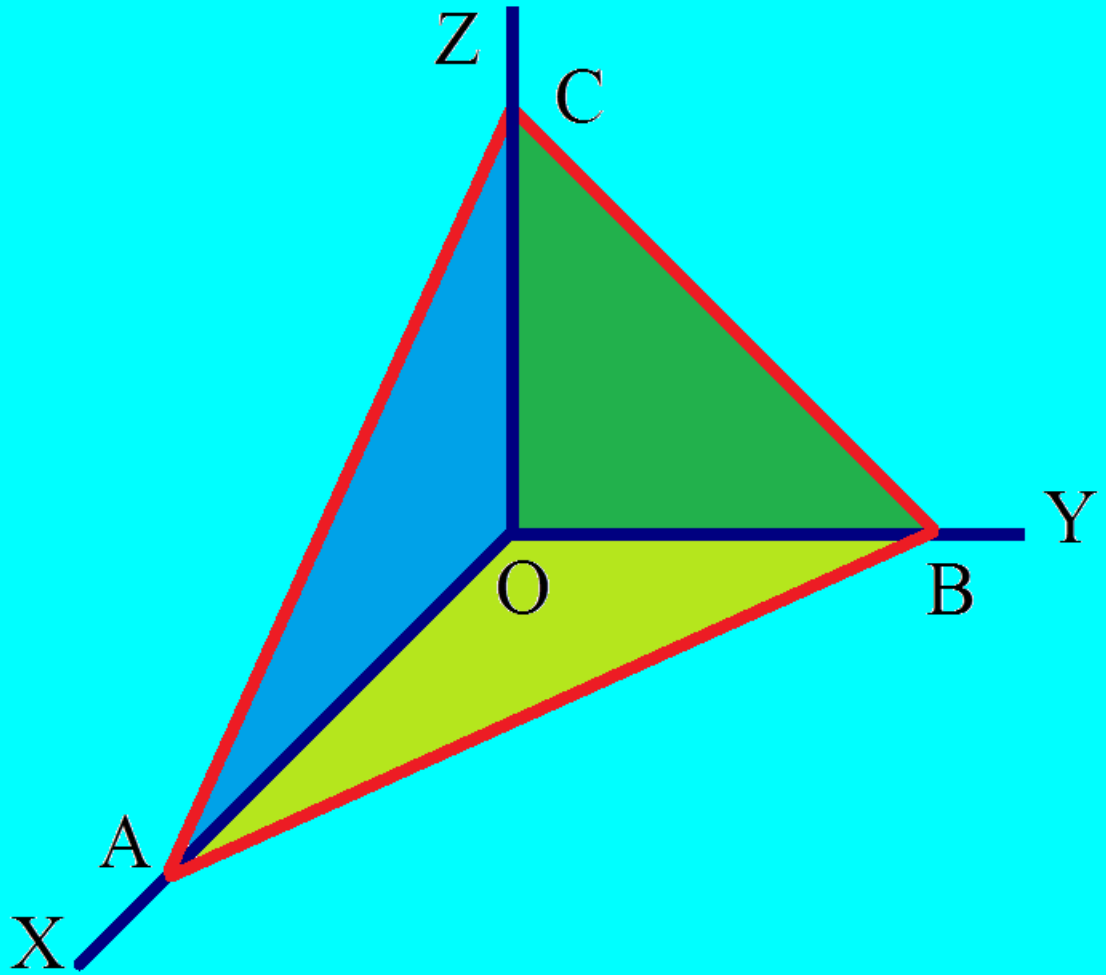


เสริมความรู้ คณิตศาสตร์โอลิมปิก โลกเรขาคณิต



$$(\Delta_{OAB})^2 + (\Delta_{OAC})^2 + (\Delta_{OBC})^2 = (\Delta_{ABC})^2$$

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

โลกเรขาคณิต

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : โลกเรขาคณิต

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 1

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : กันยายน พ.ศ. 2560

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-445-240-4

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

วิชา **เรขาคณิต** เป็นวิชาคณิตศาสตร์ที่มีการพิสูจน์ จึงเป็นการฝึกให้นักเรียนพิสูจน์เป็น ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ของประเทศไทยในสมัยโบราณเวลาที่พ่อแม่หรือผู้ปกครองเห็นตารางสอนของลูกหลานเมื่อพบคำว่า เลขคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ เรขาคณิต สถิติ จะรู้ทันทีว่าลูกหลานของท่านเรียนเรื่องอะไรมาเช่น

เรียนวิชา เลขคณิต จะได้เรียนเกี่ยวกับ ดัชนี ทศนิยม กำไร เงินต้น ดอกเบี้ย บัญญัติไตรยางค์

เรียนวิชา พีชคณิต จะได้เรียนเกี่ยวกับ การแยกตัวประกอบ การกระจายพหุนาม

เรียนวิชา ตรีโกณมิติ จะได้เรียนเกี่ยวกับ อัตราส่วนสามเหลี่ยมมุมฉาก การแก้รูปสามเหลี่ยม

เรียนวิชา เรขาคณิต จะได้เรียนเกี่ยวกับ สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม และ การพิสูจน์ (ช.ต.พ.)

เรียนวิชา สถิติ จะได้เรียนเกี่ยวกับ ข้อมูล ตารางความถี่ ค่าเฉลี่ย คะแนนมาตรฐาน

วันนี้ พ่อแม่หรือผู้ปกครอง หากท่านพบคำว่า เลขหลัก หรือคำว่า เลขเสริม ปรากฏในตารางสอนท่านจะรู้หรือไม่ว่าวันนี้ลูกของท่านเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องใดมา ในอดีตกาลความสำคัญของ **เรขาคณิต** ที่ต้องเข้ามาในหลักสูตร เหตุผลหนึ่งที่สำคัญคือ ต้องการให้นักเรียนเป็นคนมีเหตุผลและฝึกให้เขียนพิสูจน์เป็น ในปัจจุบันคำว่า **เรขาคณิต** จะปรากฏในตารางสอนของนักเรียน และ จะมีการเรียนวิชาเรขาคณิตกันอย่างจริงจังหรือไม่ ผู้เขียนขอฝากอนาคตของวิชาเรขาคณิตไว้กับ ครู นักเรียน และ ผู้ปกครอง ทุกท่าน

ในปัจจุบัน ครู นักเรียน และ ผู้ปกครอง เริ่มเห็นความสำคัญของ **เรขาคณิต** แล้ว โดยมีเหตุผลที่สำคัญคือ ถ้า **ไม่รู้เรขาคณิต** แล้ว มันใจได้ว่า เมื่อไปสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกนานาชาติ (IMO) ไม่มีทางทำได้ คะแนนเต็ม แน่นนอน (สอบตรรกะคัดเลือกของข้อสอบในประเทศไทยไปตั้งนานแล้ว) ที่ผู้เขียนมั่นใจว่าคำกล่าวอ้างข้างต้นเป็นจริง เพราะว่า ข้อสอบคัดเลือกเพื่อเป็นตัวแทนนักเรียนไทยไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกนานาชาติ ต้องออกข้อสอบเรขาคณิตแน่นอน และ ต้องออกหลายข้อด้วย นอกจากนั้นข้อสอบ IMO ที่เริ่มสอบครั้งแรก ปี ค.ศ. 1959 ที่ โรมานี ซึ่งออกสอบปีละ 6 ข้อ ยังต้องออกข้อสอบเรขาคณิต ตัวอย่างเช่น

ตั้งแต่ครั้งแรก IMO 1959 ที่ประเทศโรมาเนีย ข้อ 4. (ดูโจทย์และเฉลยที่ข้อ 2. บทที่ 8.)

จนถึงครั้งล่าสุด IMO 2008 ที่ประเทศสเปน ข้อ 1. (ดูโจทย์และเฉลยที่ข้อ 70. บทที่ 8.)

หนังสือ **โลกเรขาคณิต** ในเล่มประกอบด้วย บทนิยาม บทสร้าง ทฤษฎีบท จุด เส้นตรง เส้นขนาน สามเหลี่ยม สี่เหลี่ยม วงกลม ส่วนโค้ง คอร์ด เซกเตอร์ เส้นสัมผัสวงกลม สามเหลี่ยมคล้าย สามเหลี่ยมเท่ากัน ทุกประการ (ด.ด.ด.) (ด.ม.ด.) (ม.ม.ด.) (ด.จ.ด.) สามเหลี่ยมแนบในวงกลม สามเหลี่ยมล้อมรอบวงกลม อัตราส่วนสำคัญที่ได้จากสามเหลี่ยมคล้าย สี่เหลี่ยมแนบในวงกลม Pythagoras's Theorem ใน 2 มิติ และ 3 มิติ Ptolemy's theorem, Euler's Theorem in Geometry, Simson line, 9 - points circle, pedal triangle, Ceva's Theorem, Menelaus's Theorem และ นำเสนอโจทย์พร้อมเฉลยด้วยปัญหาจากง่ายระดับ ม.ต้น ไปยาก จนถึงระดับโอลิมปิกคณิตศาสตร์ (IMO) การเขียนพิสูจน์ มี 2 แบบ คือ รูปแบบตารางซึ่งเหมาะสมกับระดับมัธยมศึกษาตอนต้น และ การเขียนเหตุและผลไปพร้อมกันซึ่งเหมาะสมกับการเรียนระดับสูง

ขอขอบคุณผู้อ่านทุกท่านที่ติดตามผลงานมาโดยตลอด

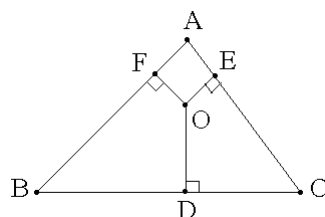
รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

บทที่ 1.	บทนิยาม และ ทฤษฎีบท	1 – 140
บทที่ 2.	บทสร้างทางเรขาคณิต	141 – 208
บทที่ 3.	เรขาคณิตและตรีโกณมิติ	209 – 264
บทที่ 4.	การรวมและการแยกรูปสามเหลี่ยม	265 – 290
บทที่ 5.	ฟังก์ชันค่าสัดส่วนของพื้นที่สามเหลี่ยม	291 – 318
บทที่ 6.	ทฤษฎีบทพีทาโกรัสในสามมิติ	319 – 356
บทที่ 7.	ฟังก์ชันสามตัวแปรที่ให้ค่าเกี่ยวกับสามเหลี่ยม	357 – 394
บทที่ 8.	เรขาคณิตและตรีโกณมิติในข้อสอบ IMO : International Mathematical Olympiads	395 – 474
บทที่ 9.	การแปลงเรขาคณิต	475 – 496

Erdos – Mordell Theorem

ให้ O เป็นจุดใน $\triangle ABC$, $OD \perp BC$, $OE \perp CA$, $OF \perp AB$ จะได้ $OA + OB + OC \geq 2(OD + OE + OF)$



หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ได้ที่ คณิตศาสตร์ปริยาย เล่มที่ 34 Problems and Solutions IMO 1983 – 1997

บทที่ 1

บทนิยาม และ ทฤษฎีบท

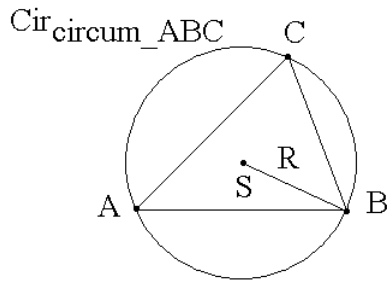


Euclid of Alexandria

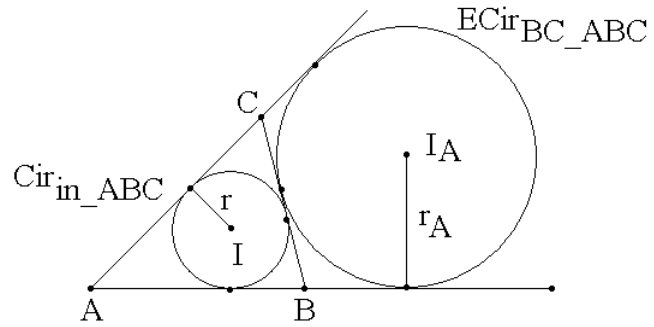
about 325 BC - about 265 BC

ข้อตกลงเกี่ยวกับสัญลักษณ์และบทนิยาม

1. จุด เป็นสิ่งที่ใช้บอกตำแหน่ง (ไม่มีขนาด) นิยมใช้สัญลักษณ์แทนจุดด้วย A, B, C, ...
2. เส้น เป็นทางเดินของจุด ซึ่งมีเฉพาะความยาว และ ไม่มีความกว้าง
3. AB ใช้แทนความหมายในหลายรูปแบบตามความเหมาะสม
 - 3.1 AB แทนส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B
 - 3.2 AB แทนส่วนของเส้นตรงระหว่างจุด A และ B
 - 3.3 AB แทนความยาวของส่วนเส้นตรงระหว่างจุด A และ B
4. $\overline{AB}$ ใช้แทนความหมายในหลายรูปแบบตามความเหมาะสม
 - 4.1 $\overline{AB}$ แทนส่วนของส่วนเส้นตรงระหว่างจุด A และ B
 - 4.2 $\overline{AB}$ แทนความยาวของส่วนเส้นตรงระหว่างจุด A และ B
 - 4.3 $\overline{AB}$ แทนความยาวของส่วนเส้นตรงที่วัดจาก จุด A ไปยังจุด B มีเครื่องหมายเป็น บวก
 $\overline{BA}$ แทนความยาวของส่วนเส้นตรงที่วัดจาก จุด A ไปยังจุด B มีเครื่องหมายเป็น ลบ
เพราะฉะนั้น $\overline{BA} = -\overline{AB}$
 - 4.4 $\overline{ABCD...}$ แทนส่วนของเส้นตรงที่ผ่านจุด A, B, C, D, ...
5. สามเหลี่ยม ABC คือบริเวณปิดล้อมด้วยเส้นตรง AB, BC, CA
 - 5.1 a, b, c เป็นความยาวด้าน BC, AC, AB ตามลำดับ
 - 5.2 $s = \frac{a+b+c}{2}$
 - 5.3 Δ หรือ Δ_{ABC} แทน พื้นที่ ΔABC
 - 5.4 Cir_{in_ABC} เป็นวงกลมแนบใน ΔABC
 - 5.5 Cir_{circum_ABC} เป็นวงกลมล้อมรอบ ΔABC

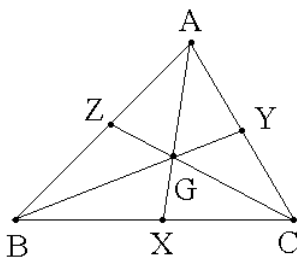


รูปที่ 1.1.1

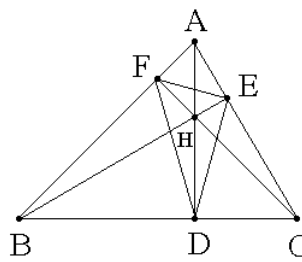


รูปที่ 1.1.2

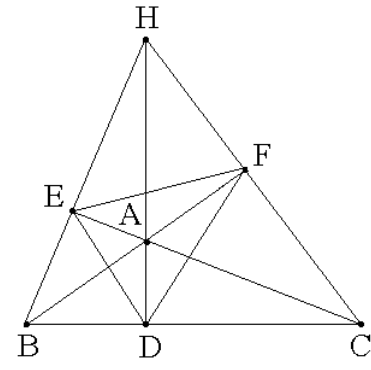
- 5.6 r หรือ r_{ABC} เป็นรัศมีของวงกลมแนบใน $\triangle ABC$
 5.7 R หรือ R_{ABC} เป็นรัศมีของวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$
 5.8 $ECir_{BC_ABC}$ เป็นวงกลมแนบนอก $\triangle ABC$ และสัมผัสด้าน BC
 5.9 I_A , r_A เป็นจุดศูนย์กลาง และ รัศมีของวงกลม $ECir_{BC_ABC}$ ตามลำดับ



รูปที่ 1.2.1



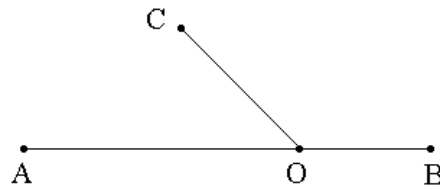
รูปที่ 1.2.2



รูปที่ 1.2.3

- 5.10 เส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของสามเหลี่ยมไปยังจุดบนเส้นตรงที่ผ่านด้านตรงข้าม เรียกว่า เซเวียน (Cevian)
 5.11 X, Y, Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ (รูปที่ 1.2.1)
 AX, BY, CZ เรียกว่า เส้นมัธยฐาน ของ $\triangle ABC$
 G เป็นจุดตัดของ AX, BY, CZ เรียกว่า จุดเซนทรอยด์ (centroid) ของ $\triangle ABC$
 m_A, m_B, m_C แทนความยาว AX, BY, CZ ตามลำดับ
 5.12 $AD \perp BC, BE \perp AC, CF \perp AB$ (รูปที่ 1.2.2)
 H เป็นจุดตัดของ AD, BE, CF เรียกว่า จุดออร์โทเซนเตอร์ (orthocenter) ของ $\triangle ABC$
 h_A, h_B, h_C แทนความยาว AD, BE, CF ตามลำดับ
 เพราะฉะนั้น h_A, h_B, h_C เป็นความสูงของ $\triangle ABC$ ที่วัดจากจุดยอด A, B, C
 $\triangle DEF$ เรียกว่า สามเหลี่ยมฟีเดล (pedel) ของ $\triangle ABC$
 หมายเหตุ กรณิที่ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม จุด H จะอยู่ใน $\triangle ABC$ (รูปที่ 1.2.2)
 กรณิที่ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน จุด H จะอยู่นอก $\triangle ABC$ (รูปที่ 1.2.3)

6.



รูปที่ 1.3

6.1 C เป็นจุดนอกเส้นตรง AB และ O เป็นจุดบนเส้นตรง AB ลากเส้นตรง CO

มุม AOC และ BOC เรียกว่า มุมประชิดของเส้นตรง

6.2 มุมเส้นตรง AOB = 180 องศา และ 1 มุมฉาก = 90 องศา

7. $\hat{A}$, $\hat{B}$ เป็นมุมที่มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก และ $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$

$\hat{A}$, $\hat{B}$ เรียกว่า มุมประกอบสองมุมฉาก (supplementary angle)

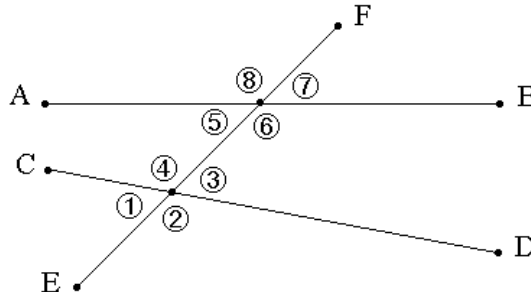
หรือ $\hat{A}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของ $\hat{B}$

8. $\hat{A}$, $\hat{B}$ เป็นมุมที่มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก และ $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$

$\hat{A}$, $\hat{B}$ เรียกว่า มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก (complementary angle)

หรือ $\hat{A}$ เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉากของ $\hat{B}$

9. เส้นตรง AB และ CD ตัดกับเส้นตรง EF เกิดมุม ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧, ดังรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4

มุม ①, ②, ⑦, ⑧ เรียกว่า มุมภายนอก (exterior angle)

มุม ③, ④, ⑤, ⑥ เรียกว่า มุมภายใน (interior angle) มุม ④, ⑥ เรียกว่า มุมแย้ง (alternate angle)

มุมภายใน ③ เรียกว่า มุมภายในด้านตรงข้าม (interior opposite) ของมุมภายนอก ⑦ ด้านเดียวกันของ EF

มุมภายใน ③ และ มุมภายนอก ⑦ เรียกว่า มุมที่สมนัยกัน (corresponding angle)

ในทำนองเดียวกัน จะได้ มุม ③, ⑤ เป็นมุมแย้ง

มุมภายใน ④ เป็นมุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอก ⑧ ด้านเดียวกันของ EF

มุมภายใน ⑤ เป็นมุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอก ① ด้านเดียวกันของ EF

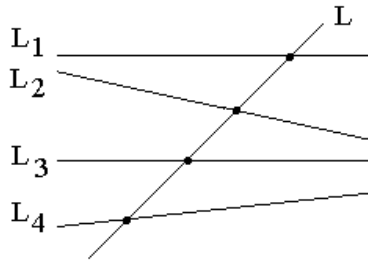
มุมภายใน ⑥ เป็นมุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอก ② ด้านเดียวกันของ EF

มุมภายใน ④ และ มุมภายนอก ⑧ เป็นมุมที่สมนัยกัน

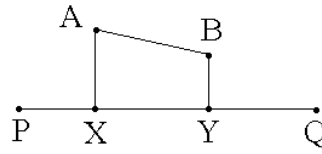
มุมภายใน ⑤ และ มุมภายนอก ① เป็นมุมที่สมนัยกัน

มุมภายใน ⑥ และ มุมภายนอก ② เป็นมุมที่สมนัยกัน

10. เส้นตรง L ที่ตัดผ่านกลุ่มของเส้นตรง $L_1, L_2, \dots, L_n$ เรียกว่า **เส้นตัดขวาง** (transversal)



รูปที่ 1.5.1



รูปที่ 1.5.2

จากรูปที่ 1.5.1 เส้นตรง L เป็นเส้นตัดขวางของ L_1, L_2, L_3, L_4

11. AB, PQ เป็นเส้นตรง X, Y เป็นจุดบนเส้นตรงที่ผ่าน PQ โดยที่ $AX \perp PQ$ และ $BY \perp PQ$ เส้นตรง XY เรียกว่า **ฉายฉาย** ของเส้นตรง AB บน PQ (orthogonal projection of AB on PQ)

12. **สี่เหลี่ยม** (quadrilateral) คือบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงสี่เส้น

เส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดยอดของสี่เหลี่ยมที่ตรงข้ามกัน เรียกว่า **เส้นทแยงมุม** (diagonal)

สี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน เรียกว่า **สี่เหลี่ยมด้านขนาน** (parallelogram)

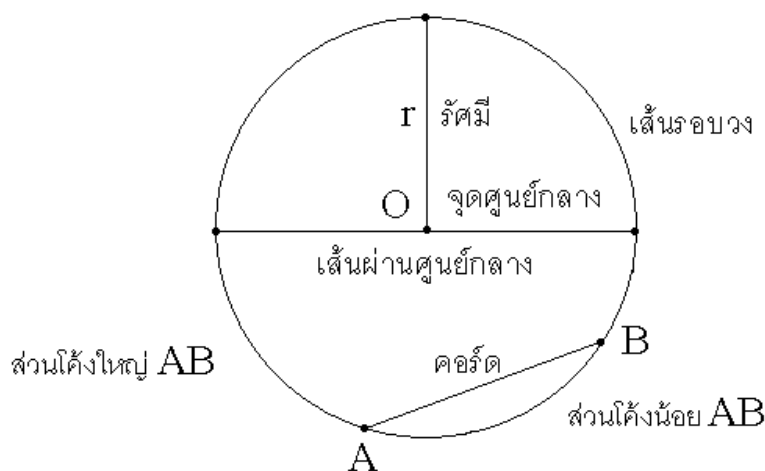
สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีมุมยอดมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก เรียกว่า **สี่เหลี่ยมผืนผ้า** (rectangle)

สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ด้านประกอบมุมยอดเดียวกันยาวเท่ากัน เรียกว่า **สี่เหลี่ยมจัตุรัส** (square)

สี่เหลี่ยมที่ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน เรียกว่า **สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน** (rhombus)

สี่เหลี่ยมที่ด้านขนานกันหนึ่งคู่ เรียกว่า **สี่เหลี่ยมคางหมู** (trapezium)

13. **วงกลม**



รูปที่ 1.6

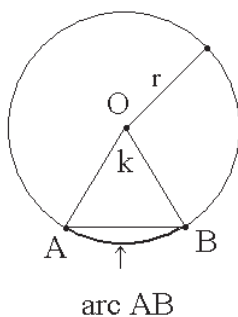
13.1 วงกลม คือทางเดินของจุดที่ห่างจากจุดคงที่ (O) เป็นระยะคงที่ (r)

13.2 ระยะคงที่ r เรียกว่า **รัศมี** (radius)

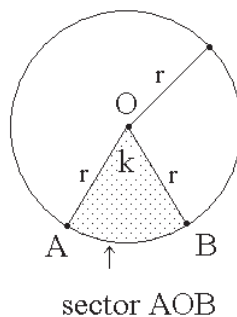
13.3 จุดคงที่ O เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (centre)

13.4 เส้นบนวงกลม เรียกว่า **เส้นรอบวง** (circumference)

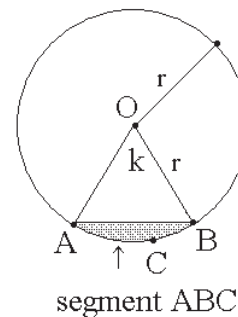
- 13.5 เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางและสิ้นสุดที่เส้นรอบวงทั้งสองด้าน
เรียกว่า เส้นผ่านศูนย์กลาง (diameter)
- 13.6 ส่วนที่ปิดล้อมด้วยเส้นผ่านศูนย์กลางและเส้นรอบวงกลมด้านหนึ่ง
เรียกว่า ครึ่งวงกลม (semi-circle)
- 13.7 วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน เรียกว่า วงกลมร่วมศูนย์กลาง (concentric)
- 13.8 ส่วนโค้งของเส้นรอบวงกลม เรียกว่า ส่วนโค้ง (arc)
- 13.9 เส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดสองจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม เรียกว่า คอร์ด (chord)
- 13.10 คอร์ดตัดแบ่งเส้นรอบวงกลมเป็นสองส่วน ส่วนโค้งที่ยาวกว่า เรียกว่า ส่วนโค้งใหญ่ (major arc)
ส่วนโค้งที่สั้นกว่า เรียกว่า ส่วนโค้งน้อย (minor arc)



รูปที่ 1.7.1



รูปที่ 1.7.2



รูปที่ 1.7.3

13.11 เซกเตอร์ OAB (sector OAB)

หมายถึง ส่วนของวงกลมที่ปิดล้อมด้วยรัศมี OA, OB และส่วนโค้ง AB

เซกเตอร์ OAB ที่ $\angle AOB$ เป็นมุมเล็ก เรียกว่า เซกเตอร์เล็ก OAB

เซกเตอร์ OAB ที่ $\angle AOB$ เป็นมุมใหญ่ เรียกว่า เซกเตอร์ใหญ่ OAB

13.12 segment ABC หมายถึง ส่วนของวงกลมที่ปิดล้อมด้วยคอร์ด AB และ ส่วนโค้ง ACB

13.13 พื้นที่วงกลม = πr^2 ความยาวเส้นรอบวงกลม = $2\pi r$ และ ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง = $2r$

มุมรอบจุด = 360 องศา และ มุมรอบจุด = 2π เรเดียน

1 องศา = $\frac{\pi}{180}$ เรเดียน และ 1 เรเดียน = $\frac{180}{\pi}$ องศา

ค่าของ $\pi = \frac{\text{ความยาวเส้นรอบวงกลม}}{\text{ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง}} = 3.1415926$

หมายเหตุ ตำราบางเล่มใช้ค่าประมาณ = $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14

กำหนดให้ $\angle AOB = k^\circ$

รูปที่ 1.7.1 ความยาวส่วนโค้ง AB = $\frac{k}{360} (2\pi r)$

รูปที่ 1.7.2 พื้นที่เซกเตอร์ AOB = $\frac{k}{360} (\text{พื้นที่วงกลม}) = \frac{k}{360} (\pi r^2)$
 $= \frac{k}{360} \left(\frac{1}{2} (2\pi r)r \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{k}{360} (2\pi r) \right) r = \frac{1}{2} (\text{ความยาวส่วนโค้ง AB})r$

รูปที่ 1.7.3 พื้นที่เซกเมนต์ AOB = พื้นที่เซกเตอร์ AOB - พื้นที่ $\triangle OAB$

14. มุมต่าง ๆ

- 14.1 มุมแหลม คือ มุมที่มีค่าเป็นบวก และมีขนาดเล็กกว่า 90 องศา
- 14.2 มุมฉาก คือ มุมที่มีค่าเป็นบวก และมีขนาด 90 องศา
- 14.3 มุมป้าน คือ มุมที่มีค่าเป็นบวก และมีขนาดมากกว่า 90 องศา และ เล็กกว่า 180 องศา
- 14.4 มุมกลับ คือ มุมที่มีค่าเป็นบวก และมีขนาดมากกว่า 180 องศา และ น้อยกว่า 360 องศา

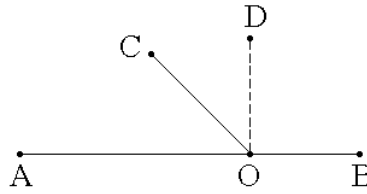
15. รูปสามเหลี่ยมชนิดต่าง ๆ

- 15.1 สามเหลี่ยมมุมแหลม คือสามเหลี่ยมที่มุมทุกมุมเป็นมุมแหลม
- 15.2 สามเหลี่ยมมุมป้าน คือสามเหลี่ยมที่มุมหนึ่งมุมเป็นมุมป้าน
- 15.3 สามเหลี่ยมมุมฉาก คือสามเหลี่ยมที่มุมหนึ่งมุมเป็นมุมฉาก
- 15.4 สามเหลี่ยมด้านเท่า คือสามเหลี่ยมที่ด้านทั้งสามด้านยาวเท่ากัน
- 15.5 สามเหลี่ยมมุมเท่า คือสามเหลี่ยมที่มุมทั้งสามมุมมีขนาดเท่ากัน
- 15.6 สามเหลี่ยมหน้าจั่ว คือสามเหลี่ยมที่ด้านยาวเท่ากันสองด้าน (หรือ มุมเท่ากันสองมุม)

16. รูปสี่เหลี่ยมชนิดต่าง ๆ

- 16.1 สี่เหลี่ยมจัตุรัส คือสี่เหลี่ยมที่มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน
มีสมบัติ เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน เส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
- 16.2 สี่เหลี่ยมผืนผ้า คือสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน ด้านที่ติดกันยาวไม่เท่ากัน ทุกมุมเป็นมุมฉาก
สมบัติ เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
- 16.3 สี่เหลี่ยมด้านขนาน คือสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามยาวเท่ากันและขนานกัน
มีสมบัติ เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
- 16.4 สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน คือสี่เหลี่ยมที่ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน มุมแต่ละมุมไม่เป็นมุมฉาก
มีสมบัติ เส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน
- 16.5 สี่เหลี่ยมคางหมู คือสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน 1 คู่เท่านั้น
- 16.6 สี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว คือสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีด้านตรงข้ามที่ไม่ขนานกันมีความยาวเท่ากัน
- 16.7 สี่เหลี่ยมรูปวาว คือสี่เหลี่ยมที่มีด้านประชิดยาวเท่ากัน 2 คู่
มีสมบัติ เส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน เส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งแบ่งครึ่งเส้นทแยงมุมอีกเส้นหนึ่ง
- 16.8 สี่เหลี่ยมมุม คือสี่เหลี่ยมที่มุมทุกมุมมีค่าน้อยกว่า 180°
- 16.9 สี่เหลี่ยมมุมฉาก คือสี่เหลี่ยมจัตุรัส หรือ สี่เหลี่ยมผืนผ้า

ทฤษฎีบท 1. มุมประชิดของเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งรวมกันเท่ากับ 2 มุมฉาก
[Euclid I. 13.]



รูปที่ 1.8

กำหนดให้ O อยู่บนเส้นตรง AB และ C อยู่นอกเส้นตรง AB ลากเส้นตรง OC

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{AOC} + \hat{COB} = 2$ มุมฉาก

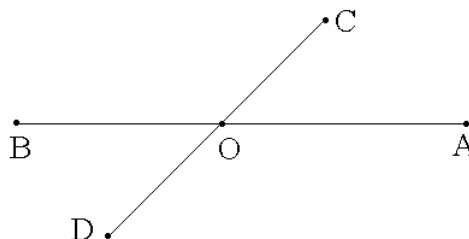
บทสร้าง ลากเส้นตรง $OD \perp AB$

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{AOC} + \hat{COB} = \hat{AOC} + \hat{COD} + \hat{DOB}$	1. $\hat{COB} = \hat{COD} + \hat{DOB}$
2. $\hat{AOD} + \hat{DOB} = \hat{AOC} + \hat{COD} + \hat{DOB}$	2. $\hat{AOD} = \hat{AOC} + \hat{COD}$
3. $\hat{AOC} + \hat{COB} = \hat{AOD} + \hat{DOB}$	3. จาก (1) และ (2)
4. $\hat{AOC} + \hat{COB} = 2$ มุมฉาก	4. $\hat{AOD} = \hat{DOB} = 90^\circ$ Q.E.D.

หมายเหตุ Q.E.D. = Quod Erat Demonstrandum (= which was the thing that had to be proved.)

ทฤษฎีบท 1.1 เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน มุมทั้ง 4 มุมที่เกิดขึ้นรวมกันเท่ากับ 4 มุมฉาก



รูปที่ 1.9

กำหนดให้ AB และ CD ตัดกันที่จุด O

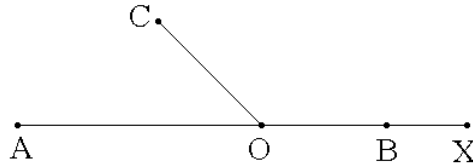
จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{AOC} + \hat{COB} + \hat{AOD} + \hat{DOB} = 4$ มุมฉาก

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{AOC} + \hat{COB} = 2$ มุมฉาก	1. ทฤษฎีบท 1.
2. $\hat{AOD} + \hat{DOB} = 2$ มุมฉาก	2. ทฤษฎีบท 1.
3. $\hat{AOC} + \hat{COB} + \hat{AOD} + \hat{DOB} = 4$ มุมฉาก	3. จาก (1) และ (2) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 2. ที่จุดปลาย O ของเส้นตรง OC มีเส้นตรง OA และ OB อยู่คนละด้านของเส้นตรง OC ถ้า $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$ แล้ว OA และ OB เป็นเส้นตรงเดียวกัน

[Euclid I. 14.]



รูปที่ 1.10

กำหนดให้ CO เป็นเส้นตรง มีเส้นตรง OA และ OB อยู่คนละด้านของ OC และ $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$

จะต้องพิสูจน์ว่า OB และ OA เป็นเส้นตรงเดียวกัน

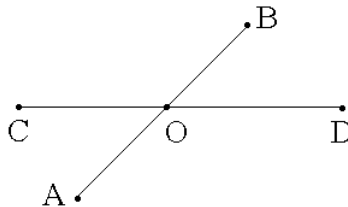
บทสร้าง ลากเส้นตรง OX ให้อยู่แนวเดียวกันกับ OA

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle AOC + \angle COX = 180^\circ$	1. $\overline{AOX}$ เป็นเส้นตรง
2. $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$	2. กำหนดให้
3. $\angle COX = \angle COB$	3. จาก (1) และ (2)
4. OB และ OX เป็นเส้นตรงเดียวกัน	4. จาก (3) $\angle COX = \angle COB$
5. OB และ OA เป็นเส้นตรงเดียวกัน	5. OX และ OA เป็นเส้นตรงเดียวกัน Q.E.D.

ทฤษฎีบท 3. เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามต้องเท่ากัน

[Euclid I. 15.]



รูปที่ 1.11

กำหนดให้ เส้นตรง AB และ CD ตัดกันที่จุด O

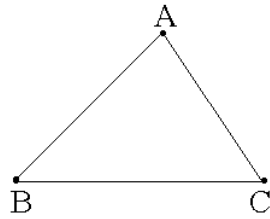
จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle AOD = \angle BOC$ และ $\angle AOC = \angle BOD$

ข้อพิสูจน์

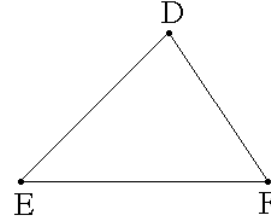
ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle AOC + \angle COB = 180^\circ$	1. มุมประชิดรวมกันเท่ากับ สองมุมฉาก
2. $\angle COB + \angle BOD = 180^\circ$	2. มุมประชิดรวมกันเท่ากับ สองมุมฉาก
3. $\angle AOC = \angle BOD$	3. จาก (1) และ (2)
4. $\angle AOD + \angle DOB = 180^\circ$	4. มุมประชิดรวมกันเท่ากับ สองมุมฉาก
5. $\angle DOB + \angle BOC = 180^\circ$	5. มุมประชิดรวมกันเท่ากับ สองมุมฉาก
6. $\angle AOD = \angle BOC$	6. จาก (4) และ (5) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 4. ถ้า สามเหลี่ยมสองรูป มีด้านเท่ากันสองด้าน และ มุมระหว่างด้านที่เท่ากันมีขนาดของมุมเท่ากัน แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

[Euclid I. 4.]



รูปที่ 1.12.1



รูปที่ 1.12.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $AB = DE$, $AC = DF$ และ $\angle BAC = \angle EDF$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ

บทสร้าง เลื่อนจุด A ทับจุด D และ แนวเส้นตรง AB ทับแนวเส้นตรง DE

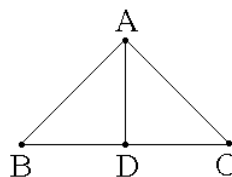
ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. จุด B ทับจุด E	1. $AB = DE$
2. AC ซ้อนทับ DF	2. $\angle BAC = \angle EDF$
3. จุด C ทับจุด F	3. $AC = DF$
4. BC, EF เป็นเส้นตรงเดียวกัน	4. จุด B ทับจุด E และ จุด C ทับจุด F
5. $\triangle ABC$ ซ้อนทับ $\triangle DEF$ พอดี	5. A ทับจุด D, จุด B ทับจุด E, จุด C ทับจุด F
6. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ	6. จาก (5) $\triangle ABC$ ซ้อนทับ $\triangle DEF$ Q.E.D.

หมายเหตุ การกล่าวอ้างผลของทฤษฎีบทนี้จะใช้คำย่อว่า ด้าน-มุม-ด้าน หรือ ด.ม.ด.

ทฤษฎีบท 5. มุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่ากัน

[Euclid I. 5.]



รูปที่ 1.13

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี $AB = AC$ และ BC เป็นฐาน

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC = \angle ACB$

บทสร้าง ลาก AD แบ่งครึ่งมุม $\angle BAC$

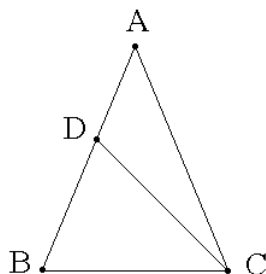
ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle BAD = \angle DAC$	1. บทสร้าง
2. $AB = AC$	2. กำหนดให้
3. AD ด้านร่วม	3. บทสร้าง
4. $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$ เท่ากันทุกประการ	4. ด.ม.ด. (1), (2) และ (3)

5. $\hat{A}BD = \hat{A}CD$ 6. $\hat{A}BC = \hat{A}BD = \hat{A}CD = \hat{A}CB$	5. $\triangle ABD$ และ $\triangle ACD$ เท่ากันทุกประการ 6. จาก (5), $\hat{A}BC = \hat{A}BD$ และ $\hat{A}CD = \hat{A}CB$ Q.E.D.
--	--

ทฤษฎีบท 6. ถ้าสามเหลี่ยมมีมุมเท่ากันสองมุม แล้ว ด้านตรงมุมที่เท่ากันต้องยาวเท่ากัน

[Euclid I. 6.]



รูปที่ 1.14

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $\hat{A}BC = \hat{A}CB$

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB = AC$

ข้อพิสูจน์ สมมติ $AB \neq AC$ โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $AB > AC$

บทสร้าง ให้ D เป็นจุดบนด้าน AB ที่ทำให้ $BD = AC$ และ ลากเส้น CD

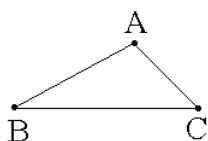
เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\triangle BDC <$ พื้นที่ $\triangle ABC$

... (*)

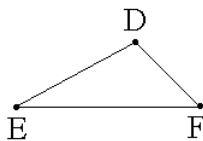
ข้อความ	เหตุผล
1. $BD = AC$ 2. BC เป็นด้านร่วมของ $\triangle BDC$ และ $\triangle ABC$ 3. $\hat{D}BC = \hat{A}BC$ 4. $\hat{D}BC = \hat{A}CB$ 5. $\triangle BDC$ และ $\triangle ABC$ เท่ากันทุกประการ 6. พื้นที่ $\triangle BDC =$ พื้นที่ $\triangle ABC$ 7. เกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น ที่สมมติไว้ไม่จริง เพราะฉะนั้น $AB = AC$	1. บทสร้าง 2. จากรูปที่ 1.14 3. เป็นมุมเดียวกัน 4. กำหนดให้ $\hat{A}BC = \hat{A}CB$ 5. ด.ม.ด. (1), (2) และ (4) 6. $\triangle BDC$ และ $\triangle ABC$ เท่ากันทุกประการ 7. จาก (*) และ (6) ขัดแย้งกัน Q.E.D.

ทฤษฎีบท 7. ถ้า สามเหลี่ยมสองรูปมีด้านเท่ากันทั้งสามคู่ แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการ

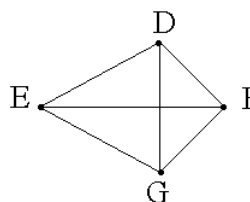
[Euclid I. 8.]



รูปที่ 1.15.1



รูปที่ 1.15.2



รูปที่ 1.15.3

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $AB = DE$, $BC = EF$ และ $AC = DF$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ

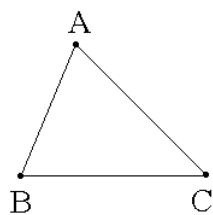
ข้อพิสูจน์

บทสร้าง เลื่อน $\triangle ABC$ มาซ้อนทับ $\triangle DEF$ โดยให้ B ทับจุด E และ แนวเส้นตรง BC ทับ แนวเส้นตรง EF และจุด A, D อยู่คนละด้านของเส้นตรง EF

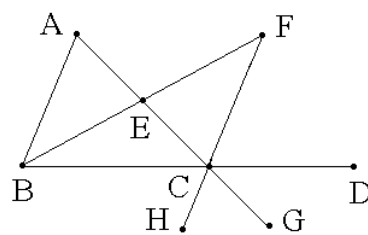
ข้อความ	เหตุผล
1. จุด C ทับจุด F	1. $BC = EF$
2. $\triangle ABC$ และ $\triangle EFG$ เท่ากันทุกประการ	2. แทนจุด A ด้วยจุด G
3. $ED = EG$	3. $ED = AB, AB = EG$
4. $\angle EDG = \angle EGD$	4. มุมตรงข้ามด้านเท่ากันของ $\triangle EDG$
5. $FD = FG$	5. $FD = AC, AC = FG$
6. $\angle FDG = \angle FGD$	6. มุมตรงข้ามด้านเท่ากันของ $\triangle FDG$
7. $\angle EDF = \angle EDG + \angle FDG = \angle EGD + \angle FGD = \angle EGF$	7. จาก (4) และ (6)
8. $\angle EDF = \angle BAC$	8. จากบทสร้างจะได้ $\angle BAC = \angle EGF$
9. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ	9. $AB = DE, \angle EDF = \angle BAC, AC = DF$ (ด.ม.ด.) Q.E.D.

หมายเหตุ การกล่าวอ้างผลของทฤษฎีบทนี้จะใช้คำย่อว่า ด้าน-ด้าน-ด้าน หรือ ด.ด.ด.

ทฤษฎีบท 8. ต่อด้านของสามเหลี่ยมออกไปมุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะใหญ่กว่ามุมภายในด้านตรงข้ามทั้งสองมุม [Euclid I. 16.]



รูปที่ 1.16.1



รูปที่ 1.16.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มีด้าน BC ถูกต่อออกไปที่จุด D

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ACD > \angle ABC$ และ $\angle ACD > \angle BAC$

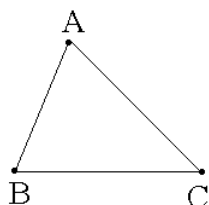
ข้อพิสูจน์

- บทสร้าง
1. ให้ E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC ลากเส้นตรง BE
 2. ต่อ BE ไปที่ F โดยให้ $BE = EF$ และ ลากเส้นตรง FC
 3. ต่อเส้นตรง AC ไปที่จุด G และ ต่อเส้นตรง FC ไปที่จุด H

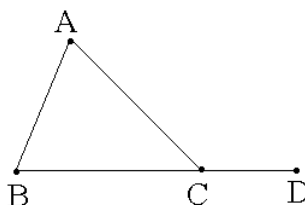
ข้อความ	เหตุผล
1. $AE = CE$	1. E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC บทสร้างข้อ 1.
2. $BE = EF$	2. บทสร้างข้อ 2.
3. $\angle AEB = \angle CEF$	3. มุมตรงข้าม
4. $\triangle ABE$ และ $\triangle CEF$ เท่ากันทุกประการ	4. ด.ม.ด. (1), (2) และ (3)
5. $\angle BAE = \angle ECF$	5. $\triangle ABE$ และ $\triangle CEF$ เท่ากันทุกประการ
6. $\angle ECD > \angle BAE$	6. $\angle ECD > \angle ECF$ และ $\angle BAE = \angle ECF$

7. $\hat{A}CD > \hat{B}AC$	7. $\hat{A}CD = \hat{E}CD$ และ $\hat{B}AE = \hat{B}AC$
8. $\hat{B}CG > \hat{A}BC$	8. พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับข้างต้น
9. $\hat{B}CG = \hat{A}CD$	9. มุมตรงข้าม
10. $\hat{A}CD > \hat{A}BC$	10. จาก (8) และ (9) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 8.1 ผลบวกของมุมภายในสามเหลี่ยมสองมุมมีค่าน้อยกว่าสองมุมฉาก



รูปที่ 1.17.1



รูปที่ 1.17.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{A}BC + \hat{A}CB$, $\hat{A}BC + \hat{B}AC$, $\hat{A}CB + \hat{B}AC$ น้อยกว่าสองมุมฉาก

บทสร้าง ต่อด้าน BC ไปที่ D

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}BC < \hat{A}CD$	1. ทฤษฎีบท 8.
2. $\hat{A}BC + \hat{A}CB < \hat{A}CD + \hat{A}CB$	2. บวกทั้งสองข้างด้วย $\hat{A}CB$
3. $\hat{A}BC + \hat{A}CB < \text{สองมุมฉาก}$	3. $\hat{A}CD + \hat{A}CB = \text{สองมุมฉาก}$
4. $\hat{A}BC + \hat{B}AC < \text{สองมุมฉาก}$ และ $\hat{A}CB + \hat{B}AC < \text{สองมุมฉาก}$	4. พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน Q.E.D.

ทฤษฎีบท 8.2 สามเหลี่ยมทุกรูปต้องมีมุมแหลมอย่างน้อยสองมุม

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ สามเหลี่ยมมีมุมป้านได้อย่างมากหนึ่งมุม

ข้อพิสูจน์ สมมติ $\triangle ABC$ มีมุมแหลมเพียงหนึ่งมุม

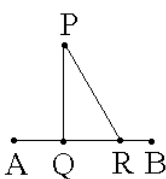
โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $\hat{A}BC$ เป็นมุมแหลม

เพราะฉะนั้น $\hat{B}AC$ และ $\hat{A}CB$ เป็นมุมป้าน เพราะฉะนั้น $\hat{B}AC + \hat{A}CB > \text{สองมุมฉาก}$... (1)

จาก ทฤษฎีบท 8.1 จะได้ $\hat{B}AC + \hat{A}CB < \text{สองมุมฉาก}$... (2)

(1) และ (2) ขัดแย้งกัน เพราะฉะนั้นที่สมมติไว้ไม่จริง เพราะฉะนั้น $\triangle ABC$ มีมุมแหลมอย่างน้อยสองมุม $\square$

ทฤษฎีบท 8.3 จากจุดที่อยู่บนเส้นตรง ลากเส้นมาตั้งฉากกับเส้นตรงนั้นได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น



รูปที่ 1.18

กำหนดให้ P เป็นจุดนอกเส้นตรง AB

จะต้องพิสูจน์ว่า มีจุด Q หนึ่งจุดเท่านั้นบน AB ที่ทำให้ $PQ \perp AB$

ข้อพิสูจน์ สมมติมีจุด R บน AB โดยที่จุด P และ จุด Q เป็นจุดที่ต่างกัน และ $PR \perp AB$

เพราะฉะนั้น $\triangle PQR$ มีมุม $\angle PQR + \angle PRQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$... (1)

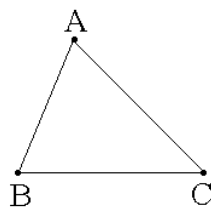
เพราะว่า $\angle PQR$ และ $\angle PRQ$ เป็นมุมภายใน $\triangle PQR$ เพราะฉะนั้น $\angle PQR + \angle PRQ < 180^\circ$... (2)

เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้งระหว่าง (1) และ (2) เพราะฉะนั้น ที่สมมติไว้ไม่จริง

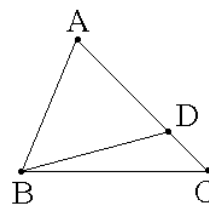
เพราะฉะนั้น มีจุด Q หนึ่งจุดเท่านั้นบน AB ที่ทำให้ $PQ \perp AB$ □

ทฤษฎีบท 9. ในสามเหลี่ยม มุมที่อยู่ด้านตรงข้ามด้านใหญ่ มีขนาดใหญ่กว่ามุมที่อยู่ด้านตรงข้ามด้านเล็ก

[Euclid I. 18.]



รูปที่ 1.19.1



รูปที่ 1.19.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $AC > AB$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle ABC > \angle ACB$

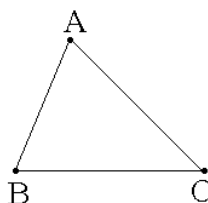
บทสร้าง ให้ D เป็นจุดบน AC และ $AD = AB$ และ ลากเส้น BD

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle ABD = \angle ADB$	1. $AB = AD$ (ทฤษฎีบท 5.)
2. $\angle ADB > \angle DCB$	2. มุมภายนอก $\triangle BCD$ จะใหญ่กว่ามุมภายในด้านตรงข้าม (ทฤษฎีบท 8.)
3. $\angle ADB > \angle ACB$	3. $\angle DCB, \angle ACB$ เป็นมุมเดียวกัน
4. $\angle ABD > \angle ACB$	4. จาก (1) และ (3)
5. $\angle ABC > \angle ABD$	5. จุด D อยู่บนเส้นตรงระหว่างจุด A และ C
6. $\angle ABC > \angle ACB$	6. จาก (4) และ (5) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 10. ในสามเหลี่ยม ด้านที่อยู่ด้านตรงข้ามมุมใหญ่ มีขนาดยาวกว่าด้านที่อยู่ด้านตรงข้ามมุมเล็ก

[Euclid I. 19.]



รูปที่ 1.20

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $\angle ABC > \angle ACB$

จะต้องพิสูจน์ว่า $AC > AB$

ข้อพิสูจน์ สมมติ $AC \leq AB$

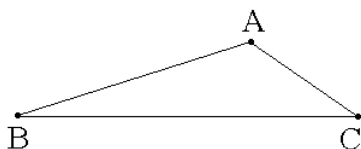
กรณีที่ 1. $AC = AB$ เพราะฉะนั้น $\hat{A}BC = \hat{A}CB$ ขัดแย้งกับข้อกำหนด $\hat{A}BC > \hat{A}CB$

กรณีที่ 2. $AC < AB$ โดยทฤษฎีบท 9. จะได้ $\hat{A}BC < \hat{A}CB$ ขัดแย้งกับข้อกำหนด $\hat{A}BC > \hat{A}CB$

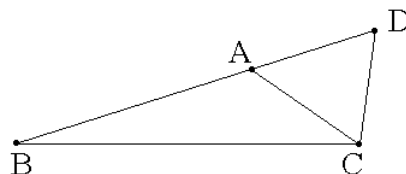
เพราะฉะนั้น สิ่งที่เรสมมติไว้ไม่จริง เพราะฉะนั้น $AC > AB$ □

ทฤษฎีบท 11. ด้านสองด้านของสามเหลี่ยมรวมกันยาวกว่าด้านที่สาม

[Euclid I. 20.]



รูปที่ 1.21.1



รูปที่ 1.21.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $AC \leq AB \leq BC$

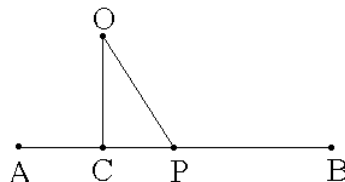
จะต้องพิสูจน์ว่า $AB + AC > BC$

บทสร้าง ต่อเส้นตรง BA ไปที่จุด D โดยที่ $AD = AC$ และ ลากเส้นตรง CD (รูปที่ 1.21.2)

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}CD = \hat{A}DC$	1. $AD = AC$ (ทฤษฎีบท 5.)
2. $\hat{B}CD > \hat{A}CD$	2. จุด A อยู่บนเส้นตรงระหว่างจุด B และ D
3. $\hat{B}CD > \hat{A}DC$	3. จาก (1) และ (2)
4. $\hat{B}CD > \hat{B}DC$	4. $\hat{A}DC$, $\hat{B}DC$ เป็นมุมเดียวกัน
5. $BD > BC$	5. ใน $\triangle ACD$ ด้านตรงข้ามมุมใหญ่ ยาวกว่า ด้านตรงข้ามมุมเล็ก (ทฤษฎีบท 10.)
6. $BA + AD > BC$	6. $BD = BA + AD$
7. $AB + AC > BC$	7. $AD = AC$ (บทสร้าง) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 12. O เป็นจุดนอกเส้นตรง AB ในบรรดาเส้นตรงที่ลากจาก O มายังเส้นตรง AB เส้นที่ตั้งฉากกับ AB จะเป็นเส้นที่สั้นที่สุด



รูปที่ 1.22

กำหนดให้ O เป็นจุดนอกเส้นตรง AB และ C เป็นจุดบน AB และ $OC \perp AB$ และ P เป็นจุดบน AB

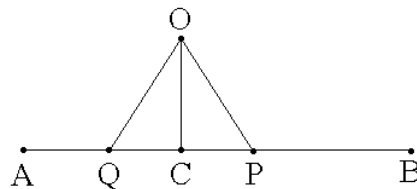
จะต้องพิสูจน์ว่า $OC < OP$

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{OCP} = 90^\circ$	1. กำหนดให้
2. $\hat{OCP} + \hat{OPC} < 180^\circ$	2. มุมภายในสามเหลี่ยมสองมุมรวมกันมีค่าน้อยกว่าสองมุมฉาก (ทฤษฎีบท 8.1)
3. $\hat{OPC} < 90^\circ$	3. จาก (1) และ (2)
4. $\hat{OPC} < \hat{OCP}$	4. จาก (1) และ (3)
5. $OC < OP$	5. ใน $\triangle CPO$ ด้านตรงข้ามมุมใหญ่ ยาวกว่าด้านตรงข้ามมุมเล็ก (ทฤษฎีบท 10.) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 12.1 O เป็นจุดอยู่นอกเส้นตรง AB และ C อยู่บน AB

ถ้า OC เป็นเส้นตรงที่สั้นที่สุดที่ลากจาก O มายัง AB แล้ว $OC \perp AB$



รูปที่ 1.23

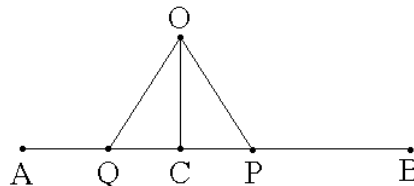
กำหนดให้ O เป็นจุดนอก AB และ C อยู่บน AB และ OC เป็นเส้นตรงที่สั้นที่สุดที่ลากจาก O มายัง AB จะต้องพิสูจน์ว่า $OC \perp AB$

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. เส้นตรงจาก O มาตั้งฉากกับ AB มีได้เส้นเดียว	1. ทฤษฎีบท 8.3
2. เส้นตรงที่สั้นที่สุดจาก O มายัง AB คือ OC	2. กำหนดให้
3. เส้นตั้งฉากจาก O มายัง AB เป็นเส้นที่สั้นที่สุด	3. ทฤษฎีบท 12.
4. $OC \perp AB$	4. จาก (1), (2) และ (3) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 12.2 C เป็นจุดบนเส้นตรง AB และ O เป็นจุดนอกเส้นตรง AB และ $OC \perp AB$

P, Q เป็นจุดบน AB และอยู่คนละด้านของจุด O โดยที่ $CP = CQ$ จะได้ $OP = OQ$



รูปที่ 1.24

กำหนดให้ C เป็นจุดบนเส้นตรง AB และ O เป็นจุดนอกเส้นตรง AB และ $OC \perp AB$

P, Q เป็นจุดบน AB และอยู่คนละด้านของจุด O และ $CP = CQ$

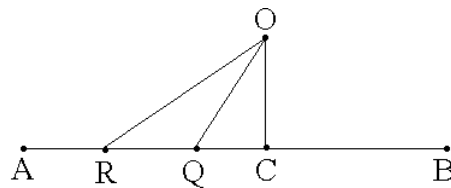
จะต้องพิสูจน์ว่า $OP = OQ$

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $CP = CQ$	1. กำหนดให้
2. OC ด้านร่วม	2. กำหนดให้
3. $\angle OCQ = \angle OCP = 90^\circ$	3. $OC \perp AB$
4. $\triangle OCP$ และ $\triangle OCQ$ เท่ากันทุกประการ	4. ด.ม.ด. (1), (2) และ (3)
5. $OP = OQ$	5. $\triangle OCP$ และ $\triangle OCQ$ เท่ากันทุกประการ Q.E.D.

ทฤษฎีบท 12.3 C เป็นจุดบนเส้นตรง AB และ O เป็นจุดนอกเส้นตรง AB และ $OC \perp AB$

R, Q เป็นจุดบน AB และ $CR > CQ$ จะได้ $OR > OQ$



รูปที่ 1.25

กำหนดให้ C เป็นจุดบนเส้นตรง AB และ O เป็นจุดนอกเส้นตรง AB และ $OC \perp AB$

R, Q เป็นจุดบน AB และ $CR > CQ$

จะต้องพิสูจน์ว่า $OR > OQ$

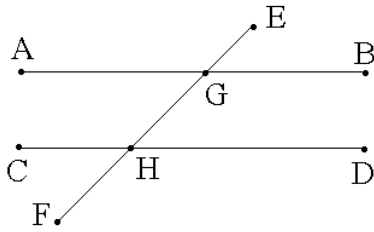
ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle OQC + \angle OQR < 180^\circ$	1. มุมภายใน $\triangle OCQ$ สองมุมรวมกันมีค่าน้อยกว่าสองมุมฉาก (ทฤษฎีบท 8.1)
2. $\angle OQC < 90^\circ$	2. $\angle OCQ = 90^\circ$
3. $\angle OQR > 90^\circ$	3. $\angle OQR + \angle OQC = 180^\circ$
4. $\angle ORQ < 90^\circ$	4. $\triangle ORQ$ มีมุมป้านได้มุมเดียว (ทฤษฎีบท 8.2)
5. $\angle OQR > \angle ORQ$	5. จาก (3) และ (4)
6. $OR > OQ$	6. ใน $\triangle ORQ$ ด้านตรงข้ามมุมใหญ่ยาวกว่าด้านตรงข้ามมุมเล็ก (ทฤษฎีบท 9.) Q.E.D.

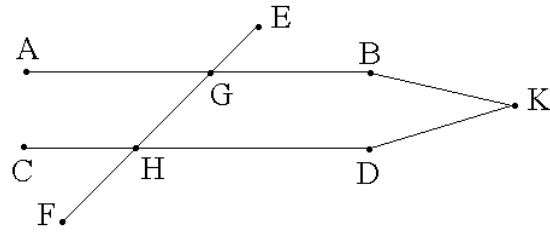
ทฤษฎีบท 13. เส้นตรง EF ตัดเส้นตรง AB และ CD ที่จุด G และ H ตามลำดับ จะได้

1. ถ้า มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้ว AB และ CD ขนานกัน
2. ถ้า มุมภายนอก และ มุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอกด้านเดียวกันของ EF มีขนาดเท่ากัน แล้ว AB และ CD ขนานกัน
3. ถ้ามุมภายในด้านเดียวกันของ EF รวมกันเท่ากับสองมุมฉาก แล้ว AB และ CD ขนานกัน

[Euclid I. 27. 28.]



รูปที่ 1.26.1



รูปที่ 1.26.2

กำหนดให้ เส้นตรง EF ตัดเส้นตรง AB และ CD ที่จุด G, H ตามลำดับ

1. กำหนดให้ $\angle AGH = \angle GHD$ (มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

จะต้องพิสูจน์ว่า AB และ CD ขนานกัน

ข้อพิสูจน์ สมมติ AB และ CD ไม่ขนานกัน

เพราะว่า AB และ CD ไม่ขนานกัน เพราะฉะนั้นให้ K เป็นจุดตัดของ AB และ CD (รูปที่ 1.26.2)

ข้อความ	เหตุผล
1. $\overline{GBK}$ เป็นเส้นตรง	1. G, B, K อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
2. $\overline{HDK}$ เป็นเส้นตรง	2. H, D, K อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
3. KGH เป็นรูปสามเหลี่ยม	3. GH, HK, KG เป็นเส้นตรง
4. $\angle KGH + \angle AGH = 180^\circ$	4. A, G, B, K อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
5. $\angle KGH + \angle GHD = 180^\circ$	5. $\angle AGH = \angle GHD$ (กำหนดให้)
6. $\angle KGH + \angle GHK = 180^\circ$	6. H, D, K อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จึงได้ $\angle GHD = \angle GHK$
7. $\angle KGH + \angle GHK < 180^\circ$	7. มุมใน $\triangle KGH$ สองมุมรวมกันมีค่าน้อยกว่า สองมุมฉาก (ทฤษฎีบท 8.1)
8. ที่สมมติไว้ไม่จริง เพราะฉะนั้น AB และ CD ไม่ขนานกัน	8. จาก (6) และ (7) ขัดแย้งกัน Q.E.D.

2. กำหนดให้ $\angle EGB$ (มุมภายนอก) = $\angle GHD$ (มุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอกด้านเดียวกัน)

จะต้องพิสูจน์ว่า AB และ CD ขนานกัน

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\angle EGB = \angle AGH$	1. มุมตรงข้าม
2. $\angle EGB = \angle GHD$	2. กำหนดให้
3. $\angle AGH = \angle GHD$	3. จาก (1) และ (2)
4. AB และ CD ขนานกัน	4. ผลของทฤษฎีบท 13. ข้อ 1. Q.E.D.

3. กำหนดให้ $\angle BGH + \angle GHD = 180^\circ$ (มุมภายในด้านเดียวกันของ EF รวมกันเท่ากับสองมุมฉาก)

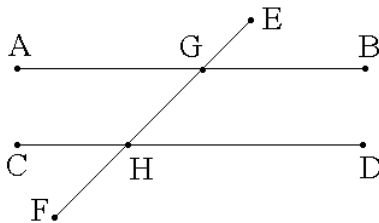
จะต้องพิสูจน์ว่า AB และ CD ขนานกัน

ข้อพิสูจน์

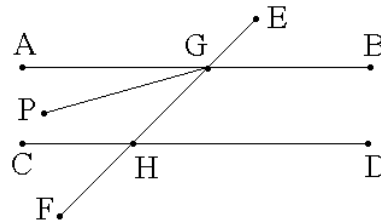
ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}GH + \hat{B}GH = 180^\circ$	1. มุมปะชิดของ HG บน AB (ทฤษฎีบท 1.) A, G, B อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
2. $\hat{B}GH + \hat{G}HD = 180^\circ$	2. กำหนดให้
3. $\hat{A}GH = \hat{G}HD$	3. จาก (1) และ (2)
4. AB และ CD ขนานกัน	4. ผลของทฤษฎีบท 13. ข้อ 1. Q.E.D.

ทฤษฎีบท 14. เส้นตรง AB และ CD ขนานกัน EF ตัด AB และ CD ที่จุด G และ H ตามลำดับ จะได้

1. มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน
2. มุมภายนอก และ มุมภายในด้านตรงข้ามของมุมภายนอกด้านเดียวกันของ EF มีขนาดเท่ากัน
3. มุมภายในด้านเดียวกันของ EF รวมกันเท่ากับสองมุมฉาก



รูปที่ 1.27.1



รูปที่ 1.27.2

กำหนดให้ เส้นตรง AB และ CD ขนานกัน และ เส้นตรง EF ตัด AB และ CD ที่จุด G, H ตามลำดับ
จะต้องพิสูจน์ว่า 1. $\hat{A}GH = \hat{G}HD$ 2. $\hat{E}GB = \hat{G}HD$ 3. $\hat{B}GH + \hat{G}HD = 180^\circ$

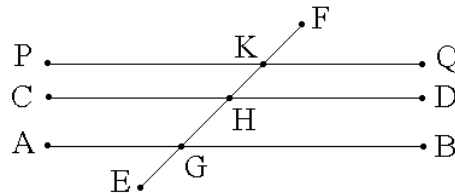
ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. การพิสูจน์ $\hat{A}GH = \hat{G}HD$ สมมติ $\hat{A}GH \neq \hat{G}HD$	
1. ลากเส้น GP ที่ทำให้ $\hat{P}GH = \hat{G}HD$	1. สร้างได้ เพราะว่าสมมติ $\hat{A}GH \neq \hat{G}HD$
2. $\hat{P}GH \neq \hat{A}GH$	2. $\hat{P}GH = \hat{G}HD$ และ $\hat{A}GH \neq \hat{G}HD$
3. PG และ AG ไม่ขนานกัน	3. $\hat{P}GH \neq \hat{A}GH$
4. PG และ AB ไม่ขนานกัน	4. A, G, B อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
5. PG และ CD ขนานกัน	5. $\hat{P}GH, \hat{G}HD$ เป็นมุมแย้งที่เท่ากัน (ทบ 13.)
6. PG และ AB ขนานกัน	6. AB และ CD ขนานกัน (กำหนดให้)
7. ที่สมมติไว้ไม่จริง เพราะฉะนั้น $\hat{A}GH = \hat{G}HD$	7. (4) และ (6) ขัดแย้ง
2. การพิสูจน์ $\hat{E}GB = \hat{G}HD$	
8. $\hat{E}GB = \hat{A}GH$	8. มุมตรงข้าม
9. $\hat{A}GH = \hat{G}HD$	9. จากการพิสูจน์ข้อ 1.
10. $\hat{E}GB = \hat{G}HD$	10. จาก (1) และ (2)

3. การพิสูจน์ $\hat{B}GH + \hat{G}HD = 180^\circ$ 11. $\hat{E}GB + \hat{B}GH = 180^\circ$ 12. $\hat{G}HD + \hat{B}GH = 180^\circ$	11. มุมประชิดของ GH บน AB (ทบท 1.) 12. $\hat{E}GB = \hat{G}HD$ จากการพิสูจน์ข้อ 2. Q.E.D.
---	--

ทฤษฎีบท 15. เส้นตรงสองเส้นที่ขนานกับเส้นตรงเดียวกันต้องขนานกัน

[Euclid I. 30.]



รูปที่ 1.28

กำหนดให้ AB ขนานกับ PQ และ CD ขนานกับ PQ

จะต้องพิสูจน์ว่า AB และ CD ขนานกัน

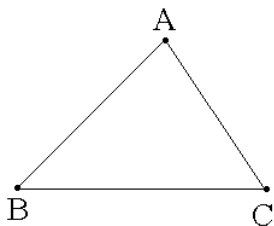
บทสร้าง ลากเส้นตรง $\overline{EGHKF}$ ตัดเส้นตรง AB, CD และ PQ ดังรูปที่ 1.28

ข้อพิสูจน์

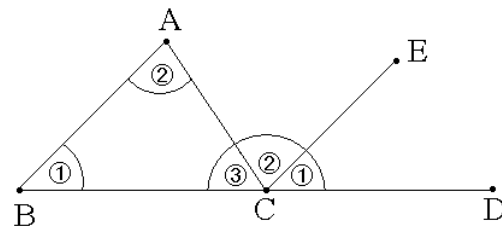
ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}GK$ และ $\hat{G}KQ$ เป็นมุมแย้ง	1. AB ขนานกับ PQ และ EF ตัด AB ที่ G และ ตัด PQ ที่ K
2. $\hat{A}GK = \hat{G}KQ$	2. จาก (1) มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน (ทบท 14.)
3. $\hat{G}HD$ เป็นมุมภายนอก และ $\hat{G}KQ$ เป็นมุมภายในด้านตรงข้าม	3. CD ขนานกับ PQ และ EF ตัด CD ที่ H และ ตัด PQ ที่ K
4. $\hat{G}HD = \hat{G}KQ$	4. ทฤษฎีบท 14.
5. $\hat{A}GK = \hat{G}HD$	5. จาก (2) และ (4)
6. AB และ CD ขนานกัน	6. มุมแย้ง $\hat{A}GK = \hat{G}HD$ (ทบท 13.) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 16. มุมภายในสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

[Euclid I. 32.]



รูปที่ 1.29.1



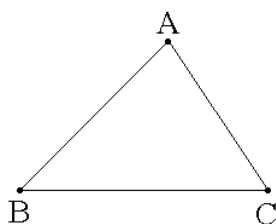
รูปที่ 1.29.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$

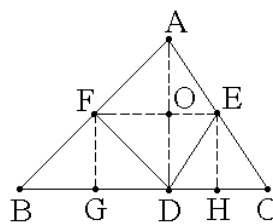
จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{B}CA + \hat{B}AC + \hat{A}BC = 180^\circ$

ข้อพิสูจน์ แบบที่ 1. ต่อเส้นตรง BC ไปที่จุด D ลากเส้นตรง CE และทำให้ CE ขนานกับ BC

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}BC = \hat{E}CD = \textcircled{1}$	1. มุมภายนอกและมุมภายในด้านตรงข้ามของเส้นขนาน AB และ CE (ทบท 14.)
2. $\hat{B}AC = \hat{A}CE = \textcircled{2}$	2. มุมแย้งของเส้นขนาน AB และ CE
3. $\hat{B}CA + \hat{A}CE + \hat{E}CD = 180^\circ$	3. $\hat{B}CA$ และ $(\hat{A}CE + \hat{E}CD)$ เป็นมุมประชิดของเส้นตรง AC กับ BD (ทบท 1.)
4. $\hat{B}CA + \hat{B}AC + \hat{A}BC = 180^\circ$	4. จาก (1), (2) และ (3) Q.E.D.



รูปที่ 1.30.1



รูปที่ 1.30.2

แบบที่ 2. ลาก $AD \perp BC$ ให้ O เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD ลากเส้นตรง EOF ขนานกับ BC
ลาก $FG \perp BD$ และ ลาก $EH \perp DC$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $FE \perp AD$ และ O เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD

เพราะฉะนั้น $\triangle AOE, \triangle DOE$ เท่ากันทุกประการ (ด.ม.ด.) และ $\triangle AOF, \triangle DOF$ เท่ากันทุกประการ (ด.ม.ด.)

เพราะฉะนั้น $\hat{A}EO = \hat{O}ED$ และ $\hat{A}FO = \hat{O}FD$... (1)

เพราะฉะนั้น $\triangle AFE, \triangle DFE$ เท่ากันทุกประการ (ม.ด.ม.) (จาก (1) และ FE ด้านร่วม)

เพราะฉะนั้น $\hat{F}AE = \hat{F}DE$ เพราะว่า $\hat{F}AE, \hat{B}AC$ เป็นมุมเดียวกัน เพราะฉะนั้น $\hat{B}AC = \hat{F}DE$... (2)

เพราะว่า OF ขนานกับ BC เพราะฉะนั้น $\hat{A}BC = \hat{A}FO$ และ $\hat{O}FD = \hat{F}DB$... (3)

เพราะฉะนั้น จาก (1) และ (3) จะได้ $\hat{A}BC = \hat{F}DB$... (4)

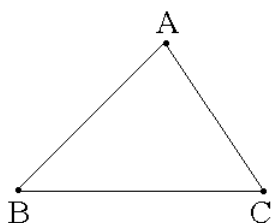
เพราะว่า OE ขนานกับ BC เพราะฉะนั้น $\hat{A}CB = \hat{A}EO$ และ $\hat{O}ED = \hat{E}DC$... (5)

เพราะฉะนั้น จาก (1) และ (5) จะได้ $\hat{A}CB = \hat{E}DC$... (6)

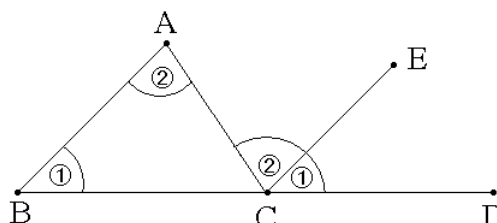
เพราะว่า $\hat{F}DB + \hat{F}DE + \hat{E}DC = 180^\circ$

เพราะฉะนั้น จาก (2), (4), (6) จะได้ $\hat{A}BC + \hat{B}AC + \hat{A}CB = \hat{F}DB + \hat{F}DE + \hat{E}DC = 180^\circ$ □

ทฤษฎีบท 16.1 มุมภายนอกของสามเหลี่ยมเท่ากับผลบวกของมุมภายในสามเหลี่ยมด้านตรงข้าม



รูปที่ 1.31.1



รูปที่ 1.31.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$ ต่อด้าน BC ของ $\triangle ABC$ ไปที่จุด D

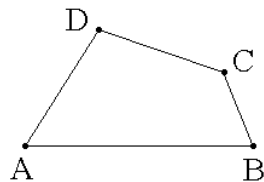
จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{ACD} = \hat{ABC} + \hat{BAC}$

บทสร้าง ลากเส้นตรง CE ที่ทำให้ CE ขนานกับ BC

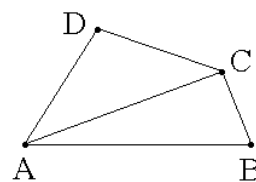
ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{ABC} = \hat{ECD} = \textcircled{1}$	1. มุมภายนอกและมุมภายในด้านตรงข้ามของเส้นขนาน AB และ CE (ทบท 14.)
2. $\hat{BAC} = \hat{ACE} = \textcircled{2}$	2. มุมแย้งของเส้นขนาน AB และ CE (ทบท 14.)
3. $\hat{ACD} = \hat{ACE} + \hat{ECD}$	3. มุมใหญ่เท่ากับผลบวกของมุมย่อย
4. $\hat{ACD} = \hat{ABC} + \hat{BAC}$	4. จาก (1), (2) และ (3) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 16.2 ผลบวกของมุมภายในสี่เหลี่ยมเท่ากับ 360°



รูปที่ 1.32.1



รูปที่ 1.32.2

กำหนดให้ $\square ABCD$

จะต้องพิสูจน์ว่า ผลบวกมุมภายใน $\square ABCD$ เท่ากับ 360°

บทสร้าง ลากเส้นตรง AC

ข้อพิสูจน์ ผลบวกมุมภายใน $\square ABCD = \hat{ABC} + \hat{BCD} + \hat{CDA} + \hat{DAB}$

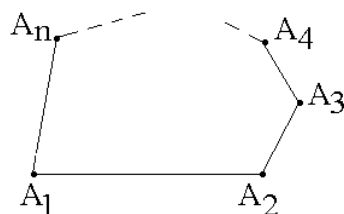
$$= \hat{ABC} + (\hat{BCA} + \hat{ACD}) + \hat{CDA} + (\hat{DAC} + \hat{CAB})$$

$$= (\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB}) + (\hat{DAC} + \hat{CDA} + \hat{ACD})$$

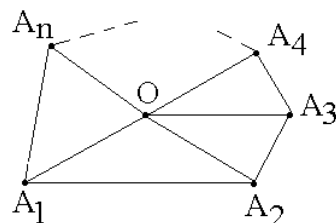
$$= 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ \quad (\text{ทบท 16. ผลบวกมุมใน } \triangle ABC \text{ และ } \triangle ADC)$$

□

ทฤษฎีบท 16.3 ผลบวกของมุมภายในรูป n เหลี่ยมเท่ากับ $(n - 2)(180^\circ)$



รูปที่ 1.33.1



รูปที่ 1.33.2

กำหนดให้ $A_1A_2 \dots A_n$ เป็นรูป n เหลี่ยม

จะต้องพิสูจน์ว่า ผลบวกของมุมภายในรูป n เหลี่ยม $A_1A_2 \dots A_n = (n - 2)(180^\circ)$

บทสร้าง ให้ O เป็นจุดภายในรูป n เหลี่ยม $A_1A_2 \dots A_n$ ลากเส้น $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$

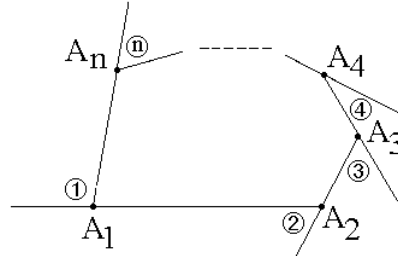
ข้อพิสูจน์ ผลบวกของมุมภายในรูป n เหลี่ยม $A_1A_2 \dots A_n + \text{มุมรอบจุด O}$

$$= \text{ผลบวกของมุมภายในของ } \triangle OA_1A_2, \triangle OA_2A_3, \dots, \triangle OA_nA_1$$

ผลบวกของมุมภายในรูป n เหลี่ยม $A_1A_2 \dots A_n + 360^\circ = n(180^\circ)$

ผลบวกของมุมภายในรูป n เหลี่ยม $A_1A_2 \dots A_n = (n - 2)(180^\circ)$ □

ทฤษฎีบท 16.4 $A_1A_2 \dots A_n$ เป็นรูป n เหลี่ยมที่มุมภายในทุกมุมเล็กกว่า 180°
จะได้ ผลบวกของมุมภายนอกของรูป n เหลี่ยมเท่ากับ 360°



รูปที่ 1.34

กำหนดให้ $A_1A_2 \dots A_n$ เป็นรูป n เหลี่ยมที่มุมภายในทุกมุมเล็กกว่า 180°

จะต้องพิสูจน์ว่า ผลบวกของมุมภายนอกของรูป n เหลี่ยมเท่ากับ 360°

ข้อพิสูจน์ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ จะได้ มุมภายนอกที่จุดยอด A_i + มุมภายในที่จุดยอด $A_i = 180^\circ$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^n (\text{มุมภายนอกที่จุดยอด } A_i + \text{มุมภายในที่จุดยอด } A_i) = \sum_{i=1}^n 180^\circ$

$$\sum_{i=1}^n \text{มุมภายนอกที่จุดยอด } A_i + \sum_{i=1}^n \text{มุมภายในที่จุดยอด } A_i = n(180^\circ)$$

$$\sum_{i=1}^n \text{มุมภายนอกที่จุดยอด } A_i + (n - 2)(180^\circ) = n(180^\circ)$$

$$\sum_{i=1}^n \text{มุมภายนอกที่จุดยอด } A_i = 2(180^\circ) = 360^\circ$$

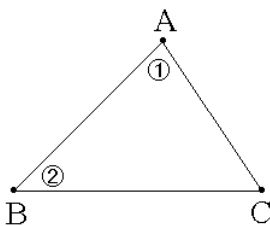
□

ทฤษฎีบท 16.5

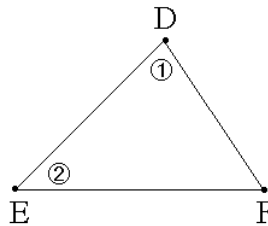
1. สามเหลี่ยมสองรูป ถ้ามีมุมเท่ากันสองมุม แล้ว มุมที่สามของสามเหลี่ยมนั้นต้องเท่ากัน
2. สามเหลี่ยมมุมฉาก มุมที่ไม่เป็นมุมฉากทั้งสองมุมรวมกันมีขนาดเท่ากับ หนึ่งมุมฉาก
3. ถ้ามุมสองมุมของสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับมุมที่สาม แล้ว สามเหลี่ยมรูปนั้นต้องเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ทฤษฎีบท 17. ถ้า สามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันสองมุม และมีด้านตรงข้ามมุมคู่ที่เท่ากันมีความยาวเท่ากัน
แล้ว สามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ

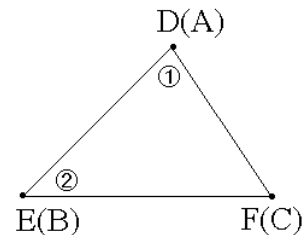
[Euclid I. 26.]



รูปที่ 1.35.1



รูปที่ 1.35.2



รูปที่ 1.35.3

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $\hat{BAC} = \hat{EDF}$, $\hat{ABC} = \hat{DEF}$ และ $BC = EF$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ

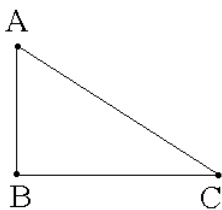
บทสร้าง เลื่อนจุด B มาทับจุด E และ เลื่อนจุด C มาทับจุด F

ข้อพิสูจน์

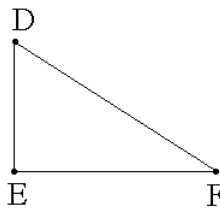
ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{ACB} = 180^\circ - \hat{BAC} - \hat{ABC}$	1. มุมภายในสามเหลี่ยมรวมกัน = 180°
2. $\hat{ACB} = 180^\circ - \hat{EDF} - \hat{DEF}$	2. $\hat{BAC} = \hat{EDF}$, $\hat{ABC} = \hat{DEF}$ (กำหนดให้)
3. $\hat{DFE} = 180^\circ - \hat{EDF} - \hat{DEF}$	3. มุมภายในสามเหลี่ยมรวมกัน = 180°
4. $\hat{ACB} = \hat{DFE}$	4. จาก (2) และ (3)
5. BC ทับด้าน EF และจุด C ทับจุด F	5. $BC = EF$
6. BA ทับด้าน ED	6. $\hat{ABC} = \hat{DEF}$ (กำหนดให้)
7. CA ทับด้าน FD	7. จาก (4) $\hat{ACB} = \hat{DFE}$
8. A ทับจุด D	8. A เป็นจุดตัดของ ED และ FD
9. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ	9. A ทับจุด D, B ทับจุด E, C ทับจุด F Q.E.D.

หมายเหตุ การกล่าวอ้างผลของทฤษฎีบทนี้จะใช้คำย่อว่า มุม-มุม-ด้าน หรือ ม.ม.ด.

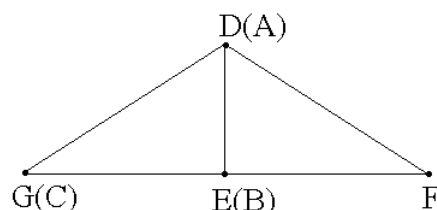
ทฤษฎีบท 18. ถ้า สามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากันและด้านประกอบมุมฉากเท่ากันหนึ่งด้าน แล้ว สามเหลี่ยมมุมฉากสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ (ด.จ.ด.)



รูปที่ 1.36.1



รูปที่ 1.36.2



รูปที่ 1.36.3

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{ABC} = \hat{DEF} = 90^\circ$, $AC = DF$ และ $AB = DE$ จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ

บทสร้าง เลื่อนจุด A มาทับจุด D และ เลื่อนจุด B มาทับจุด E โดยให้จุด C อยู่คนละด้านกับจุด F

เรียกตำแหน่งใหม่ของจุด C ว่า จุด G เพราะฉะนั้น $\triangle ABC$ และ $\triangle DEG$ เท่ากันทุกประการ

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{ABC} = \hat{DEG} = 90^\circ$	1. บทสร้าง
2. E, G, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน	2. $\hat{DEG} = \hat{DEF} = 90^\circ$
3. $DG = DF$	3. บทสร้าง และ กำหนดให้ $DG = AC = DF$
4. $\hat{DGF} = \hat{DFG}$	4. ใน $\triangle DGF$ มุมตรงข้ามด้านเท่ากันต้องเท่ากัน
5. $\hat{DGE} = \hat{DFE}$	5. $\hat{DGE} = \hat{DGF}$, $\hat{DFE} = \hat{DFG}$
6. $\triangle DEF$ และ $\triangle DEG$ เท่ากันทุกประการ	6. ม.ม.ด. ((1), (5) และ DE ด้านร่วม)
7. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ	7. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEG$ เท่ากันทุกประการ Q.E.D.

หมายเหตุ การกล่าวอ้างผลของทฤษฎีบทนี้จะใช้คำย่อว่า ด้าน-ฉาก-ด้าน หรือ ด.จ.ด.

ทฤษฎีบท 19. ถ้า สามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสองด้าน มุมยอดที่เกิดจากด้านคู่นั้นในสามเหลี่ยมรูปที่หนึ่งมีขนาดใหญ่กว่ามุมยอดที่เกิดจากด้านคู่นั้นในสามเหลี่ยมรูปที่สอง แล้ว ฐานของสามเหลี่ยมซึ่งอยู่ตรงข้ามมุมยอดนั้นของสามเหลี่ยมรูปที่หนึ่งมีขนาดยาวกว่าฐานของสามเหลี่ยมซึ่งอยู่ตรงข้ามมุมยอดของสามเหลี่ยมรูปที่สอง [Euclid I. 24.]

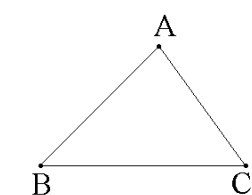
กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle BAC > \angle EDF$

จะต้องพิสูจน์ว่า $BC > EF$

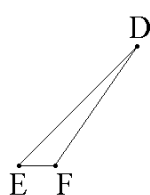
บทสร้าง เลื่อนจุด A มาทับจุด D และ เลื่อนจุด B มาทับจุด E (ทำได้ เพราะว่า $AB = DE$)

และ G เป็นตำแหน่งใหม่ของจุด C ที่เกิดขึ้น เพราะฉะนั้น $\angle EDG = \angle BAC$ และ $AC = DG$

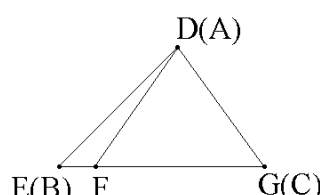
ข้อพิสูจน์



รูปที่ 1.37.1

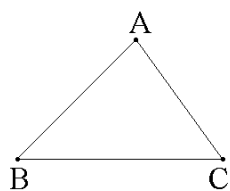


รูปที่ 1.37.2

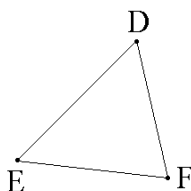


รูปที่ 1.37.3

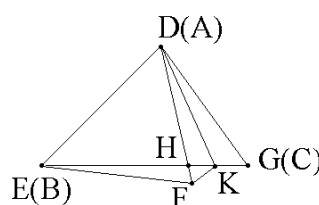
ข้อความ	เหตุผล
กรณีที่ 1. F อยู่บนเส้นตรง EG 1. EG ยาวกว่า EF 2. BC ยาวกว่า EF	1. $\angle EDG = \angle BAC > \angle EDF$ 2. $BC = EG$



รูปที่ 1.38.1



รูปที่ 1.38.2

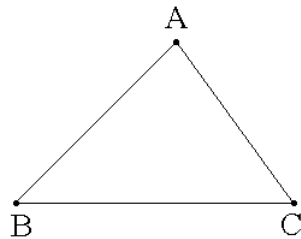


รูปที่ 1.38.3

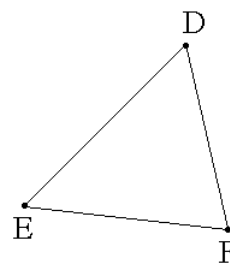
ข้อความ	เหตุผล
กรณีที่ 2. F ไม่อยู่บนเส้นตรง EG 1. G อยู่นอก $\triangle DEF$ 2. ให้ KD แบ่งครึ่งมุม $\angle FDG$, $\angle FDK = \angle GDK$ 3. $\triangle FDK$ และ $\triangle GDK$ เท่ากันทุกประการ 4. $EK + KF > EF$ 5. $EK + KG > EG$ 6. $EG > EF$ 7. $BC > EF$	1. $\angle EDG = \angle BAC > \angle ADF$ 2. บทสร้างเพิ่มเติม 3. ด.ม.ด. ($DF = AC = DG$, DK ด้านร่วม $\angle FDK = \angle GDK$) 4. $\triangle EKF$ ด้านสองด้านของสามเหลี่ยมรวมกัน ยาวกว่าด้านที่สาม 5. จาก (3) $KF = KG$ 6. $EK + KG = EG$ 7. $BC = EG$

Q.E.D.

ทฤษฎีบท 19.1 ถ้า สามเหลี่ยมสองรูปมีด้านยาวเท่ากันสองคู่ ด้านที่สามของสามเหลี่ยมรูปที่หนึ่งยาวกว่าด้านที่สามของสามเหลี่ยมรูปที่สอง แล้ว จะได้มุมยอดที่อยู่ตรงข้ามฐานนั้นของสามเหลี่ยมรูปที่หนึ่งมีขนาดใหญ่กว่ามุมยอดของสามเหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามฐานของสามเหลี่ยมรูปที่สอง



รูปที่ 1.39.1



รูปที่ 1.39.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $AB = DE$, $AC = DF$, $BC > EF$

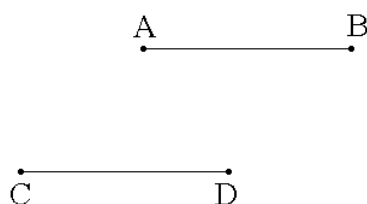
จะต้องพิสูจน์ว่า $\angle BAC > \angle EDF$

ข้อพิสูจน์ สมมติ $\angle BAC \leq \angle EDF$

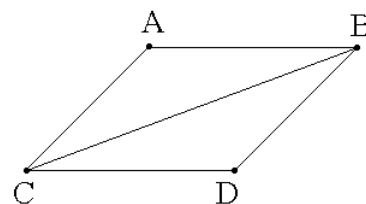
ข้อความ	เหตุผล
กรณีที่ 1. $\angle BAC = \angle EDF$ 1. $AB = DE$, $AC = DF$ และ $\angle BAC = \angle EDF$ 2. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ 3. $BC = EF$ ขัดแย้งกับข้อกำหนด $BC > EF$ กรณีที่ 2. $\angle BAC < \angle EDF$ 1. $AB = DE$, $AC = DF$ และ $\angle BAC < \angle EDF$ 2. $BC < EF$ ขัดแย้งกับข้อกำหนด $BC > EF$ ทำให้สมมติไม่จริง เพราะฉะนั้น $\angle BAC > \angle EDF$	1. กำหนดให้ และ ข้อสมมติกรณีที่ 1. 2. ด.ม.ด. 3. $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เท่ากันทุกประการ 1. กำหนดให้ และ ข้อสมมติกรณีที่ 2. 2. โดยทฤษฎีบท 19. Q.E.D.

ทฤษฎีบท 20. เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ตัดกันที่เกิดจากการเชื่อมปลายข้างเดียวกันของเส้นขนานสองเส้นซึ่งยาวเท่ากัน ต้องขนานกันและยาวเท่ากัน

[Euclid I. 33.]



รูปที่ 1.40.1



รูปที่ 1.40.2

กำหนดให้ AB และ CD ขนานกันและยาวเท่ากัน

จะต้องพิสูจน์ว่า AC และ BD ขนานกันและยาวเท่ากัน

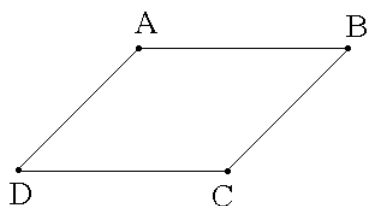
บทสร้าง ลากเส้นตรง AC, BD และ เส้นทแยงมุม BC

ข้อพิสูจน์

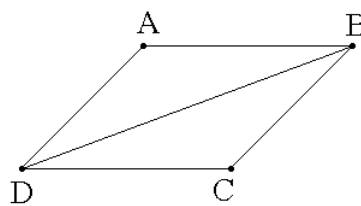
ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}BC = \hat{B}CD$	1. มุมแย้งของเส้นขนาน AB, CD
2. $AB = CD$	2. กำหนดให้
3. $\triangle ABC, \triangle BCD$ เท่ากับทุกประการ	3. ด.ม.ด. จาก (1), (2) และ BC ด้านร่วม
4. $AC = BD$ และ $\hat{A}CB = \hat{C}BD$	4. $\triangle ABC, \triangle BCD$ เท่ากับทุกประการ
5. AC และ BD ขนานกัน	5. มุมแย้ง $\hat{A}CB = \hat{C}BD$ Q.E.D.

ทฤษฎีบท 21. ด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนานมีขนาดเท่ากัน และ เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งสี่เหลี่ยมด้านขนาน

[Euclid I. 34.]



รูปที่ 1.41.1



รูปที่ 1.41.2

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน BD เป็นเส้นทแยงมุม

จะต้องพิสูจน์ว่า 1. $AB = CD$ และ $AD = BC$

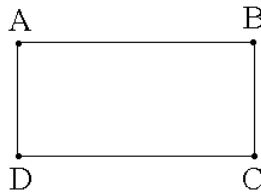
2. $\hat{D}AB = \hat{B}CD$ และ $\hat{A}DC = \hat{A}BC$

3. เส้นทแยง BD มุมแบ่งครึ่งสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}BD = \hat{B}DC$	1. มุมแย้งของเส้นขนาน AB, CD
2. $\hat{A}DB = \hat{D}BC$	2. มุมแย้งของเส้นขนาน AD, BC
3. $\triangle ABD, \triangle CBD$ เท่ากับทุกประการ	3. ม.ด.ม. จาก (1), (2) และ BD ด้านร่วม
4. $\hat{D}AB = \hat{B}CD$, $AB = CD$, $AD = BC$ และ พื้นที่ $\triangle ABD =$ พื้นที่ $\triangle CBD$	4. $\triangle ABD, \triangle CBD$ เท่ากับทุกประการ
5. เส้นทแยงมุม BD แบ่งครึ่งสี่เหลี่ยมด้านขนาน	5. พื้นที่ $\triangle ABD =$ พื้นที่ $\triangle CBD$
6. $\hat{A}DC = \hat{A}DB + \hat{B}DC$ $= \hat{D}BC + \hat{A}BD = \hat{A}BC$	6. จาก (1) และ (2) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 21.1 มุมทุกมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นมุมฉาก



รูปที่ 1.42

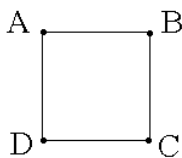
กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า มี $AB = CD$ และ $AD = BC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{A}DB = \hat{A}BC = \hat{D}AB = \hat{B}CD =$ หนึ่งมุมฉาก

ข้อพิสูจน์ โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $\hat{A}BC$ เป็นมุมฉาก

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{A}DB = \hat{A}BC =$ หนึ่งมุมฉาก	1. มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ทบ 21.)
2. $\hat{D}AB = \hat{B}CD =$ หนึ่งมุมฉาก	2. มุมภายในสี่เหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 4 มุมฉาก (ทบ 16.2) และ $\hat{D}AB = \hat{B}CD$
3. $\hat{A}DB = \hat{A}BC = \hat{D}AB = \hat{B}CD =$ หนึ่งมุมฉาก	3. จาก (1) และ (2) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 21.2 มุมทุกมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นมุมฉาก และ ด้านทุกด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่ากัน



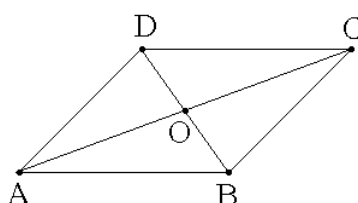
รูปที่ 1.43

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส มี $AB = CD$ และ $AD = BC$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\hat{A}DB = \hat{A}BC = \hat{D}AB = \hat{B}CD =$ หนึ่งมุมฉาก และ $AB = BC = CD = AD$

ข้อความ	เหตุผล
1. ด้านประกอบมุมยอดเดียวกันของ $\square ABCD$ ยาวเท่ากัน	1. $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส
2. $AB = BC, BC = CD = CD = DA, DA = AB$	2. จาก (1)
3. ด้านทุกด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่ากัน	3. จาก (2)
4. $\hat{A}DB = \hat{A}BC = \hat{D}AB = \hat{B}CD =$ หนึ่งมุมฉาก	4. มุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นมุมฉาก Q.E.D.

ทฤษฎีบท 21.3 เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



รูปที่ 1.44

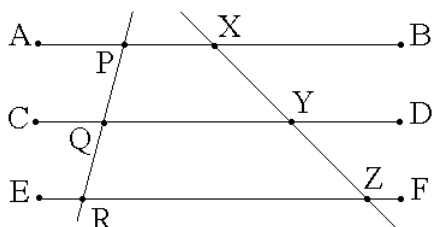
กำหนดให้ เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ตัดกันที่จุด O

จะต้องพิสูจน์ว่า $AO = OC$ และ $BO = OD$

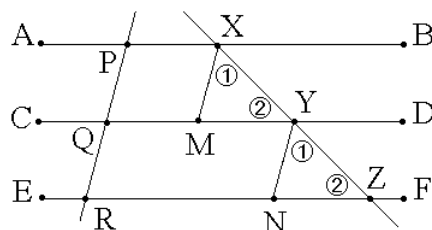
ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\hat{OAB} = \hat{OCD}$	1. มุมแย้งของเส้นขนาน AB, CD
2. $\hat{AOB} = \hat{COD}$	2. มุมตรงข้าม
3. $AB = CD$	3. ด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนาน
4. $\triangle ABO, \triangle CDO$ เท่ากับทุกประการ	4. ม.ด.ม. จาก (1), (2) และ (3)
5. $AO = OC$ และ $BO = OD$	5. $\triangle ABO, \triangle CDO$ เท่ากับทุกประการ Q.E.D.

ทฤษฎีบท 22. ถ้า เส้นขนานสามเส้นแบ่งส่วนของเส้นตัดขวางเส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน แล้ว เส้นขนานสามเส้น นั้นจะแบ่งเส้นตัดขวางทุกเส้นเป็นระยะทางที่เท่ากัน



รูปที่ 1.45.1



รูปที่ 1.45.2

กำหนดให้ AB, CD, EF ขนานกัน เส้นตรง $\overline{PQR}$ เป็นเส้นตัดขวางของ AB, CD, EF โดยที่จุด P, Q, R อยู่บน AB, CD, EF ตามลำดับ $PQ = QR$ และ เส้นตรง $\overline{XYZ}$ เป็นเส้นตัดขวางของเส้นขนาน AB, CD, EF โดยที่จุด X, Y, Z อยู่บน AB, CD, EF ตามลำดับ

จะต้องพิสูจน์ว่า $XY = YZ$

บทสร้าง ให้ M อยู่บน CD และ N อยู่บน EF ที่ทำให้ XM ขนานกับ PQ และ YN ขนานกับ QR

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $\square PXMQ$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน	1. PX ขนานกับ QM และ PQ ขนานกับ XM
2. $PQ = XM$	2. ด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน
3. $\square QYNR$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน	3. QY ขนานกับ RN และ QR ขนานกับ NY
4. $QR = YN$	4. ด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนานยาวเท่ากัน
5. $XM = YN$	5. จาก (2), (4) และ กำหนดให้ $PQ = QR$
6. $\hat{XYM} = \hat{YZN} = \textcircled{2}$	6. มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในด้านตรงข้าม
7. $\hat{MXY} = \hat{NZY} = \textcircled{1}$	7. มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในด้านตรงข้าม
8. $\triangle XYM, \triangle YZN$ เท่ากันทุกประการ	8. ม.ม.ด. จาก (5), (6) และ (7)
9. $XY = YZ$	9. $\triangle XYM, \triangle YZN$ เท่ากันทุกประการ Q.E.D.

ทฤษฎีบท 22.1 กำหนดให้ $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ เป็นจุดบนด้าน AB

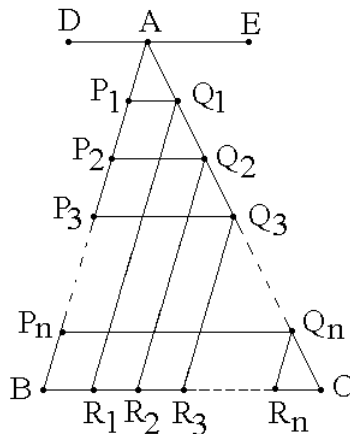
และ $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ เป็นจุดบนด้าน AC ของ $\triangle ABC$ โดยที่ P_0 และ Q_0 เป็นจุด A

และ $P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots, P_nQ_n$ ขนานกับ BC และ $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_nB$

จะได้

$$1. AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_nC$$

$$2. P_1Q_1 = \frac{1}{n+1}BC, P_2Q_2 = \frac{2}{n+1}BC, P_3Q_3 = \frac{3}{n+1}BC, \dots, P_nQ_n = \frac{n}{n+1}BC$$



รูปที่ 1.46

กำหนดให้ $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ เป็นจุดบนด้าน AB ของ $\triangle ABC$

$Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ เป็นจุดบนด้าน AC ของ $\triangle ABC$ โดยที่ P_0 และ Q_0 เป็นจุด A

$P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3, \dots, P_nQ_n$ ขนานกับ BC และ $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_nB$

จะต้องพิสูจน์ว่า 1. $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_nC$

$$2. P_1Q_1 = \frac{1}{n+1}BC, P_2Q_2 = \frac{2}{n+1}BC, P_3Q_3 = \frac{3}{n+1}BC, \dots, P_nQ_n = \frac{n}{n+1}BC$$

บทสร้าง ลากเส้น DE ผ่านจุด A และขนานกับ P_1Q_1

ข้อพิสูจน์ 1. เพราะว่า DE ขนานกับ P_1Q_1 และ $AP_1 = P_1P_2$ เพราะฉะนั้น $AQ_1 = Q_1Q_2$

เพราะว่า P_1Q_1 ขนานกับ P_2Q_2 และ $P_1P_2 = P_2P_3$ เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 22. จะได้ $Q_1Q_2 = Q_2Q_3$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_nC$

2. ให้ $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ เป็นจุดบน BC ที่ทำให้ $Q_1R_1, Q_2R_2, Q_3R_3, \dots, Q_nR_n$ ขนานกับ AB

เพราะว่า $AQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_nC$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 22. จะได้ $BR_1 = R_1R_2 = R_2R_3 = \dots = R_nC$

เพราะว่า $BR_1 + R_1R_2 + R_2R_3 + \dots + R_nC = BC$

เพราะฉะนั้น $BR_1 = R_1R_2 = R_2R_3 = \dots = R_nC = \frac{1}{n+1}BC$

เพราะฉะนั้น $BR_1 = \frac{1}{n+1}BC, BR_2 = \frac{2}{n+1}BC, BR_3 = \frac{3}{n+1}BC, \dots, BR_n = \frac{n}{n+1}BC$

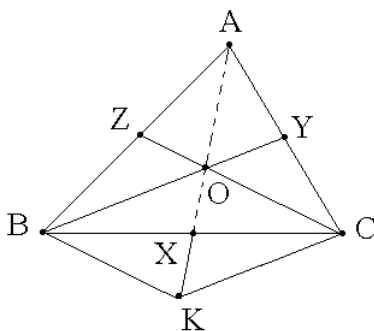
เพราะว่า $\square BP_1Q_1R_1, \square BP_2Q_2R_2, \square BP_3Q_3R_3, \dots, \square BP_nQ_nR_n$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เพราะฉะนั้น $P_1Q_1 = BR_1 = \frac{1}{n+1}BC, P_2Q_2 = BR_2 = \frac{2}{n+1}BC, P_3Q_3 = BR_3 = \frac{3}{n+1}BC$

$$, \dots, P_nQ_n = BR_n = \frac{n}{n+1}BC$$

□

ทฤษฎีบท 22.2 $\triangle ABC$ มีเส้นมัธยฐาน BY และ CZ ตัดกันที่จุด O ต่อส่วนเส้นตรง AO มาตัดด้าน BC ที่ X จะได้ X เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ $\frac{XO}{OA} = \frac{YO}{OB} = \frac{ZO}{OC} = \frac{1}{2}$



รูปที่ 1.47

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มีเส้นมัธยฐาน BY และ CZ ตัดกันที่จุด O ต่อส่วนเส้นตรง AO มาตัดด้าน BC ที่ X บทสร้าง จากจุด C ลากเส้นขนานกับ YB มาตัดกับเส้นตรง AOX ที่ต่อออกมาที่จุด K

จะต้องพิสูจน์ว่า X เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ $\frac{XO}{OA} = \frac{YO}{OB} = \frac{ZO}{OC} = \frac{1}{2}$

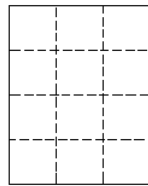
ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
การพิสูจน์ X เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC 1. ใน $\triangle AKC$; OY ขนานกับ CK 2. $AO = OK$ 3. ใน $\triangle AKB$; OZ ขนานกับ BK 4. $BKCO$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน 5. X เป็นจุดกึ่งกลาง BC การพิสูจน์ $\frac{XO}{OA} = \frac{YO}{OB} = \frac{ZO}{OC} = \frac{1}{2}$ 6. $XO = XK$ 7. $XO = \frac{1}{2}OK$ 8. $XO = \frac{1}{2}OA$ 9. $\frac{XO}{OA} = \frac{1}{2}$ ในทำนองเดียวกัน $\frac{YO}{OB} = \frac{ZO}{OC} = \frac{1}{2}$	1. CK ขนานกับ BY 2. $AY = YC$ และ OY ขนานกับ KC 3. $AZ = ZB$, $AO = OK$ 4. OC ขนานกับ BK , OB ขนานกับ CK 5. X เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ทฤษฎีบท 21.1) 6. X เป็นจุดตัดเส้นของทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนาน (ทฤษฎีบท 21.1) 7. $XO = XK$ 8. $OA = OK$ (จาก (2)) 9. จาก (8)
	Q.E.D.

หมายเหตุ จุดตัดของเส้นมัธยฐาน เรียกว่า จุดเซนทรอยด์ (the centroid of the triangle)

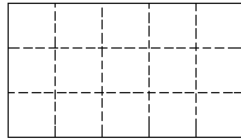
เพราะฉะนั้น จุดเซนทรอยด์ แบ่งเส้นมัธยฐานออกเป็นสัดส่วน 1 : 2

ทฤษฎีบท 23. รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีพื้นที่เท่ากับ (ความกว้าง) $\times$ (ความยาว)



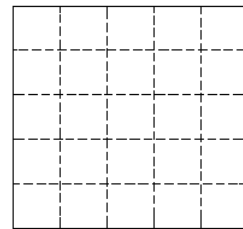
$$(4)(3) = 12$$

รูปที่ 1.48.1



$$(3)(5) = 15$$

รูปที่ 1.48.2



$$(5)(5) = 25$$

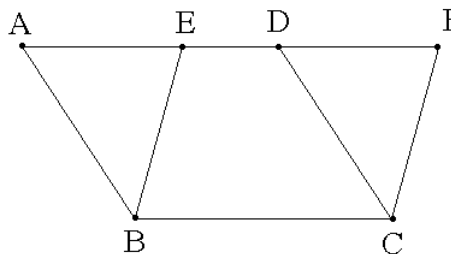
รูปที่ 1.48.3

ทฤษฎีบท 23.1 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความกว้างเท่ากันและความยาวเท่ากัน มีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 23.2 รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวเท่ากัน และ มีพื้นที่เท่ากัน จะต้องมีความกว้างเท่ากัน

ทฤษฎีบท 24. สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานเดียวกัน และ อยู่บนด้านคู่ขนานเดียวกัน มีพื้นที่เท่ากัน

[Euclid I. 35.]



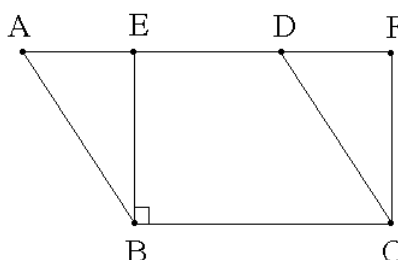
รูปที่ 1.49

กำหนดให้ $\square ABCD$, $\square EBCF$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานอยู่บนฐาน BC และอยู่บนเส้นคู่ขนาน BC และ AF จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่ $\square ABCD$ = พื้นที่ $\square EBCF$

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $DC = AB$ 2. $\hat{FDC} = \hat{EAB}$ 3. $\hat{DFC} = \hat{AEB}$ 4. $\triangle FDC, \triangle EAB$ เท่ากันทุกประการ 5. พื้นที่ $\square ABCD$ = พื้นที่ $\square BCDE$ + พื้นที่ $\triangle EAB$ = พื้นที่ $\square BCDE$ + พื้นที่ $\triangle FDC$ = พื้นที่ $\square EBCF$	1. ด้านตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD 2. มุมภายนอก และ มุมภายในของเส้นขนาน 3. มุมภายนอก และ มุมภายในของเส้นขนาน 4. ม.ม.ด. (1), (2) และ (3) 5. $\triangle FDC, \triangle EAB$ เท่ากันทุกประการ Q.E.D.

ทฤษฎีบท 24.1 พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ (ความยาวฐาน) $\times$ (ความสูง)



รูปที่ 1.50

□ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ □ BCFE เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก อยู่บนฐาน BC และ อยู่บนเส้นคู่ขนานคู่เดียวกัน

เพราะฉะนั้น พื้นที่ □ ABCD = พื้นที่ □ BCFE

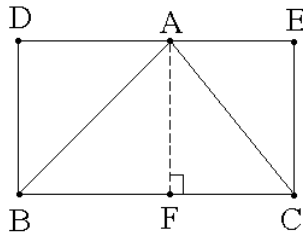
$$= (BC)(BE) = (\text{ความยาวฐาน } BC) \times (\text{ความสูง } BE)$$

□

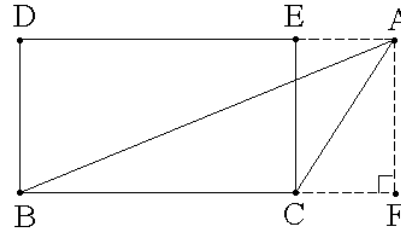
ผลจากทฤษฎีบท 24.1 จะได้

ทฤษฎีบท 24.2 สี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีความยาวฐานเท่ากัน และ มีความสูงเท่ากัน จะมีพื้นที่เท่ากัน

ทฤษฎีบท 25. สามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกันกับสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูงเท่ากัน จะมีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมมุมฉาก



รูปที่ 1.51.1



รูปที่ 1.51.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ □ BCED เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก มี BC เป็นฐาน และ มีความสูง AF เท่ากัน

จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ พื้นที่ □ BCED

ข้อพิสูจน์ กรณีที่ 1. รูปที่ 1.51.1

เพราะว่า AB เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมมุมฉาก ADBF เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\triangle ABF = \frac{1}{2}$ พื้นที่ □ ADBF

เพราะว่า AC เป็นเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมมุมฉาก AECF เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\triangle ACF = \frac{1}{2}$ พื้นที่ □ AECF

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น พื้นที่ } \triangle ABC &= \text{พื้นที่ } \triangle ABF + \text{พื้นที่ } \triangle ACF = \frac{1}{2} \text{ พื้นที่ } \square ADBF + \frac{1}{2} \text{ พื้นที่ } \square AECF \\ &= \frac{1}{2} \text{ พื้นที่ } \square BCED \end{aligned}$$

กรณีที่ 2. รูปที่ 1.51.2

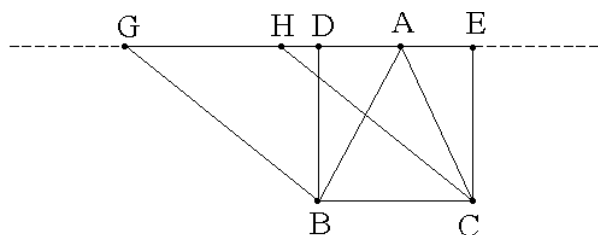
เพราะว่า AB เป็นเส้นทแยงมุม สี่เหลี่ยมมุมฉาก ADBF เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\triangle ABF = \frac{1}{2}$ พื้นที่ □ ADBF

เพราะว่า AC เป็นเส้นทแยงมุม สี่เหลี่ยมมุมฉาก AECF เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\triangle ACF = \frac{1}{2}$ พื้นที่ □ AECF

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น พื้นที่ } \triangle ABC &= \text{พื้นที่ } \triangle ABF - \text{พื้นที่ } \triangle ACF = \frac{1}{2} \text{ พื้นที่ } \square ADBF - \frac{1}{2} \text{ พื้นที่ } \square AECF \\ &= \frac{1}{2} \text{ พื้นที่ } \square BCED \end{aligned}$$

□

ทฤษฎีบท 25.1 สามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกันกับสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ อยู่ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน จะมีพื้นที่เป็นครึ่งหนึ่งของสี่เหลี่ยมด้านขนาน



รูปที่ 1.52

กำหนดให้ $\square BCHG$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน $\triangle ABC$ มี BC เป็นฐาน และ อยู่ระหว่างเส้นขนาน BC และ AG จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ พื้นที่ $\square BCHG$

บทสร้าง ลากเส้นตรงผ่าน G, A และ ขนานกับ BC ลาก $BD \perp AH$ และ $CE \perp AE$

เพราะฉะนั้น $\square BCED$ เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ พื้นที่ $\square BCED$

(ทฤษฎีบท 25.)

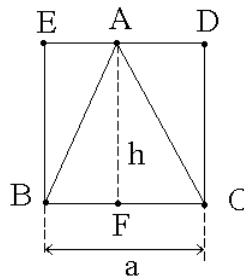
และ พื้นที่ $\square BCED =$ พื้นที่ $\square BCHG$

(ทฤษฎีบท 24.)

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ พื้นที่ $\square BCHG$

□

ทฤษฎีบท 25.2 พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}$ (ฐาน) $\times$ (สูง)



รูปที่ 1.53

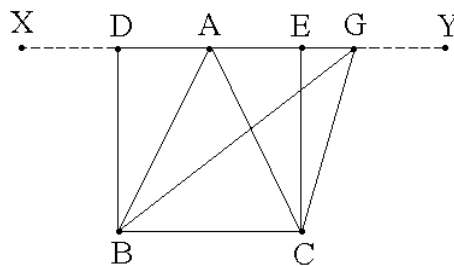
ข้อพิสูจน์ พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ พื้นที่ $\square BCED = \frac{1}{2} (BC)(CD) = \frac{1}{2} (a)(h)$

เพราะฉะนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}$ (ฐาน) $\times$ (สูง)

□

ทฤษฎีบท 26. สามเหลี่ยมที่มีฐานเดียวกัน และ อยู่ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน มีพื้นที่เท่ากัน

[Euclid I. 37.]



รูปที่ 1.54

กำหนดให้ BC และ XY ขนานกัน $\triangle ABC$ และ $\triangle GBC$ มี BC เป็นฐาน A, G อยู่บนเส้นขนาน XY

จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่ $\triangle ABC =$ พื้นที่ $\triangle GBC$

บทสร้าง ลากเส้นตรง $BD \perp AX$ และ $CE \perp AY$ เพราะฉะนั้น $\square BCED$ เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ข้อพิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 25. จะได้ พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$ พื้นที่ $\square BCED$, พื้นที่ $\triangle GBC = \frac{1}{2}$ พื้นที่ $\square BCED$

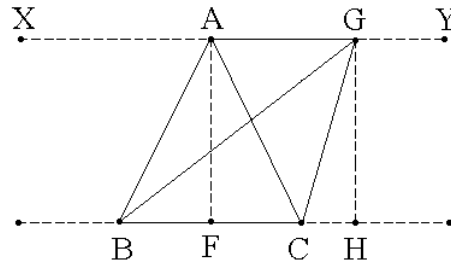
เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\triangle ABC =$ พื้นที่ $\triangle GBC$

□

ทฤษฎีบท 27. สามเหลี่ยมสองรูปมีพื้นที่เท่ากันและมีฐานเดียวกัน

จุดยอดที่อยู่ข้างเดียวกันของฐานของสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนั้นต้องอยู่ระหว่างเส้นขนานคู่เดียวกัน

[Euclid I. 39.]



รูปที่ 1.55

กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle GBC$ มีพื้นที่เท่ากัน และมี BC เป็นฐาน AF เป็นส่วนสูงของ $\triangle ABC$

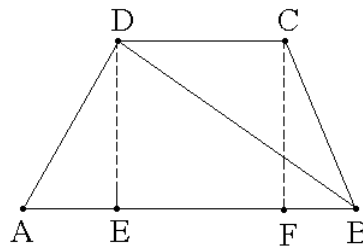
และ GH เป็นส่วนสูงของ $\triangle GBC$

จะต้องพิสูจน์ว่า AG ขนานกับ BC

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. AF, GH ขนานกัน	1. $AF \perp BC$ และ $HG \perp BC$
2. $BC \cdot AF = 2(\text{พื้นที่ } \triangle ABC)$	2. ทฤษฎีบท 25.2
3. $BC \cdot GH = 2(\text{พื้นที่ } \triangle GBC)$	3. ทฤษฎีบท 25.2
4. $AF = GH$	4. $\triangle ABC, \triangle GBC$ มีพื้นที่เท่ากัน, (2) และ (3)
5. $\square AFHG$ เป็นสี่เหลี่ยมมุมฉาก	5. จาก (1) และ (4)
6. AG ขนานกับ FH	6. จาก (5)
7. AG ขนานกับ BC	7. FH, BC อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน Q.E.D.

ทฤษฎีบท 28. พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2}(\text{สูง} \times \text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน})$



รูปที่ 1.56

กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู AB ขนานกับ CD และลากเส้น $DE \perp AB$ และ $CF \perp AB$

จะต้องพิสูจน์ว่า พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD = \frac{1}{2}(\text{สูง} \times \text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน})$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $DE \perp AB, CF \perp AB$ เพราะฉะนั้น DE, CF ขนานกัน

เพราะว่า DE, CF ขนานกัน และ DC, EF ขนานกัน เพราะฉะนั้น $\square CDEF$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

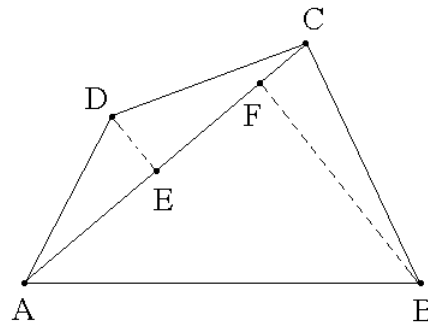
เพราะฉะนั้น $DE = CF$ เพราะฉะนั้น พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD = \text{พื้นที่ } \triangle ABD + \text{พื้นที่ } \triangle CDB$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} CD \cdot CF$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot DE + \frac{1}{2} CD \cdot DE \quad (DE = CF)$$

$$= \frac{1}{2} DE (AB + CD) = \frac{1}{2} (\text{สูง} \times \text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน}) \quad \square$$

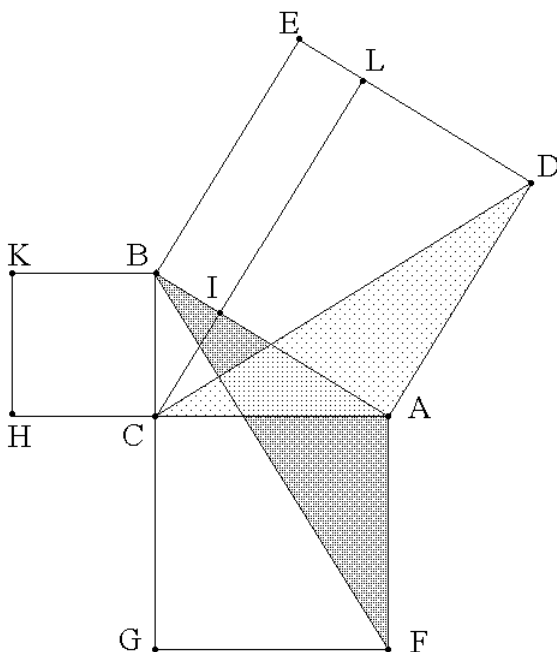
ทฤษฎีบท 28.1 □ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า AC เป็นเส้นทแยงมุม DE ⊥ AC และ BF ⊥ AC
 หมายเหตุ ความยาว DE, BF เรียกว่า ระยะจากแยก ของเส้นทแยงมุม AC ใน □ ABCD



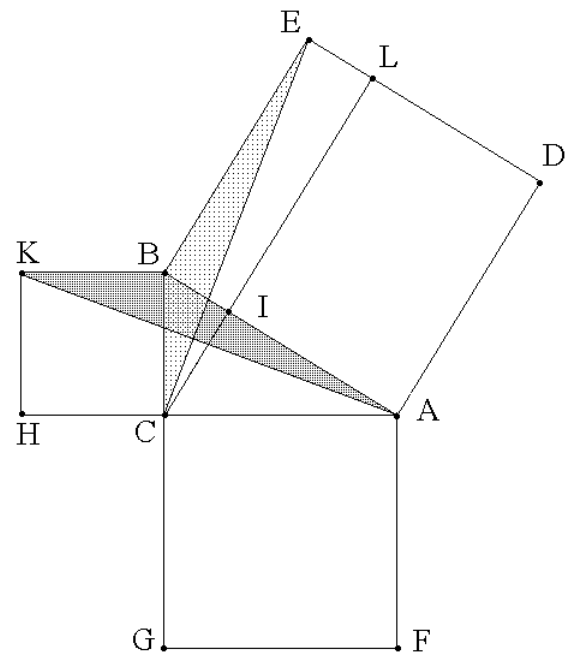
รูปที่ 1.57

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า } ABCD &= \text{พื้นที่ } \triangle ACD + \text{พื้นที่ } \triangle ACB = \frac{1}{2} AC \cdot DE + \frac{1}{2} AC \cdot BF \\ &= \frac{1}{2} AC (DE + BF) = \frac{1}{2} (\text{ความยาวเส้นทแยงมุม}) \times (\text{ผลบวกของระยะจากแยก}) \quad \square \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 29. $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี AB เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก จะได้ $AB^2 = AC^2 + BC^2$
 [Euclid I. 47.] (Pythagoras's Theorem)



รูปที่ 1.58.1



รูปที่ 1.58.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก
 จะต้องพิสูจน์ว่า $AB^2 = AC^2 + BC^2$

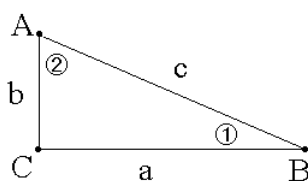
- บทสร้าง**
- สร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABED บนด้าน AB, สร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส BCHK บนด้าน BC
 สร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส ACFG บนด้าน AC
 - รูปที่ 1.58.1 ลากเส้น CL ขนานกับ BE ตัด AB ที่ I และ ลากเส้น CD, BF
 - รูปที่ 1.58.2 ลากเส้น CL ขนานกับ BE ตัด AB ที่ I และ ลากเส้น AK, CE

ข้อพิสูจน์

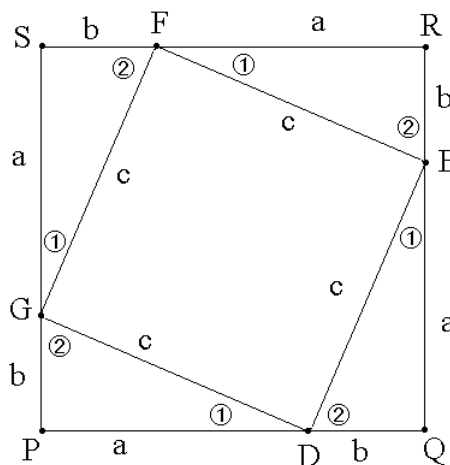
ข้อความ	เหตุผล
1. BC, CG อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (รูปที่ 1.58.1)	1. $\hat{ACB} = \hat{ACG} = 90^\circ$
2. $\hat{CAD} = \hat{BAD} + \hat{BAC} = \hat{CAF} + \hat{BAC} = \hat{FAB}$	2. $\hat{CAF} = \hat{BAD} = 90^\circ$
3. CA = FA	3. $\square ACGF$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส
4. AD = AB	4. $\square ADEB$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส
5. $\triangle CAD, \triangle FAB$ เท่ากับทุกประการ	5. ด.ม.ด. (จาก (2), (3), (4))
6. พื้นที่ $\square AILD = 2$ พื้นที่ $\triangle CAD$	6. มีฐาน AD และ จุดยอดอยู่บนเส้นขนาน CL
7. พื้นที่ $\square ACGF = 2$ พื้นที่ $\triangle FAB$	7. มีฐาน FA และ จุดยอดอยู่บนเส้นขนาน BG
8. พื้นที่ $\square AILD =$ พื้นที่ $\square ACGF$	8. จาก (5), (6), (7)
9. HC, CA อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน (รูปที่ 1.58.2)	9. $\hat{BCH} = \hat{BCA} = 90^\circ$
10. $\hat{KBA} = \hat{KBC} + \hat{CBA} = \hat{EBA} + \hat{CBA} = \hat{CBE}$	10. $\hat{KBC} = \hat{EBA} = 90^\circ$
11. KB = BC	11. $\square BCHK$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส
12. AB = BE	12. $\square ADEB$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส
13. $\triangle KBA, \triangle BCE$ เท่ากับทุกประการ	13. ด.ม.ด. (จาก (10), (11), (12))
14. พื้นที่ $\square BKHC = 2$ พื้นที่ $\triangle BKA$	14. มีฐาน KB และ จุดยอดอยู่บนเส้นขนาน HA
15. พื้นที่ $\square BILE = 2$ พื้นที่ $\triangle BCE$	15. มีฐาน BE และ จุดยอดอยู่บนเส้นขนาน CL
16. พื้นที่ $\square BKHC =$ พื้นที่ $\square BILE$	16. จาก (13), (14), (15)
17. $AB^2 =$ พื้นที่ $\square ABED$ = พื้นที่ $\square AILD +$ พื้นที่ $\square BILD$ = พื้นที่ $\square ACGF +$ พื้นที่ $\square BKHC$ = $AC^2 + BC^2$	17. พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส = (ด้าน) ² ผลรวมของพื้นที่สี่เหลี่ยมย่อย จาก (8) และ (16) พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส = (ด้าน) ² Q.E.D.

หมายเหตุ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี AB เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก จะได้ $AB^2 = BC^2 + AC^2$
ให้ $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ จะได้ $c^2 = a^2 + b^2$

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 29. แบบที่ 2.



รูปที่ 1.59.1



รูปที่ 1.59.2

ให้ $\square PQRS$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีความยาวด้าน $PQ = a + b$

D, E, F, G เป็นจุดบนด้าน PQ, QR, RS, SP ตามลำดับ

และ ทำให้ $\triangle PDG, \triangle DQE, \triangle ERF, \triangle FSG$ และ $\triangle ABC$ เท่ากันทุกประการ

เพราะฉะนั้น $DE = EF = FG = GD = c$ เพราะฉะนั้น $\square DEFG$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ c

พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส $PQRS$

$$= \text{พื้นที่ } \triangle PDG + \text{พื้นที่ } \triangle DQE + \text{พื้นที่ } \triangle ERF + \text{พื้นที่ } \triangle FSG + \text{พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส } DEFG$$

$$(a + b)^2 = \text{พื้นที่ } \triangle ABC + \text{พื้นที่ } \triangle ABC + \text{พื้นที่ } \triangle ABC + \text{พื้นที่ } \triangle ABC + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4(\text{พื้นที่ } \triangle ABC) + c^2 = 4\left(\frac{1}{2}ab\right) + c^2 = 2ab + c^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a^2 + b^2 = c^2$$

□

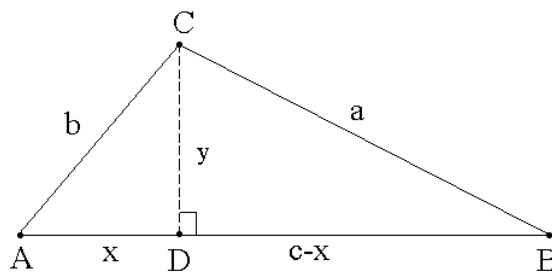
ทฤษฎีบท 29.1 $\triangle ABC$ มี $AB = c, AC = b, BC = a$ และ $CD \perp AB$ และ $s = \frac{a+b+c}{2}$ จะได้

$$1. AD = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$$

$$2. CD = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$3. \text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$4. \text{พื้นที่ } \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



รูปที่ 1.60

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $AB = c, AC = b, BC = a$ และ $CD \perp AB$ และ $s = \frac{a+b+c}{2}$ ลาก $CD \perp AB$

จะต้องพิสูจน์ว่า 1. $AD = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}$ 2. $CD = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$$3. \text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$4. \text{พื้นที่ } \triangle ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ข้อพิสูจน์ 1. ให้ $AD = x, CD = y$ เพราะฉะนั้น $BD = c - x$

ใช้ทฤษฎีบท 29. กับสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC จะได้ $AC^2 = AD^2 + CD^2, b^2 = x^2 + y^2$

$$\text{เพราะฉะนั้น } y^2 = b^2 - x^2 \quad \dots (1)$$

ใช้ทฤษฎีบท 29. กับสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD จะได้ $BC^2 = BD^2 + CD^2, a^2 = (c - x)^2 + y^2$

$$\text{เพราะฉะนั้น } y^2 = a^2 - (c - x)^2 \quad \dots (2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} \text{ เพราะฉะนั้น } AD = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c} \quad \dots (3)$$

$$2. \text{ จาก (1) และ (3) จะได้ } y^2 = b^2 - x^2 = b^2 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2c}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
 y^2 &= \frac{1}{4c^2} (4b^2c^2 - (c^2 + b^2 - a^2)^2) = \frac{1}{4c^2} (2bc + (c^2 + b^2 - a^2))(2bc - (c^2 + b^2 - a^2)) \\
 &= \frac{1}{4c^2} (b^2 + 2bc + c^2 - a^2)(a^2 - b^2 + 2bc - c^2) = \frac{1}{4c^2} ((c+b)^2 - a^2)(a^2 - (b-c)^2) \\
 &= \frac{1}{4c^2} ((c+b) + a)((c+b) - a)(a - (b-c))(a + (b-c)) \\
 &= \frac{1}{4c^2} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $CD = y = \frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

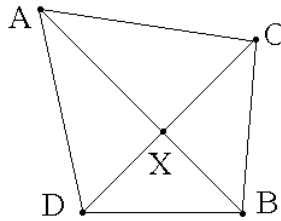
$$\begin{aligned}
 3. \text{ พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} (AB)(CD) = \frac{1}{2} (c) \left(\frac{1}{2c} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}
 \end{aligned}$$

4. เพราะว่า $s = \frac{a+b+c}{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{-a+b+c}{2} = s - a$, $\frac{a-b+c}{2} = s - b$, $\frac{a+b-c}{2} = s - c$

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \square$$

ทฤษฎีบท 29.2 เส้นตรง AB และ CD ตั้งฉากและตัดกันที่จุด X จะได้ $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$



รูปที่ 1.61

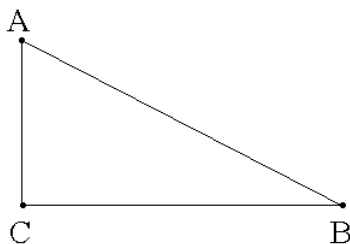
กำหนดให้ เส้นตรง AB และ CD ตั้งฉากและตัดกันที่จุด X

จะต้องพิสูจน์ว่า $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$

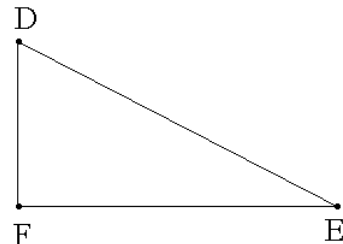
$$\begin{aligned}
 \text{ข้อพิสูจน์ } AC^2 + BD^2 &= (AX^2 + XC^2) + (BX^2 + XD^2) \quad (\triangle AXC, \triangle BXD \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก}) \\
 &= (AX^2 + XD^2) + (BX^2 + XC^2) \\
 &= AD^2 + BC^2 \quad (\triangle AXD, \triangle BXC \text{ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก}) \quad \square
 \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 30. ถ้า $AB^2 = AC^2 + BC^2$ แล้ว $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\angle C$ เป็นมุมฉาก

[Euclid I. 48.]



รูปที่ 1.62.1



รูปที่ 1.62.2

กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $AB^2 = AC^2 + BC^2$

จะต้องพิสูจน์ว่า $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{ACB}$ เป็นมุมฉาก

บทสร้าง 1. ลากเส้นตรง EF ยาวเท่ากับ BC

2. ลากเส้น $DF \perp EF$ และ $DF = AC$ และ ลากเส้นตรง ED

ข้อพิสูจน์

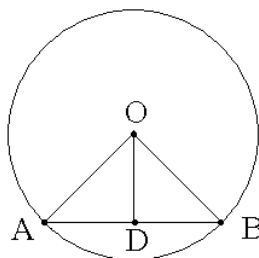
ข้อความ	เหตุผล
1. $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $\hat{DFE} = 90^\circ$	1. บทสร้างข้อ 2.
2. $BC^2 = EF^2$	2. $EF = BC$ บทสร้างข้อ 1.
3. $AC^2 = DF^2$	3. $AC = DF$ บทสร้างข้อ 2.
4. $EF^2 + DF^2 = ED^2$	4. $\triangle DEF$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $\hat{DFE} = 90^\circ$
5. $BC^2 + AC^2 = ED^2$	5. จาก (2), (3)
6. $AB^2 = ED^2$	6. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ และ (5)
7. $AB = ED$	7. จาก (6)
8. $\triangle DEF, \triangle ABC$ เท่ากันทุกประการ	8. ด.ด.ด. (บทสร้างข้อ 1. ข้อ 2. และ (7))
9. $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $\hat{ACB} = 90^\circ$	9. จาก (1) และ (8) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 31. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ AB เป็นคอร์ดของวงกลมที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง

และ D เป็นจุดบนคอร์ด AB จะได้ 1. ถ้า D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB แล้ว $OD \perp AB$

2. ถ้า $OD \perp AB$ แล้ว D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

[Euclid III. 3.]



รูปที่ 1.63

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง AB เป็นคอร์ดของวงกลมที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง และ D เป็นจุดบน AB

จะต้องพิสูจน์ว่า 1. ถ้า D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB แล้ว $OD \perp AB$

2. ถ้า $OD \perp AB$ แล้ว D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

ข้อพิสูจน์ 1. กำหนดให้ D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

ข้อความ	เหตุผล
1. $OA = OB$	1. รัศมีวงกลมเดียวกัน
2. OD ด้านร่วม	2. จากรูปที่ 1.63
3. $AD = DB$	3. D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB
4. $\triangle OAD, \triangle OBD$ เท่ากันทุกประการ	4. ด.ด.ด. (จาก (1), (2), (3))
5. $\hat{ODA} = \hat{ODB}$	5. $\triangle OAD, \triangle OBD$ เท่ากันทุกประการ

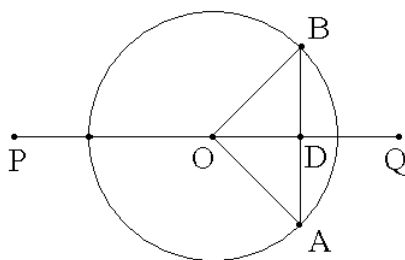
6. $\hat{O}DA = \hat{O}DB = 90^\circ$	6. จาก (5) และ $\hat{O}DA + \hat{O}DB = 180^\circ$
7. $OD \perp AB$	7. จาก (6) Q.E.D.

ข้อพิสูจน์ 2. กำหนดให้ $OD \perp AB$

ข้อความ	เหตุผล
1. $OA = OB$	1. รัศมีวงกลมเดียวกัน
2. OD ด้านร่วม	2. จากรูปที่ 1.63
3. $\hat{O}DA = \hat{O}DB = 90^\circ$	3. $OD \perp AB$ (กำหนดให้)
4. $\triangle OAD, \triangle OBD$ เท่ากันทุกประการ	4. ด.ม.ด. (จาก (1), (2), (3))
5. $AD = DB$	5. $\triangle OAD, \triangle OBD$ เท่ากันทุกประการ
6. D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB	6. จาก (5) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 31.1 O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม AB เป็นคอร์ดของวงกลม

จะได้ เส้นตรงที่ตั้งฉากกับคอร์ด AB และแบ่งครึ่งคอร์ด ต้องผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม



รูปที่ 1.64

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม AB เป็นคอร์ดของวงกลมที่ไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง O

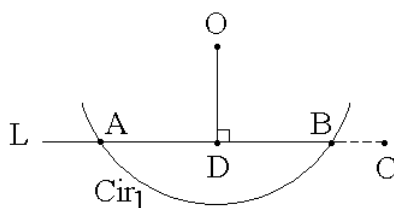
และ D เป็นจุดบน AB เส้นตรง PQ แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB ที่จุด D

จะต้องพิสูจน์ว่า เส้นตรง PQ ผ่านจุด O

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $OD \perp AB$ ที่จุด D	1. D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB (ทฤษฎีบท 31.)
2. $PQ \perp AB$ ที่จุด D	2. กำหนดให้
3. PQ ผ่านจุด O	3. จาก (1) และ (2) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 31.2 เส้นตรงตัดวงกลมได้อย่างมาก 2 จุด



รูปที่ 1.65

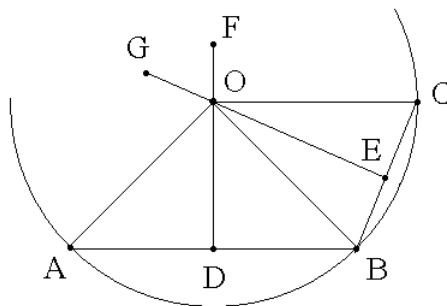
กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และมีเส้นตรง L ตัดวงกลม Cir_1 ที่จุด A, B จะต้องพิสูจน์ว่า L ตัดวงกลม Cir_1 ที่จุด A, B เท่านั้น

บทสร้าง ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางคอร์ด AB ลากเส้นตรง $OD \perp AB$

ข้อพิสูจน์ สมมติมีจุด C บนเส้นตรง L และ วงกลม Cir_1 โดยที่จุด C ไม่ใช่จุด A และ ไม่ใช่จุด B และ จุด C อยู่ข้างเดียวกับจุด B

ข้อความ	เหตุผล
1. $AD = DB$	1. D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB
2. D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC	2. $OD \perp AC$ (ทฤษฎีบท 31.)
3. $AD = DC$	3. จาก (2)
4. $DC = DB$	4. จาก (1) และ (3)
5. B, C เป็นจุดเดียวกัน	5. B, C, D อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ $DC = BC$
6. ข้อสมมติไม่จริง	6. ข้อสมมติ และ (5) ขัดแย้งกัน
เพราะฉะนั้น เส้นตรงตัดวงกลมได้อย่างมาก 2 จุด	Q.E.D.

ทฤษฎีบท 32. มีวงกลมเพียงวงเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด 3 จุดซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



รูปที่ 1.66

กำหนดให้ A, B, C เป็นจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

จะต้องพิสูจน์ว่า มีวงกลมเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุด A, B, C

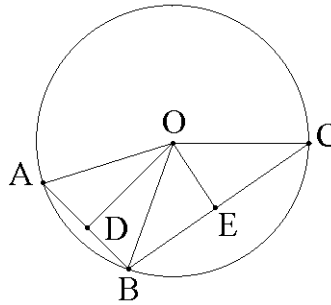
บทสร้าง ให้ FD แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB , GE แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC ให้ FD, GE ตัดกันที่จุด O

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. ทุกจุดบน DF ห่างจาก A, B เท่ากัน	1. FD แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB
2. $OA = OB$	2. จาก (1) และ O อยู่บน DF
3. ทุกจุดบน EG ห่างจาก B, C เท่ากัน	3. GE แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC
4. $OB = OC$	4. จาก (3) และ O อยู่บน GE
5. $OA = OB = OC$	5. จาก (2) และ (3)
6. มีวงกลมจุดศูนย์กลาง O รัศมี OA ผ่านจุด A, B, C วงเดียวเท่านั้น	6. จาก (5)
	Q.E.D.

ทฤษฎีบท 33. ถ้า จุดในวงกลมมีเส้นตรงมากกว่าสองเส้นที่ยาวเท่ากัน จากจุดนั้นไปยังเส้นรอบวงกลม แล้ว จุดนั้นต้องเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

[Euclid III. 9.]



รูปที่ 1.67

กำหนดให้ จุด O อยู่ในวงกลมและมี A, B, C เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม ที่ทำให้ $AO = BO = CO$ จะต้องพิสูจน์ว่า จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

บทสร้าง ให้ D เป็นจุดกึ่งกลาง AB ลาก OD และ ให้ E เป็นจุดกึ่งกลาง BC ลาก OE

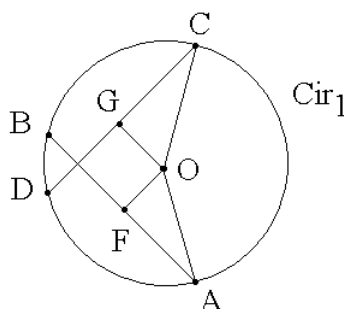
ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $DA = DB$	1. D เป็นจุดกึ่งกลาง AB
2. OD ด้านร่วม	2. จากรูปที่ 1.67
3. $AO = BO$	3. กำหนดให้
4. $\triangle AOD, \triangle BOD$ เท่ากันทุกประการ	4. ด.ด.ด. (จาก (1), (2), (3))
5. $\angle ODA = \angle ODB$	5. $\triangle AOD, \triangle BOD$ เท่ากันทุกประการ
6. $\angle ODA = \angle ODB = 90^\circ$	6. จาก (5) และ $\angle ODA + \angle ODB = 180^\circ$
7. OD แบ่งครึ่งและตั้งฉาก AB	7. จาก (1) และ (6)
8. DO ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม	8. ทฤษฎีบท 31.1
9. EO ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม	9. พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับข้างต้น
10. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม	10. จาก (8) และ (9) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 34. กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ AB, CD เป็นคอร์ดของวงกลม จะได้

1. ถ้า $AB = CD$ แล้ว AB, CD ห่างจากจุดศูนย์กลาง O เท่ากัน
2. ถ้า AB, CD ห่างจากจุดศูนย์กลาง O เท่ากัน แล้ว $AB = CD$

[Euclid III. 14.]



รูปที่ 1.68

1. กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ AB, CD เป็นคอร์ดของวงกลม และ $AB = CD$

บทสร้าง ลาก $OF \perp AB$ และ ลาก $OG \perp CD$

จะต้องพิสูจน์ว่า $OF = OG$

ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. $AF = BF = \frac{1}{2}AB$	1. $OF \perp AB$ (ทฤษฎีบท 31.)
2. $CG = DG = \frac{1}{2}CD$	2. $OG \perp CD$ (ทฤษฎีบท 31.)
3. $CG = AF$	3. จาก (1), (2) และ $AB = CD$
4. $OC = OA$	4. รัศมีวงกลมเดียวกัน
5. $\hat{CGO} = \hat{OFA} = 90^\circ$	5. $OF \perp AB$ และ $OG \perp CD$
6. $\triangle OFA, \triangle OCG$ เท่ากันทุกประการ	6. ด.จ.ด. (จาก (3), (4), (5))
7. $OF = OG$	7. จาก (6) Q.E.D.

2. กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ AB, CD เป็นคอร์ดของวงกลมที่ห่างจาก O เท่ากัน

บทสร้าง ลาก $OF \perp AB$ และ ลาก $OG \perp CD$ เพราะฉะนั้น $OG = OF$

จะต้องพิสูจน์ว่า $AB = CD$

ข้อพิสูจน์

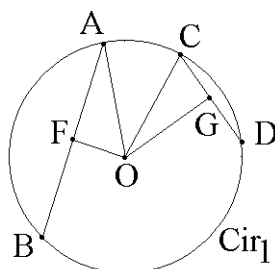
ข้อความ	เหตุผล
1. $OG = OF$	1. กำหนดให้
2. $OC = OA$	2. รัศมีวงกลมเดียวกัน
3. $\hat{CGO} = \hat{OFA} = 90^\circ$	3. $OF \perp AB$ และ $OG \perp CD$
4. $\triangle OFA, \triangle OCG$ เท่ากันทุกประการ	4. ด.จ.ด. (จาก (1), (2), (3))
5. $AF = CG$	5. จาก (4)
6. $AF = BF = \frac{1}{2}AB, CG = GD = \frac{1}{2}CD$	6. $OF \perp AB, OG \perp CD$ (ทฤษฎีบท 31.)
7. $AB = 2(AF) = 2(CG) = CD$	7. จาก (5) และ (6) Q.E.D.

ทฤษฎีบท 35. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ AB, CD เป็นคอร์ดของวงกลม Cir_1

F เป็นจุดบน AB และ $OF \perp AB$ และ G เป็นจุดบน CD และ $OG \perp CD$

จะได้ 1. ถ้า $OF < OG$ แล้ว $AB > CD$ 2. ถ้า $AB > CD$ แล้ว $OF < OG$

[Euclid III. 15.]



รูปที่ 1.69

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ AB, CD เป็นคอร์ดของวงกลม Cir_1

F เป็นจุดบน AB และ $OF \perp AB$ และ G เป็นจุดบน CD และ $OG \perp CD$

จะต้องพิสูจน์ว่า 1. ถ้า $OF < OG$ แล้ว $AB > CD$ 2. ถ้า $AB > CD$ แล้ว $OF < OG$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $OF \perp AB, OG \perp CD$ เพราะฉะนั้น $\triangle OFA, \triangle OGC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\text{เพราะฉะนั้น } AF^2 + OF^2 = AO^2 \text{ และ } CG^2 + OG^2 = OC^2 \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะว่า } OA, OC \text{ เป็นรัศมีวงกลมเดียวกัน เพราะฉะนั้น } OA = OC \quad \dots (2)$$

$$\text{จาก (1), (2) จะได้ } AF^2 + OF^2 = CG^2 + OG^2 \text{ เพราะฉะนั้น } AF^2 - CG^2 = OG^2 - OF^2 \quad \dots (3)$$

$$1. \text{ สมมติ } OF < OG \text{ เพราะฉะนั้น } 0 < OG^2 - OF^2$$

$$0 < AF^2 - CG^2 \quad (\text{จาก (3)})$$

$$CG^2 < AF^2$$

$$CG < AF$$

$$2 CG < 2 AF$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } CD < AB \quad (F \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง } AB, G \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง } CD)$$

$$2. \text{ สมมติ } CD < AB \text{ เพราะฉะนั้น } CG < AF \quad (F \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง } AB, G \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง } CD)$$

$$0 < AF^2 - CG^2$$

$$0 < OG^2 - OF^2 \quad (\text{จาก (3)})$$

$$OF^2 < OG^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } OF < OG$$

□

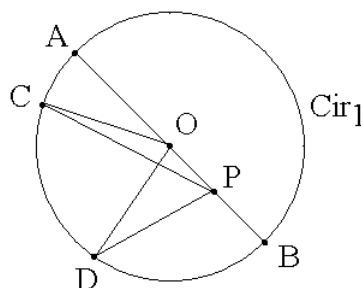
ทฤษฎีบท 36. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ P เป็นจุดภายในวงกลม และ ต่อเส้น PO ไปทางด้านจุด O ไปตัดวงกลมที่จุด A และ ต่อเส้นตรง OP ไปทางด้านจุด P ตัดวงกลมที่จุด B

และ C, D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม Cir_1

จะได้ 1. $PA > PC$ (กล่าวคือ เส้นตรงที่ลากจาก P ไปยังเส้นรอบวง จะได้ PA เป็นเส้นที่ยาวที่สุด)

2. $PD > PB$ (กล่าวคือ เส้นตรงที่ลากจาก P ไปยังเส้นรอบวง จะได้ PB เป็นเส้นที่สั้นที่สุด)

3. ถ้า $\angle POC > \angle POD$ แล้ว $PC > PD$



รูปที่ 1.70

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ P เป็นจุดภายในวงกลม

ต่อเส้น PO ไปทางด้านจุด O ไปตัดวงกลมที่จุด A และ ต่อเส้นตรง OP ไปทางด้านจุด P ตัดวงกลมที่จุด B

และ C, D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม Cir_1

จะต้องพิสูจน์ว่า 1. $PA > PC$ 2. $PD > PB$ 3. ถ้า $\hat{POC} > \hat{POD}$ แล้ว $PC > PD$

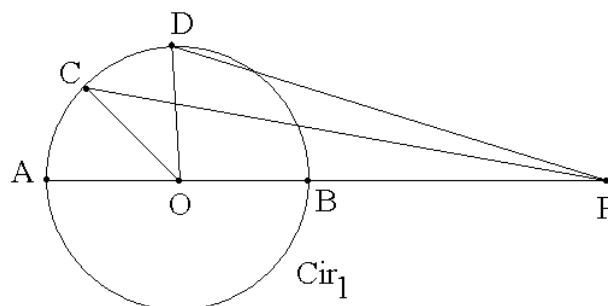
ข้อพิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
การพิสูจน์ 1. 1. $OC + OP > PC$ 2. $OA = OC$ 3. $OA + OP > PC$ 4. $AP > PC$	1. $\triangle OPC$ ผลบวกของสองด้านยาวกว่าด้านที่สาม 2. รัศมีวงกลมเดียวกัน 3. จาก (1) และ (2) 4. $OA + OP = PA$
การพิสูจน์ 2. 5. $OP + PD > OD$ 6. $OD = OB$ 7. $OP + PD > OB$ 8. $PD > PB$	5. $\triangle OPD$ ผลบวกของสองด้านยาวกว่าด้านที่สาม 6. รัศมีวงกลมเดียวกัน 7. จาก (5) และ (6) 8. $OB - OP = PB$
การพิสูจน์ 3. สมมติ $\hat{POC} > \hat{POD}$ 9. $OC = OD$ 10. OP ด้านร่วม 11. $PC > PD$	9. รัศมีวงกลมเดียวกัน 10. จากรูปที่ 1.70 11. ทฤษฎีบท 19. และ $\hat{POC} > \hat{POD}$ Q.E.D.

ทฤษฎีบท 37. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ P เป็นจุดภายนอกวงกลม ลากเส้น PO ตัดวงกลมที่จุด B และ ต่อ PO ไปตัดวงกลมอีกด้านหนึ่งที่จุด A และ C, D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม Cir_1 จะได้

1. $PA > PC$ (กล่าวคือ เส้นตรงที่ลากจาก P ไปยังเส้นรอบวง จะได้ PA เป็นเส้นที่ยาวที่สุด)
2. $PD > PB$ (กล่าวคือ เส้นตรงที่ลากจาก P ไปยังเส้นรอบวง จะได้ PB เป็นเส้นที่สั้นที่สุด)
3. ถ้า $\hat{POC} > \hat{POD}$ แล้ว $PC > PD$

[Euclid III. 8.]



รูปที่ 1.71

กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม Cir_1 และ P เป็นจุดภายนอกวงกลม Cir_1 ลากเส้น PO ตัดวงกลมที่จุด B และ ต่อ PO ไปตัดวงกลมอีกด้านหนึ่งที่จุด A และ C, D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม Cir_1 จะต้องพิสูจน์ว่า

1. $PA > PC$
2. $PD > PB$
3. ถ้า $\hat{POC} > \hat{POD}$ แล้ว $PC > PD$