

คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 36

โลกคอมบินาทอริก Combinatorics

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 36

โลกคอมบินาทอริก Combinatorics

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 36 โลกคอมบินาทอริก (Combinatorics)

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : พฤศจิกายน พ.ศ. 2560

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-445-691-4

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

คอมบินาทอริก (Combinatorics) มีความสำคัญในการศึกษาคณิตศาสตร์ทั้งคณิตศาสตร์บริสุทธิ์และคณิตศาสตร์ประยุกต์หลายสาขา เนื้อหาของวิชา combinatorics กล่าวอย่างง่ายคือเป็นการศึกษาการนับแบบต่างๆ เช่น การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ การแบ่งกลุ่ม การกระจายทวินาม การหาจำนวนผลเฉลยของสมการ การแบ่งกันจำนวนเต็มบวก การหาผลแบ่งกันของเซต ฯลฯ เพราะว่าในข้อสอบ IMO มีข้อสอบที่ต้องใช้เนื้อหา combinatorics ช่วยในการแก้ปัญหา เพราะฉะนั้นจึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งที่ผู้เข้าสอบ IMO ทุกคนต้องมีความรู้ combinatorics ในหนังสือเล่มนี้จึงมีหลักการ สูตร ทฤษฎีบท ตัวอย่างและแบบฝึกหัดให้ฝึกแก้ปัญหาและเฉลยเพื่อเสริมความเข้าใจให้มากยิ่งขึ้น แนวทางในการเขียนจะการใช้การยกตัวอย่างให้เข้าใจ ก่อนสรุปเป็นสูตรกรณีทั่วไปและแบบฝึกหัดทุกข้อต้องมีเฉลย

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

บทที่ 1 หลักการนับ	1 – 42
บทที่ 2 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	43 – 72
2.1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	43
2.2 การจัดรูปพีชคณิตจากซ้ายไปเท่ากับขวาหรือจัดรูปเข้ามาหากลาง	44
2.3 การจัดรูปแบบทางพีชคณิตที่ต้องมีการบวกเข้าและลบออก	47
2.4 ใช้เหตุผลเฉพาะ	49
บทที่ 3 การนับเบื้องต้น	73 – 204
3.1 การนับเบื้องต้น	73
3.2 หลักการหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง	88
3.3 การหาจำนวนผลเฉลยของ $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$	104
3.4 หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก (Principle of Inclusion and Exclusion)	116
3.5 จำนวนสเตอร์ลิง (Stirling numbers) และจำนวนเบล (Bell number)	129
3.6 การเรียงสับเปลี่ยนวัฏจักร (cyclic permutation)	144
3.7 การหาตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ $n!$	174
บทที่ 4 การกระจายทวินาม	205 – 254
4.1 ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)	205
4.2 สามเหลี่ยมปาสกาล	216
4.3 สัมประสิทธิ์พหุนาม (Multinomial coefficients)	223
4.4 ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังเป็นจำนวนจริง	225
บทที่ 5 ฟังก์ชันก่อกำเนิด	255 – 358
5.1 พีชคณิตเกี่ยวกับอนุกรมกำลัง	256
5.2 อนุกรมเทย์เลอร์	261
5.3 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ (ordinary generating function)	265
5.4 ทำไมสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญจึงอธิบายการนับได้	269
5.5 ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียล (exponential generating function)	297
5.6 ทำไมสัมประสิทธิ์ของฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลจึงอธิบายการนับได้	299
5.7 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ VS. ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียล	322

บทที่ 6 ความสัมพันธ์เวียนเกิด	359 – 410
6.1 ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence relation)	359
6.2 การหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดเชิงเส้นโดยใช้อ่อนุกรมกำลัง	362
6.3 สมการช่วยและรากของสมการช่วย	367
6.4 การหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์อันดับ m	374
6.5 การหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์	383
6.6 การหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดไม่เชิงเส้น	391
6.7 ปัญหาที่อธิบายได้ด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด	396
บทที่ 7 ผลแบ่งกันจำนวนเต็ม	411 – 476
7.1 ผลแบ่งกันจำนวนเต็ม (Integer partitions)	411
7.2 แผนภาพแฟร์เรอร์ (Ferrers diagrams)	416
7.3 ฟังก์ชันก่อกำเนิดของจำนวนผลแบ่งกัน	435
บทที่ 8 การเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่มีการตรงตำแหน่ง	477 – 490

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์

$\mathbb{Z}$	เซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Z}^+$	เซตของจำนวนเต็มบวก, เซตของจำนวนนับ
$\mathbb{Z}^-$	เซตของจำนวนเต็มลบ
$\mathbb{N}$	เซตของจำนวนเต็มบวก, เซตของจำนวนนับ
$\mathbb{N}^0$	เซตของจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์
$\mathbb{Q}$	เซตของจำนวนตรรก
$\mathbb{Q}^+$	เซตของจำนวนตรรกบวก
$\mathbb{Q}^-$	เซตของจำนวนตรรกลบ
$\mathbb{Q}^0$	เซตของจำนวนตรรกบวกหรือศูนย์
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{R}^+$	เซตของจำนวนจริงบวก
$\mathbb{R}^-$	เซตของจำนวนจริงลบ
$\mathbb{R}^0$	เซตของจำนวนจริงบวกหรือศูนย์
$\mathbb{C}$	เซตของจำนวนเชิงซ้อน
$\lceil a \rceil$	จำนวนเต็มค่าน้อยสุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ a เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
$\lfloor a \rfloor$	จำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ a เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
$[n]$	$[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 31 โลกตรีโกณมิติ

ให้ $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $s = \frac{a+b+c}{2}$ และ Δ คือพื้นที่ ΔABC

ให้ $\vec{AC} = \vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ และ $\vec{AB} = \vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j}$

ให้ R = รัศมีวงกลมล้อมรอบ ΔABC และ r = รัศมีวงกลมแนบใน ΔABC

การสอบระดับ IMO สูตรต่อไปนี้ให้นักเรียนท่องจำและใช้ได้เลย

$$1. \Delta = \frac{1}{2} \times AB \times CD$$

$$2. \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (\text{Hero's formula})$$

$$3. \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

$$4. \frac{2\Delta}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad (\text{กฎของไซน์})$$

$$5. \Delta = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$$

$$6. \Delta = \frac{1}{2} |u_1 v_2 - u_2 v_1| = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right|$$

$$7. \Delta = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \right| \text{ เมื่อ } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$$

$$9. \Delta = rs = \frac{abc}{4R}$$

$$10. r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$11. a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{หรือ} \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (\text{กฎของโคไซน์})$$

$$12. \sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

$$13. \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

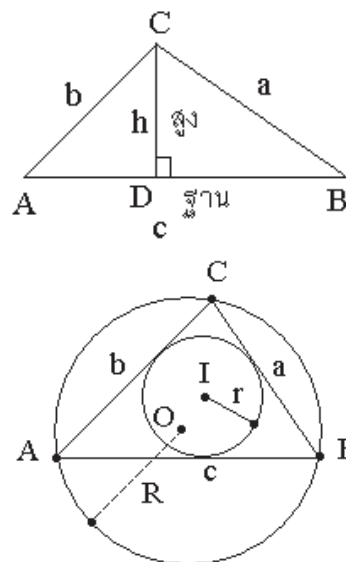
$$14. \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

$$15. \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}, \tan \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$16. \frac{\sin x_1 + \sin x_2 + \dots + \sin x_n}{n} \leq \sin \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \text{ เมื่อ } x_i \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(ศึกษาเพิ่มเติม บทที่ 10)

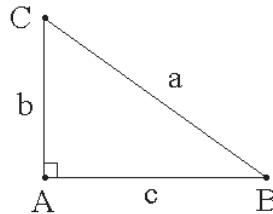


คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 32 โลกเรขาคณิต

มีแบบฝึกหัดพร้อมเฉลยและทฤษฎีบทที่สำคัญในการทำโจทย์ IMO เช่น

ทฤษฎีบท 29 (Pythagoras's Theorem) หน้า 35

$\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี AB เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก จะได้ $AB^2 = AC^2 + BC^2$



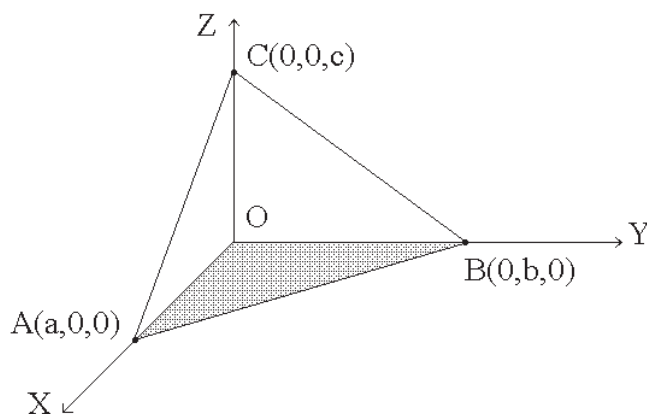
ทฤษฎีบท 6.1 หน้า 322

(ข้อตกลง Δ_{PQR} คือพื้นที่รูปสามเหลี่ยม PQR)

ในปริภูมิสามมิติ ให้ $OABC$ เป็นพีระมิดหน้าสามเหลี่ยมเชิงตั้งฉาก

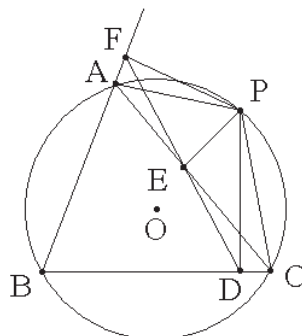
โดยที่พิกัดของจุด A, B, C คือ $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ และ $C(0, 0, c)$ และ O เป็นจุดกำเนิด

จะได้ $(\Delta_{OAB})^2 + (\Delta_{OAC})^2 + (\Delta_{OBC})^2 = (\Delta_{ABC})^2$



ทฤษฎีบท 49.12 (Simson line) หน้า 67

P เป็นจุดบนวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ และ D, E, F อยู่บนเส้นตรงที่ผ่าน BC, CA, AB ตามลำดับ และ $PD \perp BC, PE \perp CA, PF \perp AB$ จะได้ D, E, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



หมายเหตุ เส้นตรงที่ผ่านจุด D, E, F เรียกว่า **เส้นพีเดล (Pedal line)** หรือ **เส้นซิมสัน (Simson line)** ของ $\triangle ABC$ สำหรับจุด P

บทที่ 1

หลักรังนกพิราบ



1.1 หลักรังนกพิราบ (Pigeonhole principle)

หลักรังนกพิราบกล่าวอย่างง่ายเช่น มีนก 3 ตัวบินเข้ารังนก 2 รังต้องมีนกอย่างน้อย 2 ตัวอยู่รังเดียวกัน

ทฤษฎีบท 1.1 หลักรังนกพิราบ (Pigeonhole principle) แบบที่ 1

ถ้ามีนก $n + 1$ ตัวบินเข้ารังนก n รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ข้อพิสูจน์ กำหนดให้ นก $n + 1$ ตัวบินเข้ารังนก n รัง ... (1)

สมมติ “ มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว ” ไม่จริง ... (2)

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีนกน้อยกว่าหรือเท่ากับหนึ่งตัว

เพราะว่ามีรังนก n รัง เพราะฉะนั้นมีนกอย่างน้อย n ตัว

เกิดข้อขัดแย้งกับ (1) เพราะฉะนั้นที่สมมติ (2) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

□

ตัวอย่าง 1.1 เลือกนักเรียน 13 คน ออกมาหน้าชั้นเรียนต้องมีอย่างน้อย 2 คนเกิดเดือนเดียวกัน

แนวคิด เดือน 12 เดือนคือ เดือนมกราคม, เดือนกุมภาพันธ์, ... , เดือนธันวาคม

ให้นักเรียนเป็นนก 13 ตัวและให้เดือน 12 เดือนเป็นรังนก

โดยหลักรังนกพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีนักเรียนอย่างน้อย 2 คนเกิดเดือนเดียวกัน

□

ตัวอย่าง 1.2 เลือกนักเรียน 8 คน ออกมาหน้าชั้นเรียนต้องมีอย่างน้อย 2 คนเกิดวันเดียวกันของสัปดาห์

แนวคิด วันในสัปดาห์คือ วันจันทร์, วันอังคาร, วันพุธ, วันพฤหัสบดี, วันศุกร์, วันเสาร์, วันอาทิตย์

ให้นักเรียนเป็นนก 8 ตัวและให้วัน 7 วันเป็นรังนก โดยหลักรังนกพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว เพราะฉะนั้นมีนักเรียนอย่างน้อย 2 คนเกิดวันเดียวกัน

□

ตัวอย่าง 1.3 จงแสดงว่าจำนวนเต็ม 3 ต้องมีจำนวนอย่างน้อย 2 จำนวนที่บวกกันแล้วหารด้วย 2 ลงตัว

แนวคิด ให้ $h_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ เป็นเลขคี่}\}$ และ $h_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ เป็นเลขคู่}\}$ เป็นรังนก 2 รัง

ให้จำนวนเต็ม b_1, b_2, b_3 เป็นนก 3 ตัว

เพราะฉะนั้น $\mathbb{Z} = h_1 \cup h_2$ และ $h_1 \cap h_2 = \emptyset$

เพราะว่า $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{Z}$ มีความหมายว่านก b_1, b_2, b_3 บินเข้ารัง h_1, h_2

โดยหลักการพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้น h_1 มีสมาชิก 2 ตัว หรือ h_2 มีสมาชิก 2 ตัว

เพราะว่าสมาชิก 2 ตัวใดๆ ใน h_1 บวกกันเป็นเลขคู่และสมาชิก 2 ตัวใดๆ ใน h_2 บวกกันเป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้นมีจำนวนอย่างน้อย 2 จำนวนที่บวกกันแล้วหารด้วย 2 ลงตัว □

ตัวอย่าง 1.4 จงแสดงว่าจำนวนเต็ม 4 จำนวนต้องมีอย่างน้อย 2 จำนวนที่ลบกันแล้ว 3 หารลงตัว

แนวคิด ให้จำนวนเต็ม b_1, b_2, b_3, b_4 เป็นนก 4 ตัว

ให้ $h_1 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 1 \pmod{3}\}$

$h_2 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 2 \pmod{3}\}$

$h_3 = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv 3 \pmod{3}\}$

เพราะฉะนั้น $\mathbb{Z} = h_1 \cup h_2 \cup h_3$ และ $h_i \cap h_j = \emptyset$ ทุกค่า $i \neq j$

เพราะฉะนั้น $\forall a, b \in h_i$ จะได้ $[a - b \equiv 0 \pmod{3}]$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3$

เพราะฉะนั้น $\forall a, b \in h_i$ จะได้ $[3 \mid (a - b)]$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3$... (1)

เพราะว่ามีนก 4 ตัวคือ b_1, b_2, b_3, b_4 บินเข้ารัง 3 รังคือ h_1, h_2, h_3

โดยหลักการพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะว่าจาก (1) $\forall a, b \in h_i$ จะได้ $[3 \mid (a - b)]$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็ม 4 จำนวนต้องมีอย่างน้อย 2 จำนวนที่ลบกันแล้ว 3 หารลงตัว □

ทฤษฎีบท 1.2 หลักการพิราบ (Pigeonhole principle) แบบที่ 2

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n > m$

ถ้ามีนก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ข้อพิสูจน์ ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n > m$

กำหนดให้มีนก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง

สมมติ “ มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว ” ไม่จริง ... (1)

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีนกน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 ตัว ... (2)

จาก (2) และมี m รัง เพราะฉะนั้นมีนกน้อยกว่าหรือเท่ากับ m ตัว

เกิดข้อขัดแย้งกับมีนก n ตัวและ $n > m$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้น “ มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว ” เป็นจริง

เพราะฉะนั้นถ้ามีนก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว □

ตัวอย่าง 1.5 เลือกจำนวนเต็มบวก $n + 1$ ตัวจากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$

จงแสดงว่า มี x, y จากจำนวน $n + 1$ ตัวนั้นที่ทำให้ $x \mid y$

แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n + 1$ ตัวจากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$

ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ เป็นนก $n + 1$ ตัว

ให้ $\{1, 2\}, \{2, 4\}, \dots, \{k, 2k\}, \dots, \{n, 2n\}$ เป็นรังนก n รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการนิกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี k ที่ทำให้รัง $\{k, 2k\}$ มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ $x = k$ และ $y = 2k$ เพราะฉะนั้น x, y เป็นนกสองตัวที่อยู่รัง $\{k, 2k\}$ และ $x \mid y$ □

ตัวอย่าง 1.6 ให้ A, B เป็นเซตจำกัดและ $|A| > |B|$ และ $f: A \rightarrow B$

จงแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1

แนวคิด กำหนดให้ A, B เป็นเซตจำกัด และ $|A| > |B|$ และ $f: A \rightarrow B$

ให้ $|A| = n$ และ $|B| = m$ เพราะว่า $|A| > |B|$ เพราะฉะนั้น $n > m$

ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ และ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$

การส่งค่า $f(a_i)$ คือการส่งนกบินเข้ารังนก

ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นนก n ตัวและให้ $b_1, b_2, \dots, b_m$ เป็นรังนก m รัง

เพราะว่า $n > m$ เพราะฉะนั้นโดยหลักการนิกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $a_i \neq a_j$ ที่ทำให้ $f(a_i) = f(a_j)$ เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 □

ตัวอย่าง 1.7 จงแสดงว่าในบรรดาจำนวนจริง $n + 1$ ตัวที่เลือกออกมาจากช่วง $[0, 1)$

ต้องมีสองจำนวนที่มีผลต่างน้อยกว่า $\frac{1}{n}$

แนวคิด $[0, 1) = [0, \frac{1}{n}) \cup [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}) \cup [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}) \cup \dots \cup [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n})$

ให้จำนวนจริง $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ ที่เลือกออกมาจากช่วง $[0, 1)$ เป็นนก $n + 1$ ตัว

ให้ $[0, \frac{1}{n}), [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}), [\frac{2}{n}, \frac{3}{n}), \dots, [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n})$ เป็นรังนก n รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการนิกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี k ที่ทำให้รัง $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$ มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ x, y เป็นนกสองตัวที่อยู่รัง $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$

เพราะฉะนั้น $|x - y| < \frac{k}{n} - \frac{k-1}{n} = \frac{1}{n}$ □

ตัวอย่าง 1.8 จงแสดงว่าจำนวนเต็ม 10 ตัวต้องมีอย่างน้อยสองตัวที่หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษเท่ากัน

แนวคิด ให้จำนวนเต็ม $x_i, i = 1, 2, \dots, 10$ เป็นนก 10 ตัว

สำหรับ $j = 0, 1, 2, \dots, 8$ ให้ $M_j = \{x \mid x \equiv j \pmod{9}\}$ เป็นรังนก 9 รัง

เพราะว่า $Z = \bigcup_{j=0}^8 M_j$ และ $M_i \cap M_j = \emptyset$ ทุกค่า $i \neq j$

เพราะฉะนั้น $x_i, i = 1, 2, \dots, 10$ เป็นสมาชิกของ $\bigcup_{j=0}^8 M_j$

ให้ $x_i, i = 1, 2, \dots, 10$ เป็นนก 10 ตัวและ $M_j, j = 0, 1, 2, \dots, 8$ เป็นรังนก 9 รัง

โดยหลักการนับพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม x, y อย่างน้อย 2 ตัวอยู่ให้ M_j เดียวกัน

เพราะฉะนั้น $x \equiv j \pmod{9}$ และ $y \equiv j \pmod{9}$ เพราะฉะนั้น $x - y \equiv 0 \pmod{9}$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มอย่างน้อย 2 ตัวที่หารด้วย 9 แล้วเหลือเศษเท่ากัน □

ตัวอย่าง 1.9 ให้ S เป็นสับเซตของ $\{1, 2, 3, \dots, 11\}$ และ $|S| = 7$

จงแสดงว่ามีสมาชิก 2 ตัวของ S ที่บวกกันแล้วเท่ากับ 12

แนวคิด ให้ $S = \{s_1, s_2, \dots, s_7\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 11\}$

ให้ $s_1, s_2, \dots, s_7$ เป็นนก 7 ตัว

ให้ $h_1 = \{1, 11\}, h_2 = \{2, 10\}, h_3 = \{3, 9\}, h_4 = \{4, 8\}, h_5 = \{5, 7\}, h_6 = \{6\}$ เป็นรังนก 6 รัง

ผลบวกสมาชิกใน h_i มีค่าเท่ากับ 12 ทุกค่า $i = 1, 2, 3, 4, 5$... (1)

กรณีที่ 1 $6 \in S$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $s_7 = 6$

เพราะฉะนั้น $s_1, s_2, \dots, s_6$ ที่เหลือต้องอยู่ใน $h_1 \cup h_2 \cup h_3 \cup h_4 \cup h_5$

โดยหลักการนับพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีรัง h_i ที่มีนก 2 ตัว ให้ $x, y \in h_i$ จาก (1) จะได้ $x + y$ เท่ากับ 12

กรณีที่ 2 $6 \notin S$

เพราะฉะนั้นสมาชิก 7 ตัวที่เหลือต้องอยู่ใน $h_1 \cup h_2 \cup h_3 \cup h_4 \cup h_5$

โดยหลักการนับพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีรัง h_i ที่มีนก 2 ตัว ให้ $x, y \in h_i$ จาก (1) จะได้ $x + y$ เท่ากับ 12

ทั้งสองกรณีจะมีสมาชิก 2 ตัวของ S ที่บวกกันแล้วเท่ากับ 12 □

ตัวอย่าง 1.10 คน n คนมางานเลี้ยง คนแต่ละคู่จับมือทักทายกันอย่างมาหนึ่งครั้ง (อาจมีบางคนไม่จับมือทักทายกัน) จงแสดงว่า มีอย่างน้อยสองคนที่จับมือกับคนอื่นในงานเป็นจำนวนครั้งเท่ากัน

แนวคิด ให้คน $b_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ เป็นนก n ตัว

เพราะว่าคนแต่ละคู่จับมือทักทายกันอย่างมาหนึ่งครั้ง (อาจมีบางคนไม่จับมือทักทายกัน)

เพราะฉะนั้นจำนวนครั้งที่แต่ละคนจะได้จับมือเป็นสมาชิกของ $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

ให้ h_i เป็นเซตของคนที่จับมือ i ครั้ง, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2, n-1$

กรณีที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งคนจับมือกับคนอื่น 0 ครั้ง

เพราะฉะนั้นไม่มีคนที่ได้จับมือ $n-1$ ครั้ง เพราะฉะนั้น $|h_{n-1}| = 0$

เพราะฉะนั้นเหลือรังนกให้พิจารณา $n-1$ รังคือ $h_i, i = 0, 1, 2, 3, \dots, n-2$

เพราะว่ามีนก n ตัวและมีรังนก $n - 1$ รัง

โดยหลักการนิกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีรัง h_i ที่มีนกสองตัว

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อยสองคนที่จับมือกับคนอื่นในงานเป็นจำนวนครั้งเท่ากัน

กรณีที่ 2 ทุกคนจับมือทักทายอย่างน้อยหนึ่งครั้ง

เพราะฉะนั้น $|h_0| = 0$

เพราะฉะนั้นเหลือรังนกให้พิจารณา $n - 1$ รังคือ $h_i, i = 1, 2, 3, \dots, n - 2, n - 1$

เพราะว่ามีนก n ตัวและมีรังนก $n - 1$ รัง

โดยหลักการนิกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีรัง h_i ที่มีนกสองตัว

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อยสองคนที่จับมือกับคนอื่นในงานเป็นจำนวนครั้งเท่ากัน

จากทั้งสองกรณีจะมีอย่างน้อยสองคนที่จับมือกับคนอื่นในงานเป็นจำนวนครั้งเท่ากัน □

หมายเหตุ แนวคิดข้างต้นใช้แก้ปัญหาต่อไปนี้ได้

ในงานเลี้ยงที่มีผู้ร่วมงาน 30 คน

จงแสดงว่า มีอย่างน้อยสองคนที่มีเพื่อนอยู่ในงานนี้เป็นจำนวนเท่ากัน

แนวคิด ให้การจับมือกัน คือ การเป็นเพื่อนกัน

เพราะว่ามีอย่างน้อยสองคนที่จับมือกับคนอื่นในงานเป็นจำนวนครั้งเท่ากัน

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อยสองคนที่มีเพื่อนอยู่ในงานนี้เป็นจำนวนเท่ากัน

ตัวอย่าง 1.11 ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n ตัว

จงแสดงว่า มีสับเซต $B \neq \emptyset$ ของ A และ n หารผลบวกของสมาชิกใน B ลงตัว

แนวคิด ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

ให้ $b_0 = 0$

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_1 + a_2$$

$$b_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

:

$$b_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$$

:

$$b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

ให้ $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นนก $n + 1$ ตัว

ให้ $M_i = \{x \in N \mid x \equiv i \pmod{n}\}, i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ เป็นรังนก n รัง

โดยหลักการนิกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว ให้ M_i เป็นรังที่มีนก b_j, b_k อยู่

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $j < k$

เพราะฉะนั้น $b_j = a_1 + a_2 + \dots + a_j$ และ $b_k = a_1 + a_2 + \dots + a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_k$

เพราะฉะนั้น $b_k - b_j = a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_k$

เพราะว่า $b_j, b_k \in M_i$ เพราะฉะนั้น $b_j \equiv i \pmod{n}$ และ $b_k \equiv i \pmod{n}$

เพราะฉะนั้น $b_k - b_j \equiv 0 \pmod{n}$

$$a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_k \equiv 0 \pmod{n}$$

เพราะฉะนั้น $n \mid (a_{j+1} + \dots + a_k)$ ให้ $B = \{a_{j+1}, a_{j+2}, \dots, a_k\}$

เพราะฉะนั้นมีสับเซต B ของ A ที่ไม่เป็นเซตว่างและ n หารผลบวกของสมาชิกใน B ลงตัว □

ตัวอย่าง 1.12 ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{16}\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 30\}$

จงแสดงว่า มีสมาชิกของ A อย่างน้อย 2 ตัวที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

แนวคิด ให้ $a_1, a_2, \dots, a_{16}$ เป็นนก 16 ตัว

ให้ $h_1 = \{1, 2\}, h_2 = \{3, 4\}, h_3 = \{5, 6\}, \dots, h_{15} = \{29, 30\}$ เป็นรังนก 15 รัง

เพราะว่า $\gcd(n, n+1) = 1$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

เพราะฉะนั้นสมาชิกใน $h_i, i = 1, 2, \dots, 15$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

เพราะว่า $\{a_1, a_2, \dots, a_{16}\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 30\} = h_1 \cup h_2 \cup h_3 \cup \dots \cup h_{15}$

โดยหลักการรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ h_i เป็นรังที่มีนก x, y อยู่ เพราะฉะนั้น x, y เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกของ A อย่างน้อย 2 ตัวที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ □

ตัวอย่าง 1.13 เลือกจำนวนเต็มบวก $n+1$ ตัวจากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$

จงแสดงว่า มี x, y จากจำนวน $n+1$ ตัวนั้นที่ทำให้ $\gcd(x, y) = 1$

แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n+1$ ตัวจากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$

ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ เป็นนก $n+1$ ตัว ให้ $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{k, k+1\}, \dots, \{2n-1, 2n\}$

เป็นรังนก n รัง โดยหลักการรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี k ที่ทำให้รัง $\{k, k+1\}$ มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะว่า $\gcd(k, k+1) = 1$ เพราะฉะนั้นมี x, y จากจำนวน $n+1$ ตัวนั้นที่ทำให้ $\gcd(x, y) = 1$ □

ตัวอย่าง 1.14 ให้ $S \subset X = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ และ $|S| = 101$

จงแสดงว่า มีสมาชิกของ S อย่างน้อย 2 ตัวซึ่งตัวที่มีค่าน้อยเป็นตัวหารของตัวที่มีค่ามาก

แนวคิด เพราะค่าทุกค่า $x \in N$ จะมี $k \in N$ และเลขคี่ m ที่ทำให้ $x = 2^k m$

เพราะฉะนั้นสมาชิกของ X สามารถเขียนได้เป็น $i = 2^{k_i} m_i, i = 1, 2, \dots, 200$

เพราะฉะนั้น $X = \{1, 2, 3, \dots, 200\} = \{2^{k_1} m_1, 2^{k_2} m_2, 2^{k_3} m_3, \dots, 2^{k_{200}} m_{200}\}$

เมื่อ $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_{200}\} \subset \{1, 3, 5, 7, \dots, 199\}$

เพราะว่า $S \subset X = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ และ $|S| = 101$

เพราะฉะนั้น $S = \{2^{t_1} s_1, 2^{t_2} s_2, 2^{t_3} s_3, \dots, 2^{t_{101}} s_{101}\}$

เมื่อ $s_i \in \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_{200}\}$ และ $t_i \in N^0, i = 1, 2, 3, \dots, 101$

เพราะว่า $\{m_1, m_2, m_3, \dots, m_{200}\} \subset \{1, 3, 5, 7, \dots, 199\}$

☐

ข้อสังเกต ทุกจำนวนจริงบวก x จะได้ $x \leq [x] < x + 1$

ทฤษฎีบท 1.3 หลักรังนกพิราบ (Pigeonhole principle) แบบที่ 3

ให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n > m$

ถ้าหาก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{n}{m} \rceil + 1$ ตัว

หรือ ถ้าหาก n ตัวบินเข้ารังนก m รัง แล้วมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกมากกว่าหรือเท่ากับ $\lceil \frac{n}{m} \rceil + 1$ ตัว

ข้อพิสูจน์ กรณีที่ 1 $m | n$

สมมติ “ มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{n}{m} \rceil + 1$ ตัว ” ไม่จริง ... (1)

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\lceil \frac{n}{m} \rceil$... (2)

เพราะว่า $m | n$ เพราะฉะนั้นให้ $n = qm$... (3)

เพราะฉะนั้น $\lceil \frac{n}{m} \rceil = q$ เพราะว่ามีรังนก m รังและทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่า q

เพราะฉะนั้นจำนวนนกทั้งหมดน้อยกว่า mq เพราะฉะนั้น $n < mq$ เกิดข้อขัดแย้งกับ (3)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{n}{m} \rceil + 1$ ตัว

กรณีที่ 2 $m \nmid n$

ให้ $n = qm + r, 0 < r < m$... (4)

เพราะฉะนั้น $\lceil \frac{n}{m} \rceil = \lceil q + \frac{r}{m} \rceil = q + 1$... (5)

สมมติ “ มีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{n}{m} \rceil + 1$ ตัว ” ไม่จริง ... (6)

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\lceil \frac{n}{m} \rceil$

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่า $q + 1$ (จาก (5))

เพราะฉะนั้นรังนกทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่าหรือเท่ากับ q

เพราะว่ามีรังนก m รังและทุกรังมีจำนวนนกในรังน้อยกว่าหรือเท่ากับ q

เพราะฉะนั้นจำนวนนกทั้งหมดน้อยกว่าหรือเท่ากับ mq เพราะฉะนั้น $n \leq mq$... (7)

จาก (5) $n = qm + r, 0 < r < m$ และ $n \leq mq$ ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติ (6) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{n}{m} \rceil + 1$ ตัว □

ตัวอย่างเช่น

1. การแสดงว่า นกพิราบ 13 ตัวและรังนก 5 รังต้องมีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย 3 ตัว
เพราะว่า $\lceil \frac{13}{5} \rceil + 1 = \lceil 2.6 \rceil + 1 = 3$ เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย 3 ตัว
2. การแสดงว่า คน 40 คนต้องมีอย่างน้อย 4 คนเกิดเดือนเดียวกัน
ให้เดือน 12 เดือนคือ มกราคม - ธันวาคม เป็นรังนก 12 รัง และให้คน 40 คนเป็นนก 40 ตัว
เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{40}{12} \rceil + 1 = 3 + 1 = 4$ ตัว
เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อย 4 คนเกิดเดือนเดียวกัน
3. การแสดงว่า นักเรียน 45 คนต้องมีอย่างน้อย 7 คนเกิดวันเดียวกันของสัปดาห์
ให้วันจันทร์, อังคาร, ..., เสาร์, อาทิตย์ เป็นรังนก 7 รัง ให้คน 45 คนเป็นนก 45 ตัว

เพราะว่า $\lceil \frac{45}{7} \rceil + 1 = 7$ เพราะฉะนั้นต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย 7 ตัว
 เพราะฉะนั้นมีนกอย่างน้อย 7 คนที่เกิดวันเดียวกันของสัปดาห์

ตัวอย่าง 1.16 กำหนดคน 5 คนคือ A, B, C, D และ E มีบ้านอยู่บนถนนเส้นเดียวกันซึ่งถนนอยู่ในแนวเส้นตรง ระยะทางระหว่างบ้านของคนทั้ง 5 คนไกลที่สุดเท่ากับ 3 กิโลเมตร

จงพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อย 2 คน ที่อยู่ห่างกันไม่เกิน 1 กิโลเมตร

แนวคิด ให้บ้านแรกที่พบเป็นกิโลกรัมที่ 0 เพราะฉะนั้นบ้านของคนสุดท้ายจะอยู่ที่กิโลเมตรที่ 3

P	Q	R	S
กม. 0	กม. 1	กม. 2	กม. 3

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ A อยู่ที่ กม. 0

ให้ B, C, D และ E คือนก 4 ตัว ให้ช่วงถนน PQ, QR, RS เป็นรังนก 3 รัง

เพราะฉะนั้นต้องมีนกพิราบอย่างน้อย 2 ตัวอยู่รังเดียวกัน

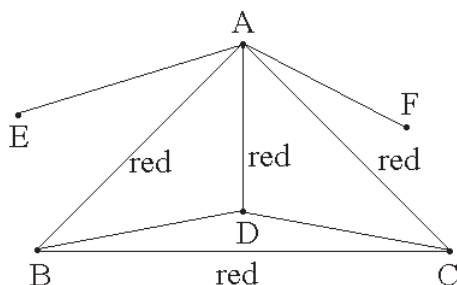
เพราะฉะนั้นต้องมีนกอย่างน้อย 2 คนที่อยู่บนช่วงถนน PQ, QR หรือ RS

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อย 2 คนที่อยู่ห่างกันไม่เกิน 1 กิโลเมตร □

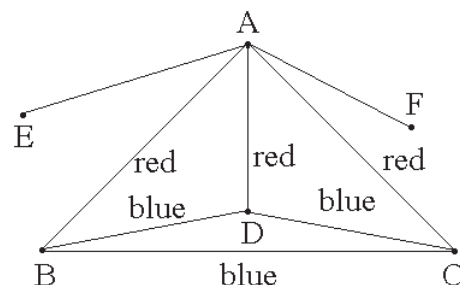
ตัวอย่าง 1.17 จุด 6 จุดในปริภูมิ 3 มิติโดยไม่มีสามจุดอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ลากเส้นตรงเชื่อมจุดทั้ง 6 จุด
 เส้นตรงที่เชื่อมจุดทุกเส้นถูกระบายสีโดยระบายสีแดงหรือสีน้ำเงินสีใดสีหนึ่งเพียงสีเดียว

จงแสดงว่า มีเส้นเชื่อม 3 เส้นที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านเป็นสีแดงหรือทุกด้านเป็นสีน้ำเงิน

แนวคิด



รูปที่ 1.2.1



รูปที่ 1.2.2

ให้จุด 6 จุดคือ A, B, C, D, E, F

เพราะฉะนั้นมีเส้นตรงเชื่อมกับจุด A ทั้งหมด 5 เส้นคือ AB, AC, AD, AE, AF

ให้สีแดงกับสีน้ำเงินเป็นรังนก 2 รัง และให้เส้นตรง AB, AC, AD, AE, AF เป็นนก 5 ตัว

เพราะฉะนั้นมีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{5}{2} \rceil + 1 = 3$ ตัวอยู่ในรังเดียวกัน

เพราะฉะนั้นมีเส้นตรงอย่างน้อย 3 เส้นจาก AB, AC, AD, AE, AF มีสีเดียวกัน

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ AB, AC, AD มีสีเดียวกัน

กรณีที่ 1 AB, AC, AD มีสีแดง

กรณีที่ 1.1 ทุกเส้นตรง BC, CD, DB มีสีเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $\triangle BCD$ มีทุกด้านเป็นสีแดงหรือทุกด้านเป็นสีน้ำเงิน

กรณีที่ 1.2 เส้นตรง BC, CD, DB มีสีต่างกัน

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อยหนึ่งเส้นจาก BC, CD, DB เป็นสีแดง

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ BC เป็นสีแดง

เพราะฉะนั้น $\triangle ABC$ มีทุกด้านเป็นสีแดง

กรณีที่ 2 AB, AC, AD มีสีน้ำเงิน

กรณีที่ 2.1 ทุกเส้นตรง BC, CD, DB มีสีเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $\triangle BCD$ มีทุกด้านเป็นสีแดงหรือทุกด้านเป็นสีน้ำเงิน

กรณีที่ 2.2 เส้นตรง BC, CD, DB มีสีต่างกัน

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อยหนึ่งเส้นจาก BC, CD, DB เป็นสีน้ำเงิน

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ BC เป็นสีน้ำเงิน

เพราะฉะนั้น $\triangle ABC$ มีทุกด้านเป็นสีน้ำเงิน

เพราะฉะนั้นมี 3 เส้นที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านเป็นสีแดงหรือทุกด้านเป็นสีน้ำเงิน

หมายเหตุ แนวคิดของปัญหาข้อนี้สามารถใช้แก้ปัญหา

1. ในงานเลี้ยงที่มีคนมาร่วมงาน 6 คนแต่ละคู่อาจจะจับมือทักทายกันหรือไม่ก็ได้

จงแสดงว่า มี 3 คนที่จับมือทักทายซึ่งกันและกันหรือมี 3 คนที่ไม่จับมือทักทายกันเลย

แนวคิด ให้ A, B, C, D, E, F เป็นคน

จับมือทักทายกันให้เป็นการระบายสีแดง และไม่จับมือทักทายกันให้เป็นการระบายสีน้ำเงิน

มีเส้นเชื่อม 3 เส้นที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านเป็นสีแดง

แปลว่ามี 3 คนที่จับมือทักทายซึ่งกันและกัน

มีเส้นเชื่อม 3 เส้นที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านเป็นสีน้ำเงิน

แปลว่ามี 3 คนที่ไม่จับมือทักทายซึ่งกันและกัน

2. ในกลุ่มนักเรียนใหม่ 6 คนต้องมี 3 คนรู้จักกันหรือมี 3 คนที่ไม่รู้จักกัน

แนวคิด ให้ A, B, C, D, E, F เป็นคน

รู้จักกันให้เป็นการระบายสีแดงและไม่รู้จักกันให้เป็นการระบายสีน้ำเงิน

มีเส้นเชื่อม 3 เส้นที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านเป็นสีแดง แปลว่ามี 3 คนรู้จักกัน

มีเส้นเชื่อม 3 เส้นที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านเป็นสีน้ำเงิน แปลว่ามี 3 คนที่ไม่รู้จักกัน

3. กราฟที่มีจุด 6 จุดแต่ละจุดอาจมีหรือไม่มีเส้นเชื่อมก็ได้

จงแสดงว่า มี 3 จุดที่สองจุดใดๆ ใน 3 จุดนี้มีเส้นเชื่อมหรือมี 3 จุดที่สองจุดใดๆ ใน 3 จุดนี้ไม่มีเส้นเชื่อม

แนวคิด ให้ A, B, C, D, E, F เป็นจุด

มีเส้นเชื่อมให้เป็นการระบายสีแดงและไม่มีเส้นเชื่อมให้เป็นการระบายสีน้ำเงิน

มีเส้นเชื่อม 3 เส้นที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านเป็นสีแดง

แปลว่ามี 3 จุดที่สองจุดใดๆ ใน 3 จุดนี้เส้นเชื่อม

มีเส้นเชื่อม 3 เส้นที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านเป็นสีน้ำเงิน

แปลว่ามี 3 จุดที่สองจุดใดๆ ใน 3 จุดนี้ไม่มีเส้นเชื่อม



ตัวอย่าง 1.18 จุด 17 จุด แต่ละคู่ของจุดมีเส้นตรงเชื่อมถึงกัน 1 เส้น

เส้นเชื่อมแต่ละเส้นระบายสีแดงหรือสีเหลืองหรือสีน้ำเงิน

จงแสดงว่า มี 3 จุดประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านระบายสีเดียวกัน

แนวคิด ให้ A_i เป็นจุด, $i = 1, 2, 3, \dots, 17$ ให้ $A_i A_j$ เป็นเส้นตรงเชื่อมจุด A_i และ A_j

ให้ $A_1 A_j, j = 2, 3, 4, \dots, 16$ เป็นนก 16 ตัว สี 3 สีเป็นรังนก 3 รัง

เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{16}{3} \rceil + 1 = 6$ ตัว

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $A_1 A_j, j = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ระบายสีเหลือง

กรณีที่ 1 มี $j, k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ที่ทำให้ $A_j A_k$ ระบายสีเหลือง

เพราะฉะนั้น $\Delta A_1 A_j A_k$ มีทุกด้านระบายสีเหลือง

กรณีที่ 2 ไม่มี $j, k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ที่ทำให้ $A_j A_k$ ระบายสีเหลือง

เพราะฉะนั้น $A_j A_k$ ระบายสีแดงหรือสีน้ำเงิน

เพราะว่ามีจุด 6 จุด แต่ละด้านระบายสีแดงหรือสีน้ำเงิน

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อย 3 จุดที่เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านระบายสีเดียวกัน(ตัวอย่าง 1.17)

หมายเหตุ ตัวอย่างปัญหาประยุกต์ มีคน 17 คน มีนิยาย 3 เรื่อง

แต่ละคนต้องคุยเรื่องนิยายกับคนอื่นอีก 16 คนด้วยนิยายเรื่องใดเรื่องหนึ่งใน 3 เรื่องเท่านั้น

จงแสดงว่า มีอย่างน้อย 3 คนที่คุยนิยายเรื่องเดียวกัน

แนวคิด ให้คน 17 คนเป็นจุด 17 จุด นิยาย 3 เรื่องคือสีแดงหรือสีเหลืองหรือสีน้ำเงิน

แต่ละคนต้องคุยเรื่องนิยายกับคนอื่นอีก 16 คนด้วยนิยายเรื่องใดเรื่องหนึ่งใน 3 เรื่องเท่านั้น

หมายถึงแต่ละเส้นตรงที่เชื่อมจุดต้องระบายสีแดงหรือสีเหลืองหรือสีน้ำเงิน

โดยใช้แนวคิดข้างต้นจะได้ว่าอย่างน้อย 3 จุดที่เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่ทุกด้านระบายสีเดียวกัน

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อย 3 คนที่คุยนิยายเรื่องเดียวกัน □

ตัวอย่าง 1.19 จงแสดงว่า สมาชิก 6 ตัวที่เลือกจาก $1, 2, 3, \dots, 25$

ต้องมีสมาชิก x, y จาก 6 ตัวนั้นที่ทำให้ $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$

แนวคิด $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{24}, \sqrt{25} \in [1, 5]$

จำแนกช่วง $[1, 5]$ ออกเป็น $\{1\}, (1, 2], (2, 3], (3, 4], (4, 5]$

ให้ $x_1, x_2, \dots, x_6 \in \{1, 2, 3, \dots, 25\}$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_6} \in [1, 5]$

เพราะว่า $\{1\}, (1, 2], (2, 3], (3, 4], (4, 5]$ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

และ $\{1\} \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup (3, 4] \cup (4, 5] = [1, 5]$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_6} \in \{1\} \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup (3, 4] \cup (4, 5]$

ให้ $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_6}$ เป็นนก 6 ตัว ให้ $\{1\}, (1, 2], (2, 3], (3, 4], (4, 5]$ เป็นรังนก 5 รัง

ซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก โดยหลักการนิกพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีนกอย่างน้อยสองตัวอยู่รังเดียวกัน

เพราะว่า $1 \in \{1\}$ เพราะฉะนั้นมีสมาชิกอย่างน้อย 5 ตัวใน $(1, 2] \cup (2, 3] \cup (3, 4] \cup (4, 5]$

ให้ $\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \dots, \sqrt{w_5}$ เป็นสมาชิกของ $\{\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_6}\}$

และ $\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \dots, \sqrt{w_5} \in (1, 2] \cup (2, 3] \cup (3, 4] \cup (4, 5]$

ให้ $\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \dots, \sqrt{w_5}$ เป็นนก 5 ตัว ให้ $(1, 2], (2, 3], (3, 4], (4, 5]$ เป็นรังนก 4 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก โดยหลักการพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ และมี $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ ที่ทำให้ $\sqrt{x}, \sqrt{y} \in (k, k+1]$... (1)

เพราะว่า $\sqrt{x} \neq \sqrt{y}$ เพราะฉะนั้น $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}|$... (2)

จาก (1) จะได้ $k < \sqrt{x} \leq k+1$... (3)

จาก (1) จะได้ $k < \sqrt{y} \leq k+1$ เพราะฉะนั้น $-k-1 \leq -\sqrt{y} < -k$... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $-k-1+k < \sqrt{x} - \sqrt{y} < (k+1)-k$
 $-1 < \sqrt{x} - \sqrt{y} < 1$... (5)

จาก (2) และ (5) จะได้ $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$

เพราะฉะนั้น $x_1, x_2, \dots, x_6 \in \{1, 2, 3, \dots, 25\}$

เพราะฉะนั้นมี $x, y \in \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$ ที่ทำให้ $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$ □

ตัวอย่าง 1.20 ให้ S เป็นสับเซตของจำนวนเต็มและ $|S| = 7$

ให้ $a = (a_1, a_2, \dots, a_7)$ และ $b = (b_1, b_2, \dots, b_7)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ S

จงแสดงว่า $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$ เป็นเลขคู่

แนวคิด แบบที่ 1 สำหรับ P ซึ่งเป็นสับเซตของเซตจำนวนเต็มและ P เป็นเซตจำกัด

ให้ $o(P)$ = จำนวนของเลขคี่ใน P และ $e(P)$ = จำนวนของเลขคู่ใน P เพราะฉะนั้น $o(P) + e(P) = |P|$

เพราะว่า $(a_1, a_2, \dots, a_7)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ S เพราะฉะนั้น $\{a_1, a_2, \dots, a_7\} = S$... (1)

เพราะฉะนั้น $o(\{a_1, a_2, \dots, a_7\}) = o(S)$ และ $e(\{a_1, a_2, \dots, a_7\}) = e(S)$... (2)

ในทำนองเดียวกัน $o(\{b_1, b_2, \dots, b_7\}) = o(S)$ และ $e(\{b_1, b_2, \dots, b_7\}) = e(S)$... (3)

สมมติ $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$ เป็นเลขคี่ ... (4)

เพราะฉะนั้น $a_i - b_i$ เป็นเลขคี่ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, 7$

เพราะฉะนั้น $(a_i$ เป็นเลขคี่ ก็ต่อเมื่อ b_i เป็นเลขคู่) และ $(a_i$ เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ b_i เป็นเลขคี่)

เพราะฉะนั้น $o(\{a_1, a_2, \dots, a_7\}) = e(\{b_1, b_2, \dots, b_7\})$... (5)

$$|S| = |\{a_1, a_2, \dots, a_7\}|$$

$$= o(\{a_1, a_2, \dots, a_7\}) + e(\{a_1, a_2, \dots, a_7\})$$

$$= e(\{b_1, b_2, \dots, b_7\}) + e(\{a_1, a_2, \dots, a_7\}) \quad (\text{จาก (5)})$$

$$= e(S) + e(S) \quad (\text{จาก (2) และ (3)})$$

$$= 2e(S)$$

เพราะฉะนั้น $|S|$ เป็นเลขคู่ เกิดข้อขัดแย้งกับ $|S| = 7$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (4) $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$ เป็นเลขคี่ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$ เป็นเลขคู่

แบบที่ 2 ให้ $a_1, a_2, \dots, a_7$ เป็นนก 7 ตัว

ให้ O เป็นเซตของเลขคี่ และ E เป็นเซตของเลขคู่ ให้ O, E เป็นรังนกสองรัง

โดยหลักการทฤษฎีการนับต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{7}{2} \rceil + 1 = 4$ ตัว

กรณีที่ 1 ให้ O มีเลขคี่อย่างน้อย 4 ตัว

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a_1, a_2, a_3, a_4 \in O$

เพราะว่า $(b_1, b_2, \dots, b_7)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $(a_1, a_2, \dots, a_7)$

เพราะฉะนั้น $\{b_1, b_2, \dots, b_7\} = \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$

เพราะว่า $\{b_1, b_2, \dots, b_7\}$ มีเลขคี่อย่างน้อย 4 ตัว

เพราะฉะนั้น $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ มีเลขคี่อย่างน้อย 1 ตัว

เพราะว่า a_1, a_2, a_3, a_4 เป็นเลขคี่และ $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ มีเลขคี่อย่างน้อย 1 ตัว

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1), (a_2 - b_2), (a_3 - b_3), (a_4 - b_4)$ มีอย่างน้อยหนึ่งพจน์เป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$ เป็นเลขคู่

กรณีที่ 2 ให้ E มีเลขคู่อย่างน้อย 4 ตัว

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a_1, a_2, a_3, a_4 \in E$

เพราะว่า $(b_1, b_2, \dots, b_7)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $(a_1, a_2, \dots, a_7)$

เพราะฉะนั้น $\{b_1, b_2, \dots, b_7\} = \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$

เพราะว่า $\{b_1, b_2, \dots, b_7\}$ มีเลขคู่อย่างน้อย 4 ตัว

เพราะฉะนั้น $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ มีเลขคู่อย่างน้อย 1 ตัว

เพราะว่า a_1, a_2, a_3, a_4 เป็นเลขคู่และ $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ มีเลขคู่อย่างน้อย 1 ตัว

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1), (a_2 - b_2), (a_3 - b_3), (a_4 - b_4)$ มีอย่างน้อยหนึ่งพจน์เป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_7 - b_7)$ เป็นเลขคู่ □

ตัวอย่าง 1.21 จงแสดงว่า จำนวนเต็ม 502 ตัวจะมีสองจำนวนที่ผลบวกของสองจำนวนนั้นหารด้วย 1000 ลงตัว หรือ ผลต่างของสองจำนวนนั้นหารด้วย 1000 ลงตัว

แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{502}$ เป็นจำนวนเต็ม

ให้ y_i เป็นจำนวนเต็มบวก $0 \leq y_i \leq 999$ และ $x_i \equiv y_i \pmod{1000}, i = 1, 2, \dots, 502$... (1)

เพราะฉะนั้น $y_1, y_2, \dots, y_{502} \in \{0, 1, 2, \dots, 999\}$

ให้ $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{502}\}$

กรณีที่ 1 มี y อย่างน้อยสองตัวจาก Y ที่มีค่าเท่ากับ 0 หรือ มี y อย่างน้อยสองตัวจาก Y ที่มีค่าเท่ากับ 500

กรณีที่ 1.1 มี y อย่างน้อยสองตัวที่มีค่าเท่ากับ 0 ให้ $y_i = 0$ และ $y_j = 0$ และ $i \neq j$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $x_i \equiv 0 \pmod{1000}$ และ $x_j \equiv 0 \pmod{1000}$

เพราะฉะนั้น $x_i + x_j \equiv 0 \pmod{1000}$ และ $x_i - x_j \equiv 0 \pmod{1000}$

กรณีที่ 1.2 มี y อย่างน้อยสองตัวที่มีค่าเท่ากับ 500 ให้ $y_i = 500$ และ $y_j = 500$ และ $i \neq j$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $x_i \equiv 500 \pmod{1000}$ และ $x_j \equiv 500 \pmod{1000}$

เพราะฉะนั้น $x_i + x_j \equiv 1000 \pmod{1000} \equiv 0 \pmod{1000}$ และ $x_i - x_j \equiv 0 \pmod{1000}$

กรณีที่ 2 มี y อย่างมากหนึ่งตัวจาก Y ที่มีค่าเท่ากับ 0 และมี y อย่างมากหนึ่งตัวจาก Y ที่มีค่าเท่ากับ 500

เพราะฉะนั้นมี $y_1, y_2, \dots, y_{502}$ เป็นสมาชิกของ $\{1, 2, \dots, 999\} - \{0, 500\}$ อย่างน้อย 500 ตัว

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $y_1, y_2, \dots, y_{500}$ เป็นสมาชิก 500 ตัวจาก $y_1, y_2, \dots, y_{502}$ ซึ่งเป็นสมาชิกของ $\{1, 2, \dots, 499, 501, 502, \dots, 999\}$... (2)

เพราะฉะนั้น $y_1, y_2, \dots, y_{500} \in \{1, 2, \dots, 499, 501, 502, \dots, 999\}$

ให้ $w_i = 1000 - y_i, i = 1, 2, \dots, 500$... (3)

จาก (2), (3) จะได้ $y_1, y_2, \dots, y_{500}, w_1, w_2, \dots, w_{500} \in \{1, 2, \dots, 499, 501, 502, \dots, 999\}$

และ $|\{1, 2, \dots, 499, 501, 502, \dots, 999\}| = 998$

ให้ $y_1, y_2, \dots, y_{500}, w_1, w_2, \dots, w_{500}$ เป็นนก 1000 ตัว

และ $1, 2, \dots, 499, 501, 502, \dots, 999$ เป็นรังนก 988 รัง

โดยหลักการพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

กรณีที่ 2.1 มี i, j ที่ทำให้ $y_i = y_j$

จาก (1) จะได้ $x_i \equiv y_i \pmod{1000}$ และ $x_j \equiv y_j \pmod{1000}$

เพราะฉะนั้น $x_i \equiv x_j \pmod{1000}$ เพราะฉะนั้น $1000 \mid (x_i - x_j)$

กรณีที่ 2.2 มี i, j ที่ทำให้ $w_i = w_j$

จาก (3) จะได้ $w_i = 1000 - y_i$ และ $w_j = 1000 - y_j$ เพราะฉะนั้น $y_i = y_j$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 2.1 จะได้ $1000 \mid (x_i - x_j)$

กรณีที่ 2.3 มี i, j ที่ทำให้ $y_i = w_j$... (4)

$$x_i \equiv y_i \pmod{1000} \quad (\text{จาก (1)})$$

$$\equiv w_j \pmod{1000} \quad (\text{จาก (4)})$$

$$\equiv 1000 - y_j \pmod{1000} \quad (\text{จาก (3)})$$

$$\equiv -y_j \pmod{1000}$$

$$\equiv -x_j \pmod{1000} \quad (\text{จาก (1)})$$

เพราะฉะนั้น $1000 \mid (x_i + x_j)$

เพราะฉะนั้นทุกกรณีจะมีสมาชิกอย่างน้อยสองตัว x_i, x_j จาก $x_1, x_2, \dots, x_{502}$

ที่มีคุณสมบัติ $1000 \mid (x_i + x_j)$ หรือ $1000 \mid (x_i - x_j)$

หมายเหตุ ผลจากข้างต้นจะได้ในบรรดาจำนวนเต็ม 502 ตัว จะมีสองจำนวนซึ่งผลต่างของกำลังสองของทั้งสองจำนวนนั้นหารด้วย 1000 ลงตัว

เพราะว่ามีสมาชิกอย่างน้อยสองตัว x_i, x_j จาก $x_1, x_2, \dots, x_{502}$ ที่มีคุณสมบัติ $1000 \mid (x_i + x_j)$

หรือ $1000 \mid (x_i - x_j)$

เพราะว่า $(x_i^2 - x_j^2) = (x_i + x_j)(x_i - x_j)$ และ $1000 \mid (x_i + x_j)$ หรือ $1000 \mid (x_i - x_j)$

เพราะฉะนั้น $1000 \mid (x_i^2 - x_j^2)$

□

ตัวอย่าง 1.22 จงแสดงว่า จำนวนตรรกยะทุกจำนวนสามารถเขียนในรูปแบบทศนิยมซ้ำ

แนวคิด ตัวอย่างเสริมความเข้าใจ

$$\frac{6}{7} = 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 \dots \text{ เมื่อ } d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}, i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{60}{7} = d_1.d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 \dots \text{ และ } 60 = 7(8) + 4 \Rightarrow d_1 = 8 \text{ และ } \frac{4}{7} = 0.d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 \dots$$

$$\frac{40}{7} = d_2.d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 \dots \text{ และ } 40 = 7(5) + 5 \Rightarrow d_2 = 5 \text{ และ } \frac{5}{7} = 0.d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 \dots$$

$$\frac{50}{7} = d_3.d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 \dots \text{ และ } 50 = 7(7) + 1 \Rightarrow d_3 = 7 \text{ และ } \frac{1}{7} = 0.d_4 d_5 d_6 d_7 d_8 \dots$$

$$\frac{10}{7} = d_4.d_5 d_6 d_7 d_8 \dots \text{ และ } 10 = 7(1) + 3 \Rightarrow d_4 = 1 \text{ และ } \frac{3}{7} = d_5.d_6 d_7 d_8 \dots$$

$$\frac{30}{7} = d_5.d_6 d_7 d_8 d_9 \dots \text{ และ } 30 = 7(4) + 2 \Rightarrow d_5 = 4 \text{ และ } \frac{2}{7} = 0.d_6 d_7 d_8 d_9 \dots$$

$$\frac{20}{7} = d_6.d_7 d_8 d_9 d_{10} \dots \text{ และ } 20 = 7(2) + 6 \Rightarrow d_6 = 2 \text{ และ } \frac{6}{7} = 0.d_7 d_8 d_9 d_{10} \dots$$

$$\frac{60}{7} = d_7.d_8 d_9 d_{10} d_{11} \dots \text{ และ } 60 = 7(8) + 4 \Rightarrow d_7 = 8 \text{ และ } \frac{4}{7} = 0.d_8 d_9 d_{10} \dots$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$d_8 = 5, d_9 = 7, d_{10} = 1, d_{11} = 4, d_{12} = 2$$

$$d_{13} = 8, d_{14} = 5, d_{15} = 7, d_{16} = 1, d_{17} = 4, d_{18} = 2$$

เพราะฉะนั้น $d_j = d_{j(\bmod 6)}$ ทุกค่า $j = 7, 8, 9, \dots$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{6}{7} = 0.857142857142857142857142\dots = 0.\dot{8}5714\dot{2} \text{ หมายถึง } 0.\dot{8}5714\dot{2} = \frac{857142}{999999} = \frac{6}{7}$$

ให้ p, n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $p < n$

ให้รูปแบบทศนิยมของ $\frac{p}{n}$ คือ $0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots$ เมื่อ $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{p}{n} = 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots \quad \dots (1)$$

$$\text{จาก (1) จะได้ } \frac{10p}{n} = d_1.d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots = d_1 + 0.d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 10p = n d_1 + n(0.d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots) \quad \dots (3)$$

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq 0.d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots < 1 \text{ เพราะฉะนั้น } 0 \leq n(0.d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots) < n \quad \dots (4)$$

$$\text{โดยขั้นตอนการหารจะได้ } 10p = n d_1 + r_1 \text{ เมื่อ } r_1 \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_1 < n \quad \dots (5)$$

$$\text{จาก (3), (4) และ (5) จะได้ } r_1 = n(0.d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \dots)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{10r_1}{n} = d_2.d_3 d_4 d_5 d_6 \dots = d_2 + 0.d_3 d_4 d_5 d_6 \dots$$

$$10r_1 = n d_2 + n(0.d_3 d_4 d_5 d_6 \dots) \quad \dots (6)$$

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq 0.d_3 d_4 d_5 d_6 \dots < 1 \text{ เพราะฉะนั้น } 0 \leq n(0.d_3 d_4 d_5 d_6 \dots) < n \quad \dots (7)$$

$$\text{โดยขั้นตอนการหารจะได้ } 10r_1 = n d_2 + r_2 \text{ เมื่อ } r_2 \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_2 < n \quad \dots (8)$$

$$\text{จาก (6), (7) และ (8) จะได้ } r_2 = n(0.d_3 d_4 d_5 d_6 \dots)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$10p = n d_1 + r_1 \quad \text{เมื่อ } r_1 \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_1 < n \quad (\text{จาก (5)})$$

$$10r_1 = n d_2 + r_2 \quad \text{เมื่อ } r_2 \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_2 < n \quad (\text{จาก (8)})$$

$$10r_2 = n d_3 + r_3 \quad \text{เมื่อ } r_3 \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_3 < n$$

$$10r_3 = nd_4 + r_4 \quad \text{เมื่อ } r_4 \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_4 < n$$

:

$$10r_j = nd_{j+1} + r_{j+1} \quad \text{เมื่อ } r_{j+1} \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_{j+1} < n$$

:

$$10r_n = nd_{n+1} + r_{n+1} \quad \text{เมื่อ } r_{n+1} \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_{n+1} < n$$

เพราะว่า $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_{n+1} \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

โดยให้ $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots, r_{n+1}$ เป็นนก $n+1$ ตัว

และ $0, 1, 2, \dots, n-1$ เป็นรังนก n รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $k, m \in \{1, 2, 3, \dots, n+1\}$ และ $k \neq m$ ที่ทำให้ $r_k, r_m \in \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n+1}\}$ และ $r_k = r_m$ เพราะฉะนั้น $r_k = r_m$ และ $r_k, r_m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$... (9)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $k < m$

ให้ $t = m - k$... (10)

การแสดงว่า $r_{j+t} = r_j$ และ $d_{j+t} = d_j$ ทุกค่า $j = k+1, k+2, \dots$

ให้ $P(j)$ แทนข้อความ “ $r_{j+t} = r_j$ และ $d_{j+t} = d_j$ ”

(1) การแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

เพราะว่าจาก (9) $r_k = r_m$ และจาก (10) $m = k + t$ เพราะฉะนั้น $r_k = r_m = r_{k+t}$... (11)

เพราะว่า $10r_k = nd_{k+1} + r_{k+1}$ เมื่อ r_{k+1} เป็นจำนวนเต็มและ $0 \leq r_{k+1} < n$... (12)

และ $10r_m = nd_{m+1} + r_{m+1}$ เมื่อ r_{m+1} เป็นจำนวนเต็มและ $0 \leq r_{m+1} < n$... (13)

เพราะฉะนั้น $10r_k = 10r_m$ (จาก (9))

เพราะฉะนั้น $nd_{k+1} + r_{k+1} = nd_{m+1} + r_{m+1}$ (จาก (12) และ (13))

$= nd_{k+t+1} + r_{m+1}$ (จาก (11))

$$\begin{aligned} r_{m+1} - r_{k+1} &= nd_{k+1} - nd_{k+t+1} \\ &= n(d_{k+1} - d_{k+t+1}) \end{aligned} \quad \dots (14)$$

เพราะฉะนั้น $n \mid (r_{m+1} - r_{k+1})$ เพราะฉะนั้น $r_{m+1} - r_{k+1} \equiv 0 \pmod{n}$

เพราะฉะนั้น $r_{m+1} \equiv r_{k+1} \pmod{n}$... (15)

เพราะว่าจาก (12), (13) จะได้ $r_{k+1}, r_{m+1} \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ และ $r_{m+1} \equiv r_{k+1} \pmod{n}$

เพราะฉะนั้น $r_{m+1} = r_{k+1}$ เพราะฉะนั้นจาก (14) จะได้ $n(d_{k+1} - d_{k+t+1}) = 0$

เพราะฉะนั้น $d_{k+1} - d_{k+t+1} = 0$ เพราะฉะนั้น $d_{k+1} = d_{k+t+1}$ เพราะฉะนั้น $d_{k+1} = d_{k+1+t}$... (16)

เพราะว่า $m = k + t$ (จาก (11)) และ $r_{m+1} = r_{k+1}$ เพราะฉะนั้น $r_{(k+t)+1} = r_{k+1}$

เพราะฉะนั้น $r_{k+1} = r_{k+1+t}$

เพราะว่า $d_{k+1} = d_{k+1+t}$ และ $r_{k+1} = r_{k+1+t}$ เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(j)$ เป็นจริง เมื่อ $j \geq k+1$ แล้ว $P(j+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(j)$ เป็นจริง เมื่อ $j \geq k+1$

$$\text{เพราะฉะนั้น } r_{j+t} = r_j \text{ และ } d_{j+t} = d_j \quad \dots (17)$$

$$\text{เพราะว่าจาก (9) } r_k = r_m \text{ และจาก (10) } m = k + t \text{ เพราะฉะนั้น } r_k = r_m = r_{k+t} \quad \dots (18)$$

$$\text{เพราะว่า } 10r_j = nd_{j+1} + r_{j+1} \quad \text{เมื่อ } r_{j+1} \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_{j+1} < n \quad \dots (19)$$

$$\text{และ } 10r_{j+t} = nd_{j+t+1} + r_{j+t+1} \quad \text{เมื่อ } r_{j+t+1} \text{ เป็นจำนวนเต็มและ } 0 \leq r_{j+t+1} < n \quad \dots (20)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } nd_{j+1} + r_{j+1} = 10r_j = 10r_{j+t} = nd_{j+t+1} + r_{j+t+1}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } r_{j+1} - r_{j+t+1} = nd_{j+t+1} - nd_{j+1} = n(d_{j+t+1} - d_{j+1}) \quad \dots (21)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } n \mid (r_{j+1} - r_{j+t+1}) \text{ เพราะฉะนั้น } r_{j+1} \equiv r_{j+t+1} \pmod{n}$$

$$\text{เพราะว่าจาก (19), (20) จะได้ } r_{j+1}, r_{j+t+1} \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \text{ และ } r_{j+1} \equiv r_{j+t+1} \pmod{n}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } r_{j+t+1} = r_{j+1} \text{ เพราะฉะนั้น } r_{j+1+t} = r_{j+1} \quad \dots (22)$$

$$\text{จาก (21) และ (22) จะได้ } d_{j+t+1} = d_{j+1} \text{ เพราะฉะนั้น } d_{j+1+t} = d_{j+1} \quad \dots (23)$$

จาก (22) และ (23) จะได้ $P(j+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(j)$ เป็นจริง ทุกค่า $j = k+1, k+2, \dots$

$$\text{เพราะฉะนั้น } r_{j+t} = r_j \text{ และ } d_{j+t} = d_j \text{ ทุกค่า } j = k+1, k+2, \dots$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } d_j = d_{j \pmod{t}} \text{ ทุกค่า } j = k+1, k+2, \dots$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } d_{k+t+1} d_{k+t+2} \dots d_{k+2t} = d_{k+1} d_{k+2} \dots d_{k+t}$$

$$d_{k+2t+1} d_{k+2t+2} \dots d_{k+3t} = d_{k+1} d_{k+2} \dots d_{k+t}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{p}{n} \text{ เมื่อเขียนเป็นรูปแบบทศนิยมจะเป็นทศนิยมซ้ำ}$$

$$\text{โดยที่ } \frac{p}{n} = 0.d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} d_{k+2} \dots d_{k+t-1}$$

$$\text{ตัวอย่างเสริมความเข้าใจสำหรับจำนวนอื่นๆ เช่น } \frac{9}{13} = 0.692307$$

$$\frac{13}{17} = 0.764705882352941\bar{i}$$

$$\frac{1}{19} = 0.05263157894736842\bar{i}$$

$$\frac{1}{29} = 0.034482758620689655172413793\bar{i}$$

$$\frac{1}{47} = 0.0212765957446808510638297872340425531914893617\bar{i}$$

□

ตัวอย่าง 1.23 จงแสดงว่าในบรรดาจำนวนเต็มบวก $n+1$ ต้องมีสองจำนวนที่ผลต่างหารด้วย n ลงตัว

แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{ให้ } y_i = \{r \mid r \equiv i \pmod{n}\}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } y_i \cap y_j = \emptyset \text{ ทุกค่า } i \neq j \text{ และ } Z = y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_n$$

$$\text{ให้ } x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \text{ เป็น } n+1 \text{ ตัว ให้ } y_1, y_2, \dots, y_n \text{ เป็น } n \text{ รังซึ่งน้อยกว่าจำนวน } n$$

โดยหลักการทฤษฎีการนับต้องมีรังอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีสมาชิกอย่างน้อยสองตัว

$$\text{เพราะฉะนั้นมี } i \text{ ที่ทำให้รัง } y_i = \{r \mid r \equiv i \pmod{n}\} \text{ มีอย่างน้อยสองตัว}$$

$$\text{ให้ } a, b \text{ เป็นสมาชิกสองตัวที่อยู่ใน } y_i \text{ เพราะฉะนั้น } a \equiv i \pmod{n} \text{ และ } b \equiv i \pmod{n}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a - b \equiv 0 \pmod{n} \text{ เพราะฉะนั้น } n \mid (a - b)$$

□

ตัวอย่าง 1.24 ชาวบ้าน 10 คนของหมู่บ้านแห่งหนึ่งตอนผู้ว่าจำนวน 35 ตัวมาด้วยกัน ทุกคนใน 10 คนนั้นเป็นเจ้าของวัวอย่างน้อยหนึ่งตัวและวัวแต่ละตัวมีเจ้าของหนึ่งคนเท่านั้น ใน 10 คนนั้นพบว่า มีหนึ่งคนเป็นเจ้าของวัว 3 ตัว และมีอีกหนึ่งคนเป็นเจ้าของวัว 2 ตัว และมีอีกหนึ่งคนเป็นเจ้าของวัว 1 ตัว

จงแสดงว่า มีอย่างน้อยหนึ่งคนเป็นเจ้าของวัวอย่างน้อย 5 ตัว

แนวคิด ให้ $m_1, m_2, \dots, m_8, m_9, m_{10}$ เป็นคน 10 คน

เพราะว่ามีหนึ่งคนเป็นเจ้าของวัว 3 ตัว, มีอีกหนึ่งคนเป็นเจ้าของวัว 2 ตัว, มีอีกหนึ่งคนเป็นเจ้าของวัว 1 ตัว

เพราะฉะนั้นโดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ m_{10} เป็นเจ้าของวัว 3 ตัว

และให้ m_9 เป็นเจ้าของวัว 2 ตัว และ m_8 เป็นเจ้าของวัว 1 ตัว

เพราะฉะนั้น $m_1, m_2, \dots, m_7$ มีวัวรวมกัน $= 35 - (3 + 2 + 1) = 29$

เพราะฉะนั้น $m_1, m_2, \dots, m_7$ เป็นคน 7 คนมีวัวรวมกัน 29 ตัว

และทุกคนใน 7 คนนั้นเป็นเจ้าของวัวอย่างน้อยหนึ่ง

ให้วัว 29 เป็นนกและให้ $m_1, m_2, \dots, m_7$ เป็นรังนก 7 รัง

เพราะฉะนั้นโดยหลักการทฤษฎีการนับจะมีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{29}{7} \rceil + 1 = 5$ ตัว

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อยหนึ่งคนเป็นเจ้าของวัวอย่างน้อย 5 ตัว □

ตัวอย่าง 1.25 ให้ n เป็นเลขคี่และ $n \geq 3$

จงแสดงว่า มีสมาชิกของ $\{2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ ที่หารด้วย n ลงตัว

แนวคิด ให้ r_i เป็นจำนวนเต็มและ $0 \leq r_i < n$ และ $2^i \equiv r_i \pmod{n}, i = 1, 2, 3, \dots, n$... (1)

เพราะว่า n เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $r_i \neq 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$

ให้ $r_1, r_2, \dots, r_n$ เป็นนก n ตัว ให้ $1, 2, 3, \dots, n - 1$ เป็นรังนก $n - 1$ รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการทฤษฎีการนับจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ และ $i \neq j$ ที่ทำให้ $r_i = r_j$... (2)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $i > j$... (3)

จาก (1) จะได้ $2^i \equiv r_i \pmod{n}$

$$\equiv r_j \pmod{n} \quad (\text{จาก (2)})$$

$$\equiv 2^j \pmod{n} \quad (\text{จาก (1)})$$

$$2^i - 2^j \equiv 0 \pmod{n}$$

$$2^j(2^{i-j} - 1) \equiv 0 \pmod{n} \quad (\text{จาก (3) } i - j > 0)$$

เพราะฉะนั้น $n \mid (2^j(2^{i-j} - 1))$... (4)

เพราะว่า n เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $\gcd(n, 2^j) = 1$... (5)

เพราะว่า $n \mid (2^j(2^{i-j} - 1))$ และ $\gcd(n, 2^j) = 1$ เพราะฉะนั้น $n \mid (2^{i-j} - 1)$

เพราะว่า $i, j \in \{1, 2, 3, \dots, n + 1\}$ และ $i - j > 0$ เพราะฉะนั้น $i - j \in \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกของ $\{2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ ที่หารด้วย n ลงตัว □

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. ในบรรดาจำนวนเต็ม 7 จำนวนต้องมีอย่างน้อย 3 จำนวนที่บวกกันแล้วหารด้วย 3 ลงตัว
2. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 126\}$ จงแสดงว่าทุกสับเซต B ของ A
ถ้า $n(B) = 7$ แล้วต้องมีสมาชิก x, y อย่างน้อย 2 จำนวน ใน B ที่ทำให้ $1 < \frac{y}{x} \leq 2$
3. ให้ A, B, C, D, E เป็นบ้าน 5 หลังที่ปลูกอยู่บนดินรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 2 กิโลเมตร
จงแสดงว่ามีบ้านอย่างน้อย 2 หลังที่อยู่ห่างกันไม่เกิน $\sqrt{2}$ กิโลเมตร
4. ในการปาเป้าด้วยลูกดอก 5 ลูก โดยที่เป้าเป็นวงกลมรัศมี 1 ฟุต และปาเข้าเป้าทั้งหมด
จงแสดงว่ามีลูกดอกอย่างน้อย 2 ลูกที่อยู่ห่างกันไม่เกิน $\sqrt{2}$ ฟุต
5. จุด 9 จุดที่บรรจุภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 1 หน่วย
จงแสดงว่ามีอย่างน้อย 3 จุดที่สามเหลี่ยมที่มีจุด 3 จุดนั้นเป็นจุดยอดมีพื้นที่ไม่เกิน $\frac{1}{8}$ ตารางหน่วย
6. ในแต่ละวันผู้แข่งขันเกมหมากรุกต้องซ้อมเล่นเกมหมากรุกอย่างน้อยหนึ่งเกม ในเวลาทั้งหมด 77 วัน
เขาซ้อมเกมหมากรุกทั้งหมดไม่เกิน 132 เกม
จงแสดงว่ามีช่วงวันติดต่อกันที่เขาซ้อมเกมหมากรุก 21 เกมติดต่อกัน
7. สมศักดิ์ซ้อมทำโจทย์ IMO ในช่วงเวลา 8 สัปดาห์ โดยเขาต้องทำโจทย์อย่างน้อยวันละหนึ่งข้อ
แต่ไม่เกิน 11 ข้อต่อสัปดาห์ จงแสดงว่ามีช่วงเวลาของวันที่ติดต่อกันที่เขาทำโจทย์ได้ 23 ข้อพอดี
8. กำหนดให้จุด $2n$ จุดในสามมิติมีเส้นตรงเชื่อมระหว่างสองจุดรวมกันอย่างน้อย $n^2 + 1$ เส้น
8.1 จงแสดงว่า มีอย่างน้อยสามเส้นประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม
8.2 จงแสดงว่า ถ้ามีเส้นตรงเชื่อมระหว่างสองจุดรวมกัน n^2 เส้น แล้วเป็นไปได้ที่จะไม่เกิด
รูปสามเหลี่ยม
9. จงแสดงว่า จุด 9 จุดในปริภูมิสามมิติที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็มต้องมีอย่างน้อย 2 จุดที่เส้นตรงซึ่งเชื่อม
ระหว่างสองจุดนั้นมีจุดบนเส้นตรงอย่างน้อยหนึ่งจุดที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม
10. จงแสดงว่า จุด $2^n + 1$ จุดใน R^n ที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม ต้องมีอย่างน้อย 2 จุดที่เส้นตรงซึ่งเชื่อม
ระหว่าง 2 จุดมีจุดกึ่งกลางระหว่างสองจุดนั้นมีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม
11. ให้ $S = \{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 97, 100\}$ ให้ A เป็นสับเซตของ S และ $|A| = 20$
จงแสดงว่า มีสมาชิก 2 ตัวของ A ที่บวกกันเท่ากับ 104
12. ให้ S เป็นสับเซตของจำนวนเต็มและ $|S| = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก
ให้ $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2k+1})$ และ $b = (b_1, b_2, \dots, b_{2k+1})$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ S
จะได้ $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2k+1} - b_{2k+1})$ เป็นเลขคู่
13. จุด 10 จุดบรรจุในสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวหนึ่งหน่วย
จงแสดงว่า 13.1 มี 2 จุดที่ห่างกันไม่เกิน $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 13.2 มี 3 จุดอยู่ในวงกลมรัศมี $\frac{1}{2}$
14. บรรจุลูกบอล 200 ลูกใส่กล่อง 100 กล่องโดยที่แต่ละกล่องมีลูกบอลอย่างน้อยหนึ่งลูก
และกล่องแต่ละกล่องมีความจุไม่เกิน 100 ลูก
จงแสดงว่า มีบางกลุ่มของกล่องที่ผลรวมของลูกบอลในกล่องของกลุ่มนั้นรวมกันเท่ากับ 100 ลูก

15. ให้ $M = \{ m_1, m_2, \dots, m_9 \}$ และตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ m_i มีค่าไม่เกิน 5
จงแสดงว่า มีสมาชิกสองตัวของ M คูณกันเป็นกำลังสองสมบูรณ์
16. ให้ $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_n$ โดยที่ p_n เป็นจำนวนเฉพาะตัวที่ n
 $A = \{ m_1, m_2, \dots, m_{n+1} \}$ และตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ m_i มีค่าไม่เกิน p_n
จงแสดงว่า มี $B \subset A$ ที่ทำให้ผลคูณของสมาชิกใน B เป็นกำลังสองสมบูรณ์
17. ให้ $M = \{ m_1, m_2, \dots, m_{2013} \}$ และตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ m_i มีค่าไม่เกิน 23
จงแสดงว่า มีสมาชิกสี่ตัวของ M คูณกันเป็นกำลังสี่สมบูรณ์
18. A เป็นสับเซตขนาด $n + 2$ ของ $\{1, 2, 3, \dots, 3n\}$
จงแสดงว่า มี p, q ใน A ที่มีคุณสมบัติ $n < |p - q| < 2n$
19. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ เป็นลำดับเพิ่มแท้ของจำนวนเต็มบวก
จงแสดงว่า ถ้า $m > n$ แล้ว $m - n \leq a_m - a_n$
20. จงแสดงว่า จุด $n + 1$ จุดบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย ต้องมีสองจุดที่ห่างกันไม่เกิน $2 \sin \frac{\pi}{n}$
21. จงแสดงว่า มีสมาชิกของ $3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ ที่เขียนเป็นจำนวนเต็มในรูปทศนิยมแล้วลงท้ายด้วย 001
22. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก
จงแสดงว่า มีจำนวนเต็มบวก x ซึ่งแต่ละหลักของ x เป็น 0 หรือ 7 ที่ทำให้ $n \mid x$
23. จงแสดงว่า มีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $7 \mid (44^n - 1)$
24. **(IMO 1/1970)** ให้ X เป็นเซตจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันทั้งหมด 10 ตัว จากช่วง $10, 11, \dots, 99$
จงแสดงว่า มีสับเซตสองสับเซตของ X ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันและผลบวกของสมาชิกในสองเซตเท่ากัน
25. ให้ $A = (a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1})$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวกที่ต่างกัน
จงแสดงว่า ลำดับ $(a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1})$ ต้องมีลำดับย่อยเพิ่มแท้ $(b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$
หรือ มีลำดับย่อยลดแท้ $(c_1, c_2, \dots, c_{n+1})$
26. จงแสดงว่า จำนวนเต็มบวก 11 ตัวที่เลือกจาก $\{1, 2, 3, \dots, 28\}$
ต้องมีอย่างน้อย 2 ตัวที่ตัวหารร่วมมากมีค่ามากกว่า 1
27. จงแสดงว่ามีสมาชิกของลำดับ $2014, 20142014, 201420142014, \dots$ ที่หารด้วย 2557 ลงตัว
28. จงแสดงว่ามีสมาชิกของลำดับ $7, 77, 777, 7777, 77777, \dots$ ที่หารด้วย 2013 ลงตัว
29. การแข่งขันหมากรุกที่มีผู้เข้าแข่งขัน n คน
ผู้เข้าแข่งขันสองคนใดๆ ต้องแข่งกันหนึ่งครั้ง
จงแสดงว่า ณ เวลาใดๆ จะมีผู้เล่นสองคนเล่นจบเกมมาแล้วเป็นจำนวนครั้งที่เท่ากัน

เฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 1

1. แนวคิด ให้ $A_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 1\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 1 \pmod{3}\}$... (1)

$A_2 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 2\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 2 \pmod{3}\}$... (2)

$A_3 = \{n \in \mathbb{Z} \mid 3 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 0\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv 3 \pmod{3}\}$... (3)

เพราะฉะนั้น $A_i \cap A_j = \emptyset$ ทุกค่า $i \neq j$ และ $\mathbb{Z} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$... (4)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ ถ้า $x, y, z \in A_i$ แล้ว $3 \mid (x + y + z)$... (5)

ให้จำนวนเต็ม $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6, x_7$ เป็นนก 7 ตัว

เพราะว่า $\mathbb{Z} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ เพราะฉะนั้น $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6, x_7 \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$

ให้ A_1, A_2, A_3 เป็นรังนก 3 รัง

โดยหลักการพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{7}{3} \rceil + 1 = 3$ ตัว

เพราะฉะนั้นมี A_i อย่างน้อยหนึ่งเซตที่มีสมาชิก 3 ตัว ... (6)

จาก (5) และ (6) มีอย่างน้อย 3 ตัวจาก $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_6, x_7\}$ ที่บวกกันแล้ว 3 หารลงตัว $\square$

2. แนวคิด แบ่งเซต A ออกเป็น $A_1 = \{1, 2\}$

$$A_2 = \{3, 4, 5, 6\}$$

$$A_3 = \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$$

$$A_4 = \{15, 16, 17, \dots, 30\}$$

$$A_5 = \{31, 32, 33, \dots, 62\} \text{ และ } A_6 = \{63, 64, 65, \dots, 126\}$$

เพราะฉะนั้น $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_6$ และ $A_i \cap A_j = \emptyset$ ทุกค่า $i \neq j$... (1)

ทุกค่า $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ จะได้ ถ้า $x, y \in A_i$ และ $x < y$ แล้ว $1 < \frac{y}{x} \leq 2$... (2)

เลือก $B = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_6, x_7\} \subset A$

ให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_6, x_7$ เป็นนก 7 ตัว และให้ $A_1, A_2, \dots, A_6$ เป็นรังนก 6 รัง

โดยหลักการพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีรัง A_i ที่มีนกสองตัว เพราะฉะนั้นมี $x, y \in \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_6, x_7\}$ และ $x, y \in A_i$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $x < y$ จาก (2) จะได้ $1 < \frac{y}{x} \leq 2$

เพราะฉะนั้นมี $x, y \in \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_6, x_7\}$ ที่ทำให้ $1 < \frac{y}{x} \leq 2$ $\square$

3. แนวคิด แบ่งที่ดินออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 1 กิโลเมตร ดังรูปที่ 1.3

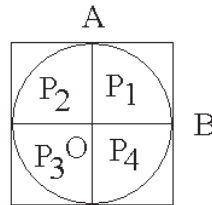
P_2	P_1
P_3	P_4

รูปที่ 1.3

ให้บ้าน A, B, C, D, E เป็นนก 5 ตัวและให้ที่ดินแปลง P_1, P_2, P_3, P_4 เป็นรังนก 4 รัง

โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว ให้ P_i มีบ้านอย่างน้อย 2 หลังอยู่ เพราะจุดที่อยู่ภายใน P_i ที่ห่างกันมากที่สุดคือแนวเส้นทแยงมุมซึ่งมีความยาวเท่ากับ $\sqrt{2}$ เพราะฉะนั้นมีบ้าน 2 หลังที่ห่างกันไม่เกิน $\sqrt{2}$ กิโลเมตร □

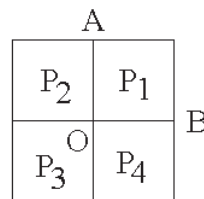
4. แนวคิด แบ่งวงกลมออกเป็น 4 ส่วนเท่ากันคือ P_1, P_2, P_3, P_4 ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4

เพราะว่าจุด 2 จุดใดๆ ในส่วนของวงกลม OAB จะห่างกันไม่เกิน $\sqrt{2}$ ฟุต
 เพราะฉะนั้นจุด 2 จุดใดๆ ใน P_i จะห่างกันไม่เกิน $\sqrt{2}$ ฟุต, $i = 1, 2, 3, 4$... (1)
 ให้ P_1, P_2, P_3, P_4 เป็นรังนก 4 รังและให้ลูกดอก 5 ลูกเป็นคือนก 5 ตัว
 โดยหลักรังนกพิราบมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว
 ให้ P_i มีลูกดอก 2 ลูกปักอยู่ เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ลูกดอกทั้ง 2 ใน P_i จะปักห่างกันไม่เกิน $\sqrt{2}$ ฟุต
 เพราะฉะนั้นมีลูกดอกอย่างน้อย 2 ลูกที่อยู่ห่างกันไม่เกิน $\sqrt{2}$ ฟุต □

5. แนวคิด



รูปที่ 1.5

แบ่งสี่เหลี่ยมออกเป็น 4 ส่วนเท่ากัน ให้สี่เหลี่ยม P_1, P_2, P_3, P_4 เป็นบริเวณดังรูปที่ 1.5
 เพราะว่าพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส = 1 เพราะฉะนั้น P_i มีพื้นที่ $\frac{1}{4}$ ตารางหน่วย, $i = 1, 2, 3, 4$
 ให้จุด 9 จุดเป็นนก 9 ตัวและให้ P_1, P_2, P_3, P_4 เป็นรังนก 4 รัง
 โดยหลักรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{9}{4} \rceil + 1 = 3$ ตัว
 เพราะฉะนั้นให้รัง P_i มีนก 3 ตัวอยู่ ให้จุด $X, Y, Z \in P_i$
 เพราะว่า $\Delta_{XYZ} \leq \frac{1}{2}$ พื้นที่ $P_i = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{8}$
 เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อย 3 จุด X, Y, Z ที่ทำให้พื้นที่สามเหลี่ยม XYZ มีค่าไม่เกิน $\frac{1}{8}$ ตารางหน่วย □

6. แนวคิด ให้ $1, 2, 3, \dots, 77$ เป็นวันที่ผู้แข่งขันซ้อมเล่นเกมหมากรุก

ให้ a_i = จำนวนเกมทั้งหมดที่เล่นมาตั้งแต่วันแรกจนถึงวันที่ i

เพราะว่าแต่ละวันผู้แข่งขันเกมหมากรุกต้องซ้อมเล่นเกมหมากรุกอย่างน้อยหนึ่งเกม
 และเขาซ้อมเกมหมากรุกทั้งหมดไม่เกิน 132 เกม

เพราะฉะนั้น $a_1 < a_2 < \dots < a_{77}$ เป็นลำดับเพิ่มแท้ ... (1)

และ $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{77} \leq 132$... (2)

เพราะฉะนั้น $a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ เป็นลำดับเพิ่มแท้ ... (3)

และ $22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \dots < a_{77} + 21 \leq 153$... (4)

ให้ $a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ เป็นนก 154 ตัว

ให้ $1, 2, 3, \dots, 153$ เป็นรังนก 153 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการนกพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นต้องมีสองค่าจาก $a_1, a_2, \dots, a_{77}, a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ ที่มีค่าเท่ากัน

เพราะว่าจาก (2) $a_1, a_2, \dots, a_{77}$ ต่างกันทุกค่า

และจาก (4) $a_1 + 21, a_2 + 21, \dots, a_{77} + 21$ ต่างกันทุกค่า

เพราะฉะนั้นต้องมี $i \neq j$ ที่ทำให้ $a_i = a_j + 21$ เพราะว่า $a_i = a_j + 21 > a_j$ เพราะฉะนั้น $i > j$

เพราะฉะนั้นช่วงวันที่ j ถึงวันที่ i เขาซ้อมเกมหมากรุก 21 เกมติดต่อกัน

เพราะฉะนั้นมีช่วงวันติดต่อกันที่เขาซ้อมเกมหมากรุก 21 เกมติดต่อกัน □

7. แนวคิด สมศักดิ์ซ้อมทำโจทย์ IMO ในช่วงเวลา 8 สัปดาห์ซึ่งเท่ากับ 56 วัน

ให้ $a_i =$ จำนวนข้อสอบที่ทำมาตั้งแต่วันแรกจนถึงวันที่ $i, i = 1, 2, \dots, 56$

เพราะว่าเขาต้องทำโจทย์อย่างน้อยวันละหนึ่งข้อแต่ไม่เกิน 11 ข้อต่อสัปดาห์

เพราะฉะนั้น $a_1 < a_2 < \dots < a_{56}$ เป็นลำดับเพิ่มแท้ ... (1)

และ $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{56} \leq 8(11) = 88$... (2)

เพราะฉะนั้น $a_1 + 23, a_2 + 23, \dots, a_{56} + 23$ เป็นลำดับเพิ่มแท้ ... (3)

และ $24 \leq a_1 + 23 < a_2 + 23 < \dots < a_{56} + 23 \leq 111$... (4)

ให้ $a_1, a_2, \dots, a_{56}, a_1 + 23, a_2 + 23, \dots, a_{56} + 23$ เป็นนก 112 ตัว

ให้ $1, 2, 3, \dots, 111$ เป็นรังนก 111 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการนกพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นต้องมีสองค่าจาก $a_1, a_2, \dots, a_{56}, a_1 + 23, a_2 + 23, \dots, a_{56} + 23$ ที่มีค่าเท่ากัน

เพราะว่าจาก (2) $a_1, a_2, \dots, a_{56}$ ต่างกันทุกค่า

และจาก (4) $a_1 + 23, a_2 + 23, \dots, a_{56} + 23$ ต่างกันทุกค่า

เพราะฉะนั้นต้องมี $i \neq j$ ที่ทำให้ $a_i = a_j + 23$ เพราะว่า $a_i = a_j + 23 > a_j$ เพราะฉะนั้น $i > j$

เพราะฉะนั้นช่วงวันที่ j ถึงวันที่ i เขาทำโจทย์ได้ 23 ข้อพอดี

เพราะฉะนั้นมีช่วงวันติดต่อกันที่เขาทำโจทย์ได้ 23 ข้อพอดี □

8. แนวคิด

8.1 ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ ถ้า $2n$ จุดในปริภูมิสามมิติมีเส้นตรงเชื่อมระหว่างสองจุดรวมกันอย่างน้อย $n^2 + 1$ เส้น แล้วมีอย่างน้อยสามเส้นประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม ”

(1) การแสดงว่า $P(2)$ เป็นจริง

ให้ $G = \{A, B, C, D\}$ เป็นเซตของจุด $2(2) = 4$ จุด

ให้ F เป็นเซตของเส้นตรงเชื่อมจุดของ G และ $|F| \geq 2^2 + 1 = 5$

ให้ $E = \{XY \mid X, Y \in G\}$

เพราะว่าจำนวนเส้นตรงเชื่อมระหว่าง 4 จุดที่มากที่สุดเท่ากับ $\binom{4}{2} = 6$ เส้น เพราะฉะนั้น $|E| = 6$

เพราะว่า $|F| \geq 5$ และ $|E| = 6$ เพราะฉะนั้นมีสองจุดเท่านั้นที่ไม่มีเส้นตรงเชื่อม

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ A, B เป็นจุดที่ไม่มีเส้นตรงเชื่อม

เพราะฉะนั้น $F = \{AC, AD, BC, BD, CD\}$ เพราะฉะนั้น BC, CD, BD ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม

เพราะฉะนั้น $P(2)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$

ให้ $G = \{P_1, P_2, \dots, P_{2k+2}\}$ เป็นเซตของจุด $2(k+1)$ จุด ... (1)

ให้ F เป็นเซตของเส้นตรงเชื่อมจุดของ G และ $|F| \geq (k+1)^2 + 1$... (2)

เพราะว่า $|F| \geq (k+1)^2 + 1 \geq 1$ เพราะฉะนั้นมี $A, B \in G$ และ $AB \in F$... (3)

ให้ $G_0 = G - \{A, B\}$ เพราะฉะนั้น $|G_0| = 2k$... (4)

ให้ $G_A = \{C_i \mid C_i \in G_0 \text{ และ } AC_i \in F\}$ และ $|G_A| = p$... (5)

ให้ $G_B = \{D_j \mid D_j \in G_0 \text{ และ } BD_j \in F\}$ และ $|G_B| = q$... (6)

กรณีที่ 1 $p + q > 2k$... (7)

$$\begin{aligned} G_A \cup G_B &\subset G_0 \Rightarrow |G_A \cup G_B| \leq |G_0| \\ &\Rightarrow |G_A| + |G_B| - |G_A \cap G_B| \leq |G_0| \\ &\Rightarrow p + q - |G_A \cap G_B| \leq 2k \quad (\text{จาก (4), (5), (6)}) \\ &\Rightarrow p + q - 2k \leq |G_A \cap G_B| \\ &\Rightarrow 0 < p + q - 2k \leq |G_A \cap G_B| \quad (\text{จาก (7)}) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $G_A \cap G_B \neq \emptyset$

เพราะว่า $G_A \cap G_B \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้นให้ $C \in G_A \cap G_B$

เพราะฉะนั้น $AC \in F$ และ $BC \in F$ เพราะฉะนั้น AB, BC, AC ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม

กรณีที่ 2 $p + q \leq 2k$... (8)

ให้ $G_A = \{C_1, C_2, \dots, C_p\}$ และ $G_B = \{D_1, D_2, \dots, D_q\}$

ให้ $G_1 = \{C_1, C_2, \dots, C_p\} \cup \{D_1, D_2, \dots, D_q\} \cup \{A, B\}$

ให้ $E_{A,B} = \{AC_1, AC_2, \dots, AC_p\} \cup \{BD_1, BD_2, \dots, BD_q\} \cup \{AB\}$

เพราะว่า $\{AC_1, AC_2, \dots, AC_p\}, \{BD_1, BD_2, \dots, BD_q\}, \{AB\}$ แต่ละเซตไม่มีสมาชิกร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $|E_{A,B}| = p + q + 1$... (9)

จาก (8) และ (9) จะได้ $|E_{A,B}| \leq 2k + 1$ เพราะฉะนั้น $-|E_{A,B}| \geq -(2k + 1)$... (10)

$$|F - E_{A,B}| = |F| - |E_{A,B}| \quad (\text{เพราะว่า } E_{A,B} \subset F)$$

$$\geq (k+1)^2 + 1 - |E_{A,B}| \quad (\text{จาก (3)})$$

$$\begin{aligned} &\geq (k+1)^2 + 1 - (2k+1) && \text{(จาก (10))} \\ &= k^2 + 1 \end{aligned}$$

เพราะว่า $|G_0| = 2k$ และ $|F - E_{A,B}| \geq k^2 + 1$

เพราะฉะนั้นโดยข้อสมมติของการอุปนัยจะมีเส้นตรงสามเส้นใน $F - E_{A,B}$ ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n = 2, 3, 4, \dots$

8.2 ให้ $G_1 = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ และ $G_2 = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ และ $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

ให้ $G = G_1 \cup G_2$ เพราะฉะนั้น $|G| = 2n$

ให้ $F = \{P_i Q_j \mid i, j = 1, 2, 3, \dots, n\}$ เพราะฉะนั้น $|F| = n^2$

เซตของจุด G และเซตของเส้นตรงเชื่อมจุด F ไม่มีเส้นตรงสามเส้นประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม

เพราะฉะนั้นมีกรณี $|G| = 2n, |F| = n^2$ ที่ทำให้ไม่มีเส้นตรงสามเส้นประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยม $\square$

9. แนวคิด ให้ $S(a, b, c) = \{(x, y, z) \mid x \equiv a \pmod{2}, y \equiv b \pmod{2}, z \equiv c \pmod{2}\}$

เมื่อ $a, b, c \in \{0, 1\}$

เพราะฉะนั้น $\{(x, y, z) \mid x, y, z \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\} = \bigcup_{a, b, c \in \{0, 1\}} S(a, b, c)$

ให้ $P_i, i = 1, 2, \dots, 9$ เป็นจุด 9 จุดในปริภูมิสามมิติที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $P_1, P_2, \dots, P_9 \in \bigcup_{a, b, c \in \{0, 1\}} S(a, b, c)$

ให้ $P_i, i = 1, 2, \dots, 9$ เป็นนก 9 ตัว

และ $S(0, 0, 0), S(0, 0, 1), S(0, 1, 0), S(0, 1, 1), S(1, 0, 0), S(1, 0, 1), S(1, 1, 0), S(1, 1, 1)$

เป็นรังนก 8 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการพิราบมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $a, b, c \in \{0, 1\}$ และ $P_i, P_j \in S(a, b, c)$

ให้พิกัดของ P_i, P_j คือ $P_i(x, y, z)$ และ $P_j(x', y', z')$ และ $i \neq j$

$P_i(x, y, z), P_j(x', y', z') \in S(a, b, c)$

$$\Rightarrow x \equiv a \pmod{2}, y \equiv b \pmod{2}, z \equiv c \pmod{2}$$

$$\text{และ } x' \equiv a \pmod{2}, y' \equiv b \pmod{2}, z' \equiv c \pmod{2}$$

$$\Rightarrow x + x' \equiv 2a \pmod{2}, y + y' \equiv 2b \pmod{2}, z + z' \equiv 2c \pmod{2}$$

$$\Rightarrow x + x' \equiv 0 \pmod{2}, y + y' \equiv 0 \pmod{2}, z + z' \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2} \text{ เป็นจำนวนเต็มและจุด } \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right) \text{ อยู่บน } P_i P_j$$

เพราะฉะนั้นจุด 9 จุดในปริภูมิสามมิติที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็มมีจุด P_i, P_j

และมีจุด $\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2}\right)$ ซึ่งพิกัดเป็นจำนวนเต็มอยู่บน $P_i P_j$

หมายเหตุ จากแนวคิดข้างต้นสรุปได้ว่า จุด 9 จุดในปริภูมิสามมิติที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็มต้องมีอย่างน้อย 2 จุดที่จุดกึ่งกลางระหว่างสองจุดนั้นมีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม $\square$

10. แนวคิด ให้ $e_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n$

ให้ $S(e_1, e_2, \dots, e_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \equiv e_i \pmod{2}, i = 1, 2, \dots, n\}$

เพราะฉะนั้น $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}\} = \bigcup_{e_1, e_2, \dots, e_n \in \{0, 1\}} S(e_1, e_2, \dots, e_n)$

ให้ $P_i, i = 1, 2, \dots, 2^n + 1$ เป็นจุดใน R^n ที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $P_i \in \bigcup_{e_1, e_2, \dots, e_n \in \{0, 1\}} (e_1, e_2, \dots, e_n), i = 1, 2, \dots, 2^n + 1$

ให้ $P_i, i = 1, 2, \dots, 2^n + 1$ เป็นนก $2^n + 1$ ตัว

และ $S(e_1, e_2, \dots, e_n), e_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n$ เป็นรังนก 2^n รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการพิราบมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $e_k \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, n$ และ $P_i, P_j \in S(e_1, e_2, \dots, e_n)$

ให้พิกัดของ P_i, P_j คือ $P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ $P_j(y_1, y_2, \dots, y_n)$ และ $i \neq j$

$P_i(x_1, x_2, \dots, x_n), P_j(y_1, y_2, \dots, y_n) \in S(e_1, e_2, \dots, e_n)$

$$\Rightarrow x_i \equiv e_i \pmod{2} \text{ และ } y_i \equiv e_i \pmod{2}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow x_i + y_i \equiv 2e_i \pmod{2}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow x_i + y_i \equiv 0 \pmod{2}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \frac{x_i + y_i}{2} \text{ เป็นจำนวนเต็ม}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_2 + y_2}{2}, \dots, \frac{x_n + y_n}{2} \right) \text{ มีพิกัดเป็นจำนวนเต็มและเป็นจุดกึ่งกลางของ } P_i P_j$$

เพราะฉะนั้นจุด $2^n + 1$ จุดใน R^n ที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็มจะมีจุด P_i, P_j ที่ทำให้จุดกึ่งกลางของ $P_i P_j$ มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม $\square$

11. แนวคิด $|S| = |\{1, 4, 7, 10, 13, \dots, 97, 100\}| = 34$

จำแนก S ออกเป็น $\{1\}, \{4, 100\}, \{7, 97\}, \dots, \{46, 53\}, \{49, 55\}, \{52\}$

ให้ $S_0 = \{1\}, S_1 = \{4, 100\}, S_2 = \{7, 97\}, \dots, S_{15} = \{46, 53\}, S_{16} = \{49, 55\}, S_{17} = \{52\}$

เพราะฉะนั้นทุกค่า $i \in \{1, 2, \dots, 16\}$ สมาชิกของ S_i บวกกันมีค่าเท่ากับ 104 ... (1)

ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{20}\}$

เพราะฉะนั้น $\{a_1, a_2, \dots, a_{20}\} - \{1, 52\} \subset S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{16}$

เพราะว่า $|\{a_1, a_2, \dots, a_{20}\} - \{1, 52\}| \geq 18$

เพราะฉะนั้นให้ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{18}\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_{20}\} - \{1, 52\}$

เพราะฉะนั้น $B \subset \{a_1, a_2, \dots, a_{20}\} - \{1, 52\} \subset A \subset S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{16}$

ให้ $b_1, b_2, \dots, b_{18}$ เป็นนก 18 ตัว ให้ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{16}$ เป็นรังนก 16 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $i \in \{1, 2, \dots, 16\}$ ที่ทำให้ S_i ที่มีสมาชิกของ A อยู่สองตัว

เพราะว่าจาก (1) สมาชิกของ S_i บวกกันมีค่าเท่ากับ 104

เพราะฉะนั้นมีสมาชิก 2 ตัวของ B ที่บวกกันเท่ากับ 104

เพราะว่า $B \subset A$ เพราะฉะนั้นมีสมาชิก 2 ตัวของ A ที่บวกกันเท่ากับ 104

□

12. แนวคิด แบบที่ 1 สำหรับ P ซึ่งเป็นสับเซตของเซตจำนวนเต็มและ P เป็นเซตจำกัด

ให้ $o(P)$ = จำนวนของเลขคี่ใน P และ $e(P)$ = จำนวนของเลขคู่ใน P เพราะฉะนั้น $o(P) + e(P) = |P|$

เพราะว่า $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2k+1})$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ S

เพราะฉะนั้น $\{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\} = S$... (1)

เพราะฉะนั้น $o(\{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}) = o(S)$ และ $e(\{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}) = e(S)$... (2)

ในทำนองเดียวกัน $o(\{b_1, b_2, \dots, b_{2k+1}\}) = o(S)$ และ $e(\{b_1, b_2, \dots, b_{2k+1}\}) = e(S)$... (3)

สมมติ $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2k+1} - b_{2k+1})$ เป็นเลขคี่ ... (4)

เพราะฉะนั้น $a_i - b_i$ เป็นเลขคี่ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, 2k + 1$

เพราะฉะนั้น (a_i เป็นเลขคี่ ก็ต่อเมื่อ b_i เป็นเลขคู่) และ (a_i เป็นเลขคู่ ก็ต่อเมื่อ b_i เป็นเลขคี่)

เพราะฉะนั้น $o(\{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}) = e(\{b_1, b_2, \dots, b_{2k+1}\})$... (5)

$$\begin{aligned} |S| &= |\{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}| \\ &= o(\{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}) + e(\{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}) \\ &= e(\{b_1, b_2, \dots, b_{2k+1}\}) + e(\{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}) \quad (\text{จาก (5)}) \\ &= e(S) + e(S) \quad (\text{จาก (2) และ (3)}) \\ &= 2e(S) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $|S|$ เป็นเลขคู่ เกิดข้อขัดแย้งกับ $|S| = 2k + 1$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (4) $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2k+1} - b_{2k+1})$ เป็นเลขคี่ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2k+1} - b_{2k+1})$ เป็นเลขคู่

แบบที่ 2 ให้ $a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}$ เป็นนก $2k + 1$ ตัว

ให้ O เป็นเซตของเลขคี่ และ E เป็นเซตของเลขคู่ ให้ O, E เป็นริงนกสองรัง

โดยหลักการนิกพิราบต้องมีริงนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกออย่างน้อย $\lceil \frac{2k+1}{2} \rceil + 1 = k + 1$ ตัว

กรณีที่ 1 ให้ O มีเลขคี่อย่างน้อย $k + 1$ ตัว ... (1)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in O$... (2)

เพราะว่า $(b_1, b_2, \dots, b_{2k+1})$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $(a_1, a_2, \dots, a_{2k+1})$

เพราะฉะนั้น $\{b_1, b_2, \dots, b_{2k+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}$... (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $\{b_1, b_2, \dots, b_{2k+1}\}$ มีเลขคี่อย่างน้อย $k + 1$ ตัว

เพราะฉะนั้น $\{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$ มีเลขคี่อย่างน้อย 1 ตัว

เพราะว่า $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ เป็นเลขคี่และ $\{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$ มีเลขคี่อย่างน้อย 1 ตัว

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1), (a_2 - b_2), \dots, (a_{k+1} - b_{k+1})$ มีอย่างน้อยหนึ่งพจน์เป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2k+1} - b_{2k+1})$ เป็นเลขคู่

กรณีที่ 2 ให้ E มีเลขคู่อย่างน้อย $k + 1$ ตัว

... (4)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a_1, a_2, \dots, a_{k+1} \in E$

... (5)

เพราะว่า $(b_1, b_2, \dots, b_{2k+1})$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $(a_1, a_2, \dots, a_{2k+1})$

เพราะฉะนั้น $\{b_1, b_2, \dots, b_{2k+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}$

... (6)

จาก (4), (5) และ (6) จะได้ $\{b_1, b_2, \dots, b_{2k+1}\}$ มีเลขคู่อย่างน้อย $k + 1$ ตัว

เพราะฉะนั้น $\{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$ มีเลขคู่อย่างน้อย 1 ตัว

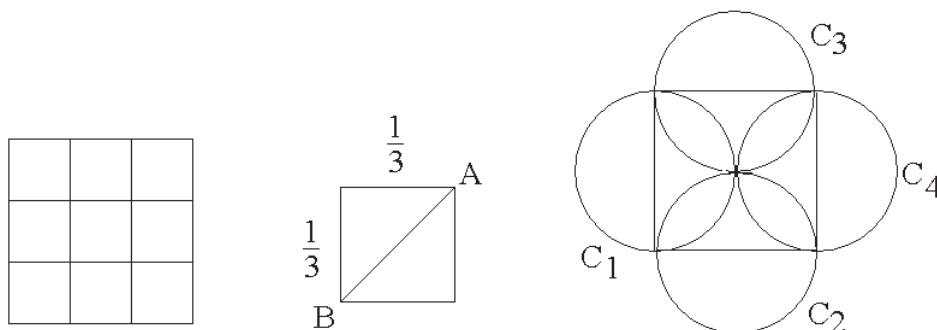
เพราะว่า $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$ เป็นเลขคู่และ $\{b_1, b_2, \dots, b_{k+1}\}$ มีเลขคู่อย่างน้อย 1 ตัว

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1), (a_2 - b_2), \dots, (a_{k+1} - b_{k+1})$ มีอย่างน้อยหนึ่งพจน์เป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้น $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \dots (a_{2k+1} - b_{2k+1})$ เป็นเลขคู่

□

13. แนวคิด



รูปที่ 1.6

13.1 แบ่งสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวหนึ่งหน่วยออกเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็กเท่ากันจำนวน 9 รูป

เพราะฉะนั้นสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็กมีความยาวด้าน $\frac{1}{3}$ และเส้นทแยงมุมสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็กยาว $\frac{\sqrt{2}}{3}$

เพราะฉะนั้น 2 จุดใดๆ ในสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็กจะห่างกันไม่เกิน $\frac{\sqrt{2}}{3}$

ให้จุด 10 จุดเป็นนก 10 ตัว

ให้สี่เหลี่ยมจัตุรัส 9 รูปเป็นรังนก 9 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี 2 จุดอยู่ในสี่เหลี่ยมจัตุรัสเล็กรูปเดียวกัน

เพราะฉะนั้นมี 2 จุดที่ห่างกันไม่เกิน $\frac{\sqrt{2}}{3}$

13.2 ให้ C_1, C_2, C_3, C_4 เป็นวงกลมที่มีด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น C_1, C_2, C_3, C_4 เป็นวงกลมรัศมี $\frac{1}{2}$

เพราะว่า $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ คลุมสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวหนึ่งหน่วย

ให้จุด 10 จุดเป็นนก 10 ตัวและ C_1, C_2, C_3, C_4 เป็นรังนก 4 รัง

โดยหลักการพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\lceil \frac{10}{4} \rceil + 1 = 3$ ตัว

เพราะฉะนั้นมี 3 จุดอยู่ในวงกลมรัศมี $\frac{1}{2}$ เดียวกัน

□

14. แนวคิด ให้ $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ เป็นจำนวนลูกบอลในกล่องที่ $i, i = 1, 2, 3, \dots, 100$

กรณีที่ 1 ทุกกล่องมีจำนวนลูกบอลเท่ากัน

เพราะฉะนั้นทุกกล่องมีลูกบอล 2 ลูก

เพราะฉะนั้นกล่องที่ 1 ถึงกล่องที่ 50 มีลูกบอลรวมกัน 100 ลูก

กรณีที่ 2 มีบางกล่องจำนวนลูกบอลไม่เท่ากัน

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $a_1 \neq a_2$

$$\text{ให้ } s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i, i = 1, 2, 3, \dots, 100 \quad \dots (1)$$

เพราะว่าแต่ละกล่องมีลูกบอลอย่างน้อยหนึ่งลูก

$$\text{เพราะฉะนั้น } a_i \geq 1 \text{ ทุกค่า } i = 1, 2, \dots, 100 \text{ และ } 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{100} = 200 \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น ถ้า } i < j \text{ แล้ว } 1 \leq s_j - s_i < 200 \quad \dots (3)$$

$$\text{ให้ } x_i \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก } 0 \leq x_i \leq 99 \text{ และ } x_i \equiv s_i \pmod{100} \quad \dots (4)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x_1, x_2, \dots, x_{100} \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 99\} \quad \dots (5)$$

กรณีที่ 2.1 มี $i \neq j$ ที่ทำให้ $x_i = x_j$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $i < j$

$$\text{จาก (4) จะได้ } x_i \equiv s_i \pmod{100} \text{ และ } x_j \equiv s_j \pmod{100}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } s_i \equiv s_j \pmod{100}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } s_j - s_i \equiv 0 \pmod{100} \text{ เพราะฉะนั้น } 100 \mid (s_j - s_i) \quad \dots (6)$$

$$\text{จาก (3) และ (6) จะได้ } s_j - s_i = 100$$

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_j) - (a_1 + a_2 + \dots + a_i) = 100 \quad (\text{จาก (1)})$$

$$a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j = 100$$

เพราะฉะนั้นกล่องที่ $i + 1, i + 2, \dots, j$ มีลูกบอลรวมกัน 100 ลูก

$$\text{กรณีที่ 2.2 } x_i \text{ แตกต่างกันทุกค่า } i = 1, 2, 3, \dots, 100 \quad \dots (7)$$

$$\text{ให้ } x_{101} \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก } 0 \leq x_{101} \leq 99 \text{ และ } x_{101} \equiv a_2 \pmod{100} \quad \dots (8)$$

ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{100}, x_{101}$ เป็นนก 101 ตัว

ให้ $0, 1, 2, \dots, 99$ เป็นรังนก 100 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการนกพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $k \neq j$ ที่ทำให้ $x_k = x_j$

เพราะว่าจาก (7) x_i แตกต่างกันทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, 100$

เพราะฉะนั้นโดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $k = 101$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x_{101} = x_j \quad \dots (9)$$

$$\text{เพราะว่าจาก (8) } x_{101} \equiv a_2 \pmod{100} \text{ และจาก (4) } x_j \equiv s_j \pmod{100} \quad \dots (10)$$

$$\text{จาก (9) และ (10) จะได้ } s_j = a_2 \pmod{100} \text{ เพราะฉะนั้น } 100 \mid (s_j - a_2)$$

$$100 \mid (s_j - a_2) \Rightarrow 100 \mid ((a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_j) - a_2)$$

$$\Rightarrow 100 \mid (a_1 + a_3 + \dots + a_j)$$

$$\Rightarrow a_1 + a_3 + \dots + a_j = 0 \text{ หรือ } 100 \text{ หรือ } 200$$

เพราะว่า $a_1 \geq 1$ เพราะฉะนั้น $a_1 + a_3 + \dots + a_j \neq 0$

เพราะว่า $1 \leq a_1 < a_1 + a_3 + \dots + a_j < a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_j \leq 200$

เพราะฉะนั้น $a_1 + a_3 + \dots + a_j = 100$

เพราะฉะนั้นมีบางกลุ่มของกล่องที่ผลรวมของลูกบอลในกล่องของกลุ่มนั้นรวมกันเท่ากับ 100 ลูก □

15. แนวคิด เพราะว่าตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ m_i มีค่าไม่เกิน 5

เพราะฉะนั้น m_i เขียนได้ในรูปแบบ $2^x 3^y 5^z$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์

ให้ $S(a, b, c) = \{ 2^x 3^y 5^z \mid x \equiv a \pmod{2}, y \equiv b \pmod{2}, z \equiv c \pmod{2} \}$ เมื่อ $a, b, c \in \{0, 1\}$

เพราะฉะนั้น $\{ a_1, a_2, \dots, a_9 \} \subset \bigcup_{a,b,c \in \{0,1\}} S(a, b, c)$

ให้ $m_i, i = 1, 2, \dots, 9$ เป็นนก 9 ตัว

และ $S(0, 0, 0), S(0, 0, 1), S(0, 1, 0), S(0, 1, 1), S(1, 0, 0), S(1, 0, 1), S(1, 1, 0), S(1, 1, 1)$

เป็นรังนก 8 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $a, b, c \in \{0, 1\}$ และ $m_i, m_j \in S(a, b, c)$ และ $i \neq j$

เพราะฉะนั้นมี x, y, z, x', y', z' ที่ทำให้ $m_i = 2^x 3^y 5^z$ และ $m_j = 2^{x'} 3^{y'} 5^{z'}$

โดยที่ $x \equiv a \pmod{2}, y \equiv b \pmod{2}, z \equiv c \pmod{2}$

และ $x' \equiv a \pmod{2}, y' \equiv b \pmod{2}, z' \equiv c \pmod{2}$

เพราะฉะนั้น $x + x' \equiv 2a \pmod{2}, y + y' \equiv 2b \pmod{2}, z + z' \equiv 2c \pmod{2}$

$$\Rightarrow x + x' \equiv 0 \pmod{2}, y + y' \equiv 0 \pmod{2}, z + z' \equiv 0 \pmod{2}$$

$$\Rightarrow x + x', y + y' \text{ และ } z + z' \text{ เป็นเลขคู่}$$

$$\Rightarrow m_i m_j = 2^{x+x'} 3^{y+y'} 5^{z+z'} \text{ เป็นกำลังสองสมบูรณ์} \quad \square$$

16. แนวคิด สำหรับ $S \neq \emptyset$ ให้ ΠS แทนผลคูณของสมาชิกทุกตัวใน S

เพราะว่า $|A| = n + 1$ เพราะฉะนั้นจำนวนสับเซตของ A ที่ไม่เป็นเซตว่างมี $2^{n+1} - 1$ ตัว

ให้ B_i เป็นสับเซตทั้งหมดของ A ที่ไม่เป็นเซตว่าง, $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{n+1} - 1$

ให้ $s_i = \Pi B_i, i = 1, 2, 3, \dots, 2^{n+1} - 1$

เพราะว่าตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ m_i มีค่าไม่เกิน p_n

เพราะฉะนั้นตัวประกอบจำนวนเฉพาะของ s_i มีค่าไม่เกิน p_n

ให้ $S(e_1, e_2, \dots, e_n) = \{ p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_n^{x_n} \mid x_i \equiv e_i \pmod{2}, i = 1, 2, \dots, n \}$ เมื่อ $e_i \in \{0, 1\}$ ทุกค่า i

เพราะฉะนั้น $\{ s_i \mid i = 1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1 \} \subset \bigcup_{e_1, e_2, \dots, e_n \in \{0,1\}} S(e_1, e_2, \dots, e_n)$

ให้ $s_i, i = 1, 2, \dots, 2^{n+1} - 1$ เป็นนก $2^{n+1} - 1$ ตัว

และให้ $S(e_1, e_2, \dots, e_n), e_i \in \{0, 1\}$ และ $i = 1, 2, \dots, n$ เป็นรังนก 2^n รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการนทพืราบต้องมีรังกอยางนอยหนึกรังกที่มีนทอยางนอยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $S(e_1, e_2, \dots, e_n)$ และมี $s_i \neq s_j$ ที่ทำให้ $s_i, s_j \in S(e_1, e_2, \dots, e_n)$

เพราะฉะนั้นมี $x_i, y_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ ที่ทำให้ $s_i = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_n^{x_n}$ และ $s_j = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots p_n^{y_n}$

โดยที่ $x_i \equiv e_i \pmod{2}$ และ $y_i \equiv e_i \pmod{2}$

เพราะฉะนั้น $x_i + y_i \equiv 2e_i \pmod{2} \equiv 0 \pmod{2}$

เพราะฉะนั้น $s_i s_j = p_1^{x_1+y_1} p_2^{x_2+y_2} \dots p_n^{x_n+y_n}$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

เพราะฉะนั้น $(\prod B_i)(\prod B_j)$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$$\begin{aligned} (\prod B_i)(\prod B_j) &= \prod (B_i - (B_i \cap B_j)) \prod (B_i \cap B_j) \prod (B_j - (B_i \cap B_j)) \prod (B_i \cap B_j) \\ &= \prod (B_i - (B_i \cap B_j)) \prod (B_j - (B_i \cap B_j)) (\prod (B_i \cap B_j))^2 \\ &= \prod ((B_i - (B_i \cap B_j)) \cup (B_j - (B_i \cap B_j))) (\prod (B_i \cap B_j))^2 \end{aligned}$$

เพราะว่า $(\prod B_i)(\prod B_j)$ และ $(\prod (B_i \cap B_j))^2$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

เพราะฉะนั้น $\prod ((B_i - (B_i \cap B_j)) \cup (B_j - (B_i \cap B_j)))$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

เพราะฉะนั้น $(B_i - (B_i \cap B_j)) \cup (B_j - (B_i \cap B_j))$ เป็นสับเซตของ A

และ $\prod ((B_i - (B_i \cap B_j)) \cup (B_j - (B_i \cap B_j)))$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ □

17. แนวคิด ให้ $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13, p_7 = 17, p_8 = 19, p_9 = 23$

ให้ $S(e_1, e_2, \dots, e_9) = \{ p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_9^{x_9} \mid x_i \equiv e_i \pmod{2}, i = 1, 2, \dots, 9 \}$ เมื่อ $e_i \in \{0, 1\}$ ทุกค่า i
ขั้นที่ 1 ให้ $m_i, i = 1, 2, \dots, 2013$ เป็นนท 2013 ตัว

และ $S(e_1, e_2, \dots, e_9), e_i \in \{0, 1\}$ และ $i = 1, 2, \dots, 9$ เป็นรังก $2^9 = 512$ รังซึ่งนอยกว่าจำนวนนท

เพราะฉะนั้นโดยหลักการนทพืราบต้องมีรังกอยางนอยหนึกรังกที่มีนทอยางนอยสองตัว

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ m_{2013}, m_{2012} อยู่รังเดียวกัน

เพราะฉะนั้นมี x_i และ y_i ที่ทำให้ $m_{2013} = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_9^{x_9}$ และ $m_{2012} = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots p_9^{y_9}$

โดยที่ $x_i \equiv e_i \pmod{2}$ และ $y_i \equiv e_i \pmod{2}$

เพราะฉะนั้น $x_i + y_i \equiv 2e_i \pmod{2} \equiv 0 \pmod{2}$

เพราะฉะนั้น $m_{2013} m_{2012} = p_1^{x_1+y_1} p_2^{x_2+y_2} \dots p_9^{x_9+y_9}$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

ให้ $w_1 = m_{2013} m_{2012}$ เพราะฉะนั้น w_1 เป็นกำลังสองสมบูรณ์

ขั้นที่ 2 เพราะว่า $|\{m_1, m_2, \dots, m_{2011}\}| = 2011 > 512$

เพราะฉะนั้นมี $m_i, m_j \in \{m_1, m_2, \dots, m_{2011}\}$ ที่อยู่ใน $S(e_1, e_2, \dots, e_9)$ เดียวกัน

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ m_i, m_j คือ m_{2010}, m_{2011} ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกันจะได้ $m_{2010} m_{2011}$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

ให้ $w_2 = m_{2010} m_{2011}$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

เพราะว่า 1. $M = \{m_1, m_2, \dots, m_{2013}\}$ มี 2013 ตัว

2. แต่ละขั้นตอนสมาชิกใน M ลดลงครึ่งละ 2 ตัว

3. แต่ละขั้นตอนจะได้ $w_1, w_2, \dots$ ตามลำดับ และ w_i เป็นกำลังสองสมบูรณ์

เพราะฉะนั้นถึงขั้นที่ 751 จะได้สมาชิกใน M ลดลงเหลือ 511 ตัว

และได้ $w_1, w_2, \dots, w_{751}$ ซึ่งเป็นกำลังสองสมบูรณ์

ให้ $W = \{w_1, w_2, \dots, w_{751}\}$

สำหรับ $i \in \{1, 2, \dots, 751\}$

เพราะว่า w_i ได้จากสมาชิกสองตัวของ M คูณกัน

และสมาชิกของ M มีตัวประกอบจำนวนเฉพาะซึ่งมีค่าไม่เกิน 23

เพราะฉะนั้น $w_i = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_9^{x_9}$

เพราะว่า $w_i = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_9^{x_9}$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เพราะฉะนั้น x_i เป็นเลขคู่, $i = 1, 2, \dots, 9$

เพราะฉะนั้น $x_i \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ $x_i \equiv 2 \pmod{4}$ เป็นเลขคู่, $i = 1, 2, \dots, 9$

ให้ $T(e_1, e_2, \dots, e_9) = \{p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_9^{x_9} \mid x_i \equiv e_i \pmod{4}, i = 1, 2, \dots, 9, e_i \in \{0, 2\} \text{ ทุกค่า } i\}$

ให้ $w_1, w_2, \dots, w_{751}$ เป็นนก 751 ตัว

ให้ $T(e_1, e_2, \dots, e_9)$, $e_i \in \{0, 2\}$, $i = 1, 2, \dots, 9$ เป็นริงนก $2^9 = 512$ ริงซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการพิราบต้องมีริงนกอย่างน้อยหนึ่งริงที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี w_i, w_j อยู่ $T(e_1, e_2, \dots, e_9)$ เดียวกัน

เพราะฉะนั้นมี x_i และ y_i ที่ทำให้ $w_i = p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_9^{x_9}$ และ $w_j = p_1^{y_1} p_2^{y_2} \dots p_9^{y_9}$

โดยที่ $x_i \equiv e_i \pmod{4}$ และ $y_i \equiv e_i \pmod{4}$

เพราะฉะนั้น $x_i + y_i \equiv 2e_i \pmod{4}$

เพราะว่า $e_i = 0$ หรือ $e_i = 2$ เพราะฉะนั้น $x_i + y_i \equiv 0 \pmod{4}$ หรือ $x_i + y_i \equiv 4 \pmod{4}$

เพราะฉะนั้น $4 \mid (x_i + y_i)$

เพราะฉะนั้น $w_i w_j = p_1^{x_1+y_1} p_2^{x_2+y_2} \dots p_9^{x_9+y_9}$ เป็นกำลังสี่สมบูรณ์

เพราะว่า w_i ได้จากสมาชิกสองตัวของ m'_i, m''_i ที่ต่างกันคูณกัน

w_j ได้จากสมาชิกสองตัวของ m'_j, m''_j ที่ต่างกันคูณกัน

และจากขั้นตอนข้างต้น m'_i, m''_i, m'_j, m''_j ต่างกัน

เพราะฉะนั้น $m'_i m''_i m'_j m''_j = w_i w_j$ เป็นกำลังสี่สมบูรณ์

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกสี่ตัวของ M คูณกันเป็นกำลังสี่สมบูรณ์ □

18. แนวคิด ให้ $A = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+2}\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$... (1)

ให้ $m = \max A$... (2)

เพราะฉะนั้น $m \leq 3n$... (3)

ให้ a เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $3n - a = m$... (4)

ให้ $y_i = x_i + a$, $i = 1, 2, \dots, n+2$ และ $B = \{y_1, y_2, \dots, y_{n+2}\}$... (5)

เพราะฉะนั้น $y_i - y_j = x_i - x_j$ ทุกค่า i, j ... (6)

เพราะฉะนั้น $\max B = 3n$... (7)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $y_{n+2} = 3n$... (8)

เพราะฉะนั้น $B = \{y_1, y_2, \dots, y_{n+1}, y_{n+2} = 3n\}$

กรณีที่ 1 มี $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ที่ทำให้ $y_i \in \{n+1, n+2, \dots, 2n-1\}$

เพราะฉะนั้น

$$n+1 \leq y_i \leq 2n-1$$

$$-(2n-1) \leq -y_i \leq -(n+1)$$

$$3n - (2n-1) \leq 3n - y_i \leq 3n - (n+1)$$

$$n+1 \leq y_{n+2} - y_i \leq 2n-1 \quad (\text{จาก (5)})$$

$$n < |y_{n+2} - y_i| < 2n$$

$$n < |x_{n+2} - x_i| < 2n \quad (\text{จาก (6)})$$

กรณีที่ 2 ไม่มี $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ที่ทำให้ $y_i \in \{n+1, n+2, \dots, 2n-1\}$

เพราะฉะนั้น $y_1, y_2, \dots, y_{n+1} \in \{1, 2, 3, \dots, n, 2n, 2n+1, 2n+2, \dots, 3n-1\}$

ให้ $y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ เป็นนิก $n+1$ ตัว

ให้ $\{1, 2n\}, \{2, 2n+1\}, \{3, 2n+2\}, \dots, \{i, i+2n-1\}, \dots, \{n, 3n-1\}$ เป็นริงนิก n ริง

เพราะฉะนั้นจำนวนริงนิกน้อยกว่าจำนวนนิก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการนิกพิราบต้องมีริงนิกอย่างน้อยหนึ่งริงที่มีนิกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และมี $k, j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ที่ทำให้ $y_k, y_j \in \{i, i+2n-1\}$

เพราะฉะนั้น $|y_k - y_j| = (i+2n-1) - i = 2n-1$

จาก (6) จะได้ $|x_k - x_j| = (i+2n-1) - i = 2n-1$

เพราะฉะนั้น $n < |x_k - x_j| < 2n$

□

19. แนวคิด ให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ เป็นลำดับเพิ่มแท้

เพราะฉะนั้น $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots$... (1)

ให้ $m > n$... (2)

สมมติ $m - n > a_m - a_n$... (3)

เพราะฉะนั้น $m - n - 1 \geq a_m - a_n$... (4)

จาก (1) และ (2) จะได้ $a_n < a_{n+1} < a_{n+2} < a_{n+3} < \dots < a_{m-2} < a_{m-1} < a_m$

$$-a_n > -a_{n+1} > -a_{n+2} > -a_{n+3} > \dots > -a_{m-2} > -a_{m-1} > -a_m$$

$$a_m - a_n > a_m - a_{n+1} > a_m - a_{n+2} > a_m - a_{n+3} > \dots > a_m - a_{m-2} > a_m - a_{m-1} > a_m - a_m$$

$$a_m - a_n > a_m - a_{n+1} > a_m - a_{n+2} > a_m - a_{n+3} > \dots > a_m - a_{m-2} > a_m - a_{m-1} > 0 \quad \dots (5)$$

จาก (4) และ (5) จะได้

$$m - n - 1 > a_m - a_{n+1} > a_m - a_{n+2} > a_m - a_{n+3} > \dots > a_m - a_{m-2} > a_m - a_{m-1} \geq 1$$

$$m - n - 2 \geq a_m - a_{n+1} > a_m - a_{n+2} > a_m - a_{n+3} > \dots > a_m - a_{m-2} > a_m - a_{m-1} \geq 1 \quad \dots (6)$$

เพราะฉะนั้น $a_m - a_{n+1}, a_m - a_{n+2}, \dots, a_m - a_{m-1}$ เป็นจำนวนเต็มบวกต่างกันทุกค่า ... (7)

$$\text{และ } a_m - a_{n+1}, a_m - a_{n+2}, \dots, a_m - a_{m-1} \in \{1, 2, \dots, m - n - 3, m - n - 2\}$$

ให้ $a_m - a_{n+1}, a_m - a_{n+2}, \dots, a_m - a_{m-1}$ เป็นนิก $m - n - 1$ ตัว

ให้ $1, 2, \dots, m - n - 3, m - n - 2$ เป็นรังนก $m - n - 2$ รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี 2 ตัวจาก $a_m - a_{n+1}, a_m - a_{n+2}, \dots, a_m - a_{m-1}$ ที่มีค่าเท่ากัน

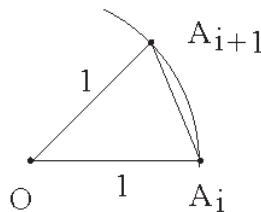
เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ (7)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) $m - n > a_m - a_n$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $m - n \leq a_m - a_n$

เพราะฉะนั้น ถ้า $m > n$ แล้ว $m - n \leq a_m - a_n$ □

20. แนวคิด เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยมีความยาวเท่ากับ 2π



รูปที่ 1.7

แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยออกเป็น n ส่วนเท่ากันด้วยส่วนโค้ง $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$

เมื่อ A_n คือ A_0

เพราะฉะนั้นส่วนโค้ง A_iA_{i+1} ยาวเท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$

โดยกฎของโคไซน์จะได้

$$\begin{aligned} (A_iA_{i+1})^2 &= 1^2 + 1^2 - 2(1)(1)\cos A_i\hat{O}A_{i+1} \\ &= 2 - 2\cos\frac{2\pi}{n} \\ &= 2 - 2\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{n}\right) \\ &= 4\sin^2\frac{\pi}{n} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $A_iA_{i+1} = 2\sin\frac{\pi}{n}$

เพราะฉะนั้น ถ้า P, Q เป็นจุดบนส่วนโค้ง A_iA_{i+1} แล้ว $PQ \leq 2\sin\frac{\pi}{n}$... (1)

ให้จุด $P_1, P_2, \dots, P_{n+1}$ เป็นนก $n + 1$ ตัว

ให้ส่วนโค้ง $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ จำนวน n ส่วนโค้งเป็นรังนก n รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการนกพิราบจะต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ส่วนโค้ง A_iA_{i+1} ที่บรรจุจุดอย่างน้อยสองจุด

ให้ P, Q เป็นจุดบนส่วนโค้ง A_iA_{i+1} เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $PQ \leq 2\sin\frac{\pi}{n}$

เพราะฉะนั้นมีสองจุด P, Q ที่ห่างกันไม่เกิน $2\sin\frac{\pi}{n}$ □

21. แนวคิด

แบบที่ 1 เพราะว่าจำนวนเต็ม x ที่ลงท้ายด้วย 001 คือจำนวนเต็ม x ที่มีคุณสมบัติ $x \equiv 1 \pmod{1000}$

เพราะฉะนั้นเราพิสูจน์ว่ามีสมาชิกของลำดับ $3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ ที่หารด้วย 1000 แล้วเหลือเศษ 1

ให้ $a_k = 3^k - 1, k = 1, 2, 3, \dots, 1001$

... (1)

สำหรับ $k = 1, 2, \dots, 1001$ ให้ b_k เป็นจำนวนเต็มโดยที่ $0 \leq b_k \leq 999$ และ $a_k \equiv b_k \pmod{1000}$

ให้ $b_1, b_2, \dots, b_{1001}$ เป็นนิก 1001 ตัว

ให้เศษที่เกิดจากการหารด้วย 1000 คือ $0, 1, 2, 3, \dots, 999$ เป็นรังก 1000 รัง

เพราะว่าจำนวนรังกน้อยกว่าจำนวนนิก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการนิกพิราบจะมีรังกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนิกอย่างน้อยสองตัว

ให้นิก b_{k_1}, b_{k_2} อยู่รังเดียวกัน เพราะฉะนั้น $b_{k_1} = b_{k_2}$... (2)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $k_1 < k_2$... (3)

เพราะว่า $a_{k_1} \equiv b_{k_1} \pmod{1000}$ และ $a_{k_2} \equiv b_{k_2} \pmod{1000}$... (4)

จาก (2) และ (4) จะได้ $a_{k_1} \equiv a_{k_2} \pmod{1000}$

$$a_{k_1} - a_{k_2} \equiv 0 \pmod{1000}$$

$$(3^{k_2} - 1) - (3^{k_1} - 1) \equiv 0 \pmod{1000} \quad (\text{จาก (1)})$$

$$3^{k_2} - 3^{k_1} \equiv 0 \pmod{1000}$$

$$3^{k_1} (3^{k_2-k_1} - 1) \equiv 0 \pmod{1000} \quad (\text{จาก (3) } k_2 - k_1 > 0)$$

เพราะฉะนั้น $1000 \mid (3^{k_1} (3^{k_2-k_1} - 1))$

เพราะว่า $\gcd(1000, 3^{k_1}) = 1$ และ $1000 \mid (3^{k_1} (3^{k_2-k_1} - 1))$ เพราะฉะนั้น $1000 \mid (3^{k_2-k_1} - 1)$

เพราะฉะนั้น $3^{k_2-k_1} \equiv 1 \pmod{1000}$

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกของลำดับ $3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ ที่หารด้วย 1000 แล้วเหลือเศษ 1

เพราะว่า $3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 729,$

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกของ $3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ ที่เขียนเป็นจำนวนเต็มในรูปทศนิยมแล้วลงท้ายด้วย 001

แบบที่ 2 โดย Euler theorem ทุกจำนวนเต็มบวก a, m และ $\gcd(a, m) = 1$ จะได้ $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

เพราะฉะนั้น $3^{\phi(1000)} \equiv 1 \pmod{1000}$ และ $\phi(1000) = \phi(2^3 5^3) = 2^3 5^3 (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{5}) = 400$

เพราะฉะนั้น $3^{400} \equiv 1 \pmod{1000}$ เพราะฉะนั้น $1000 \mid (3^{400} - 1)$

เพราะฉะนั้น 3^{400} เขียนเป็นจำนวนเต็มในรูปทศนิยมแล้วลงท้ายด้วย 001 □

22. แนวคิด $n = 1$ เลือก $x = 0$ **หมายเหตุ** มีหลายตัวเช่น 7, 77, 777, ...

$n = 2$ เลือก $x = 70$ **หมายเหตุ** มีหลายตัวเช่น 7070, 707070, ...

$n = 3$ เลือก $x = 777$ **หมายเหตุ** มีหลายตัวเช่น 707070, 777000, ...

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ $a_k = \underbrace{777\dots 777}_{k \text{ digits}}$ และให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$

สำหรับ $k = 1, 2, \dots, n, n+1$

ให้ b_k เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $1 \leq b_k \leq n-1$ และ $a_k \equiv b_k \pmod{n}$... (1)

ให้ $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}$ เป็นนิก $n+1$ ตัว

ให้เศษที่เหลือจากการหารจำนวนเต็มด้วย n คือ $0, 1, 2, \dots, n-1$ เป็นรังก n รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนิก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการพีราบจะมีรังกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกลอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมี $i \neq j$ ที่ทำให้ $b_i = b_j$... (2)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $i < j$

จาก (2) $b_i = b_j$ และจาก (1) $a_i \equiv b_i \pmod{n}$ และ $a_j \equiv b_j \pmod{n}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น} \quad a_j - a_i &\equiv b_j - b_i \pmod{n} \\ &\equiv 0 \pmod{n} \end{aligned} \quad (\text{จาก (2)})$$

เพราะฉะนั้น $n \mid (a_j - a_i)$... (3)

เพราะว่า $a_i = \underbrace{777\dots777}_{i \text{ digits}}$ และ $a_j = \underbrace{777\dots777}_{j \text{ digits}}$ และ $i < j$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad a_j - a_i = \underbrace{777\dots777}_{j \text{ digits}} - \underbrace{777\dots777}_{i \text{ digits}} = \underbrace{777\dots777000\dots000}_{7's \ j-i \text{ digits}, 0's \ i \text{ digits}}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad n \mid \underbrace{777\dots777000\dots000}_{7's \ j-i \text{ digits}, 0's \ i \text{ digits}}$$

เพราะฉะนั้นมี $x = \underbrace{777\dots777000\dots000}_{7's \ j-i \text{ digits}, 0's \ i \text{ digits}}$ ซึ่งแต่ละหลักของ x เป็น 0 หรือ 7 ที่ทำให้ $n \mid x$ □

23. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ $a_k = 44^k - 1$

ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_7\}$

สมมติ ไม่มีสมาชิก a_i ของ A ที่ $7 \mid a_i$... (1)

เพราะฉะนั้น $7 \nmid a$ ทุก $a \in A$

ให้ b_k เป็นจำนวนเต็มบวกและ $b_k \leq 6$ และ $a_k \equiv b_k \pmod{7}$, $k = 1, 2, \dots, 7$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $\{b_1, b_2, \dots, b_7\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 6\}$

ให้ $b_1, b_2, \dots, b_7$ เป็นนก 7 ตัว ให้ $1, 2, 3, \dots, 6$ เป็นรังนก 6 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการพีราบต้องมีรังกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกลอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นต้องมี $i \neq j$ ที่ทำให้ $b_i = b_j$... (3)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $i < j$ เพราะฉะนั้น $1 \leq j - i \leq 5$... (4)

เพราะว่าจาก (2) $a_i \equiv b_i \pmod{7}$ และ $a_j \equiv b_j \pmod{7}$ และจาก (3) $b_i = b_j$

เพราะฉะนั้น $a_j \equiv a_i \pmod{7}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น} \quad 7 \mid (a_j - a_i) &\Rightarrow 7 \mid ((44^j - 1) - (44^i - 1)) \\ &\Rightarrow 7 \mid (44^j - 44^i) \\ &\Rightarrow 7 \mid (44^i (44^{j-i} - 1)) \quad (\text{จาก (4) } 0 < j - i) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\gcd(7, 44) = 1$ เพราะฉะนั้น $\gcd(7, 44^i) = 1$

เพราะว่า $\gcd(7, 44^i) = 1$ และ $7 \mid (44^i (44^{j-i} - 1))$ เพราะฉะนั้น $7 \mid (44^{j-i} - 1)$

เพราะว่า $i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}$ และ $1 \leq j - i \leq 5$

เพราะฉะนั้น $44^{j-i} - 1 \in A$ และ $7 \mid (44^{j-i} - 1)$ เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งกับ (1)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก $n = j - i$ ที่ทำให้ $7 \mid (44^n - 1)$

แบบที่ 2 โดย Euler theorem ทุกจำนวนเต็มบวก a, m และ $\gcd(a, m) = 1$ จะได้ $a^{\phi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$

เมื่อ $\phi(m) =$ จำนวนของจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ m

เพราะฉะนั้น $44^{\phi(7)} \equiv 1 \pmod{7}$ และ $\phi(7) = 6$

เพราะฉะนั้น $44^6 \equiv 1 \pmod{7}$ เพราะฉะนั้น $7 \mid (44^6 - 1)$ □

24. แนวคิด ข้อตกลง ΣS หมายถึงผลบวกของสมาชิกใน S

ให้ $X \subset \{11, 12, \dots, 99\}$ และ $|X| = 10$

ให้ $Q = \{Y \mid Y \subset X \text{ และ } Y \neq \emptyset\}$ เพราะฉะนั้น $|Q| = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$

ให้ $Q = \{X_1, X_2, \dots, X_{1023}\}$ เพราะฉะนั้น $X_i \subset X$ และ $X_i \neq \emptyset$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, 1023$

เพราะว่า $90 + 91 + 92 + \dots + 99 = \frac{10}{2}(90 + 99) = 945$

และค่าต่ำสุดของสมาชิกใน X มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 11

ให้ $\Sigma X_1, \Sigma X_2, \dots, \Sigma X_{1023}$ เป็นนก 1023 ตัว

ให้ 11, 12, ..., 945 (มีค่าต่างกัน 935 ค่า) เป็นรังนก 935 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ $\Sigma X_i, \Sigma X_j$ และ $X_i \neq X_j$ เป็นนกสองตัวที่ทำให้ $\Sigma X_i = \Sigma X_j$... (1)

กรณีที่ 1 X_i, X_j ไม่มีสมาชิกร่วมกัน เพราะฉะนั้นได้ผลตามที่โจทย์ต้องการ

กรณีที่ 2 X_i, X_j มีสมาชิกร่วมกัน ให้ $A = X_i - (X_i \cap X_j)$ และ $B = X_j - (X_i \cap X_j)$

เพราะว่า $X_i \neq X_j$ เพราะฉะนั้น $A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset$ และ $B \neq \emptyset$

$$\begin{aligned} \Sigma A &= \Sigma (X_i - (X_i \cap X_j)) \\ &= \Sigma X_i - \Sigma (X_i \cap X_j) \\ &= \Sigma X_j - \Sigma (X_i \cap X_j) && \text{(จาก (1))} \\ &= \Sigma (X_j - (X_i \cap X_j)) \\ &= \Sigma B \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $A \subset X, B \subset X, A \cap B = \emptyset, A \cup B = X$ และ $\Sigma A = \Sigma B$

เพราะฉะนั้นมีสับเซตสองสับเซตของ X ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันและผลบวกของสมาชิกในสองเซตเท่ากัน

หมายเหตุ

1. เปลี่ยนเงื่อนไขเป็น $S = \{1, 2, \dots, 50\}$ และ $X \subset S$ และ $|X| = 10$

ให้ $Q = \{Y \mid Y \subset X \text{ และ } Y \neq \emptyset\}$ เพราะฉะนั้น $|Q| = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $Q = \{X_1, X_2, \dots, X_{1023}\}$

เพราะฉะนั้น $X_i \subset X$ และ $X_i \neq \emptyset$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, 1023$

เพราะว่า $41 + 42 + \dots + 50 = \frac{10}{2}(50 + 41) = 445$

และค่าต่ำสุดของสมาชิกใน X มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1

ให้ $\Sigma X_1, \Sigma X_2, \dots, \Sigma X_{1023}$ เป็นนก 1023 ตัว

ให้ $1, 2, \dots, 445$ มีค่าต่างกันได้ 445 เป็นรังนก 445 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

เพราะฉะนั้นโดยหลักการรังนกพิราบจะมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

ให้ $\Sigma X_i, \Sigma X_j$ และ $X_i \neq X_j$ เป็นนกสองตัวที่ทำให้ $\Sigma X_i = \Sigma X_j$

ในทำนองเดียวกันกับข้างต้น

มีสับเซตสองสับเซตของ X ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันและผลบวกของสมาชิกในสองเซตเท่ากัน

จะเห็นได้ว่าคำถามทำนองนี้ขึ้นอยู่กับขนาดของเซต X และ เซต S ว่าจะทำให้เกิดเงื่อนไขที่จะอ้างใช้

หลักการรังนกพิราบได้หรือไม่

2. เปลี่ยนเงื่อนไขเป็น $S = \{1, 2, \dots, n\}$ และ $X \subset S$ และ $|X| = m$

ให้ $Q = \{Y \mid Y \subset X \text{ และ } Y \neq \emptyset\}$ เพราะฉะนั้น $|Q| = 2^m - 1$

ให้ $Q = \{X_1, X_2, \dots, X_{2^m-1}\}$

เพราะฉะนั้น $X_i \subset X$ และ $X_i \neq \emptyset$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, 2^m - 1$

เพราะว่า $n - m + 1, n - m + 2, \dots, n = \frac{m}{2}((n - m + 1) + n) = \frac{m}{2}(2n + 1 - m)$

และค่าต่ำสุดของสมาชิกใน X มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 1

ให้ $\Sigma X_1, \Sigma X_2, \dots, \Sigma X_{2^m-1}$ เป็นนก $2^m - 1$ ตัว

ให้ $1, 2, \dots, \frac{m}{2}(2n + 1 - m)$ มีค่าต่างกันได้ $\frac{m}{2}(2n + 1 - m)$ ค่าเป็นรังนก $\frac{m}{2}(2n + 1 - m)$ รัง

ในทำนองเดียวกันกับข้างต้น ถ้า $\frac{m}{2}(2n + 1 - m) < 2^m - 1$ แล้วจะได้จำนวนรังนกน้อยกว่าจำนวนนก

จะมีสับเซตสองสับเซตของ X ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันและผลบวกของสมาชิกในสองเซตเท่ากัน □

25. แนวคิด ให้ t_i = จำนวนพจน์ในลำดับย่อยเพิ่มแท้ที่ยาวที่สุดของ A ที่เริ่มต้นพจน์แรกเป็น a_i

กรณีที่ 1 ข้อความ “ $\exists i \in \{1, 2, 3, \dots, n^2 + 1\} [t_i \geq n + 1]$ ” เป็นจริง

เพราะว่า t_i = จำนวนพจน์ในลำดับย่อยเพิ่มแท้ที่ยาวที่สุดของ A ที่เริ่มต้นพจน์แรกเป็น a_i

และ $t_i \geq n + 1$

เพราะฉะนั้นมี $(b_1 = a_i, b_2, b_3, \dots, b_{t_i})$ เป็นลำดับย่อยเพิ่มแท้และเป็นลำดับย่อยของ A

เพราะว่า $t_i \geq n + 1$ เพราะฉะนั้นมีลำดับย่อย $(b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$ ของ A โดยที่ $a_i = b_1$

เพราะฉะนั้นลำดับ $(a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1})$ มีลำดับย่อยเพิ่มแท้ $(a_i = b_1, b_2, \dots, b_{n+1})$

กรณีที่ 2 ข้อความ “ $\exists i \in \{1, 2, 3, \dots, n^2 + 1\} [t_i \geq n + 1]$ ” เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n^2 + 1\} [1 \leq t_i \leq n]$ เป็นจริง

... (1)

ให้ $t_1, t_2, \dots, t_{n^2+1}$ เป็นนก $n^2 + 1$ ตัว และให้ $1, 2, 3, \dots, n$ เป็นรังนก n รัง

เพราะว่า $\left\lceil \frac{n^2+1}{n} \right\rceil = \left\lfloor n + \frac{1}{n} \right\rfloor = n$

เพราะฉะนั้นมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อย $\left\lceil \frac{n^2+1}{n} \right\rceil + 1 = \left\lfloor n + \frac{1}{n} \right\rfloor + 1 = n + 1$ ตัว

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกของ $\{t_1, t_2, \dots, t_{n^2+1}\}$ อย่างน้อย $n + 1$ ตัวที่มีค่าเท่ากัน

ให้ $k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1}$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < n^2 + 1$
 ที่ทำให้ $t_{k_1}, t_{k_2}, \dots, t_{k_n}, t_{k_{n+1}} \in \{t_1, t_2, \dots, t_{n^2+1}\}$

$$\text{และ } t_{k_1} = t_{k_2} = \dots = t_{k_n} = t_{k_{n+1}} \quad \dots (2)$$

ให้ $i, j \in \{1, 2, \dots, n, n+1\}$ และ $i < j$

$$\text{สมมติ } a_{k_i} \leq a_{k_j} \quad \dots (3)$$

เพราะว่า $(a_1, a_2, \dots, a_{n^2+1})$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวกที่ต่างกัน เพราะฉะนั้น $a_{k_i} < a_{k_j}$

เพราะว่า t_{k_j} = จำนวนพจน์ในลำดับย่อยเพิ่มแท้ที่ยาวที่สุดของ A ที่เริ่มต้นพจน์แรกเป็น a_{k_j}

เพราะฉะนั้นมี $(a_{k_j} = b_1, b_2, \dots, b_{t_{k_j}})$ เป็นลำดับย่อยเพิ่มแท้ซึ่งยาว t_{k_j} พจน์ของ A

เพราะฉะนั้น $(a_{k_i}, a_{k_j} = b_1, b_2, \dots, b_{t_{k_j}})$ เป็นลำดับย่อยเพิ่มแท้ของ A ที่เริ่มต้นด้วย a_{k_i}

เพราะว่าจำนวนพจน์ใน $(a_{k_i}, a_{k_j} = b_1, b_2, \dots, b_{t_{k_j}})$ มีค่าเท่ากับ $t_{k_j} + 1$

และ t_{k_i} = จำนวนพจน์ในลำดับย่อยเพิ่มแท้ที่ยาวที่สุดของ A ที่เริ่มต้นพจน์แรกเป็น a_{k_i}

$$\text{เพราะฉะนั้น } t_{k_j} + 1 \leq t_{k_i} \quad \text{เพราะฉะนั้น } t_{k_j} < t_{k_j} + 1 \leq t_{k_i} \quad \dots (4)$$

จาก (2) จะได้ $t_{k_j} = t_{k_i}$ จึงเกิดข้อขัดแย้งกับ (4)

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (3) $a_{k_i} \leq a_{k_j}$ ไม่จริง เพราะฉะนั้น $a_{k_i} > a_{k_j}$

เพราะฉะนั้น $a_{k_1} > a_{k_2} > \dots > a_{k_n} > a_{k_{n+1}}$

เพราะว่า $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < n^2 + 1$ และ $a_{k_1} > a_{k_2} > \dots > a_{k_n} > a_{k_{n+1}}$

เพราะฉะนั้น $(a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_n}, a_{k_{n+1}})$ เป็นลำดับย่อยลดแท้ของ A □

26. แนวคิด แบ่ง $\{1, 2, 3, \dots, 28\}$ ออกเป็น

$$S_1 = \{1\}, S_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 18, 20, 24, 28\}, S_3 = \{3, 9, 27\}, S_4 = \{5, 15, 25\}$$

$$S_5 = \{7, 14\}, S_6 = \{11, 22\}, S_7 = \{13, 26\}, S_8 = \{17\}, S_9 = \{19\}, S_{10} = \{23\}$$

เพราะฉะนั้น $\{1, 2, 3, \dots, 28\} = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{10}$ และ $S_i \cap S_j = \emptyset$ ทุกค่า $i \neq j$

ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ เป็นจำนวนที่เลือกจาก $\{1, 2, 3, \dots, 28\}$

$$\text{เพราะว่า } \{x_1, x_2, \dots, x_{11}\} - S_1 \cup S_8 \cup S_9 \cup S_{10} = \{x_1, x_2, \dots, x_{11}\} - \{1, 17, 19, 23\}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } |\{x_1, x_2, \dots, x_{11}\} - \{1, 17, 19, 23\}| \geq 7$$

$$\text{ให้ } Y = \{y_1, y_2, \dots, y_7\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_{11}\} - \{1, 17, 19, 23\}$$

ให้ $y_1, y_2, \dots, y_7$ เป็นนก 7 ตัวและ $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ เป็นรังนก 5 รัง

โดยหลักการนิกพิราบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีหนึ่งรังจาก $S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7$ ที่มีนกสองตัว

เพราะว่า $i = 2, 3, 4, 5, 6$ จะได้ $\gcd(x, y) > 1$ ทุกค่า $x, y \in S_i$

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อย 2 ตัวจาก $y_1, y_2, \dots, y_7$ ที่ตัวหารร่วมมากมีค่ามากกว่า 1

$$\text{เพราะว่า } \{y_1, y_2, \dots, y_7\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_{11}\} - \{1, 17, 19, 23\}$$

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อย 2 ตัวจาก $x_1, x_2, \dots, x_{11}$ ที่ตัวหารร่วมมากมีค่ามากกว่า 1 □

27. แนวคิด ให้ $a_k = \underbrace{20142014\dots2014}_{4k \text{ digits}}$ และให้ $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_{2557} \}$

สมมติ ไม่มีสมาชิกของ A ที่ 2557 หารลงตัว ... (1)

เพราะฉะนั้น $2557 \nmid a$ ทุก $a \in A$... (2)

ให้ b_k เป็นจำนวนเต็มบวกและ $b_k \leq 2556$ และ $a_k \equiv b_k \pmod{2557}$, $k = 1, 2, \dots, 2557$... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $\{ b_1, b_2, \dots, b_{2557} \} \subset \{ 1, 2, 3, \dots, 2556 \}$

ให้ $b_1, b_2, \dots, b_{2557}$ เป็นนก 2557 ตัว

ให้ $1, 2, 3, \dots, 2556$ เป็นรังนก 2556 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการพิราบบต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นต้องมี $i \neq j$ ที่ทำให้ $b_i = b_j$... (4)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $i < j$ เพราะฉะนั้น $1 \leq j - i \leq 2556$

เพราะว่าจาก (4) $b_i = b_j$ และจาก (3) $a_i \equiv b_i \pmod{2557}$ และ $a_j \equiv b_j \pmod{2557}$

เพราะฉะนั้น $a_j - a_i \equiv b_i - b_j \pmod{2557}$
 $\equiv 0 \pmod{2557}$ (จาก (4))

เพราะฉะนั้น $2557 \mid (a_j - a_i)$... (5)

เพราะว่า $a_i = \underbrace{20142014\dots2014}_{4i \text{ digits}}$ และ $a_j = \underbrace{20142014\dots2014}_{4j \text{ digits}}$ และ $i < j$

เพราะฉะนั้น $a_j - a_i = \underbrace{20142014\dots2014}_{4j \text{ digits}} - \underbrace{20142014\dots2014}_{4i \text{ digits}}$
 $= \underbrace{20142014201400000000\dots0000}_{2014\text{'s } 4(j-i) \text{ digits } 0\text{'s } 4i \text{ digits}}$
 $= \underbrace{20142014\dots2014}_{4(j-i) \text{ digits}} 10^{4i}$
 $= a_{j-i} 10^{4i}$... (6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $2557 \mid (a_{j-i} 10^{4i})$... (7)

เพราะว่า $\gcd(2557, 5) = 1$ และ $\gcd(2557, 2) = 1$ เพราะฉะนั้น $\gcd(2557, 10^{4i}) = 1$... (8)

จาก (7) และ (8) จะได้ $2557 \mid a_{j-i}$ เพราะฉะนั้น $2557 \mid \underbrace{20142014\dots2014}_{4(j-i) \text{ digits}}$... (9)

เพราะฉะนั้น (2) และ (9) ขัดแย้งกัน

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่มีสมาชิกของ A ที่ 2557 หารลงตัว ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกของ A ที่ 2557 หารลงตัว

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกของลำดับ 2014, 20142014, 201420142014, ... ที่หารด้วย 2557 ลงตัว □

28. แนวคิด ให้ $a_k = \underbrace{777\dots777}_k \text{ digits}$ และให้ $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_{2013} \}$

สมมติ ไม่มีสมาชิกของ A ที่ 2013 หารลงตัว ... (1)

เพราะฉะนั้น $2013 \nmid a$ ทุก $a \in A$... (2)

ให้ b_k เป็นจำนวนเต็มบวกและ $b_k \leq 2012$ และ $a_k \equiv b_k \pmod{2013}$, $k = 1, 2, \dots, 2013 \dots (3)$

จาก (2) และ (3) จะได้ $\{b_1, b_2, \dots, b_{2013}\} \subset \{1, 2, 3, \dots, 2012\}$

ให้ $b_1, b_2, \dots, b_{2013}$ เป็นนก 2013 ตัว

ให้ $1, 2, 3, \dots, 2012$ เป็นรังนก 2012 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการทฤษฎีบทต้องมีรังนกอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกอย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นต้องมี $i \neq j$ ที่ทำให้ $b_i = b_j$... (4)

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $i < j$ เพราะฉะนั้น $1 \leq j - i \leq 2012$

เพราะว่าจาก (3) $a_i \equiv b_i \pmod{2013}$, $a_j \equiv b_j \pmod{2013}$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น} \quad a_j - a_i &\equiv b_j - b_i \pmod{2013} \\ &\equiv 0 \pmod{2013} \end{aligned} \quad (\text{จาก (4)})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2013 \mid (a_j - a_i) \quad \dots (5)$$

เพราะว่า $a_i = \underbrace{777\dots777}_{i \text{ digits}}$ และ $a_j = \underbrace{777\dots777}_{j \text{ digits}}$ และ $i < j$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น} \quad a_j - a_i &= \underbrace{777\dots777}_{j \text{ digits}} - \underbrace{777\dots777}_{i \text{ digits}} \\ &= \underbrace{777\dots777000\dots000}_{7\text{'s } j-i \text{ digits, } 0\text{'s } i \text{ digits}} \\ &= \underbrace{777\dots777}_{j-i \text{ digits}} 10^i \\ &= a_{j-i} 10^i \end{aligned} \quad \dots (6)$$

$$\text{จาก (5) และ (6) จะได้ } 2013 \mid (a_{j-i} 10^i) \quad \dots (7)$$

$$\text{เพราะว่า } \gcd(2013, 5) = 1 \text{ และ } \gcd(2013, 2) = 1 \text{ เพราะฉะนั้น } \gcd(2013, 10^i) = 1 \quad \dots (8)$$

$$\text{จาก (7) และ (8) จะได้ } 2013 \mid a_{j-i} \text{ เพราะฉะนั้น } 2013 \mid \underbrace{777\dots777}_{j-i \text{ digits}} \text{ ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติ (1)}$$

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่มีสมาชิกของ A ที่ 2013 หารลงตัว ไม่จริง

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกของ A ที่ 2013 หารลงตัว

เพราะฉะนั้นมีสมาชิกของลำดับ 7, 77, 777, 7777, 77777, ... ที่หารด้วย 2013 ลงตัว □

29. แนวคิด ให้ $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ เป็นผู้เล่น n คน

เพราะว่าผู้เข้าแข่งขันสองคนใดๆ ต้องแข่งกันหนึ่งครั้ง

เพราะฉะนั้น A_i ต้องเล่นจบเกมที่ $0, 1, 2, \dots, n-1$ เมื่อสิ้นสุดการแข่งขัน ทุก $i = 1, 2, 3, \dots, n$
แบ่งช่วงเวลาออกเป็น 3 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 ไม่มีผู้เล่นคนใดเล่นจบการแข่งขันเกมที่ $n-1$

เพราะฉะนั้นจำนวนเกมที่เล่นจบที่เป็นไปได้ของทุกคนคือ $0, 1, 2, 3, \dots, n-2$

ให้ผู้เล่น n คนเป็นนก n ตัว

ให้จำนวนเกมที่เล่นจบ $0, 1, 2, \dots, n-2$ เป็นรังนก $n-1$ รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการนิกพิราบต้องมีริงนกออย่างน้อยหนึ่งริงที่มีนกออย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีผู้เล่นสองคนเล่นจบเกมมาแล้วเป็นจำนวนครั้งที่เท่ากัน

กรณีที่ 2 ช่วงเวลาหลังจากมีผู้เล่นหนึ่งคนเล่นจบเกมที่ $n - 1$ และยังไม่มีผู้เล่นคนอื่นเล่นจบเกมที่ $n - 1$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ A_n เป็นคนที่เล่นจบเกมที่ $n - 1$ พอดี

เพราะฉะนั้น $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ ต้องเล่นอย่างน้อยหนึ่งเกมและอย่างมาก $n - 2$ เกม

ให้ผู้เล่น $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}$ เป็นนก $n - 1$ ตัว

ให้จำนวนเกมที่เล่นจบ $1, 2, \dots, n - 2$ เป็นริงนก $n - 2$ ริงซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักการนิกพิราบต้องมีริงนกออย่างน้อยหนึ่งริงที่มีนกออย่างน้อยสองตัว

เพราะฉะนั้นมีผู้เล่นสองคนเล่นจาก $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ เล่นจบเกมมาแล้วเป็นจำนวนครั้งที่เท่ากัน

กรณีที่ 3 ช่วงเวลาตั้งแต่มีผู้เล่น 2 คนขึ้นไปเล่นจบเกมที่ $n - 1$

เพราะฉะนั้นมีผู้เล่นสองคนเล่นจบเกมมาแล้วเป็นจำนวนครั้งที่ $n - 1$ เท่ากัน

จากทุกกรณีจะได้ว่า ณ ขณะเวลาใดๆ จะมีผู้เล่นสองคนเล่นจบเกมมาแล้วเป็นจำนวนครั้งที่เท่ากัน

หมายเหตุ ในการแข่งขันฟุตบอลแบบพบกันหมด โดยที่แต่ละทีมจะแข่งกับทีมอื่นทีละหนึ่งครั้ง

โดยใช้แนวคิดแบบเดียวกับข้างต้นจะได้ว่า

ณ ขณะเวลาใดๆ จะมีทีมสองทีมเล่นจบเกมมาแล้วเป็นจำนวนครั้งที่เท่ากัน

