot x$ 

รูปที่ 1.13

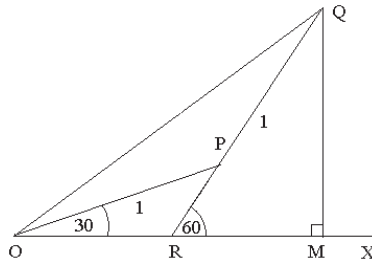
ลักษณะของฟังก์ชัน $y = \cot x$

1. โดเมนของฟังก์ชัน $\cot$ คือ $D_{\cot} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน $\cot$ คือ $(-\infty, \infty)$
3. $\cot$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บน $D_{\cot}$
4. $\cot$ เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บนช่วง $(0, \pi)$
5. $\cot$ เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $(0, \pi)$

โจทย์เสริมประสบการณ์ตรีโกณมิติ บทที่ 1.

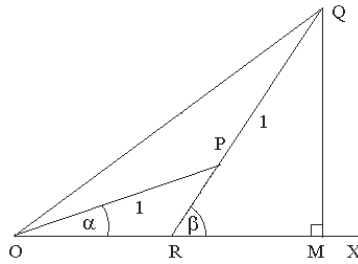
1. จงหาค่าของ $\sin 120^\circ$, $\cos 135^\circ$, $\tan 150^\circ$, $\cos 225^\circ$, $\cot 300^\circ$, $\operatorname{cosec} 270^\circ$, $\sec 315^\circ$, $\tan 240^\circ$, $\sin 135^\circ$, $\cos 210^\circ$, $\tan 315^\circ$
2. จงหาค่าของ $\sin(-750^\circ)$, $\cos(-405^\circ)$, $\cot(-300^\circ)$
3. กำหนดให้ $\theta = 75^\circ$ จงหาค่าของ $\frac{\cos 3\theta - 2\cos 4\theta}{\sin 3\theta + 2\sin 4\theta}$
4. กำหนดให้ $\theta = 150^\circ$ จงหาค่าของ $\frac{2\cos 3\theta - \cos 2\theta}{\sin 2\theta + 2\sin 3\theta}$
5. กำหนดให้ $\theta = 30^\circ$ จงหาค่าของ $\frac{\tan 2\theta + \sec 4\theta}{\sec 2\theta + \tan 4\theta}$
6. กำหนดให้ $\theta = 60^\circ$ จงหาค่าของ $\frac{\tan 4\theta - \sec 3\theta}{\sec 4\theta + \tan 3\theta}$
7. กำหนดให้ $\theta = 75^\circ$ จงหาค่าของ $\frac{\cot 3\theta - \operatorname{cosec} 6\theta}{\cot 4\theta + \operatorname{cosec} 3\theta}$
8. กำหนดให้ $\sin 36^\circ 53' = 0.6$ และ $\cos 36^\circ 53' = 0.8$
 - 8.1 จงหามุม θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = -0.6$ และ $\cos \theta = 0.8$
 - 8.2 จงหามุม θ ในช่วง $[0^\circ, 360^\circ)$ ที่ทำให้ $\sin \theta = 0.6$ และ $\cos \theta = -0.8$
9. กำหนดให้ $\sin A = \frac{7}{25}$ และ $\cos A = -\frac{24}{25}$
 จงหาค่าของ $\sin(180^\circ + A)$, $\cos(180^\circ - A)$, $\tan(180^\circ + A)$, $\tan(90^\circ + A)$, $\sin(360^\circ - A)$ และ $\cos(360^\circ + A)$
10. กำหนดให้ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ และ $90^\circ < \theta < 180^\circ$ จงหาค่าของ $\cos \theta$, $\tan \theta$
11. จงแสดงว่า $\frac{2\sin^2 \theta - 1}{2\sin \theta \cos \theta + 1} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$
12. จงแสดงว่า $\sin \theta (1 - \tan \theta) + \cos \theta (\cot \theta - 1) = \operatorname{cosec} \theta - \sec \theta$
13. จงหาค่าของ $\sin 480^\circ$, $\cos 3000^\circ$, $\tan 1050^\circ$, $\operatorname{cosec}(-1230^\circ)$, $\sec 960^\circ$ และ $\cot(-765^\circ)$
14. จงหาค่าของ $\sin 600^\circ \tan(-690^\circ) + \sec 840^\circ \cot(-945^\circ)$
15. จงหาค่าของ $\cos 24^\circ + \cos 55^\circ + \cos 204^\circ + \cos 125^\circ + \cos 300^\circ$
16. กำหนดให้ $\sin \theta = \frac{3}{5}$ และ $90^\circ < \theta < 180^\circ$
 จงหาค่าของ $\frac{\cos \theta - \cot \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \tan \theta}$
17. กำหนดให้ $\cos \theta = -\frac{5}{13}$ และ $180^\circ < \theta < 270^\circ$
 จงหาค่าของ $\frac{(\sin \theta + \cot \theta) \sin \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \tan \theta}$
18. กำหนดให้ $\tan \theta = -\frac{24}{7}$ และ $270^\circ < \theta < 360^\circ$
 จงหาค่าของ $\frac{\operatorname{cosec} \theta - \sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta}$

19. จากรูป



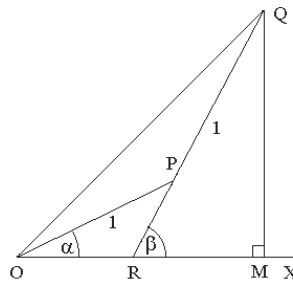
กำหนดให้ $\angle POM = 30^\circ$, $OP = QP = 1$, QP ทำมุม 60° กับ OX ต่อเส้นตรง PQ มาตัดกับ OM ที่จุด R และ $QM \perp OX$ จงแสดงว่า $QM = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$ และ $OM = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$

20. จากรูป



กำหนดให้ $QM \perp OX$, $\angle QRM = \beta$ และ P เป็นจุดบน QR ที่ทำให้ $OP = QP = 1$ และ $\angle POR = \alpha$ จงแสดงว่า $QM = \sin \alpha + \sin \beta$ และ $OM = \cos \alpha + \cos \beta$

21. จากรูป



กำหนดให้ $QM \perp OX$, $\angle QRM = \beta$ และ P เป็นจุดบน QR ที่ทำให้ $OP = QP = 1$ และ $\angle POR = \alpha$

จงแสดงว่า $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

และ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

22. จงหาค่าของ $\sin 22^\circ 30'$, $\cos 22^\circ 30'$, $\tan 22^\circ 30'$ 23. กำหนดให้ $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ และ $\sin(x + y) = \frac{1}{2}$, $\sin(x - y) = -\frac{1}{2}$ จงหาค่าของ x และ y 24. จงแสดงว่า 24.1 $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta}$ 24.2 $\tan \theta \sin \theta + \cos \theta = \sec \theta$ 24.3 $\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} A$

25. จงหาผลเฉลยในรูปแบบของมุมทั่วไป

25.1 $\sin \theta = \frac{1}{2}$ 25.2 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 25.3 $\tan \theta = \sqrt{3}$

26. จงหาผลเฉลยในรูปแบบของมุมทั่วไป

$$26.1 \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$26.2 \quad \operatorname{cosec} \theta = 2$$

$$26.3 \quad \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$26.4 \quad \tan \theta = -1$$

$$26.5 \quad \sec \theta = \sqrt{2}$$

27. จงหาค่าของ $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$ และ $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ$

28. จงหาผลเฉลยในรูปแบบของมุมทั่วไป

$$28.1 \quad 3 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$28.2 \quad \cos 3\theta = \cos 5\theta$$

29. กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $\frac{\sin A}{\sin B} = \sqrt{2}$ และ $\frac{\tan A}{\tan B} = \sqrt{3}$ จงหาค่าของ A, B

30. สามเหลี่ยม ABC มี $\hat{BAC} = 30^\circ$, $\hat{ABC} = 120^\circ$ และ $AB = 12$

ลาก CD ให้ตั้งฉากกับส่วนต่อ AB ที่จุด D จงหาความยาวของ CD

31. กำหนดให้ $\tan A + \sin A = m$, $\tan A - \sin A = n$

$$\text{จงแสดงว่า } m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$$

32. จงหาผลเฉลยในรูปแบบมุมทั่วไปของสมการ

$$32.1 \quad \sin \theta = \cos \theta$$

$$32.2 \quad 4 \cos^2 \theta + 2(\sqrt{3} - 1) \cos \theta - \sqrt{3} = 0$$

$$32.3 \quad \tan \theta = \cot \theta$$

33. กำหนดให้ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $2 + \cos 3x$ มีค่าต่ำที่สุด

34. จงหาค่าของ $\sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \dots + \sin 360^\circ$

35. จงหาค่าของ $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 180^\circ$

36. กำหนดให้ $(1 + \sin x)(1 + \sin y)(1 + \sin z) = \cos x \cos y \cos z$

$$\text{จงแสดงว่า } (1 - \sin x)(1 - \sin y)(1 - \sin z) = \cos x \cos y \cos z$$

37. กำหนดให้ $(1 + \cos x)(1 + \cos y)(1 + \cos z) = (1 - \cos x)(1 - \cos y)(1 - \cos z)$

$$\text{จงแสดงว่า } (1 + \cos x)(1 + \cos y)(1 + \cos z) = \sin x \sin y \sin z$$

38. กำหนดให้ $k(\cot A - \tan A) \sin A \cos A = 1 - 2 \sin^2 A$ จงหาค่าของ k

39. กำหนดให้ $0 \leq x \leq 2\pi$ จงหาเซตต่อไปนี้

$$39.1 \quad \{x \mid |\sin x| + |\cos x| = 1\}$$

$$39.2 \quad \{x \mid |\sin x| + |\cos x| \leq 1\}$$

$$39.3 \quad \{x \mid |\sin x| + |\cos x| < 1\}$$

40. จงหาค่าของ $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$

41. จงหาผลเฉลยของ $\tan^2(x + y) + \cot^2(x + y) = 1 + 2x - x^2$ เมื่อ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

42. ถ้า $\tan \theta = \cos \theta$ แล้ว $\sin \theta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

43. กำหนดให้ $A, B, C \in (0, \frac{\pi}{2})$ และ $\cos A = \tan B$, $\cos B = \tan C$, $\cos C = \tan A$

จงแสดงว่า $\sin A = \sin B = \sin C$ และ จงหาค่าของ $\sin A$

44. กำหนดให้ $A = 30^\circ$ จงหาค่าของ $\frac{3-4\cos 2A + \cos 4A}{3+4\cos 2A + \cos 4A}$

45. กำหนดให้ $\theta = \frac{\pi}{3}$ จงหาค่าของ $\frac{\sin 8\theta - \sin 6\theta}{\cos 8\theta + \cos 6\theta}$

46. จงแสดงว่า $\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{(\sin A - \sin B)^2}{\sin A \sin B} + 2$

47. จงแสดงว่า $\sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B$

48. จงแสดงว่า $(\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 = \frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}$

49. จงหาผลเฉลยของสมการ $\tan^2 x = \frac{1-\cos x}{1-\sin x}$ เมื่อ $0 \leq x < 2\pi$

50. จงหารากของสมการ $\sin 5\theta = \cos \theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

51. จงหาค่า a, b, c จากสมการ $8 \sin^4 \theta = a \cos 4\theta + b \cos 2\theta + c$

52. กำหนดให้ $\sin x + \cos x = \frac{1}{4}$ จงหาค่าของ $\sin x \cos x$

53. จงหาค่าของ $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{11\pi}{6}$

54. กำหนดให้ $\cos 10^\circ = m$ จงหาค่าของ $\frac{\cos 170^\circ \sin 190^\circ \tan 280^\circ}{\cot 260^\circ \cos(-10^\circ) \tan 80^\circ}$

55. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\sin \theta + \cos \theta \leq 0$ เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$

56. กำหนดให้ $\operatorname{cosec}^2 \theta + \cot^2 \theta = \frac{7}{2}$ และ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของ $\sin \theta$

57. กำหนดให้ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \theta = \frac{4}{5}$ จงหาค่าของ $\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta$

58. จงแสดงว่า $\frac{(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2})^2 - 1}{\tan \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = 2 \cot^2 \frac{A}{2}$

59. กำหนดให้ $\cot \theta = 3$ และ $\sin \theta < 0$ จงหาค่าของ $\cos \theta$

60. กำหนดให้ $\sin A = \frac{1-a}{1+a}$ และ $0 < A < 90^\circ$ จงหาค่าของ $\cot A$

61. กำหนดให้ $\sec^2 x + \tan^2 x = \frac{7}{2}$ และ $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ จงหาค่าของ $\cos x$

62. จงหาค่าสูงสุดของ $3 \cos 2\theta + 1$

63. กำหนดให้ $1 + 2 \sin \theta = 3 \operatorname{cosec} \theta$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ จงหาค่าของ θ

64. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\sin x > \cos x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$

65. กำหนดให้ $-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$ และ $\tan x = 7$ จงหาค่าของ $\frac{2\sin x - 4\cos x}{2\sin x + 6\cos x}$

เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์ตรีโกณมิติ บทที่ 1.

1. แนวคิด $\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cot 300^\circ = \frac{1}{\tan 300^\circ} = \frac{1}{\tan(360^\circ - 60^\circ)} = \frac{1}{-\tan 60^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 270^\circ = \frac{1}{\sin 270^\circ} = \frac{1}{\sin(180^\circ + 90^\circ)} = \frac{1}{-\sin 90^\circ} = -1$$

$$\sec 315^\circ = \frac{1}{\cos 315^\circ} = \frac{1}{\cos(360^\circ - 45^\circ)} = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2}$$

$$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, \quad \sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \tan 315^\circ = \tan(360^\circ - 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1 \quad \square$$

2. แนวคิด $\cos(-405^\circ) = \cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\sin(-750^\circ) = -\sin 750^\circ = -\sin(2(360^\circ) + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cot(-300^\circ) = \frac{1}{\tan(-300^\circ)} = -\frac{1}{\tan 300^\circ} = -\frac{1}{\tan(360^\circ - 60^\circ)} = -\frac{1}{-\tan 60^\circ} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \square$$

3 แนวคิด $\cos 3\theta = \cos 3(75^\circ) = \cos 225^\circ = \cos(180^\circ + 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\cos 4\theta = \cos 4(75^\circ) = \cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin 3\theta = \sin 3(75^\circ) = \sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 4\theta = \sin 4(75^\circ) = \sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \frac{\cos 3\theta - 2\cos 4\theta}{\sin 3\theta + 2\sin 4\theta} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} - 2(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{\sqrt{2}} + 2(-\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{\frac{-1-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}} = \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{6}} \quad \square$$

4. แนวคิด $\cos 2\theta = \cos 2(150^\circ) = \cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$\cos 3\theta = \cos 3(150^\circ) = \cos 450^\circ = \cos(360^\circ + 90^\circ) = \cos 90^\circ = 0$$

$$\sin 2\theta = \sin 2(150^\circ) = \sin 300^\circ = \sin(360^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 3\theta = \sin 3(150^\circ) = \sin 450^\circ = \sin(360^\circ + 90^\circ) = \sin 90^\circ = 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \frac{2\cos 3\theta - \cos 2\theta}{\sin 2\theta + 2\sin 3\theta} = \frac{2(0) - \frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2} + 2(1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{4-\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{4-\sqrt{3}} \quad \square$$

5. แนวคิด $\tan 2\theta = \tan 2(30^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$$\tan 4\theta = \tan 4(30^\circ) = \tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

$$\sec 2\theta = \sec 2(30^\circ) = \sec 60^\circ = 2$$

$$\sec 4\theta = \sec 4(30^\circ) = \sec 120^\circ = \sec(180^\circ - 60^\circ) = -\sec 60^\circ = -2$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\tan 2\theta + \sec 4\theta}{\sec 2\theta + \tan 4\theta} = \frac{\sqrt{3} + (-2)}{2 + (-\sqrt{3})} = -1$ □

6. แนวคิด $\tan 3\theta = \tan 3(60^\circ) = \tan 180^\circ = 0$

$$\tan 4\theta = \tan 4(60^\circ) = \tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec 3\theta = \sec 3(60^\circ) = \sec 180^\circ = -1$$

$$\sec 4\theta = \sec 4(60^\circ) = \sec 240^\circ = \sec(180^\circ + 60^\circ) = -\sec 60^\circ = -2$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\tan 4\theta - \sec 3\theta}{\sec 4\theta + \tan 3\theta} = \frac{\sqrt{3} - (-1)}{-2 + 0} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ □

7. แนวคิด $\cot 3\theta = \cot 3(75^\circ) = \cot 225^\circ = \cot(180^\circ + 45^\circ) = \cot 45^\circ = 1$

$$\cot 4\theta = \cot 4(75^\circ) = \cot 300^\circ = \cot(360^\circ - 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 3\theta = \operatorname{cosec} 3(75^\circ) = \operatorname{cosec} 225^\circ = \operatorname{cosec}(180^\circ + 45^\circ) = -\operatorname{cosec} 45^\circ = -\sqrt{2}$$

$$\operatorname{cosec} 6\theta = \operatorname{cosec} 6(75^\circ) = \operatorname{cosec} 450^\circ = \operatorname{cosec}(360^\circ + 90^\circ) = \operatorname{cosec} 90^\circ = 1$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\cot 3\theta - \operatorname{cosec} 6\theta}{\cot 4\theta + \operatorname{cosec} 3\theta} = \frac{1 - 1}{-\frac{1}{\sqrt{3}} + (-\sqrt{2})} = 0$ □

8. แนวคิด 8.1 $-0.6 = -\sin 36^\circ 53' = \sin(-36^\circ 53') = \sin(360^\circ - 36^\circ 53') = \sin 323^\circ 7'$

$$0.8 = \cos 36^\circ 53' = \cos(360^\circ - 36^\circ 53') = \cos 323^\circ 7'$$

เพราะฉะนั้น $\theta = 323^\circ 7'$

8.2 $-0.8 = -\cos 36^\circ 53' = \cos(180^\circ - 36^\circ 53') = \cos 143^\circ 7'$

$$0.6 = \sin 36^\circ 53' = \sin(180^\circ - 36^\circ 53') = \sin 143^\circ 7'$$

เพราะฉะนั้น $\theta = 143^\circ 7'$ □

9. แนวคิด $\sin(180^\circ + A) = -\sin A = -\frac{7}{25}$ $\cos(180^\circ - A) = -\cos A = -(-\frac{24}{25}) = \frac{24}{25}$

$$\tan(180^\circ + A) = \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = -\frac{7}{24} \quad \tan(90^\circ + A) = -\cot A = -\frac{1}{\tan A} = \frac{24}{7}$$

$$\sin(360^\circ - A) = -\sin A = -\frac{7}{25} \quad \cos(360^\circ + A) = \cos A = -\frac{24}{25} \quad \square$$

10. แนวคิด เพราะว่า $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ เพราะฉะนั้น $\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$

เพราะฉะนั้น $\tan \theta = \frac{\sin A}{\cos A} = \pm \frac{4}{3}$ □

11. แนวคิด $\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}$

$$= \frac{\sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta)}{2\sin \theta \cos \theta + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \frac{2\sin^2 \theta - 1}{2\sin \theta \cos \theta + 1} \quad \square$$

12. แนวคิด $\sin \theta (1 - \tan \theta) + \cos \theta (\cot \theta - 1) = \sin \theta (1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}) + \cos \theta (\frac{\cos \theta}{\sin \theta} - 1)$
 $= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (\cos \theta - \sin \theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\cos \theta - \sin \theta) = (\cos \theta - \sin \theta) (\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta})$
 $= (\cos \theta - \sin \theta) (\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta})$
 $= (\cos \theta - \sin \theta) (\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}) = \operatorname{cosec} \theta - \sec \theta$ □

13. แนวคิด $\sin 480^\circ = \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\cos 3000^\circ = \cos(9(360^\circ) - 240^\circ) = \cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$
 $\tan 1050^\circ = \tan(3(360^\circ) - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\operatorname{cosec}(-1230^\circ) = -\operatorname{cosec} 1230^\circ = -\operatorname{cosec}(3(360^\circ) + 150^\circ) = -\operatorname{cosec} 150^\circ$
 $= -\operatorname{cosec}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{cosec} 30^\circ = -2$
 $\sec 960^\circ = \sec(2(360^\circ) + 240^\circ) = \sec 240^\circ = \sec(180^\circ + 60^\circ) = -\sec 60^\circ = -2$
 $\cot(-765^\circ) = -\cot 765^\circ = -\cot(2(360^\circ) + 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$ □

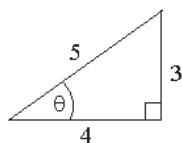
14. แนวคิด $\tan(-690^\circ) = -\tan 690^\circ = -\tan(2(360^\circ) - 30^\circ) = -(-\tan 30^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\sin 600^\circ = \sin(2(360^\circ) - 120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\sin(180^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\sec 840^\circ = \sec(3(360^\circ) + 120^\circ) = \sec 120^\circ = \sec(180^\circ - 60^\circ) = -\sec 60^\circ = -2$
 $\cot(-945^\circ) = -\cot 945^\circ = -\cot(3(360^\circ) - 135^\circ) = -(-\cot 135^\circ) = \cot 135^\circ$
 $= \cot(180^\circ - 45^\circ) = -\cot 45^\circ = -1$

เพราะฉะนั้น $\sin 600^\circ \tan(-690^\circ) + \sec 840^\circ \cot(-945^\circ) = (-\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{\sqrt{3}}) + (-2)(-1) = \frac{3}{2}$ □

15. แนวคิด $\cos 204^\circ = \cos(180^\circ + 24^\circ) = -\cos 24^\circ$
 $\cos 125^\circ = \cos(180^\circ - 55^\circ) = -\cos 55^\circ$

เพราะฉะนั้น $\cos 24^\circ + \cos 55^\circ + \cos 204^\circ + \cos 125^\circ + \cos 300^\circ$
 $= \cos 24^\circ + \cos 55^\circ + (-\cos 24^\circ) + (-\cos 55^\circ) + \cos 300^\circ$
 $= \cos 300^\circ = \cos(360^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ □

16. แนวคิด

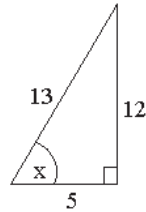


รูปที่ 1.14

เพราะว่า $\sin \theta = \frac{3}{5}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ เพราะฉะนั้น $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, $\tan \theta = -\frac{3}{4}$, $\cot \theta = -\frac{4}{3}$, $\operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{3}$

เพราะฉะนั้น $\frac{\cos \theta - \cot \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \tan \theta} = \frac{(-\frac{4}{5}) - (-\frac{4}{3})}{\frac{5}{3} + (-\frac{3}{4})} = \frac{\frac{-12+20}{15}}{\frac{20-9}{12}} = \frac{(8)(12)}{(15)(11)} = \frac{32}{55}$ □

17. แนวคิด



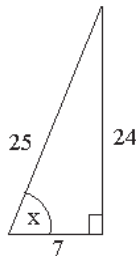
รูปที่ 1.15

เพราะว่า $\cos \theta = -\frac{5}{13}$ และ $180^\circ < \theta < 270^\circ$

เพราะฉะนั้น $\sin \theta = -\frac{12}{13}$, $\cot \theta = \frac{5}{12}$, $\operatorname{cosec} \theta = -\frac{13}{12}$, $\tan \theta = \frac{12}{5}$

เพราะฉะนั้น $\frac{(\sin \theta + \cot \theta) \sin \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \tan \theta} = \frac{(-\frac{12}{13} + \frac{5}{12})(-\frac{12}{13})}{-\frac{13}{12} + \frac{12}{5}} = (-\frac{12}{13}) \frac{\frac{-144+65}{(13)(12)}}{\frac{65+144}{(5)(12)}} = (-\frac{12}{13}) \frac{(-79)(5)}{(13)(79)} = \frac{60}{169} \quad \square$

18. แนวคิด



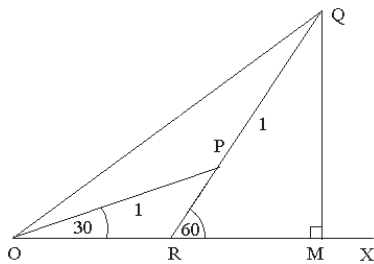
รูปที่ 1.16

เพราะว่า $\tan \theta = -\frac{24}{7}$ และ $270^\circ < \theta < 360^\circ$

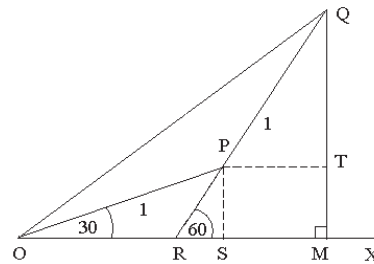
เพราะฉะนั้น $\operatorname{cosec} \theta = -\frac{25}{24}$, $\sec \theta = \frac{25}{7}$

เพราะฉะนั้น $\frac{\operatorname{cosec} \theta - \sec \theta}{\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta} = \frac{-\frac{25}{24} - \frac{25}{7}}{-\frac{25}{24} + \frac{25}{7}} = \frac{-\frac{1}{24} - \frac{1}{7}}{-\frac{1}{24} + \frac{1}{7}} = \frac{-7-24}{-7+24} = -\frac{31}{17} \quad \square$

19. แนวคิด



รูปที่ 1.17.1



รูปที่ 1.17.2

แบบที่ 1. (รูปที่ 1.17.1) $\angle ORP = 180^\circ - \angle PRM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$$\angle OPR = 180^\circ - \angle POR - \angle ORP = 180^\circ - 30^\circ - 120^\circ = 30^\circ$$

$$\angle OPQ = 180^\circ - \angle OPR = 150^\circ$$

เพราะว่า $\triangle OPQ$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เพราะฉะนั้น $\angle POQ = \angle PQO = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle OPQ) = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 15^\circ$

$$\angle QOM = \angle ROP + \angle POQ = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ \quad \text{ต่อไปอ้างกฎของโคไซน์ (ทฤษฎีบท 6.2)}$$

$$\text{ใน } \triangle OPQ \text{ จะได้ } OQ^2 = OP^2 + PQ^2 - 2(OP)(PQ) \cos \angle OPQ = 1 + 1 - 2(1)(1) \cos 150^\circ$$

$$= 2 - 2 \cos(180^\circ - 30^\circ) = 2 + 2 \cos 30^\circ = 2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้น $OQ = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

ใน $\triangle OPQ$ จะได้ $\sin \hat{QOM} = \frac{QM}{OQ}$

เพราะฉะนั้น $QM = OQ \sin \hat{QOM} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right) \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 30^\circ + \sin 60^\circ$

เพราะว่า $\hat{QOM} = 45^\circ$ เพราะฉะนั้น $\triangle OMQ$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เพราะฉะนั้น $OM = QM = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$

แบบที่ 2. (รูปที่ 1.17.2) ลาก $PT \perp QM$ และ ลาก $PS \perp OX$

ใน $\triangle OPS$ จะได้ $\sin \hat{POS} = \frac{PS}{OP}$ เพราะฉะนั้น $PS = (OP) \sin \hat{POS} = (1) \sin 30^\circ = \sin 30^\circ \quad \dots (1)$

เพราะว่า PT ขนานกับ OX เพราะฉะนั้น $\hat{QPT} = \hat{QRM} = 60^\circ$

ใน $\triangle QPT$ จะได้ $\sin \hat{QPT} = \frac{QT}{PQ}$ เพราะฉะนั้น $QT = (PQ) \sin \hat{QPT} = (1) \sin 60^\circ = \sin 60^\circ \quad \dots (2)$

เพราะฉะนั้น $QM = QT + TM = QT + PS = \sin 60^\circ + \sin 30^\circ$ (จาก (1) และ (2))

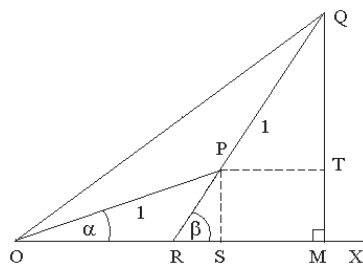
ใน $\triangle OPS$ จะได้ $\cos \hat{POS} = \frac{OS}{OP}$ เพราะฉะนั้น $OS = (OP) \cos \hat{POS} = (1) \cos 30^\circ = \cos 30^\circ$

ใน $\triangle QPT$ จะได้ $\cos \hat{QPT} = \frac{PT}{PQ}$ เพราะฉะนั้น $PT = (PQ) \cos \hat{QPT} = (1) \cos 60^\circ = \cos 60^\circ$

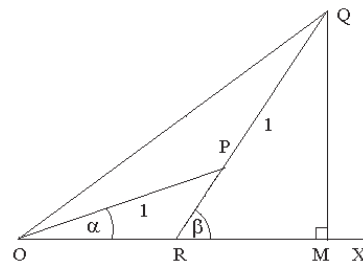
เพราะว่า $\square PSMT$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพราะฉะนั้น $SM = PT$

เพราะฉะนั้น $OM = OS + SM = OS + PT = \cos 30^\circ + \cos 60^\circ$ □

20. แนวคิด



รูปที่ 1.18.1



รูปที่ 1.18.2

ลาก $PS \perp RM$ และ ลาก $PT \perp QM$ เพราะฉะนั้น $PT = SM$, $PS = MT$ และ $\hat{QPT} = \hat{PRS} = \beta$

ใน $\triangle OPS$ จะได้ $\sin \hat{POS} = \frac{PS}{OP}$ และ $\cos \hat{POS} = \frac{OS}{OP}$

เพราะฉะนั้น $PS = (OP) \sin \hat{POS} = (1) \sin \alpha = \sin \alpha$ และ $OS = (OP) \cos \hat{POS} = (1) \cos \alpha = \cos \alpha$

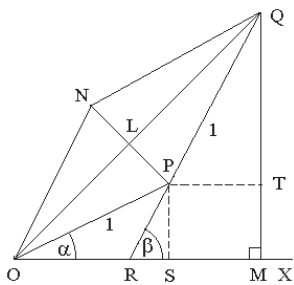
ใน $\triangle QPT$ จะได้ $\sin \hat{QPT} = \frac{QT}{PQ}$ และ $\cos \hat{QPT} = \frac{PT}{PQ}$

เพราะฉะนั้น $QT = (PQ) \sin \hat{QPT} = (1) \sin \beta = \sin \beta$ และ $PT = (PQ) \cos \hat{QPT} = (1) \cos \beta = \cos \beta$

เพราะฉะนั้น $QM = QT + TM = QT + PS = \sin \beta + \sin \alpha$

และ $OM = OS + SM = OS + PT = \cos \alpha + \cos \beta$ □

21. แนวคิด



รูปที่ 1.19

ลาก $PS \perp RM$, ลาก $PT \perp QM$ ลาก ON ขนานกับ PQ , ลาก NQ ขนานกับ OP และ ลากเส้นทแยงมุม PN
 เพราะว่า $OP = PQ = 1$ เพราะฉะนั้น $\square PQNO$ เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน และ $OQ \perp NP$

เพราะว่า ON ขนานกับ PQ เพราะฉะนั้น $\widehat{RON} = \widehat{QRS} = \beta$

เพราะฉะนั้น $\hat{N}OP = \hat{R}ON - \hat{P}OR = \beta - \alpha$

เพราะว่า OQ แบ่งครึ่งมุม NÔP เพราะฉะนั้น $NÔL = LÔP = \frac{\beta - \alpha}{2}$... (1)

เพราะฉะนั้น $Q\hat{O}M = L\hat{O}P + P\hat{O}R = \frac{\beta - \alpha}{2} + \alpha = \frac{\beta + \alpha}{2}$

เพราะว่า $OL = LQ$ และ $NL = LP$ เพราะฉะนั้น $OL = \frac{OQ}{2}$

ใน $\triangle OPL$ จะได้ $\cos \hat{LOP} = \frac{OL}{OP} = \frac{OL}{1} = OL = \frac{OQ}{2}$

เพราะฉะนั้น $OQ = 2 \cos \hat{LOP} = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$ (จาก (1)) ... (2)

ใน $\triangle QOM$ จะได้ $\sin \widehat{QOM} = \frac{QM}{OO}$

เพราะฉะนั้น $QM = OQ \sin \widehat{QOM} = OQ \sin \frac{\beta + \alpha}{2} = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\beta + \alpha}{2}$ (จาก (2)) ... (3)

จากข้อ 20. จะได้ $QM = \sin \alpha + \sin \beta$... (4)

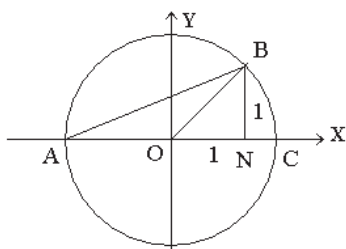
จาก (3) และ (4) จะได้ $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\beta + \alpha}{2}$

ใน $\triangle QOM$ จะได้ $\cos \widehat{QOM} = \frac{OM}{OQ}$

เพราะฉะนั้น $OM = OQ \cos Q\hat{O}M = OQ \cos \frac{\beta + \alpha}{2} = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2}$ (จาก (2))

เพราะว่า $OM = \cos \alpha + \cos \beta$ (จากข้อ 20.) เพราะฉะนั้น $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2}$ □

22. แนวคิด



รูปที่ 1.20

สร้างสามเหลี่ยมมุมฉาก ONB โดยให้ $ON = NB = 1$ เพราะฉะนั้น $OB = \sqrt{2}$ และ $\angle BON = 45^\circ$

เขียนวงกลมจุดศูนย์กลาง O รัศมี OB และลากเส้นตรง ON มาตัดวงกลมที่จุด A, C และลากเส้น OB

เพราะฉะนั้น $AN = AO + ON = \sqrt{2} + 1$

เพราะว่า มุมที่จุดศูนย์กลาง $\widehat{BOC} = 45^\circ$ มีค่าเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง $\widehat{CAB}$

เพราะฉะนั้น $\hat{CAB} = 22^\circ 30'$

ใน $\triangle ABN$ จะได้ $AB^2 = AN^2 + BN^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + (1)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $AB = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$

$$\tan 22^\circ 30' = \tan \hat{NAB} = \frac{BN}{AN} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} - 1$$

$$\sin 22^\circ 30' = \sin \hat{NAB} = \frac{BN}{AB} = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \text{ และ } \cos 22^\circ 30' = \cos \hat{NAB} = \frac{AN}{AB} = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \quad \square$$

23. แนวคิด เพราะว่า $\sin(x + y) = \frac{1}{2}$ และ $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ เพราะฉะนั้น $x + y = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

เพราะว่า $\sin(x - y) = -\frac{1}{2}$ และ $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ เพราะฉะนั้น $x - y = -\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$

เพราะว่า $x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ เพราะฉะนั้น $(x = 0, y = \frac{\pi}{6}), (x = \frac{\pi}{3}, y = \frac{\pi}{2})$ □

$$\begin{aligned} 24. \text{ แนวคิด } 24.1 \quad \tan^2 \theta - \sin^2 \theta &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \sin^2 \theta = \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - 1 \right) \\ &= \sin^2 \theta \left(\frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = \sin^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} \end{aligned}$$

$$24.2 \quad \tan \theta \sin \theta + \cos \theta = \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) \sin \theta + \cos \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \cos \theta = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

$$\begin{aligned} 24.3 \quad \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta)}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 1 + 2 \cos \theta}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta) \sin \theta} = \frac{2}{\sin \theta} = 2 \operatorname{cosec} A \quad \square \end{aligned}$$

25. แนวคิด 25.1 $\sin \theta = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ เพราะฉะนั้น $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

25.2 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$ เพราะฉะนั้น $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

25.3 $\tan \theta = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$ เพราะฉะนั้น $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม □

26. แนวคิด 26.1 $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4}$ เพราะฉะนั้น $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

26.2 $\operatorname{cosec} \theta = -2, \sin \theta = -\frac{1}{2} = \sin \frac{7\pi}{6}$ เพราะฉะนั้น $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

26.3 $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{3\pi}{4}$ เพราะฉะนั้น $\theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

26.4 $\tan \theta = -1 = \tan \frac{3\pi}{4}$ เพราะฉะนั้น $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

26.5 $\sec \theta = \sqrt{2}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{\pi}{4}$ เพราะฉะนั้น $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม □

27. แนวคิด $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 89^\circ$

$$= \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \dots + \sin^2 44^\circ + \sin^2 45^\circ + \sin^2 46^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ + \sin^2 89^\circ$$

$$= (\sin^2 1^\circ + \sin^2 89^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ) + \sin^2 45^\circ$$

$$= (\sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ) + (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 46^\circ) + \frac{1}{2}$$

(เพราะว่า $\sin(90^\circ - k^\circ) = \cos k^\circ$)

$$= 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{1}{2} = 44 + \frac{1}{2} = \frac{89}{2} = 44.5$$

เพราะว่า $\cos k^\circ = \sin(90^\circ - k^\circ)$

เพราะฉะนั้น $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \dots + \cos^2 89^\circ = \sin^2 89^\circ + \sin^2 88^\circ + \dots + \sin^2 1^\circ = 44.5$ $\square$

28. แนวคิด 28.1 $3 \cos^2 \theta = \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$

$$4 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

กรณีที่ 1. $\cos \theta = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ เพราะฉะนั้น $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2. $\cos \theta = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3}$ เพราะฉะนั้น $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

28.2 $\cos 3\theta = \cos 5\theta$

$$5\theta = 2n\pi \pm 3\theta \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$5\theta \pm 3\theta = 2n\pi$$

$$2n\pi = 8\theta, 2\theta$$

เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{2n\pi}{8}, \frac{2n\pi}{2} = \frac{n\pi}{4}, n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม $\square$

29. แนวคิด เพราะว่า $\frac{\sin A}{\sin B} = \sqrt{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} = 2$... (1)

เพราะว่า $\frac{\tan A}{\tan B} = \sqrt{3}$ เพราะฉะนั้น $\frac{\tan^2 A}{\tan^2 B} = 3$... (2)

ให้ $\cos^2 B = k$ จะได้ $\sin^2 B = 1 - k$ และ $\tan^2 B = \sec^2 B - 1 = \frac{1}{k} - 1 = \frac{1-k}{k}$

จาก (2) จะได้ $3 = \frac{\tan^2 A}{\frac{1-k}{k}} = \frac{k \tan^2 A}{1-k}$ เพราะฉะนั้น $\tan^2 A = \frac{(1-k)3}{k}$... (3)

จาก (1) และ (3) จะได้ $\sin^2 A = 2 \sin^2 B = 2(1 - k)$... (4)

เพราะฉะนั้น $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - 2(1 - k)$... (5)

จาก (3), (4) จะได้ $\cos^2 A = \frac{\sin^2 A}{\tan^2 A} = \frac{2}{3}k$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $1 - 2(1 - k) = \frac{2}{3}k$ เพราะฉะนั้น $k = \frac{3}{4}$

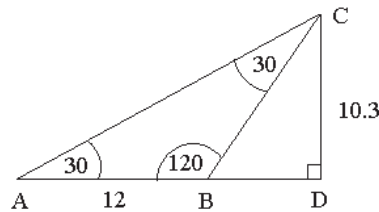
เพราะฉะนั้น $\cos^2 B = k = \frac{3}{4}$ เพราะฉะนั้น $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เพราะฉะนั้น $B = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

จาก (4) จะได้ $\sin^2 A = 2(1 - k) = 2(1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ เพราะฉะนั้น $A = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น $(A, B) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}), (\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{6})$ $\square$

30. แนวคิด



รูปที่ 1.21

ลาก $AB = 12$ cm. ลาก BC และ $\hat{A}BC = 120^\circ$

ลาก AC และ $\hat{C}AB = 30^\circ$ ลาก $CD \perp AB$

เพราะว่า $\hat{A}CB = 30^\circ$ เพราะฉะนั้น $BC = 12$

เพราะว่า $\hat{C}BD = 60^\circ$ และ $\sin \hat{C}BD = \frac{CD}{BC}$ เพราะฉะนั้น $\sin 60^\circ = \frac{CD}{12}$

เพราะฉะนั้น $CD = 12 \sin 60^\circ = 12 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 6\sqrt{3}$

□

31. แนวคิด

$$\tan A + \sin A = m$$

... (1)

$$\tan A - \sin A = n$$

... (2)

$$(1) + (2) \text{ จะได้ } 2 \tan A = m + n$$

$$(1) - (2) \text{ จะได้ } 2 \sin A = m - n$$

$$4 \tan A \sin A = m^2 - n^2 \quad \dots (3)$$

$$(1) \times (2) \text{ จะได้ } mn = \tan^2 A - \sin^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \sin^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} (1 - \cos^2 A)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \tan^2 A \sin^2 A = mn \text{ เพราะฉะนั้น } \tan A \sin A = \sqrt{mn} \quad \dots (4)$$

$$\text{จาก (3) และ (4) จะได้ว่า } m^2 - n^2 = 4 \sqrt{mn}$$

□

32. แนวคิด 32.1 เพราะว่ $\sin \theta = \cos \theta$ เพราะฉะนั้น $\tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$$32.2 \quad 4 \cos^2 \theta + 2(\sqrt{3} - 1) \cos \theta - \sqrt{3} = 0$$

$$(2 \cos \theta + \sqrt{3})(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$$

กรณีที่ 1. $\cos \theta = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ เพราะฉะนั้น $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2. $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{5\pi}{6}$ เพราะฉะนั้น $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

32.3 เพราะฉะนั้น $\tan \theta = \cot \theta$ เพราะฉะนั้น $\tan^2 \theta = 1$ เพราะฉะนั้น $\tan \theta = \pm 1$

กรณีที่ 1. $\tan \theta = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$ เพราะฉะนั้น $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2. $\tan \theta = -1 = \tan \frac{3\pi}{4}$ เพราะฉะนั้น $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

□

33. แนวคิด เพราะว่า $\cos 3x \geq -1$ เพราะฉะนั้น $2 + \cos 3x \geq 1$

เพราะว่า $\cos 3x = -1$ เมื่อ $3x = -\pi, \pi$ เพราะฉะนั้น $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

เพราะฉะนั้น $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$ ที่ทำให้ $2 + \cos 3x$ มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 1 □

34. แนวคิด
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{360} \sin k^\circ &= \sum_{k=1}^{180} \sin k^\circ + \sum_{k=181}^{360} \sin k^\circ = \sum_{k=1}^{180} \sin k^\circ + \sum_{k=1}^{180} \sin(180^\circ + k^\circ) \\ &= \sum_{k=1}^{180} \sin k^\circ + \sum_{k=1}^{180} (-\sin k^\circ) \quad (\text{เพราะว่า } \sin(180^\circ + x) = -\sin x) \\ &= \sum_{k=1}^{180} \sin k^\circ - \sum_{k=1}^{180} \sin k^\circ = 0 \end{aligned}$$
 □

35. แนวคิด
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{180} \sin^2 k^\circ &= \sum_{k=1}^{90} \sin^2 k^\circ + \sum_{k=91}^{180} \sin^2 k^\circ \\ &= \sum_{k=1}^{90} \sin^2 k^\circ + \sum_{k=1}^{90} \sin^2(90^\circ + k^\circ) = \sum_{k=1}^{90} (\sin^2 k^\circ + \sin^2(90^\circ + k^\circ)) \\ &= \sum_{k=1}^{90} (\sin^2 k^\circ + \cos^2 k^\circ) = \sum_{k=1}^{90} 1 = 90 \end{aligned}$$
 □

36. แนวคิด
$$\begin{aligned} (1 - \sin x)(1 - \sin y)(1 - \sin z) &= \frac{(1 - \sin^2 x)(1 - \sin^2 y)(1 - \sin^2 z)}{(1 + \sin x)(1 + \sin y)(1 + \sin z)} \\ &= \frac{\cos^2 x \cos^2 y \cos^2 z}{\cos x \cos y \cos z} = \cos x \cos y \cos z \end{aligned}$$
 □

37. แนวคิด เพราะว่า $(1 + \cos x)(1 + \cos y)(1 + \cos z) = (1 - \cos x)(1 - \cos y)(1 - \cos z)$

เพราะฉะนั้น $((1 + \cos x)(1 + \cos y)(1 + \cos z))^2$

$$= (1 - \cos x)(1 - \cos y)(1 - \cos z)(1 + \cos x)(1 + \cos y)(1 + \cos z)$$

$$= (1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 - \cos y)(1 + \cos y)(1 - \cos z)(1 + \cos z)$$

$$= (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y)(1 - \cos^2 z) = \sin^2 x \sin^2 y \sin^2 z$$
 □

38. แนวคิด เพราะว่า $\cot A - \tan A = \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A \cos A}$

เพราะฉะนั้น $(\cot A - \tan A) \sin A \cos A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2 \sin^2 A$

เพราะฉะนั้น $k = \frac{1 - 2 \sin^2 A}{(\cot A - \tan A) \sin A \cos A} = 1$ □

39. แนวคิด 39.1 $|\sin x| + |\cos x| = 1$

$$(|\sin x| + |\cos x|)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + 2|\sin x||\cos x| + \cos^2 x = 1$$

$$2|\sin x||\cos x| = 0$$

เพราะฉะนั้น $\sin x = 0$ หรือ $\cos x = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 0, \pi, 2\pi$ หรือ $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid |\sin x| + |\cos x| = 1\} = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

$$\begin{aligned}
 39.2 \quad \text{เพราะว่า } 0 < |\sin x| + |\cos x| \leq 1 \text{ เพราะฉะนั้น } (|\sin x| + |\cos x|)^2 &\leq 1 \\
 \sin^2 x + 2|\sin x||\cos x| + \cos^2 x &\leq 1 \\
 2|\sin x||\cos x| &\leq 0 \\
 |\sin x||\cos x| &\leq 0
 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \{x \mid |\sin x| + |\cos x| \leq 1\} = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$$

$$\begin{aligned}
 39.3 \quad \text{เพราะว่า } 0 < |\sin x| + |\cos x| < 1 \text{ เพราะฉะนั้น } (|\sin x| + |\cos x|)^2 &< 1 \\
 \sin^2 x + 2|\sin x||\cos x| + \cos^2 x &< 1 \\
 2|\sin x||\cos x| &< 0 \\
 |\sin x||\cos x| &< 0 \text{ เป็นไปไม่ได้}
 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \{x \mid |\sin x| + |\cos x| < 1\} = \emptyset \quad \square$$

$$40. \quad \text{แนวคิด} \quad \frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{\sin(90^\circ - 15^\circ) + \sin(90^\circ - 75^\circ)}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{\cos 15^\circ + \cos 75^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = 1 \quad \square$$

$$41. \quad \text{แนวคิด} \quad \text{เมื่อ } a > 0 \text{ จะได้ } (\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 \geq 0 \text{ เพราะฉะนั้น } a - 2 + \frac{1}{a} \geq 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a + \frac{1}{a} \geq 2 \text{ และ } a + \frac{1}{a} = 2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = 1 \text{ เพราะฉะนั้น } \tan^2(x+y) + \cot^2(x+y) \geq 2$$

$$\text{และ } \tan^2(x+y) + \cot^2(x+y) = 2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \tan^2(x+y) = 1$$

$$\text{เพราะว่า } \tan^2(x+y) + \cot^2(x+y) \geq 2 \text{ และ } \tan^2(x+y) + \cot^2(x+y) = 1 + 2x - x^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 1 - 2x + x^2 \geq 2$$

$$0 \geq x^2 - 2x + 1$$

$$0 \geq (x-1)^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = 1$$

$$\text{เพราะว่า } 1 + 2x - x^2 = 2 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \tan^2(x+y) + \cot^2(x+y) = 2$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } \tan^2(x+y) = 1$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } \tan(x+y) = \pm 1$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ } x+y = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \quad (\text{เพราะว่า } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \tan^2(x+y) + \cot^2(x+y) = 1 - 2x - x^2 \text{ เมื่อ } x = 1, y = \frac{3\pi}{4} - 1 \quad \square$$

$$42. \quad \text{แนวคิด} \quad \text{เพราะว่า } \cos \theta = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ เพราะฉะนั้น } \sin \theta = \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0$$

$$\sin \theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{เพราะว่า } \tan \theta = \cos \theta \text{ เพราะฉะนั้น } \theta \text{ อยู่ในควอดรันท์ที่ 1. หรือ 2.}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \square$$

43. แนวคิด เพราะว่า $\cos A = \tan B$ เพราะฉะนั้น $\cos^2 A = \tan^2 B = \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} = \frac{1 - \cos^2 B}{\cos^2 B}$

เพราะฉะนั้น $1 - \sin^2 A = \cos^2 A = \frac{1 - \tan^2 C}{\tan^2 C}$ (เพราะว่า $\cos B = \tan C$)

$$= \frac{1 - \frac{\sin^2 C}{\cos^2 C}}{\frac{\sin^2 C}{\cos^2 C}} = \frac{1 - \frac{1 - \cos^2 C}{\cos^2 C}}{\frac{1 - \cos^2 C}{\cos^2 C}} = \frac{2\cos^2 C - 1}{1 - \cos^2 C} = \frac{2\tan^2 A - 1}{1 - \tan^2 A} \quad (\text{เพราะว่า } \cos C = \tan A)$$

เพราะฉะนั้น $1 - \sin^2 A = \frac{2\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - 1}{1 - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2(\frac{\sin^2 A}{1 - \sin^2 A}) - 1}{1 - \frac{\sin^2 A}{1 - \sin^2 A}} = \frac{3\sin^2 A - 1}{1 - 2\sin^2 A}$

เพราะฉะนั้น $(1 - \sin^2 A)(1 - 2\sin^2 A) = 3\sin^2 A - 1$

$$1 - 3\sin^2 A + 2\sin^4 A = 3\sin^2 A - 1$$

$$2\sin^4 A - 6\sin^2 A + 2 = 0$$

$$\sin^4 A - 3\sin^2 A + 1 = 0$$

เพราะฉะนั้น $\sin^2 A = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

เพราะว่า $\sin^2 A \leq 1$ เพราะฉะนั้น $\sin^2 A = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = (\frac{\sqrt{5} - 1}{2})^2$ เพราะฉะนั้น $\sin A = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อเราจัดรูปพีชคณิตใหม่โดยเริ่มต้นด้วย $\cos B = \tan C$ จะได้ $\sin B = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

และ ถ้าเริ่มต้นด้วย $\cos C = \tan A$ จะได้ $\sin C = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sin A = \sin B = \sin C = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 3.1 จะได้ $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ เพราะฉะนั้น $2\sin 18^\circ = 2(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\sin A = \sin B = \sin C = 2\sin 18^\circ$ □

44. แนวคิด $\frac{3 - 4\cos 2A + \cos 4A}{3 + 4\cos 2A + \cos 4A} = \frac{3 - 4\cos 60^\circ + \cos 120^\circ}{3 + 4\cos 60^\circ + \cos 120^\circ} = \frac{3 - 4(\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})}{3 + 4(\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})} = \frac{6 - 4 - 1}{6 + 4 - 1} = \frac{1}{9}$ □

45. แนวคิด $\frac{\sin 8(\frac{\pi}{3}) - \sin 6(\frac{\pi}{3})}{\cos 8(\frac{\pi}{3}) + \cos 6(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin(2\pi + \frac{2\pi}{3}) - \sin 2\pi}{\cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) + \cos 2\pi} = \frac{\sin \frac{2\pi}{3} - 0}{\cos \frac{2\pi}{3} + 1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{3}$ □

46. แนวคิด $\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin A \sin B} = \frac{\sin^2 A - 2\sin A \sin B + \sin^2 B + 2\sin A \sin B}{\sin A \sin B}$
 $= \frac{(\sin A - \sin B)^2}{\sin A \sin B} + 2$ □

47. แนวคิด $\sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B$
 $= \sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - \sin^2 B + \sin^2 B \sin^2 A = \sin^2 A - \sin^2 B$ □

48. แนวคิด $(\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta)^2 = \cot^2 \theta + 2\cot \theta \operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$
 $= \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} + 2(\frac{\cos \theta}{\sin \theta})(\frac{1}{\sin \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + 2\cos \theta + 1}{\sin^2 \theta}$

$$= \frac{(1 + \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{(1 + \cos \theta)^2}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \quad \square$$

49. แนวคิด เพราะว่า $\tan^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x}$ เพราะฉะนั้น $\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1 - \cos x}{1 - \sin x} = 0$

$$\frac{\sin^2 x(1 - \sin x) - \cos^2 x(1 - \cos x)}{\cos^2 x(1 - \sin x)} = 0$$

$$\frac{(\cos^3 x - \sin^3 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos^2 x(1 - \sin x)} = 0 \quad \dots (1)$$

เพราะว่า $(\cos^3 x - \sin^3 x) - (\cos^2 x - \sin^2 x)$

$$= (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) - (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$$

$$= (\cos x - \sin x)((\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) - (\cos x + \sin x))$$

$$= (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \sin^2 x + \cos x \sin x - \cos x - \sin x)$$

$$= (\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x - \cos x - \sin x) = (\cos x - \sin x)(1 - \cos x)(1 - \sin x) \quad \dots (2)$$

เพราะฉะนั้น จาก (1) และ (2) จะได้ $(\cos x - \sin x)(1 - \cos x) = 0$

กรณีที่ 1. $\cos x = \sin x$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

กรณีที่ 2. $\cos x = 1$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ □

50. แนวคิด เพราะว่า $\sin 5\theta = \cos \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ เพราะฉะนั้น $5\theta = n\pi + (-1)^n(\frac{\pi}{2} - \theta)$

กรณีที่ 1. n เป็นจำนวนเต็มคี่ ให้ $n = 2k + 1$

$$5\theta = (2k + 1)\pi - (\frac{\pi}{2} - \theta) = (2k + 1)\pi - \frac{\pi}{2} + \theta$$

$$4\theta = \frac{(4k - 1)\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{(4k - 1)\pi}{8} \quad \text{เพราะฉะนั้น } \theta = \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}$$

กรณีที่ 2. n เป็นจำนวนเต็มคู่ ให้ $n = 2k$

$$5\theta = 2k\pi + (\frac{\pi}{2} - \theta) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$6\theta = \frac{(4k + 1)\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{(4k + 1)\pi}{12} \quad \text{เพราะฉะนั้น } \theta = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{21\pi}{12} \quad \square$$

51. แนวคิด $\theta = 0$ จะได้ $0 = a + b + c \quad \dots (1)$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $8 = a - b + c \quad \dots (2)$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $8(\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = -a + c$ เพราะฉะนั้น $2 = -a + c \quad \dots (3)$

(1) - (2) จะได้ $-8 = 2b$ เพราะฉะนั้น $b = -4$ จาก (1) จะได้ $a + c = 4 \quad \dots (4)$

จาก (3) และ (4) จะได้ $a = 1, c = 3$

เพราะฉะนั้น $8 \sin^4 \theta = (1) \cos 4\theta + (-4) \cos 2\theta + 3 \quad \square$

52. แนวคิด เพราะว่า $\sin x + \cos x = \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{16} = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \sin x \cos x$

เพราะฉะนั้น $2 \sin x \cos x = -\frac{15}{16}$

$$\sin x \cos x = -\frac{15}{32}$$

□

53. แนวคิด $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$ และ $\cos \frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6}$

เพราะฉะนั้น $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{11\pi}{6} = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = 1$

เพราะฉะนั้น $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{11\pi}{6} = 1 + 1 = 2$

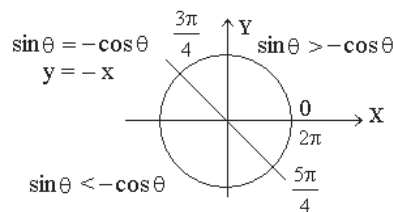
□

54. แนวคิด $\frac{\cos 170^\circ \sin 190^\circ \tan 280^\circ}{\cot 260^\circ \cos(-10^\circ) \tan 80^\circ} = \frac{\cos(180^\circ - 10^\circ) \sin(180^\circ + 10^\circ) \tan(270^\circ + 10^\circ)}{\cot(270^\circ - 10^\circ) \cos(10^\circ) \tan(90^\circ - 10^\circ)}$

$$= \frac{(-\cos 10^\circ)(-\sin 10^\circ)(-\cot 10^\circ)}{(\tan 10^\circ)(\cos 10^\circ)(\cot 10^\circ)} = -\cos 10^\circ = -m$$

□

55. แนวคิด



รูปที่ 1.22

เพราะว่า $\sin \theta + \cos \theta \leq 0$ เพราะฉะนั้น $\sin \theta \leq -\cos \theta$

ให้ $x = \cos x$ และ $y = \sin x$ เพราะฉะนั้น $\sin \theta \leq -\cos \theta$ เป็นบริเวณ $y \leq -x$

เพราะว่าบริเวณ $y \leq -x$ คือบริเวณที่ $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของ $\sin \theta + \cos \theta \leq 0$ เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$ คือ $\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$

□

56. แนวคิด จาก $\operatorname{cosec}^2 \theta + \cot^2 \theta = \frac{7}{2}$ จะได้ $\frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{7}{2}$... (1)

ให้ $x = \sin^2 \theta$ จะได้ $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - x$ จาก (1) จะได้ $\frac{1}{x} + \frac{1-x}{x} = \frac{7}{2}$

เพราะฉะนั้น $2(1 + (1 - x)) = 7x$

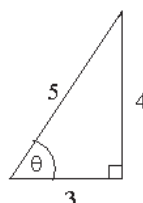
$$4 - 2x = 7x$$

$$x = \frac{4}{9}$$

เพราะฉะนั้น $\sin^2 \theta = \frac{4}{9}$ และ $\sin \theta = \frac{2}{3}$

□

57. แนวคิด



รูปที่ 1.23

แบบที่ 1. เพราะว่า $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ เพราะฉะนั้น $\cos \theta = \pm \frac{3}{5}$

เพราะว่า $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\cos \theta = \frac{3}{5}$

เพราะฉะนั้น $\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1}{\frac{3}{5}} + \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{3} + \frac{5}{4} = \frac{20+15}{12} = \frac{35}{12}$

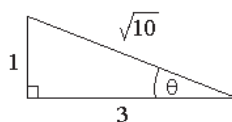
แบบที่ 2. จากรูปที่ 1.24 จะได้ $\sin \theta = \frac{4}{5}$

เพราะฉะนั้น $\sec \theta = \frac{5}{3}$ และ $\operatorname{cosec} \theta = \frac{5}{4}$ เพราะฉะนั้น $\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta = \frac{35}{12}$ □

58. แนวคิด
$$\frac{(\sin \frac{A}{2} + \cos \frac{A}{2})^2 - 1}{\tan \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{A}{2} - 1}{\tan \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} - \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2} (1 - \cos^2 \frac{A}{2})} = \frac{2 \cos^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2}} = 2 \cot^2 \frac{A}{2}$$
 □

59. แนวคิด



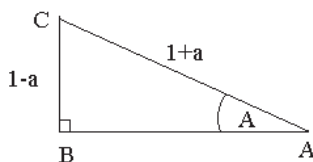
รูปที่ 1.24

จากรูปที่ 1.24 เพราะว่า $\cot \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{3}{1}$ เพราะฉะนั้น $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ หรือ $\frac{-3}{\sqrt{10}}$

เพราะว่า $\cot \theta = 3 > 0$ และ $\sin \theta < 0$ เพราะฉะนั้น θ อยู่ในควอดรนต์ที่ 3.

เพราะฉะนั้น $\cos \theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$ □

60. แนวคิด



รูปที่ 1.25

จากรูปที่ 1.25 จะได้ $\sin A = \frac{1-a}{1+a} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$ เพราะฉะนั้น $BC = 1 - a$, $AC = 1 + a$

เพราะว่า $AB^2 = AC^2 - BC^2 = (1 + a)^2 - (1 - a)^2 = 1 + 2a + a^2 - (1 - 2a + a^2) = 4a$

เพราะฉะนั้น $AB = 2\sqrt{a}$ เพราะฉะนั้น $\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{a}}{1-a}$ □

61. แนวคิด $\sec^2 x + \tan^2 x = \frac{7}{2}$

$$\sec^2 x + (\sec^2 x - 1) = \frac{7}{2}$$

$$\sec^2 x = \frac{9}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{4}{9}$$

เพราะฉะนั้น $\cos x = \pm \frac{2}{3}$ เพราะว่า $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\cos x = -\frac{2}{3}$ □

62. แนวคิด

$$\cos 2\theta \leq 1$$

$$3 \cos 2\theta \leq 3$$

$$3 \cos 2\theta + 1 \leq 4$$

เพราะว่า $3 \cos 2(0) + 1 = 4$ เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดของ $3 \cos 2\theta + 1$ มีค่าเท่ากับ 4 □

63. แนวคิด

$$1 + 2 \sin \theta = 3 \operatorname{cosec} \theta = \frac{3}{\sin \theta}$$

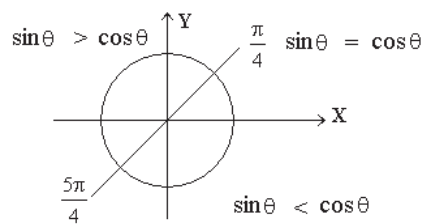
$$\sin \theta + 2 \sin^2 \theta = 3$$

$$2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 3 = 0$$

$$(2 \sin \theta + 3)(\sin \theta - 1) = 0$$

เพราะว่า $2 \sin \theta + 3 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\sin \theta = 1$ เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{\pi}{2}$ □

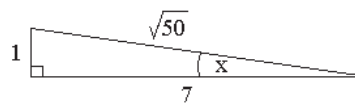
64. แนวคิด พิจารณา $\sin x > \cos x$ บนวงกลมหนึ่งหน่วย จากรูป 1.26



รูปที่ 1.26

เพราะฉะนั้น $\{x \mid \sin x > \cos x\} = (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ □

65. แนวคิด



รูปที่ 1.27

แบบที่ 1. $\tan x = 7 = \frac{7}{1} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

เพราะว่า $-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sin x < 0$ และ $\cos x < 0$ เพราะฉะนั้น $\sin x = \frac{-7}{\sqrt{50}}$, $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{50}}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{2\sin x - 4\cos x}{2\sin x + 6\cos x} = \frac{2(\frac{-7}{\sqrt{50}}) - 4(\frac{-1}{\sqrt{50}})}{2(\frac{-7}{\sqrt{50}}) + 6(\frac{-1}{\sqrt{50}})} = \frac{(-14) + 4}{(-14) - 6} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}$$

$$\text{แบบที่ 2. } \frac{2\sin x - 4\cos x}{2\sin x + 6\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x} \frac{(2\frac{\sin x}{\cos x} - 4)}{(2\frac{\sin x}{\cos x} + 6)} = \frac{2\tan x - 4}{2\tan x + 6} = \frac{2(7) - 4}{2(7) + 6} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$
 □

บทที่ 2

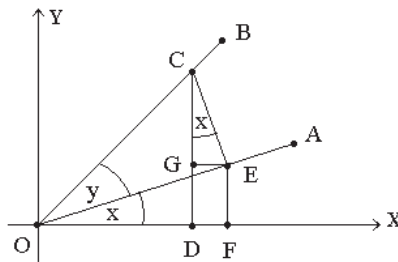
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมผลบวกและผลต่าง

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของมุม ช่วยให้เราสามารถคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่าง ๆ ได้มากขึ้น และมีเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้ใช้ในการประยุกต์ใช้งานได้มากขึ้น

การพิสูจน์สูตรของ $\sin$ $\cos$ $\tan$ ของมุมผลบวกและผลต่าง สามารถใช้สามเหลี่ยมมุมฉากช่วยในการพิสูจน์ซึ่งเหมาะสมกับหลักสูตรของมัธยมศึกษาตอนต้น และใช้วงกลมหน่วยช่วยในการพิสูจน์ซึ่งเหมาะสมกับหลักสูตรของมัธยมศึกษาตอนปลาย

- ทฤษฎีบท 2.1**
1. $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
 2. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
 3. $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ และ $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

ข้อพิสูจน์



รูปที่ 2.1

หมายเหตุ แนวคิดนี้เหมาะสำหรับมัธยมศึกษาตอนต้น เพราะว่า การพิสูจน์ใช้เนื้อหาของสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไป และ เพื่อประโยชน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น เราสามารถสมมติให้ $x > 0$, $y > 0$ และ $0 < x + y < 90^\circ$

ลากเส้นตรง OA ทำมุม x กับแกน X และ ลากเส้นตรง OB ทำมุม y กับส่วนเส้นตรง OA

ให้ C เป็นจุดบน OB ลาก $CD \perp OX$, ลาก $CE \perp OA$, ลาก $EF \perp OX$ และ ลาก $EG \perp CD$

เพราะว่า $\angle ODC = 90^\circ$, $\angle OEC = 90^\circ$ เพราะฉะนั้นมีวงกลมผ่าน $\square OCDE$ โดยมี OC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
เพราะว่า $\angle DOE$, $\angle DCE$ อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน เพราะฉะนั้น $\angle DCE = \angle DOE = x$

$\triangle CGE$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $\angle CGE = 90^\circ$

$$\text{ใน } \triangle CGE \text{ จะได้ } \sin x = \sin \angle ECG = \frac{EG}{CE} \text{ และ } \cos x = \cos \angle ECG = \frac{CG}{CE} \quad \dots (1)$$

$\triangle OEF$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $\angle OFE = 90^\circ$

$$\text{ใน } \triangle OEF \text{ จะได้ } \sin x = \sin \angle EOF = \frac{EF}{OE} \text{ และ } \cos x = \cos \angle EOF = \frac{OF}{OE} \quad \dots (2)$$

$\triangle OCE$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $\angle OEC = 90^\circ$

$$\text{ใน } \triangle OCE \text{ จะได้ } \sin y = \sin \angle COE = \frac{CE}{OC} \text{ และ } \cos y = \cos \angle COE = \frac{OE}{OC} \quad \dots (3)$$

การหาสูตร $\sin(x + y)$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \triangle OCD \text{ จะได้ } \sin \angle COD &= \frac{CD}{OC} = \frac{CG + GD}{OC} = \frac{CG}{OC} + \frac{GD}{OC} \\ \sin(x + y) &= \frac{CG}{OC} + \frac{EF}{OC} && (\text{เพราะว่า } \square EGDF \text{ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า}) \\ &= \frac{CG}{CE} \frac{CE}{OC} + \frac{EF}{OE} \frac{OE}{OC} \\ &= \cos x \frac{CE}{OC} + \frac{EF}{OE} \frac{OE}{OC} && (\text{จาก (1)}) \\ &= \cos x \sin y + \frac{EF}{OE} \frac{OE}{OC} && (\text{จาก (3)}) \\ &= \cos x \sin y + \sin x \frac{OE}{OC} && (\text{จาก (2)}) \\ &= \cos x \sin y + \sin x \cos y && (\text{จาก (3)}) \end{aligned}$$

การหาสูตร $\cos(x + y)$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \triangle OCD \text{ จะได้ } \cos \angle COD &= \frac{OD}{OC} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF - DF}{OC} = \frac{OF}{OC} - \frac{DF}{OC} \\ \cos(x + y) &= \frac{OF}{OC} - \frac{GE}{OC} && (\text{เพราะว่า } \square EGDF \text{ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า}) \\ &= \frac{OF}{OE} \frac{OE}{OC} - \frac{GE}{CE} \frac{CE}{OC} \\ &= \cos x \frac{OE}{OC} - \frac{GE}{CE} \frac{CE}{OC} && (\text{จาก (2)}) \\ &= \cos x \cos y - \frac{GE}{CE} \frac{CE}{OC} && (\text{จาก (3)}) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \frac{CE}{OC} && (\text{จาก (1)}) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y && (\text{จาก (3)}) \end{aligned}$$

การหาสูตร $\tan(x + y)$ และ $\cot(x + y)$

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} = \frac{\frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\cos x \cos y}}{\frac{\cos x \cos y - \sin x \sin y}{\cos x \cos y}} = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\cot(x + y) = \frac{1}{\tan(x + y)} = \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} = \frac{1 - \tan x \tan y}{\tan x + \tan y} \frac{\cot x \cot y}{\cot x \cot y} = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y} \quad \square$$

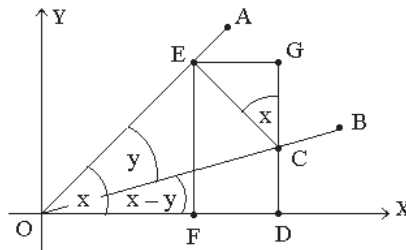
ต่อไปใช้ผลของสูตร $\sin(-y) = -\sin y$, $\cos(-y) = \cos y$ และ $\tan(-y) = -\tan y$ จะได้

$$\begin{aligned}\sin(x - y) &= \sin(x + (-y)) \\ &= \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ \cos(x - y) &= \cos(x + (-y)) \\ &= \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \tan(x - y) &= \tan(x + (-y)) \\ &= \frac{\tan x + \tan(-y)}{1 - \tan x \tan(-y)} \\ &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}\end{aligned}$$

เพื่อประโยชน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น จะพิสูจน์สูตร $\sin(x - y)$, $\cos(x - y)$, $\tan(x - y)$ โดยใช้สามเหลี่ยมมุมฉากดังตัวอย่างต่อไปนี้

- ทฤษฎีบท 2.2**
1. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
 2. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
 3. $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

แนวคิด



รูปที่ 2.2

หมายเหตุ แนวคิดนี้เหมาะสำหรับมัธยมศึกษาตอนต้น เพราะว่า การพิสูจน์ใช้เนื้อหาของสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไป และ เพื่อประโยชน์ของนักเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น เราสามารถสมมติให้ $0 < y < x < 90^\circ$ และ $x - y > 0$

ลากเส้น OA ทำมุม x กับแกน OX และ ลากเส้น OB ทำมุม $\hat{A}OB = y$ เพราะฉะนั้น $\hat{B}OX = x - y$
ให้ C เป็นจุดบน OB ลาก $CD \perp OX$, $CE \perp OA$ และ ลาก $EF \perp OX$

ต่อด้าน DC ไปที่จุด G และ $\hat{E}GC = 90^\circ$ เพราะฉะนั้น $\square EGDF$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า และ $\hat{A}EG = \hat{E}OD$
เพราะฉะนั้น $\hat{E}OF = x$, $\hat{E}OC = y$, $\hat{C}OD = x - y$

ใน $\triangle CEG$ จะได้ $\hat{C}GE = 90^\circ$ เพราะฉะนั้น $\hat{E}CG + \hat{C}EG = 90^\circ$

เพราะว่า $\hat{C}EA = 90^\circ$ เพราะฉะนั้น $\hat{C}EG + \hat{G}EA = 90^\circ$ เพราะฉะนั้น $\hat{E}CG = \hat{G}EA$

เพราะว่า EG ขนานกับ OX เพราะฉะนั้น $\hat{A}EG = \hat{A}OX = x$ เพราะฉะนั้น $\hat{E}CG = x$

$$\text{ใน } \triangle CEG \text{ จะได้ } \sin x = \sin \hat{ECG} = \frac{EG}{EC} \text{ และ } \cos x = \cos \hat{ECG} = \frac{CG}{EC} \quad \dots (1)$$

$$\text{ใน } \triangle OCE \text{ จะได้ } \sin y = \sin \hat{EOC} = \frac{EC}{OC} \text{ และ } \cos y = \cos \hat{EOC} = \frac{OE}{OC} \quad \dots (2)$$

$$\text{ใน } \triangle OEF \text{ จะได้ } \sin x = \sin \hat{EOF} = \frac{EF}{OE} \text{ และ } \cos x = \cos \hat{EOF} = \frac{OF}{OE} \quad \dots (3)$$

การหาสูตร $\sin(x - y)$

$$\begin{aligned} \text{ใน } \triangle OCD \text{ จะได้ } \sin \hat{COD} &= \frac{CD}{OC} = \frac{DG - CG}{OC} = \frac{DG}{OC} - \frac{CG}{OC} \\ \sin(x - y) &= \frac{EF}{OC} - \frac{CG}{OC} && (\text{เพราะว่า } \square EGDF \text{ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า}) \\ &= \frac{EF}{OE} \frac{OE}{OC} - \frac{CG}{EC} \frac{EC}{OC} \\ &= \sin x \frac{OE}{OC} - \frac{CG}{EC} \frac{EC}{OC} && (\text{จาก (3)}) \\ &= \sin x \cos y - \frac{CG}{EC} \frac{EC}{OC} && (\text{จาก (2)}) \\ &= \sin x \cos y - \cos x \frac{EC}{OC} && (\text{จาก (1)}) \\ &= \sin x \cos y - \cos x \sin y && (\text{จาก (2)}) \\ \text{เพราะฉะนั้น } \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x \end{aligned}$$

การหาสูตร $\cos(x - y)$

$$\begin{aligned} \text{ใน } \triangle OCD \text{ จะได้ } \cos \hat{COD} &= \frac{OD}{OC} = \frac{OF + FD}{OC} = \frac{OF}{OC} + \frac{FD}{OC} \\ \cos(x - y) &= \frac{OF}{OC} + \frac{EG}{OC} && (\text{เพราะว่า } EGDF \text{ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า}) \\ &= \frac{OF}{OE} \frac{OE}{OC} + \frac{EG}{EC} \frac{EC}{OC} \\ &= \cos x \frac{OE}{OC} + \frac{EG}{EC} \frac{EC}{OC} && (\text{จาก (3)}) \\ &= \cos x \cos y + \frac{EG}{EC} \frac{EC}{OC} && (\text{จาก (2)}) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \frac{EC}{OC} && (\text{จาก (1)}) \\ &= \cos x \cos y + \sin x \sin y && (\text{จาก (2)}) \\ \text{เพราะฉะนั้น } \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

การหาสูตร $\tan(x - y)$

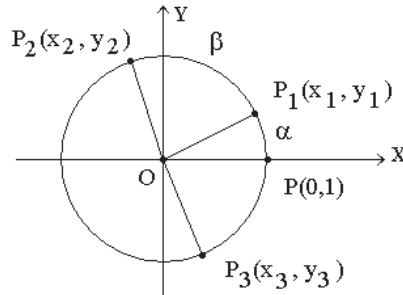
$$\begin{aligned} \tan(x - y) &= \frac{\sin(x - y)}{\cos(x - y)} \\ &= \frac{\sin x \cos y - \sin y \cos x}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} \\ &= \frac{\sin x \cos y - \sin y \cos x}{\cos x \cos y} \cdot \frac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y + \sin x \sin y} \\ &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} \end{aligned}$$

□

การหาสูตร $\sin$, $\cos$, $\tan$ ของผลบวกและผลต่าง โดยใช้ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับวงกลมหน่วย ตามหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนปลาย

ทฤษฎีบท 2.3 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

ข้อพิสูจน์



รูปที่ 2.3

ให้พิกัด P คือ (1, 0) เป็นจุดบนวงกลมหน่วย

ให้ ส่วนโค้ง PP_1 ยาว α และ ส่วนโค้ง P_1P_2 ยาว β และ ส่วนโค้ง PP_3 ยาว β (ทิศทางตามเข็มนาฬิกา)

เพราะฉะนั้น $\angle POP_3 = -\beta$ ส่วนโค้ง PP_2 ยาวเท่ากับ $\alpha + \beta$ และ ส่วนโค้ง P_1P_3 ยาวเท่ากับ $\alpha + \beta$

เพราะว่าส่วนโค้งยาวเท่ากันต้องรองรับคอร์ดที่ยาวเท่ากัน เพราะฉะนั้น $PP_2 = P_1P_3$

เพราะฉะนั้น

$$(PP_2)^2 = (P_1P_3)^2$$

$$(x_2 - 1)^2 + (y_2 - 0)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$$

$$(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha + \beta) - 0)^2 = (\cos(-\beta) - \cos \alpha)^2 + (\sin(-\beta) - \sin \alpha)^2$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos(\alpha + \beta) + 1 + \sin^2(\alpha + \beta) = (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (-\sin \beta - \sin \alpha)^2$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) + \sin^2(\alpha + \beta) - 2\cos(\alpha + \beta) + 1$$

$$= \cos^2 \beta - 2\cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2\sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha$$

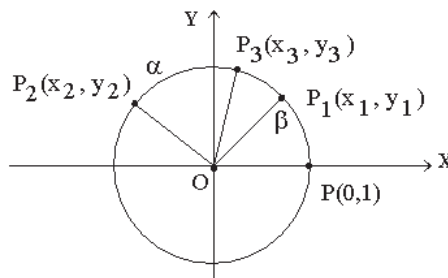
$$1 - 2\cos(\alpha + \beta) + 1 = (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) - 2\cos \alpha \cos \beta + 2\sin \alpha \sin \beta$$

$$2 - 2\cos(\alpha + \beta) = 1 + 1 - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)$$

เพราะฉะนั้น $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$ □

ทฤษฎีบท 2.4 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

ข้อพิสูจน์



รูปที่ 2.4

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไป เราสามารถกำหนดให้ $\alpha > \beta$

ให้พิกัด P คือ (1, 0) เป็นจุดบนวงกลมหน่วย

ให้ PP_1 เป็นส่วนโค้งยาว β , PP_2 เป็นส่วนโค้งยาว α และ PP_3 เป็นส่วนโค้งยาว $\alpha - \beta$

เพราะฉะนั้น ส่วนโค้ง P_1P_2 ยาวเท่ากับ $\alpha - \beta$

เพราะว่าส่วนโค้งที่ยาวเท่ากันต้องรองรับคอร์ดที่ยาวเท่ากัน เพราะฉะนั้น $P_1P_2 = P_1P_3$

เพราะฉะนั้น

$$(P_1P_2)^2 = (P_1P_3)^2$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2$$

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = (\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha - \beta) - 0)^2$$

$$\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta$$

$$= \cos^2(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)$$

$$(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

$$= \cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1$$

$$1 + 1 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = 1 - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1$$

เพราะฉะนั้น

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

□

ทฤษฎีบท 2.5 $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

ข้อพิสูจน์ โดยใช้ผลของสูตร $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ จะได้

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta))$$

$$= \cos((\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta)$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) \cos \beta + \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) \sin \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

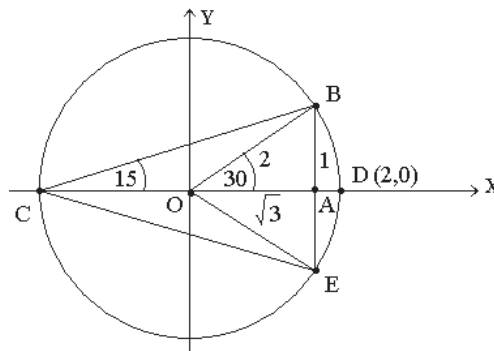
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta)$$

$$= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

□

ตัวอย่าง 2.1 $\sin 15^\circ, \cos 15^\circ, \tan 15^\circ, \sin 75^\circ, \cos 75^\circ, \tan 75^\circ$

แนวคิด แบบที่ 1. เหมาะสำหรับครูระดับมัธยมศึกษาตอนต้นใช้สอนนักเรียน



รูปที่ 2.5

สร้างสามเหลี่ยมมุมฉาก OBA โดยให้ $\angle OAB = 90^\circ$, $\angle BOA = 30^\circ$ และ $AB = 1$, $OB = 2$

เขียนวงกลมจุดศูนย์กลางที่ O รัศมี OB

ต่อ OA มาตัดเส้นรอบวงกลมที่จุด C และ D และ ต่อ BA มาตัดเส้นรอบวงกลมที่ E

เพราะว่า $\triangle OBA$ และ $\triangle OAE$ มี $OB = OE$, OA ด้านร่วม และ $\hat{OAB} = 90^\circ = \hat{OAE}$

เพราะฉะนั้น $\triangle OBA$ และ $\triangle OAE$ เหมือนกันทุกประการ

เพราะฉะนั้น $\hat{EOA} = \hat{AOB} = 30^\circ$ และ $AB = AE$ เพราะฉะนั้น $\hat{EOB} = 60^\circ$

เพราะว่ามุมที่จุดศูนย์กลางเป็น 2 เท่าของมุมที่เส้นรอบวงที่รองรับส่วนโค้ง BE เพราะฉะนั้น $\hat{ECB} = 30^\circ$

พิจารณา $\triangle ABC$ และ $\triangle ACE$ มี $AB = AE$, AC ด้านร่วม และ $\hat{CAB} = \hat{CAE} = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น $\triangle ABC$ และ $\triangle ACE$ เหมือนกันทุกประการ

เพราะฉะนั้น $\hat{BCA} = 15^\circ$ เพราะฉะนั้น $\hat{ABC} = 75^\circ$

ใน $\triangle ABC$ มี $\hat{BAC} = 90^\circ$, $AB = 1$, $AC = 2 + \sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้น } BC^2 &= AB^2 + AC^2 \\ &= 1 + (2 + \sqrt{3})^2 = 1 + 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ &= 8 + 4\sqrt{3} = 4(2 + \sqrt{3}) = 2(4 + 2\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} + 1)^2\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $BC = \sqrt{2}(2 + \sqrt{3})$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \tan 15^\circ = \tan \hat{BCA} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan 75^\circ = \tan \hat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{2 + \sqrt{3}}{1} = 2 + \sqrt{3}$$

$$\sin 15^\circ = \sin \hat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 75^\circ = \sin \hat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)} = \frac{(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{3 + \sqrt{3} - 2}{\sqrt{2}(3 - 1)} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 15^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

แบบที่ 2. ใช้สูตร $\sin$, $\cos$, $\tan$ ของผลบวกและผลต่าง

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + (1)(\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - (1)(\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

□

สูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติในกลุ่มต่อไปที่สำคัญคือ สูตรของการเปลี่ยนจากผลบวกไปเป็นผลคูณ หรือ สูตรของการเปลี่ยนจากผลคูณไปเป็นผลบวก ซึ่งมีแนวทางในการพิสูจน์ดังนี้

$$\text{จาก} \quad \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \quad \dots (1)$$

$$\text{และ} \quad \sin(A - B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A \quad \dots (2)$$

$$(1) + (2) \text{ จะได้ } \sin(A + B) + \sin(A - B) = 2 \sin A \cos B \quad \dots (3)$$

$$(1) - (2) \text{ จะได้ } \sin(A + B) - \sin(A - B) = 2 \sin B \cos A \quad \dots (4)$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \dots (5)$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \dots (6)$$

$$(5) + (6) \text{ จะได้ } \cos(A + B) + \cos(A - B) = 2 \cos A \cos B \quad \dots (7)$$

$$(6) - (5) \text{ จะได้ } \cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B \quad \dots (8)$$

$$\text{แทนค่า } x = A + B \text{ และ } y = A - B \text{ จะได้ } A = \frac{x+y}{2} \text{ และ } B = \frac{x-y}{2}$$

$$\text{จาก (3) จะได้ } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \dots (9)$$

$$\text{จาก (4) จะได้ } \sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \quad \dots (10)$$

$$\text{จาก (7) จะได้ } \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \dots (11)$$

$$\text{จาก (8) จะได้ } \cos y - \cos x = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots (12)$$

สรุป สูตรจาก $\sin \cos$ ของผลบวกหรือผลต่าง เปลี่ยนเป็น $\sin \cos$ ของผลคูณ ที่สำคัญคือ

$$\begin{aligned}\text{ทฤษฎีบท 2.6} \quad \sin A + \sin B &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \sin A - \sin B &= 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \text{ หรือ } 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}\end{aligned}$$

สูตรจาก $\sin \cos$ ของผลคูณ เปลี่ยนเป็น $\sin \cos$ ของผลบวกหรือผลต่าง ที่สำคัญคือ

$$\begin{aligned}\text{ทฤษฎีบท 2.6} \quad 2 \sin A \cos B &= \sin(A + B) + \sin(A - B) \\ 2 \cos A \sin B &= \sin(A + B) - \sin(A - B) \\ 2 \cos A \cos B &= \cos(A + B) + \cos(A - B) \\ 2 \sin A \sin B &= \cos(A - B) - \cos(A + B)\end{aligned}$$

คำแนะนำ สูตรที่ควรจดจำ คือ $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$... (I)

และ $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$... (II)

จะเห็นว่าสูตรข้างต้น 2 สูตรนี้ มีเฉพาะพจน์ของ $\cos$ เท่านั้น

นอกจากนั้นหากนักเรียนจำสลับระหว่าง $\cos \frac{A-B}{2}$ กับ $\cos \frac{B-A}{2}$ สูตรก็ยังถูกต้อง

หรือจำสลับกันระหว่าง $\cos(A-B)$ กับ $\cos(B-A)$ ก็ยังถูกต้องเหมือนเดิม (เพราะว่า $\cos(-\theta) = \cos \theta$)

การนำสูตร (I) และ (II) ช่วยหาสูตรอื่นๆ เช่น

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = 2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \left(\frac{\pi}{2} - B\right)}{2} \\ &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}\right) \cos \frac{-A+B}{2} \\ &= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \sin A \sin B &= 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - A\right) + \left(\frac{\pi}{2} - B\right)\right) + \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - \left(\frac{\pi}{2} - B\right)\right) \\ &= \cos(\pi - (A+B)) + \cos(A-B) = -\cos(A+B) + \cos(A-B) \\ &= \cos(A-B) - \cos(A+B) \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 2.8

$$\sin(A+B+C) = \sin A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C$$

$$\cos(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C$$

$$\tan(A+B+C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$$

แนวคิด $\sin(A+B+C) = \sin(A+(B+C)) = \sin A \cos(B+C) + \sin(B+C) \cos A$

$$\begin{aligned} &= \sin A (\cos B \cos C - \sin B \sin C) + (\sin B \cos C + \sin C \cos B) \cos A \\ &= \sin A \cos B \cos C - \sin A \sin B \sin C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C \\ \cos(A+B+C) &= \cos(A+(B+C)) \\ &= \cos A \cos(B+C) - \sin A \sin(B+C) \\ &= \cos A (\cos B \cos C - \sin B \sin C) - \sin A (\sin B \cos C + \sin C \cos B) \\ &= \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan(A+B+C) &= \tan(A+(B+C)) = \frac{\tan A + \tan(B+C)}{1 - \tan A \tan(B+C)} \\ &= \frac{\tan A + \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}}{1 - \tan A \frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}} = \frac{\tan A(1 - \tan B \tan C) + \tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan A(\tan B + \tan C)} \\ &= \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A} \end{aligned}$$

หมายเหตุ กรณี $A+B+C = 180^\circ$ จะได้ $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\tan 180^\circ = 0$

เพราะฉะนั้น $\sin A \sin B \sin C = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C$

$$\cos A \sin B \sin C + \sin A \sin B \cos C + \sin A \cos B \sin C = \cos A \cos B \cos C + 1$$

และ $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$



ทฤษฎีบท 2.9 กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง $a^2 + b^2 \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ จะได้

1. $a \sin \theta + b \cos \theta = A \sin(\theta + \phi)$
2. $a \sin \theta + b \cos \theta = A \cos(\theta + \alpha)$
3. $-A \leq a \sin \theta + b \cos \theta \leq A$

เมื่อ $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ $\tan \phi = \frac{a}{b}$, $\sin \phi = \frac{a}{A}$ และ $\cos \phi = \frac{b}{A}$ และ $\alpha = \phi - \frac{\pi}{2}$

ข้อพิสูจน์ ให้ $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ และ $\tan \phi = \frac{a}{b}$, $\sin \phi = \frac{a}{A}$ และ $\cos \phi = \frac{b}{A}$

เพราะว่า $a \sin \theta + b \cos \theta = A \left(\frac{a}{A} \sin \theta + \frac{b}{A} \cos \theta \right) = A(\cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \theta) = A \sin(\theta + \phi)$

เพราะว่า $\sin(\theta + \phi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\theta + \phi)\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + (\theta + \phi)\right) = \cos\left(\theta + \left(\phi - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

เพราะฉะนั้น $a \sin \theta + b \cos \theta = A \sin(\theta + \phi) = A \cos(\theta + \alpha)$ เมื่อ $\alpha = \phi - \frac{\pi}{2}$

เพราะว่า $-1 \leq \sin(\theta + \phi) \leq 1$ เพราะฉะนั้น $-A \leq A \sin(\theta + \phi) \leq A$

เพราะฉะนั้น $a \sin \theta + b \cos \theta$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ A และ มีค่าต่ำสุดเท่ากับ $-A$ □

หมายเหตุ การเคลื่อนที่ที่มีสมการเป็น $S(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ หรือ $S(t) = A \cos(\omega t + \phi)$

เรียกว่า การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก มี แอมพลิจูด $= |A|$ มี คาบ $= \frac{2\pi}{\omega}$ มี ความถี่ $= \frac{\omega}{2\pi}$

และ ϕ เรียกว่า มุมทิ้งช่วง

ตัวอย่าง 2.2 กำหนดให้ $x + y + z = xyz$ จงแสดงว่า $\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1+x^2} \frac{2y}{1-y^2} \frac{2z}{1-z^2}$

แนวคิด ให้ $\tan A = x$, $\tan B = y$ และ $\tan C = z$ เพราะ $x + y + z = xyz$

เพราะฉะนั้น $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$$\tan A + \tan B = \tan A \tan B \tan C - \tan C = -\tan C (1 + \tan A \tan B)$$

$$\frac{\tan A + \tan B}{1 + \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\tan(A + B) = \tan(\pi - C)$$

เพราะฉะนั้น $A + B = n\pi + (\pi - C)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $2A + 2B = 2(n + 1)\pi - 2C$

$$\tan(2A + 2B) = \tan(2(n + 1)\pi - 2C) = -\tan 2C$$

$$\frac{\tan 2A + \tan 2B}{1 - \tan 2A \tan 2B} = -\tan 2C$$

$$\tan 2A + \tan 2B = -\tan 2C + \tan 2A \tan 2B \tan 2C$$

$$\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C$$

$$\frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} + \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B} + \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C} = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B} \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \frac{2y}{1-y^2} \frac{2z}{1-z^2}$ □

โจทย์เสริมประสบการณ์ตรีโกณมิติ บทที่ 2.

1. กำหนดให้ $A + B = \frac{\pi}{4}$ จงแสดงว่า $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ และใช้ผลที่ได้หาค่า $\tan \frac{\pi}{8}$, $\tan \frac{\pi}{16}$
2. จงหา θ ที่ทำให้ $\cos 25^\circ = \sin 5^\circ + \sin \theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 360^\circ$
3. กำหนดให้ $\cos x + \cos y = \frac{1}{3}$, $\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$ จงหาค่าของ $\tan \frac{x+y}{2}$
4. กำหนดให้ $0 < \beta < \alpha < 90^\circ$ และ $\sin \alpha$, $\sin \beta$ เป็นรากของสมการ

$$x^2 - \sqrt{2} \cos 20^\circ x + \cos^2 20^\circ - \frac{1}{2} = 0$$
 จงหาค่าของ $\alpha + \beta$
5. จงหาค่าของ $\cos \frac{\pi}{18} \cos \frac{3\pi}{18} \cos \frac{5\pi}{18} \cos \frac{7\pi}{18}$
6. ให้ $\cos(x + y) = \cos z$ จงแสดงว่า $1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z = 0$
7. ให้ α เป็นค่าคงตัว และ $0 < \alpha < \pi$ กำหนดให้ $F(\theta) = \frac{\sin \theta + \sin(\theta + \alpha)}{\cos \theta - \cos(\theta + \alpha)}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi - \alpha$
 จงแสดงว่า $F(\theta)$ เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว
8. จงแสดงว่า $\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \sin^2 x$
9. ใน $\triangle ABC$ จงแสดงว่า

$$4 \sin(45^\circ - \frac{A}{4}) \sin(45^\circ - \frac{B}{4}) \sin(45^\circ - \frac{C}{4}) = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} - 1$$
10. จงแสดงว่า $\tan A + \tan B + \tan C = \frac{\sin(A+B+C)}{\cos A \cos B \cos C} + \tan A \tan B \tan C$
11. จงแสดงว่า $\tan(\frac{\pi}{4} + A) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$ และ $\tan(\frac{\pi}{4} - A) = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$
12. จงแสดงว่า $\sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B = \cos^2 B - \cos^2 A$
13. จงแสดงว่า $(\frac{\sin A - \sin B}{\cos A + \cos B})^{2n+1} + (\frac{\cos A - \cos B}{\sin A + \sin B})^{2n+1} = 0$
14. กำหนดให้ $\cos A = m \cos B$ จงแสดงว่า $\cot \frac{A+B}{2} = \frac{1+m}{1-m} \tan \frac{A-B}{2}$
15. กำหนดให้ $\sin A = m \sin B$ จงแสดงว่า $\tan \frac{A+B}{2} = \frac{m+1}{m-1} \tan \frac{A-B}{2}$
16. จงแสดงว่า 16.1 $\sin A + \sin B + \sin C - \sin(A + B + C) = 4 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2}$
 16.2 $\cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C) = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2}$
17. กำหนดให้ $\sin A = m \sin(A + 2B)$ จงแสดงว่า $\tan(A + B) = \frac{1+m}{1-m} \tan B$
18. จงแสดงว่า $1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C$

$$= 4 \sin \frac{A+B+C}{2} \sin \frac{A+B-C}{2} \sin \frac{A-B+C}{2} \sin \frac{-A+B+C}{2}$$
19. จงแสดงว่า $\sin(A - D) \sin(B - C) + \sin(B - D) \sin(C - A) + \sin(C - D) \sin(A - B) = 0$
20. กำหนดให้ $\sin x - \sin y = \frac{22}{25}$ และ $\cos x - \cos y = \frac{48}{25}$ จงหาค่าของ $\tan \frac{x+y}{2}$
21. จงหาค่าของ $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$

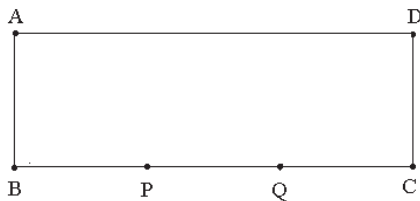
22. จงหาค่าของ $\sin 165^\circ + \sin 45^\circ - \sin 75^\circ$
23. จงหาค่าของ $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 220^\circ$
24. จงหาค่าของ $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$
25. จงหาค่าของ $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ$
26. จงหาค่าของ $\sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$
27. จงหาค่าของ $\cos 75^\circ + \sin 75^\circ$ และ $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$
28. จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{3} \cos x + \sin x > 0$ เมื่อ $-\pi \leq x \leq \pi$
29. จงแสดงว่า $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - (\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)) \tan x = 2$
30. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเชิงซ้อน k, m, n เป็นจำนวนจริง และ $|a| = |b| = |c| = k$,
 $a + b \cos \alpha + c \sin \alpha = 0$, $\sin \alpha \neq 0$ และ $\cos \alpha \neq 0$ จงแสดงว่า $|mb + nc|^2 = k^2(m^2 + n^2)$
31. จงแสดงว่า
 $\cos(A + B + C) + \cos(A + B - C) + \cos(A - B + C) + \cos(-A + B + C) = 4 \cos A \cos B \cos C$
32. กำหนดให้ $a \cos(x + y) = b \cos(x - y)$ จงแสดงว่า $(a + b) \tan x = (a - b) \cot y$
33. จงแสดงว่า $\frac{\sin(A - B)}{\sin A \sin B} + \frac{\sin(B - C)}{\sin B \sin C} + \frac{\sin(C - A)}{\sin C \sin A} = 0$
34. จงแสดงว่า $\cot\left(\frac{\pi}{4} + A\right) = \frac{\cot A - 1}{\cot A + 1}$ และ $\cot\left(\frac{\pi}{4} - A\right) = \frac{\cot A + 1}{\cot A - 1}$
35. จงหาค่าของ $\tan 50^\circ + \tan 40^\circ - \tan 10^\circ (\tan 50^\circ - \tan 40^\circ)$
36. กำหนดให้ $x \in [0, 2\pi]$ จงหาเซตคำตอบของสมการ $\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0$
37. จงหาผลเฉลยในรูปแบบมุมทั่วไปของสมการ $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$
38. จงหาค่าของ a, b, c, d ที่ทำให้ $32 \cos^4 x \sin^2 x = a + b \cos 2x + c \cos 4x + d \cos 6x$
39. กำหนดให้ $\sin x + \cos y = m$ และ $\cos x + \sin y = n$ จงแสดงว่า $\sin(x + y) = \frac{m^2 + n^2 - 2}{2}$
40. จงหาค่าของ a, b, c, d ที่ทำให้ $16 \sin^4 x \cos x = a \cos x + b \cos 3x + c \cos 5x$
41. จงหาผลเฉลยของสมการ $\cos nx + \cos(n + 2)x = \cos x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
42. จงหาผลเฉลยของสมการ $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos 2x$
43. กำหนดให้ $\cos(40^\circ + A) + \cos(40^\circ - A) = 0$ จงหาค่าของ $\cos A$
44. กำหนดให้ $0 \leq x \leq 2\pi$ และ $0 \leq y \leq 2\pi$ และ $3 \sin x + 4 \cos x = 4 \sin y - 3 \cos y$
 จงหาค่าของ $\cos(x - y)$, $\sin(x - y)$, $\cos(x + y)$ และ $\sin(x + y)$
45. จงหาผลเฉลยของสมการ $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$ เมื่อ $0 \leq x < 2\pi$
46. กำหนดให้ $0 < y < \pi$ จงหาผลเฉลยของระบบสมการ $\tan(x + y) = \tan(x + 4y)$ และ $x + 2y = \frac{\pi}{2}$
47. จงแสดงว่า 47.1 $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$ 47.2 $\frac{\sin 5A - \sin 3A}{\sin 5A + \sin 3A} = \cot 4A \tan A$

48. จงหาผลเฉลยของสมการ $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = -1$ เมื่อ $0 \leq \theta < 2\pi$

49. กำหนดให้ $\sin B = \frac{1}{5} \sin(2A + B)$ จงแสดงว่า $\tan(A + B) = \frac{3}{2} \tan A$

50. กำหนดให้ $0 < A < \pi$ และ $0 < B < \pi$ และ $\cos A \cos B \cos(A + B) = -\frac{1}{8}$ จงแสดงว่า $A = B = \frac{\pi}{3}$

51. ให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า มี $BC = 3AB$ มี P และ Q เป็นจุดบน BC ที่ทำให้ $BP = PQ = QC$



จงแสดงว่า $\angle BDC + \angle DPC = \angle DQC$

52. กำหนดให้ $\tan A, \tan B$ เป็นรากของสมการ $x^2 + px + q = 0$

จงแสดงว่า $\sin^2(A + B) + p \sin(A + B) \cos(A + B) + q \cos^2(A + B) = q$

53. จงแสดงว่า $\cos(A + B) \sin(A - B) + \cos(B + C) \sin(B - C)$

$+ \cos(C + D) \sin(C - D) + \cos(D + A) \sin(D - A) = 0$

54. จงแสดงว่า $\sin(A + B) \sin(A - B) \sin(C + D) \sin(C - D)$

$+ \sin(C + B) \sin(C - B) \sin(D + A) \sin(D - A)$

$+ \sin(D + B) \sin(D - B) \sin(A + C) \sin(A - C) = 0$

55. จงแสดงว่า $\sin(A + B + C) + \sin(B + C - A) + \sin(C + A + B) - \sin(A + B - C)$

$= 4 \cos A \cos B \sin C$

56. กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $\cos A : \cos B : \cos C = 2 : 9 : 12$ จงหา $\sin A : \sin B : \sin C$

57. จงหาผลเฉลยของสมการ $\cos 4x + \cos 2x - \cos x = 0$ เมื่อ $0 \leq x < 2\pi$

58. จงหาค่าของ $\prod_{k=1}^{89} \left(\frac{1}{\cos^2 k^\circ} - 1 \right)$

59. จงแสดงว่า $\cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = \frac{1}{2} \sin 2x$

60. ให้ $A - C = B$ และ $A + C = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$ จงแสดงว่า $\tan A = 2 \tan B + \tan C$

61. จงแสดงว่า 61.1 $\tan 75^\circ = 2 \tan 60^\circ + \tan 15^\circ$

61.2 $\tan 70^\circ = 2 \tan 50^\circ + \tan 20^\circ$

61.3 $\tan 80^\circ = 4 \tan 50^\circ + 2 \tan 20^\circ + \tan 10^\circ$

62. จงแสดงว่า $\tan 20^\circ + \tan 40^\circ + \sqrt{3} \tan 40^\circ \tan 20^\circ = \sqrt{3}$

63. จงแสดงว่า $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tan \frac{A+B}{2}}{\tan \frac{A-B}{2}}$ และ $\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B}$

64. จงแสดงว่า ถ้า $\sin(A + B) \sin(C - D) = \sin(A - B) \sin(C + D)$ แล้ว $\cot A \cot D = \cot B \cot C$

เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์ตรีโกณมิติ บทที่ 2.

1. แนวคิด $\tan A = \tan\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan B}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan B} = \frac{1 - \tan B}{1 + \tan B} \quad (A + B = \frac{\pi}{4})$

$$\tan A + \tan A \tan B = 1 - \tan B$$

$$1 + \tan A + \tan A \tan B + \tan B = 2$$

$$(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2 \quad \dots (1)$$

ให้ $A = B = \frac{\pi}{8}$ จะได้ $(1 + \tan \frac{\pi}{8})(1 + \tan \frac{\pi}{8}) = 2$ เพราะฉะนั้น $1 + \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

ให้ $t = \tan \frac{A}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{2} - 1 = \tan A = \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{A}{2}} = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} = \frac{2t}{1 - t^2}$

เพราะฉะนั้น $(1 - \sqrt{2})(t^2 - 1) = 2t$ เพราะฉะนั้น $(1 - \sqrt{2})t^2 - 2t - (1 - \sqrt{2}) = 0$

เพราะฉะนั้น $t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})}}{2(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + (1 - 2\sqrt{2} + 2)}}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1 \pm \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}}$

เพราะว่า $t = \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{\pi}{16} > 0$ เพราะฉะนั้น $\tan \frac{\pi}{16} = \frac{1 - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{1 - \sqrt{2}}$ □

2. แนวคิด เพราะว่า $\cos 25^\circ = \sin 5^\circ + \sin \theta$

เพราะฉะนั้น $\sin \theta = \cos 25^\circ - \sin 5^\circ = \cos 25^\circ - \cos 85^\circ = 2 \sin \frac{25^\circ + 85^\circ}{2} \sin \frac{85^\circ - 25^\circ}{2}$
 $= 2 \sin 55^\circ \sin 30^\circ = 2 \sin 55^\circ \left(\frac{1}{2}\right) = \sin 55^\circ$

เพราะว่า $0 \leq \theta \leq 360^\circ$ เพราะฉะนั้น $\theta = 55^\circ, 125^\circ$ □

3. แนวคิด เพราะว่า $\cos x + \cos y = \frac{1}{3}$ เพราะฉะนั้น $2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{3} \quad \dots (1)$

เพราะว่า $\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$ เพราะฉะนั้น $2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{4} \quad \dots (2)$

$(2) \div (1)$ จะได้ $\tan \frac{x+y}{2} = \frac{3}{4}$ □

4. แนวคิด เพราะว่า $\sin \alpha, \sin \beta$ เป็นรากของสมการ $x^2 - \sqrt{2} \cos 20^\circ x + \cos^2 20^\circ - \frac{1}{2} = 0$

เพราะฉะนั้น $\sin \alpha + \sin \beta = \sqrt{2} \cos 20^\circ \quad \dots (1)$

และ $\sin \alpha \sin \beta = \cos^2 20^\circ - \frac{1}{2} \quad \dots (2)$

เพราะว่า $\sin$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $(0, 90^\circ)$ และ $0 < \beta < \alpha < 90^\circ$ เพราะฉะนั้น $\sin \alpha > \sin \beta$

เพราะฉะนั้น $\sin \alpha - \sin \beta > 0$

เพราะฉะนั้น $\sin \alpha - \sin \beta = \sqrt{(\sin \alpha - \sin \beta)^2} = \sqrt{\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta}$
 $= \sqrt{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta - 4 \sin \alpha \sin \beta} = \sqrt{(\sin \alpha + \sin \beta)^2 - 4 \sin \alpha \sin \beta}$