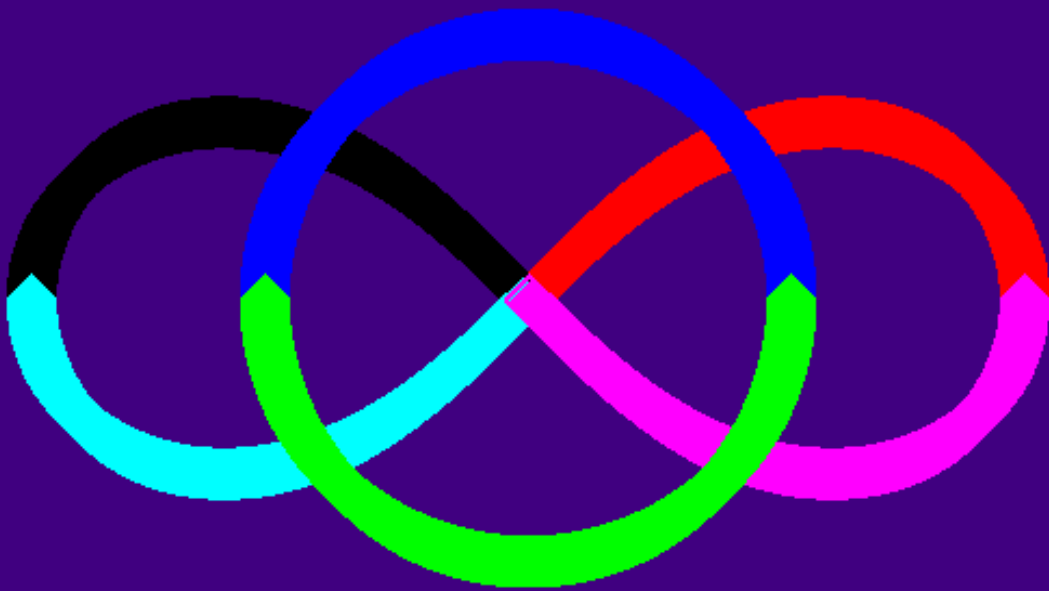


คณิตศาสตร์ปณิธิ เล่มที่ 24

เสริมความรู้มุ่งสู่
คณิตศาสตร์โอลิมปิก
IMO



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เสริมความรู้มุ่งสู่ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<http://www.math.sc.chula.ac.th>

<http://www.math.sc.chula.ac.th/~tdumrong/homepage>

<http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/homepage>

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 24 เสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 2

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : มีนาคม พ.ศ. 2560

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-423-979-1

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับนานาชาติ (IMO : International Mathematical Olympiad) จัดขึ้นครั้งแรกที่ประเทศโรมาเนีย ในปี ค.ศ. 1959 ประเทศไทยได้จัดส่งทีมนักเรียนเข้าแข่งขันครั้งแรกในปี ค.ศ. 1989 ณ ประเทศสหพันธ์สาธารณรัฐเยอรมัน ซึ่งเป็นการแข่งขันครั้งที่ 30 ผลงานในการแข่งขันครั้งแรกของประเทศไทยถือได้ว่าประสบความสำเร็จเป็นอย่างมากคือ ได้รับรางวัลเหรียญทองแดง 1 รางวัล และ รางวัลเกียรติคุณประกาศ 2 รางวัล และได้ส่งทีมเข้าแข่งขันต่อเนื่องมาทุกครั้งที่มีการแข่งขัน

การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับนานาชาติ นักเรียนทุกคนต้องมีความรู้และประสบการณ์ในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ต่าง ๆ ยิ่งมากยิ่งขึ้น ในการสนับสนุนนักเรียนไทยนี้ ผู้เขียนมีความเห็นว่าน่าจะจัดทำหนังสือที่มีโจทย์ข้อสอบเป็นจำนวนมากและโจทย์ข้อสอบนั้นควรมีลักษณะใกล้เคียงกับโจทย์ข้อสอบแข่งขัน จึงได้จัดทำหนังสือ คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 24 เสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก โดยรวบรวมโจทย์คำถาม ต่าง ๆ มาทำการเฉลยเพื่อให้นักเรียนได้ทำการฝึกฝนจะได้เกิดความชำนาญในการทำโจทย์

แนวทางในการจัดทำชุดของคำถามและแนวคิดเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ผู้เขียนรวบรวมโจทย์คำถามเป็นจำนวนมากเกินกว่า 600 ข้อ โดยจำแนกออกเป็นชุดข้อสอบ 10 ชุด ๆ ละ 50 ข้อ และ ภาคผนวกต่าง ๆ และได้พยายามรวบรวมคำถามที่คล้ายกันให้อยู่ชุดเดียวกัน ทำการปรับระดับของคำถามจากง่ายไปยาก คำถามแต่ละข้อที่อยู่ใกล้เคียงกันจะมีแนวคิดคล้ายกันเพียงแต่มีการเพิ่มหรือลดเงื่อนไขบางประการให้ยากขึ้นตามลำดับ จนบางครั้งสามารถสรุปเป็นสูตรสำหรับกรณีทั่วไปได้

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 24 เสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก เล่มนี้จะช่วยให้ ครู อาจารย์ และ ผู้ที่มีความจำเป็นจะต้องเป็นวิทยากรอบรมโครงการคณิตศาสตร์โอลิมปิกทุกท่าน ได้มีแหล่งข้อมูลของโจทย์ที่สามารถจะทำการรวบรวมตามหมวดหมู่ของเนื้อหาคณิตศาสตร์ขึ้นมาใหม่เพื่อเหมาะสมกับเนื้อหาและกลุ่มผู้เรียน ในด้านของนักเรียนหนังสือเล่มนี้ผู้เขียน เขียนเพื่อให้นักเรียนอ่าน ดังนั้นแนวคิดการเฉลยจึงพยายามจะใช้เหตุผลผลเท่าที่นักเรียนรู้มาก่อนตามหลักสูตร ม.ปลาย แล้วจึงเพิ่มสูตรต่าง ๆ ที่มีใช้กันในระดับคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น หรือ การใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่มีใช้ในระดับค่ายของอบรมโครงการคณิตศาสตร์โอลิมปิก

ด้วยความร่วมมือกันทุกฝ่ายหวังว่าทีมนักเรียนของประเทศไทยคงจะได้เหรียญทองเป็นรางวัลในการแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับนานาชาติ

สวัสดิ์ศรี

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

	หน้า
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 1	1 – 40
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 2	41 – 74
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 3	75 – 118
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 4	119 – 168
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 5	169 – 214
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 6	215 – 248
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 7	249 – 288
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 8	289 – 338
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 9	339 – 396
ปัญหาเสริมความรู้มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 10	397 – 446
ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก	
1. การแสดงว่า $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม	447 – 450
2. ลำดับฟีโบนัชชี (Fibonacci sequence)	451 – 460
3. การหา ห.ร.ม. ของ $2^a - 1$ และ $2^b - 1$	461 – 466
ภาคผนวก	
1. การหาผลบวก $x^n + y^n$ เมื่อกำหนดค่า $x + y$ และ xy	467 – 476
2. การหาผลบวก $x^n + y^n + z^n$ เมื่อกำหนดค่า $x + y + z$, $xy + yz + zx$ และ xyz	477 – 486
3. ฟังก์ชัน $e_p(n)$, Euler's phi function และ Legendre's formula	487 – 502
4. โจทย์เสริมประสบการณ์การแยกตัวประกอบ	503 – 512
5. ทฤษฎีรังนกพิราบ	513 – 518
6. รากหลักของรากที่ n ของ 1 (primitive n^{th} root of unity)	519 – 528
7. Pythagora's theorem	529 – 532
8. โจทย์ประยุกต์ปัญหาคณิตศาสตร์	533 – 537

ปัญหาเสริมความรู้สู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก

ชุดที่ 1

1. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

$$\text{จงแสดงว่า } 1.1 (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$$

$$1.2 (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$1.3 (a + b + c + d)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

2. ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นจำนวนจริง

$$\text{จงแสดงว่า } \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$

3. ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นจำนวนจริง

$$\text{จงแสดงว่า } \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

4. ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $n \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2$

5. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก

$$\text{จงแสดงว่า } (x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)(z^2 + z + 1) \geq 27xyz$$

6. ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

$$\text{จงแสดงว่า } (a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1) \dots (a_n^2 + a_n + 1) \geq 3^n (a_1 a_2 \dots a_n)$$

7. จำนวนเต็มบวก 7^{2000} หารด้วย 100 เหลือเศษเท่าใด

8. จำนวนเต็มบวก 7^{4000} หารด้วย 10000 เหลือเศษเท่าใด

9. จำนวนเต็มบวก 7^{100} มีสิบลักสุดท้ายเป็นเลขอะไร

10. สิบลักสุดท้ายของ 7^{8000} มีค่าเท่ากับเท่าใด

11. จำนวนเต็มบวก 2001^{2001} มี 15 ลักสุดท้ายเป็นเลขอะไร

12. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่าน้อยสุดที่ทำให้ 50 หาร $7^{49} + k$ ลงตัว

13. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ 127 หาร $2^{24} + k$ ลงตัว

14. ให้ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{จงพิจารณาว่า } m = n^2 + (n + 1)^2 + n^2(n + 1)^2 \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่ หรือ จำนวนเต็มคี่}$$

15. ให้ A, B, C เป็นมุมภายในของสามเหลี่ยม ABC จงแสดงว่า $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

16. จงหาลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, \dots, a_n$ ทั้งหมดที่เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวกและมีผลบวกเท่ากับ 10
17. ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็ม จงหาเซตคำตอบของสมการ $x + y + z = x^3 + y^3 + z^3 = 3$
18. ให้ a_1, a_2, a_3, a_4 เป็นลำดับเลขคณิตมีคุณสมบัติ สี่พจน์แรกบวกกันมีค่าเท่ากับ 44 และ อัตราส่วนระหว่าง ผลคูณของพจน์ที่หนึ่งกับพจน์ที่สี่ กับ ผลคูณพจน์ที่สองกับพจน์ที่สาม มีค่าเท่ากับ $\frac{5}{14}$
 จงหาผลคูณของสี่พจน์แรกลำดับเลขคณิต
19. จงหาคำตอบของสมการ $\log_2(9^{x+1} + 15) = 2 + \log_2(61(3^x) - 3)$
20. ให้ $f(x) = 2x^2, g(x) = \sqrt{\frac{x}{4}}, h(x) = (f \circ g)(x), h^2 = (h \circ h)(x)$
 และ $h^n(x) = (h \circ h^{n-1})(x)$ เมื่อ $n > 2$
 จงหา $h^{20}(x)$
21. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม
 ถ้า $x + 1$ หาร $3x^3 + 4ax^2 - 6bx + 5$ เหลือเศษ 4 แล้ว $\gcd(a, b)$ เท่ากับเท่าใด
22. ให้ $1, \omega, \omega^2$ เป็นรากที่สามของ 1
 จงหาค่าของ 22.1 $(1 + \omega - \omega^2)(1 - \omega + \omega^2)$
 22.2 $(1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^5)$
23. จงหา x, y, z ที่เป็นรากของสมการ $(1 - x)^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2 = \frac{1}{4}$
24. ให้ $\sum_{n=1}^{10} a_n x^n = (\sum_{n=1}^5 x^n)(\sum_{n=1}^5 (-x)^n)$ จงหาค่าของ $a_1, a_2, \dots, a_{10}$
25. ให้ $\sum_{n=1}^{20} a_n x^n = (\sum_{n=1}^{10} x^n)(\sum_{n=1}^{10} (-x)^n)$ จงหา $\sum_{n=1}^{20} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{10} a_n$
26. ให้ $f(x) = \sum_{n=1}^{40} a_n x^n = (\sum_{n=1}^{20} x^n)(\sum_{n=1}^{20} (-x)^n)$ จงหาพหุนาม $f(x)$
27. ให้ $\sum_{n=1}^{2000} a_n x^n = (\sum_{n=1}^{1000} x^n)(\sum_{n=1}^{1000} (-x)^n)$
 จงหาค่าของ 27.1 $\sum_{n=1}^{2000} a_n$
 27.2 $\sum_{n=1}^{2000} |a_n|$
 27.3 $\sum_{n=1}^{1000} a_n$

28. ให้ $m \in \mathbb{N}$ และ $f(x) = \sum_{n=1}^{4m} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{2m} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{2m} (-x)^n \right)$

จงแสดงว่า $f(x) = -x^2 - x^4 - \dots - x^{2m} + x^{2m+2} + x^{2m+4} + \dots + x^{4m}$

29. ให้ $m \in \mathbb{N}$ และ $f(x) = \sum_{n=1}^{4m+2} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{2m+1} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{2m+1} (-x)^n \right)$ จงหา $\sum_{n=1}^{4m+2} a_n$

30. จงแสดงว่า $5 \mid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ ก็ต่อเมื่อ $4 \nmid n$

31. ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$

$S = \{ (A, B) \mid A \subset U, B \subset U, A \cup B = U \text{ และ } A \cap B = \{0\} \}$ จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับเท่าใด

32. จงหาคำตอบของสมการ $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$ เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

33. ให้ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวก

จงแสดงว่า $\frac{1}{k+1} n^k < 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k < \frac{1}{k+1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} - \frac{1}{n^{k+1}} \right) n^{k+1}$

34. ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก จงหาค่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}$

35. จงหาผลบวกของสัมประสิทธิ์ทุกตัวของพหุนาม $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + x^{2000})^{2543}$

36. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{20} ใน $(1 + x^2 - x^3)^{20}$

37. สัมประสิทธิ์ของ x^{20} ในพหุนามใดจะมีค่ามากกว่ากัน

ระหว่าง $(1 + x^2 + x^3)^{2000}$ กับ $(1 - x^2 - x^3)^{2000}$

38. ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนเต็ม

จงหาค่าของ x ที่ทำให้ $(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ มีค่าน้อยสุด

39. จงหารากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

40. จงหาจำนวนเต็ม n และ k ที่ทำให้

$(k+1)^n + (k+2)^n + (k+3)^n + (k+4)^n + (k+5)^n$ หารด้วย 5 ลงตัว

41. จงแสดงว่าไม่มีจำนวนเต็มบวก a, b, c ที่ทำให้ $a^2 + b^2 - 8c = 6$

42. 42.1 จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 30 ลงตัว

42.2 จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 300 ลงตัว

42.3 จงหาจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 3600 ลงตัว

42.4 มีเหรียญ 1 บาทจำนวน 3 เหรียญ เหรียญ 5 บาทจำนวน 5 เหรียญ และ

เหรียญ 10 บาทจำนวน 6 เหรียญ เหรียญทั้งหมดบรรจุในกล่อง

ในการหยิบเหรียญออกมาพร้อมกันจำนวนกี่เหรียญก็ได้จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี

- 42.5 มีเหรียญ 1 บาทจำนวน 3 เหรียญ เหรียญ 5 บาทจำนวน 5 เหรียญ และ
เหรียญ 10 บาทจำนวน 6 เหรียญ เหรียญทั้งหมดบรรจุในกล่อง
ในการหยิบเหรียญออกมาพร้อมกัน 3 เหรียญ
จำนวนวิธีที่จะได้เหรียญไม่ครบทุกชนิดจะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี
- 42.6 มีเหรียญ 1 บาทจำนวน 3 เหรียญ เหรียญ 5 บาทจำนวน 5 เหรียญ และ
เหรียญ 10 บาทจำนวน 6 เหรียญ เหรียญทั้งหมดบรรจุในกล่อง
ในการหยิบเหรียญออกมาพร้อมกันอย่างน้อย 3 เหรียญ
จำนวนวิธีที่จะได้เหรียญครบทุกชนิดจะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี
43. จงหาจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่หารด้วย 5, 4, 3, 2 เหลือเศษ 4, 3, 2, 1 ตามลำดับ
และหารด้วย 11 ลงตัว
44. จงหาจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดและมีค่าไม่เกิน 6543
ที่หารด้วย 6, 5, 4, 3 เหลือเศษ 5, 4, 3, 2 ตามลำดับ และหารด้วย 17 ลงตัว
45. จงหาจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดและมีค่าไม่เกิน 9!
ที่หารด้วย 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 เหลือเศษ 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 ตามลำดับ
46. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n \geq 4$
จงแสดงว่า ถ้า $n + 1$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $n + 1$ หาร $n!$ ลงตัว
47. จำนวนเต็มบวกซึ่งน้อยกว่า 51 ที่ทำให้ $n \nmid (n - 1)!$ มีกี่จำนวน
48. ใน ΔABC ถ้า $\cos A : \cos B : \cos C = 2 : 9 : 12$ แล้ว $\sin A : \sin B : \sin C$ เท่ากับเท่าใด
49. ให้ $-1 \leq x \leq 1$ ค่าของ $\arcsin(\cos(\arcsin x)) + \arccos(\sin(\arccos x))$ เท่ากับเท่าใด
50. จงหารากของสมการ $2^{-\frac{2}{3x}} - 2^{1+x^2+x^4+x^6+\dots} = 0$

เฉลยปัญหาเสริมความรู้สู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 1

1. แนวคิด 1.1 $(a - b)^2 \geq 0$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2$$

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

1.2 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$

$$a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2 \geq 0$$

$$b^2 - 2bc + c^2 = (b - c)^2 \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0$

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \geq 0$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) \geq 0$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$

1.3 $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \geq 0$... (1)

$$a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2 \geq 0 \quad \dots (2)$$

$$a^2 - 2ad + d^2 = (a - d)^2 \geq 0 \quad \dots (3)$$

$$b^2 - 2bc + c^2 = (b - c)^2 \geq 0 \quad \dots (4)$$

$$b^2 - 2bd + d^2 = (b - d)^2 \geq 0 \quad \dots (5)$$

$$c^2 - 2cd + d^2 = (c - d)^2 \geq 0 \quad \dots (6)$$

เพราะฉะนั้น $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 3d^2 - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd - 2cd \geq 0$

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - 2ab - 2ac - 2ad - 2bc - 2bd - 2cd \geq 0$$

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd) \geq 0$$

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d)^2 \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq (a + b + c + d)^2$... (7)

หมายเหตุ (7) เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ (1) - (6) เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $a = b = c = d$

เพราะฉะนั้น $4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2$ ก็ต่อเมื่อ $a = b = c = d$



2. แนวคิด ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ และ $b_1, b_2, \dots, b_n$ เป็นจำนวนจริง

$$\text{เพราะว่า } 0 \leq \sum_{i=1}^n (a_i + b_i t)^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (a_i^2 + 2a_i b_i t + b_i^2 t^2)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)t + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)t^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)t + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)t^2 \geq 0$$

$$\text{ให้ } A = \sum_{i=1}^n b_i^2, B = 2\sum_{i=1}^n a_i b_i, C = \sum_{i=1}^n a_i^2 \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } At^2 + Bt + C \geq 0$$

เพราะฉะนั้นสมการ $At^2 + Bt + C = 0$ มีรากอย่างมากที่สุดหนึ่งตัวหรือไม่มีราก

$$\text{เพราะว่ารากของสมการ } At^2 + Bt + C = 0 \text{ คือ } t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } B^2 - 4AC \leq 0$$

$$4\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0 \quad (\text{จาก (1)})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

หมายเหตุ 1. อสมการนี้เรียกว่า **อสมการโคชี-ชวาร์ซ** (Cauchy-Schwarz inequality)

$$2. \text{ ให้ } b_i = 1 \text{ ทุกค่า } i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ จะได้ } \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \quad \square$$

3. แนวคิด แบบที่ 1

$$\text{ให้ } P(n) \text{ แทนข้อความ " } \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \text{ "}$$

(1) การแสดงว่า $P(1), P(2)$ เป็นจริง

$$\text{เพราะว่า } \left(\sum_{i=1}^1 a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^1 b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^1 a_i b_i\right)^2 = a_1^2 b_1^2 - a_1^2 b_1^2 = 0 = \sum_{1 \leq i < j \leq 1} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

$$\text{และ } \left(\sum_{i=1}^2 a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^2 b_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^2 a_i b_i\right)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2$$

$$= a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 - (a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2)$$

$$= a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq 2} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

เพราะฉะนั้น $P(1), P(2)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 2$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^k b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad \dots (1)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i \right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 + a_{k+1}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^k b_i^2 + b_{k+1}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i + a_{k+1} b_{k+1} \right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^k b_i^2 \right) + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k a_i^2 + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2$$

$$- \left(\left(\sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2 + 2 a_{k+1} b_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i b_i + a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 \right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^k b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^k a_i b_i \right)^2 + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k a_i^2 + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 - 2 a_{k+1} b_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i b_i$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + b_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k a_i^2 + a_{k+1}^2 \sum_{i=1}^k b_i^2 - 2 a_{k+1} b_{k+1} \sum_{i=1}^k a_i b_i \quad (\text{จาก (1)})$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + \sum_{i=1}^k a_i^2 b_{k+1}^2 + \sum_{i=1}^k a_{k+1}^2 b_i^2 - \sum_{i=1}^k 2 a_i b_i a_{k+1} b_{k+1}$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + \sum_{i=1}^k (a_i^2 b_{k+1}^2 + a_{k+1}^2 b_i^2 - 2 a_i b_i a_{k+1} b_{k+1})$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq k} (a_i b_j - a_j b_i)^2 + \sum_{i=1}^k (a_i b_{k+1} - a_{k+1} b_i)^2$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \quad \text{ทุกค่า } n \in \mathbb{N}$$

แบบที่ 2 ให้ $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ และ $\vec{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^2 b_j^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i^2 b_j^2 \\
 &\quad - \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_i a_j b_j + \sum_{i=1}^n a_i^2 b_i^2 + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i b_i a_j b_j \right) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^2 b_j^2 + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i^2 b_j^2 - \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_i a_j b_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i b_i a_j b_j \right) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^2 b_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_j^2 b_i^2 - \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_i a_j b_j + \sum_{1 \leq j < i \leq n} a_i b_i a_j b_j \right) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^2 b_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_j^2 b_i^2 - \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_i a_j b_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_j b_j a_i b_i \right) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i^2 b_j^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_j^2 b_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i b_i a_j b_j \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2 a_i b_i a_j b_j) \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ 1. ให้ $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ และ $\vec{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$

$$\begin{aligned}
 \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \geq (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ เพราะฉะนั้น $\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \geq |\vec{u} \cdot \vec{v}|$

$$2. \text{ สมการ } \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

เรียกว่า Lagrange's identity

3. เพราะว่า $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) \geq (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2$ ซึ่งเป็นอสมการโคชี □

4. แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นจำนวนจริง

ให้ $f(t) = \sum_{i=1}^n (1 + x_i t)^2$ เพราะฉะนั้น $f(t) \geq 0$... (1)

$f(t) = \sum_{i=1}^n (1 + x_i t)^2 = \sum_{i=1}^n (1 + 2x_i t + x_i^2 t^2) = \sum_{i=1}^n 1 + (2 \sum_{i=1}^n x_i)t + (\sum_{i=1}^n x_i^2)t^2$... (2)

ให้ $A = \sum_{i=1}^n x_i^2, B = 2 \sum_{i=1}^n x_i, C = n$ เพราะฉะนั้น $f(t) = At^2 + Bt + C$... (3)

จาก (1) และ (3) จะได้ $At^2 + Bt + C \geq 0$

เพราะฉะนั้นสมการ $At^2 + Bt + C = 0$ มีรากอย่างมากหนึ่งตัวหรือไม่มีราก

เพราะว่ารากของสมการ $At^2 + Bt + C = 0$ คือ $t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ เพราะฉะนั้น $B^2 - 4AC \leq 0$

เพราะฉะนั้น $(2 \sum_{i=1}^n x_i)^2 - 4(\sum_{i=1}^n x_i^2)(n) \leq 0$ เพราะฉะนั้น $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$

หมายเหตุ โดยใช้ผลของข้อ 2

ให้ $a_i = 1$ และ $b_i = x_i$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$ จะได้ $(\sum_{i=1}^n x_i)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$ □

5. แนวคิด เมื่อ $a > 0$ จะได้ $\sqrt{a} > 0$

$$(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}})^2 \geq 0$$

$$a - 2 + \frac{1}{a} \geq 0$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$a + 1 + \frac{1}{a} \geq 3$$

$$a^2 + a + 1 \geq 3a \quad \dots (1)$$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $x > 0, y > 0, z > 0$ จะได้ $x^2 + x + 1 \geq 3x$

$$y^2 + y + 1 \geq 3y$$

$$z^2 + z + 1 \geq 3z$$

เพราะฉะนั้น $(x^2 + x + 1)(y^2 + y + 1)(z^2 + z + 1) \geq 3^3 xyz = 27xyz$ □

6. แนวคิด เพราะว่า $a > 0$ เพราะฉะนั้น $a^2 + a + 1 \geq 3a$ (จาก (1) ในข้อ 5)

เพราะฉะนั้น $a_i^2 + a_i + 1 \geq 3a_i$ ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$

เพราะฉะนั้น $(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1) \dots (a_n^2 + a_n + 1) \geq 3^n a_1 a_2 \dots a_n$ □

7. แนวคิด แบบที่ 1 $7^2 = 49$, $7^4 = 2401$, $7^4 - 1 = 2401 - 1 = 2400$

เพราะฉะนั้น 100 หาร $7^4 - 1$ ลงตัว

เพราะว่า $a - b$ หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว เพราะฉะนั้น $7^4 - 1$ หาร $(7^4)^{500} - 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $7^4 - 1$ หาร $7^{2000} - 1$ ลงตัว

เพราะว่า 100 หาร $7^4 - 1$ ลงตัว เพราะฉะนั้น 100 หาร $7^{2000} - 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 100 หาร 7^{2000} เหลือเศษ 1

แบบที่ 2 เพราะว่า $7^4 \equiv 2401 \pmod{100} \equiv 1 \pmod{100}$ เพราะฉะนั้น $(7^4)^{500} \equiv 1 \pmod{100}$

เพราะฉะนั้น 100 หาร 7^{2000} เหลือเศษ 1 □

8. แนวคิด $7^4 = 2401 = 2400 + 1$

$$7^{4000} = (2400 + 1)^{1000}$$

$$= 2400^{1000} + \binom{1000}{1} 2400^{999} + \binom{1000}{2} 2400^{998} + \dots + \binom{1000}{998} 2400^2 + \binom{1000}{999} 2400 + 1$$

เพราะว่า 2400^{1000} , $\binom{1000}{1} 2400^{999}$, $\dots$, $\binom{1000}{999} 2400$ แต่ละพจน์มีตัวเลขท้ายหลักสุดท้ายเป็น 00000

เพราะฉะนั้น ห้าหลักสุดท้ายของ 7^{4000} คือ 00001 □

9. แนวคิด $7^2 = 49$, $50 - 1 = 7^2$, $(50 - 1)^{50} = 7^{100}$

เพราะว่า $(a + b)^{50}$

$$= a^{50} + \binom{50}{1} a^{49} b + \binom{50}{2} a^{48} b^2 + \binom{50}{3} a^{47} b^3 + \dots + \binom{50}{48} a^2 b^{48} + \binom{50}{49} a b^{49} + b^{50}$$

เพราะฉะนั้น $(50 - 1)^{50}$

$$= 50^{50} - \binom{50}{1} 50^{49} + \binom{50}{2} 50^{48} - \binom{50}{3} 50^{47} + \dots - \binom{50}{47} 50^3 + \binom{50}{48} 50^2 - \binom{50}{49} 50 + 1$$

$$= 50^{50} - 50^{50} + \binom{50}{2} 50^{48} - \binom{50}{3} 50^{47} + \dots - \binom{50}{47} 50^3 + \binom{50}{48} 50^2 - 50^2 + 1$$

$$= \binom{50}{2} 50^{48} - \binom{50}{3} 50^{47} + \dots - \binom{50}{47} 50^3 + \binom{50}{48} 50^2 - 50^2 + 1$$

$$= \left(\binom{50}{2} 50^{48} + \binom{50}{4} 50^{46} + \dots + \binom{50}{46} 50^4 + \binom{50}{48} 50^2 \right)$$

$$- \left(\binom{50}{3} 50^{47} + \binom{50}{5} 50^{45} + \dots + \binom{50}{47} 50^3 + 50^2 \right) + 1$$

เพราะว่าสี่หลักสุดท้ายของ $\binom{50}{2} 50^{48}$, $\binom{50}{4} 50^{46}$, ..., $\binom{50}{47} 50^3$, $\binom{50}{46} 50^4$ เป็น 0000 ทุกตัว

และสี่หลักสุดท้ายของ $\binom{50}{48} 50^2 = (25)(49)(2500) = 3062500$ คือ 2500

เพราะฉะนั้นสี่หลักสุดท้ายของ $\binom{50}{2} 50^{48} + \binom{50}{4} 50^{46} + \dots + \binom{50}{46} 50^4 + \binom{50}{48} 50^2$ คือ 2500

เพราะว่าสี่หลักสุดท้ายของ $\binom{50}{3} 50^{47}$, $\binom{50}{5} 50^{45}$, ..., $\binom{50}{47} 50^3$ คือ 0000 และ $50^2 = 2500$

เพราะฉะนั้นสี่หลักสุดท้ายของ $\binom{50}{3} 50^{47} + \binom{50}{5} 50^{45} + \dots + \binom{50}{47} 50^3 + 50^2$ คือ 2500

เพราะฉะนั้นสี่หลักสุดท้ายของ $(50 - 1)^{50}$ คือ 0001 เพราะฉะนั้นสี่หลักสุดท้ายของ 7^{100} คือ 0001

หมายเหตุ การคำนวณโดยใช้ Mathematica

```
In[1]:= 7 ^ 100
```

```
Out[1]= 3 234 476 509 624 757 991 344 647 769 100 216 810 857 :
        203 198 904 625 400 933 895 331 391 691 459 636 928 :
        060 001
```



10. แนวคิด $7^4 = 2401 = 2400 + 1$

$$7^{8000} = (7^4)^{2000} = (2400 + 1)^{2000}$$

$$= 2400^{2000} + \binom{2000}{1} 2400^{1999} + \binom{2000}{2} 2400^{1998} + \dots + \binom{2000}{1995} 2400^5 + \binom{2000}{1996} 2400^4 \\ + \binom{2000}{1997} 2400^3 + \binom{2000}{1998} 2400^2 + \binom{2000}{1999} 2400 + 1$$

$$\text{เพราะว่า } \binom{2000}{1999} 2400 = 4800000$$

$$\binom{2000}{1998} 2400^2 = 11514240000000 \text{ มีสิบหลักสุดท้ายเป็น } 4240000000$$

$$\binom{2000}{1997} 2400^3 \text{ มีสิบหลักสุดท้ายเป็น } 6000000000$$

$$\binom{2000}{1996} 2400^4 \text{ มีสิบหลักสุดท้ายเป็น } 0000000000$$

$$\text{และ } 2400^{2000}, \binom{2000}{1} 2400^{1999}, \binom{2000}{2} 2400^{1998}, \dots, \binom{2000}{1995} 2400^5$$

ทุกตัวมีสิบหลักสุดท้ายเป็น 0000000000

เพราะฉะนั้น 7^{8000} มีสิบหลักสุดท้ายเป็น $0244800000 + 1$

เพราะฉะนั้น 7^{8000} มีสิบหลักสุดท้ายเป็น 0244800001



11. แนวคิด $2001^{2001} = (2000 + 1)^{2001}$

$$= 2000^{2001} + \binom{2001}{1} 2000^{2000} + \binom{2001}{2} 2000^{1999} + \binom{2001}{3} 2000^{1998} + \dots + \binom{2001}{1996} 2000^5 \\ + \binom{2001}{1997} 2000^4 + \binom{2001}{1998} 2000^3 + \binom{2001}{1999} 2000^2 + \binom{2001}{2000} 2000 + 1 \quad \dots (1)$$

เพราะว่า $\binom{2001}{2000} 2000 = (2001)(2000) = 4002000 = 4002 \times 10^3$

$$\binom{2001}{1999} 2000^2 = \frac{(2000)(2001)(2000^2)}{(1)(2)} = 8004000000000 = 8004 \times 10^9$$

$$\binom{2001}{1998} 2000^3 = \frac{(1999)(2000)(2001)(2000^3)}{(1)(2)(3)} = 10666664000000000000 = 10666664 \times 10^{12}$$

$$\binom{2001}{1997} 2000^4 = \frac{(1998)(1999)(2000)(2001)(2000^4)}{(1)(2)(3)(4)}$$

$$= 10655997336000000000000000 = 10655997336 \times 10^{15} > 10^{15}$$

เพราะว่า 2000^{2001} , $\binom{2001}{1} 2000^{2000}$, $\binom{2001}{2} 2000^{1999}$, $\binom{2001}{3} 2000^{1998}$, $\dots$, $\binom{2001}{1996} 2000^5$

ทุกตัวมีค่ามากกว่า 10^{15} ... (2)

และ $1 = 1$

$$\binom{2001}{2000} 2000 = \underline{4002000}$$

$$\binom{2001}{1999} 2000^2 = \underline{80040000000000}$$

$$\binom{2001}{1998} 2000^3 = \underline{106666640000000000000}$$

$$\binom{2001}{1997} 2000^4 = \underline{533066400000000000000000}$$

เพราะฉะนั้น $\binom{2001}{1997} 2000^4 + \binom{2001}{1998} 2000^3 + \binom{2001}{1999} 2000^2 + \binom{2001}{2000} 2000 + 1$

มี 15 หลักสุดท้ายเป็น 672004004002001 ... (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ 15 หลักสุดท้ายของ 2001^{2001} คือ 672004004002001 □

12. แนวคิด แบบที่ 1 $50 = 49 + 1 = 7^2 + 1$

$$7^{49} + k = 7 \cdot 7^{48} + k$$

$$= 7 \cdot 49^{24} + k$$

$$= 7 \cdot 49(49^{23} + 1) - 7(49) + k$$

$$= 343(49^{23} + 1) - 343 + k \quad \dots (1)$$

เพราะว่า $(a + b) \mid (a^{2n+1} + b^{2n+1})$ ทุกจำนวนเต็ม n เพราะฉะนั้น $49 + 1$ หาร $49^{23} + 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $50 \mid (49^{23} + 1)$ เพราะฉะนั้น $50 \mid 343(49^{23} + 1)$... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $50 \mid (7^{49} + k)$ ก็ต่อเมื่อ $50 \mid (-343 + k)$

เพราะว่าเราต้องการจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $50 \mid (-343 + k)$ เพราะฉะนั้น $k = 43$

แบบที่ 2 $7^2 \equiv 49 \pmod{50} \equiv -1 \pmod{50} \Rightarrow 7^4 \equiv (-1)^2 \pmod{50} \equiv 1 \pmod{50}$

$\Rightarrow (7^4)^{12} \equiv 1 \pmod{50} \Rightarrow 7^{48} \equiv 1 \pmod{50} \Rightarrow 7^{48+1} \equiv 7 \pmod{50}$

$\Rightarrow 7^{48+1} + k \equiv 7 + k \pmod{50}$

เพราะฉะนั้น $50 \mid (7^{48+1} + k)$ ก็ต่อเมื่อ $50 \mid (7 + k)$

เพราะว่าเราต้องการจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุด เพราะฉะนั้น $k = 43$ □

13. แนวคิด แบบที่ 1 $127 = 128 - 1 = 2^7 - 1$

$$2^{24} + k = 2^{21+3} + k$$

$$= (2^3)(2^{21}) + k$$

$$= 8(2^7)^3 + k$$

$$= 8((2^7)^3 - 1) + 8 + k$$

$$= 8(2^7 - 1)(2^{14} + 2^7 + 1) + 8 + k$$

$$= 8(127)(2^{14} + 2^7 + 1) + 8 + k$$

เพราะฉะนั้น $127 \mid (2^{24} + k)$ ก็ต่อเมื่อ $127 \mid (8 + k)$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่าน้อยสุดคือค่า k ที่ทำให้ $8 + k = 127$ เพราะฉะนั้น $k = 119$

แบบที่ 2 $2^7 \equiv 128 \pmod{127} \equiv 1 \pmod{127} \Rightarrow (2^7)^3 \equiv 1 \pmod{127}$

$\Rightarrow 2^{21} \equiv 1 \pmod{127} \Rightarrow 2^{21} 8 \equiv 8 \pmod{127} \Rightarrow 2^{24} \equiv 8 \pmod{127}$

$\Rightarrow 2^{24} + k \equiv 8 + k \pmod{127}$

เพราะฉะนั้น $127 \mid (2^{24} + k)$ ก็ต่อเมื่อ $127 \mid (8 + k)$

เพราะว่าเราต้องการจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุด เพราะฉะนั้น $k = 119$ □

14. แนวคิด $n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^4 + 2n^3 + n^2$

$$= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$$

$$= n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n + 1$$

$$= n^4 + 2n^2(n+1) + (n+1)^2$$

$$= (n^2 + (n+1))^2$$

$$= (n(n+1) + 1)^2$$

เพราะว่า $n(n+1)$ เป็นจำนวนเต็มคี่ เพราะฉะนั้น $n(n+1) + 1$ เป็นจำนวนเต็มคี่

เพราะฉะนั้น $(n(n+1) + 1)^2$ เป็นจำนวนเต็มคี่

เพราะฉะนั้น $n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2$ เป็นจำนวนเต็มคี่

หมายเหตุ ผลจากสูตรข้างต้นจะได้ว่า $n^2 + (n+1)^2 + n^2(n+1)^2$ เป็นจำนวนกำลังสองสมบูรณ์

ทำให้เราสามารถเลือกตัวเลขที่ทำให้ขนาดของเวกเตอร์ใน 3 มิติเป็นจำนวนเต็มได้โดยง่าย

ตัวอย่างเช่น $\| (2, 3, 6) \| = 7$, $\| (3, 4, 12) \| = 13$, $\| (4, 5, 20) \| = 21$, $\| (5, 6, 30) \| = 31$ □

15. แนวคิด เพราะ $A + B + C = \pi$ เพราะฉะนั้น $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}$

เพราะฉะนั้น $\sin \frac{C}{2} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}) = \cos \frac{A+B}{2}$... (1)

ให้ $x = \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$... (2)

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{2} (2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}) \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{2} (\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}) \sin \frac{C}{2}$
 $= \frac{1}{2} (\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2}) \cos \frac{A+B}{2}$ (จาก (1)) ... (3)

เพราะฉะนั้น $2x = \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} - \cos^2(\frac{A+B}{2})$

แทนค่า $v = \cos \frac{A+B}{2}$ จะได้ $2x = (\cos \frac{A-B}{2})v - v^2$

$$v^2 - (\cos \frac{A-B}{2})v + 2x = 0$$

เพราะว่าสมการ $Av^2 + Bv + C = 0$ มีรากเป็น $v = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$

เพราะฉะนั้น $v = \frac{\cos \frac{A-B}{2} \pm \sqrt{\cos^2(\frac{A-B}{2}) - 4(1)(2x)}}{2}$

$$= \frac{\cos \frac{A-B}{2} \pm \sqrt{\cos^2(\frac{A-B}{2}) - 8x}}{2}$$

เพราะว่า $v = \cos \frac{A+B}{2}$ เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้น $\cos^2(\frac{A-B}{2}) - 8x \geq 0$

$$8x \leq \cos^2(\frac{A-B}{2}) \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{8} \cos^2(\frac{A-B}{2}) \leq \frac{1}{8} \quad \dots (4)$$

จาก (2) และ (4) จะได้ $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ □

16. แนวคิด ให้ a เป็นพจน์แรกและ d เป็นผลต่างร่วม

เพราะฉะนั้น $a_1 = a$, $a_2 = a + d$, ..., $a_n = a + (n-1)d$

ให้ $a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d$ เป็นลำดับเลขคณิตและเป็นจำนวนเต็มที่มีผลบวกเท่ากับ 10

เพราะฉะนั้น $a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 1)d) = 10$

$$\frac{n}{2} (2a + (n - 1)d) = 10$$

$$n(2a + (n - 1)d) = 20$$

$$n(2a + (n - 1)d) = (2)(2)(5)$$

กรณีที่ 1 $n = 1, a = 10$

กรณีที่ 2 $n = 2, 2a + d = 20$ เพราะฉะนั้น $(a, d) = (1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)$

กรณีที่ 3 $n = 4, 2a + 3d = 5$ เพราะฉะนั้น $(a, d) = (1, 1)$

กรณีที่ 4 $n = 5, 2a + 4d = 4$ เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 5 $n = 10, 20$ เป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นลำดับเลขคณิตที่เป็นลำดับจำนวนเต็มบวกที่มีผลบวกเท่ากับ 10 มีทั้งหมดคือ

- | | | |
|---------|---------|---------------|
| 1. 10 | 2. 1, 9 | 3. 2, 8 |
| 4. 3, 7 | 5. 4, 6 | 6. 1, 2, 3, 4 |



17. แนวคิด แทนค่า $z = 3 - (x + y)$ ในสมการ $x^3 + y^3 + z^3 = 3$ จะได้

$$x^3 + y^3 + (3 - (x + y))^3 = 3$$

$$x^3 + y^3 + 27 - 27(x + y) + 9(x + y)^2 - (x + y)^3 = 3$$

$$x^3 + y^3 + 27 - 27(x + y) + 9(x + y)^2 - (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = 3$$

$$27 - 27(x + y) + 9(x + y)^2 - 3x^2y - 3xy^2 = 3$$

$$24 - 27(x + y) + 9(x + y)^2 - 3xy(x + y) = 0$$

$$27(x + y) + 3xy(x + y) - 9(x + y)^2 = 24$$

$$9(x + y) + xy(x + y) - 3(x + y)^2 = 8$$

$$(x + y)(9 + xy - 3(x + y)) = 8$$

$$(x + y)(9 + xy - 3x - 3y) = 8$$

$$(x + y)(3(3 - x) - y(3 - x)) = (2)(2)(2)$$

$$(x + y)(3 - x)(3 - y) = (2)(2)(2)$$

เพราะฉะนั้น $(3 - x) \mid 8$ เพราะฉะนั้น $3 - x \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

เพราะฉะนั้น $x \in \{-1, -5, 1, 2, 4, 5, 7, 11\}$ ในทำนองเดียวกัน $y \in \{-1, -5, 1, 2, 5, 7, 11\}$

เพราะว่า x และ y เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น x, y ที่ใช้ได้คือ $(x, y) = (1, 1), (4, 4), (4, -5), (-5, 4)$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของสมการ $x + y + z = 3 = x^3 + y^3 + z^3$

คือ $\{(1, 1, 1), (4, 4, -5), (4, -5, 4), (-5, 4, 4)\}$



18. แนวคิด ให้ $a_1 = a$, $a_2 = a + d$, $a_3 = a + 2d$, $a_4 = a + 3d$

เพราะว่าลำดับเลขคณิตสี่พจน์แรกบวกกันมีค่าเท่ากับ 44

$$\text{เพราะฉะนั้น } a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) = 44$$

$$4a + 6d = 44$$

$$2a + 3d = 22 \quad \dots (1)$$

เพราะว่า อัตราส่วนระหว่าง ผลคูณของพจน์ที่หนึ่งกับพจน์ที่สี่ กับ ผลคูณพจน์ที่สองกับพจน์ที่สาม มีค่า $= \frac{5}{14}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{a_1 a_4}{a_2 a_3} = \frac{a(a + 3d)}{(a + d)(a + 2d)} = \frac{5}{14}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 14a(a + 3d) = 5(a + d)(a + 2d)$$

$$14a^2 + 42ad = 5a^2 + 15ad + 10d^2$$

$$9a^2 + 27ad - 10d^2 = 0$$

$$(3a - d)(3a + 10d) = 0$$

$$a = \frac{d}{3}, -\frac{10d}{3}$$

$$\text{กรณีที่ 1 แทนค่า } a = \frac{d}{3} \text{ ใน (1) จะได้ } 2\left(\frac{d}{3}\right) + 3d = 22$$

$$2d + 9d = 66$$

$$d = 6$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a = 2 \text{ เพราะฉะนั้น } a_1 a_2 a_3 a_4 = (2)(8)(14)(20) = 4480$$

$$\text{กรณีที่ 2 แทนค่า } a = -\frac{10d}{3} \text{ ใน (1) จะได้ } 2\left(-\frac{10d}{3}\right) + 3d = 22$$

$$-11d = 66$$

$$d = -6$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a = 20 \text{ เพราะฉะนั้น } a_1 a_2 a_3 a_4 = (20)(14)(8)(2) = 4480$$



19. แนวคิด $\log_2(9^{x+1} + 15) = 2 + \log_2(61(3^x) - 3)$

$$\log_2(9^{x+1} + 15) - \log_2(61(3^x) - 3) = 2$$

$$\log_2\left(\frac{9^{x+1} + 15}{61(3^x) - 3}\right) = 2$$

$$\frac{9^{x+1} + 15}{61(3^x) - 3} = 4$$

$$9^{x+1} + 15 = 244(3^x) - 12$$

$$9(3^{2x}) - 244(3^x) + 27 = 0$$

$$9(3^x)^2 - 244(3^x) + 27 = 0$$

$$(9(3^x) - 1)((3^x) - 27) = 0$$

$$3^x = \frac{1}{9}, 27$$

$$3^x = 3^{-2}, 3^3$$

เพราะฉะนั้น

$$x = -2, 3$$



20. แนวคิด $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{\frac{x}{4}}) = 2(\frac{x}{4}) = \frac{x}{2}$ เพราะฉะนั้น $h(x) = \frac{x}{2}$

$$(h \circ h)(x) = h(h(x)) = h(\frac{x}{2}) = \frac{x}{4} = \frac{x}{2^2}$$

$$h^3(x) = (h \circ h^2)(x) = h(\frac{x}{4}) = \frac{x}{8} = \frac{x}{2^3}$$

:

$$h^n(x) = \frac{x}{2^n}$$

เพราะฉะนั้น $h^{20}(x) = \frac{x}{2^{20}}$



21. แนวคิด เพราะว่า $x + 1$ หาร $f(x) = 3x^3 + 4ax^2 - 6bx + 5$ เหลือเศษ $f(-1)$

เพราะฉะนั้น $f(-1) = 4$

$$3(-1)^3 + 4a(-1)^2 - 6b(-1) + 5 = 4$$

$$-3 + 4a + 6b + 5 = 4$$

$$2a + 3b = 1$$

เพราะว่าถ้ามีจำนวนเต็ม m, n ที่ทำให้ $ma + nb = 1$ แล้ว $\gcd(a, b) = 1$... (1)

เพราะฉะนั้น $\gcd(a, b) = 1$

หมายเหตุ ดูข้อพิสูจน์ (1) คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 37 โลกทฤษฎีจำนวน ทฤษฎีบท 2.1.3 หน้า 32



22. แนวคิด เพราะว่า $1, \omega, \omega^2$ เป็นรากที่สามของ 1 เพราะฉะนั้น $\omega^3 = 1$... (1)

22.1 เพราะว่าสมการ $x^3 = 1$ เขียนในรูปแบบสมการพหุนามได้เป็น $x^3 - 1 = 0$

เพราะฉะนั้นมีผลบวกของรากของสมการ $x^3 - 1 = 0$ มีค่าเท่ากับ $-(\text{สัมประสิทธิ์ของ } x^2)$ ซึ่งเท่ากับ 0

เพราะฉะนั้น $1 + \omega + \omega^2 = 0$... (2)

$$(1 + \omega - \omega^2)(1 - \omega + \omega^2) = ((1 + \omega + \omega^2) - 2\omega^2)((1 + \omega + \omega^2) - 2\omega)$$

$$= (0 - 2\omega^2)(0 - 2\omega) \quad (\text{จาก (2)})$$

$$= 4\omega^3$$

$$= 4 \quad (\text{จาก (1) } \omega^3 = 1)$$

เพราะฉะนั้น $(1 + \omega - \omega^2)(1 - \omega + \omega^2) = 4$

$$\begin{aligned}
22.2 & (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega^4)(1 - \omega^5) \\
&= (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega)(1 - \omega^2) && (\text{จาก (1) } \omega^3 = 1) \\
&= (1 - \omega)^2(1 - \omega^2)^2 \\
&= (1 - 2\omega + \omega^2)(1 - 2\omega^2 + \omega^4) \\
&= (1 - 2\omega + \omega^2)(1 - 2\omega^2 + \omega) && (\text{จาก (1) } \omega^3 = 1) \\
&= (1 + \omega + \omega^2 - 3\omega)(1 + \omega + \omega^2 - 3\omega^2) \\
&= (0 - 3\omega)(0 - 3\omega^2) && (\text{จาก (2)}) \\
&= 9\omega^3 \\
&= 9 && (\text{จาก (1) } \omega^3 = 1)
\end{aligned}$$



$$23. \text{ แนวคิด ให้ } (1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้นให้ } a = 1-x, b = x-y, c = y-z, d = z \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a + b + c + d = (1-x) + (x-y) + (y-z) + z = 1 \quad \dots (3)$$

$$\begin{aligned}
1 &= (a + b + c + d)^2 \\
&\leq 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) && (\text{จากข้อ 1}) \\
&= 4((1-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2) && (\text{จาก (2)}) \\
&\leq 4\left(\frac{1}{4}\right) && (\text{จาก (1)}) \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (a + b + c + d)^2 = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a = b = c = d \quad \dots (4) \quad (\text{จากข้อ 1})$$

$$\text{จาก (3) และ (4) จะได้ } a = b = c = d = \frac{1}{4} \quad \dots (5)$$

$$\text{จาก (2) และ (5) จะได้ } 1-x = x-y = y-z = z = \frac{1}{4}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{3}{4}, y = \frac{2}{4} \text{ และ } z = \frac{1}{4}$$



$$24. \text{ แนวคิด ให้ } f(x) = \sum_{n=1}^{10} a_n x^n$$

$$\text{เพราะว่า } f(-x) = \left(\sum_{n=1}^5 (-x)^n \right) \left(\sum_{n=1}^5 x^n \right) = \left(\sum_{n=1}^5 x^n \right) \left(\sum_{n=1}^5 (-x)^n \right) = f(x)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(x) \text{ เป็นพหุนามกำลังเลขคู่ เพราะฉะนั้น } a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = a_9 = 0$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(x) = a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + a_8 x^8 + a_{10} x^{10}$$

$$\text{ให้ } x \neq 1 \text{ และ } x \neq -1$$

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{n=1}^5 x^n \right) \left(\sum_{n=1}^5 (-x)^n \right) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(-x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5) \\
 &= \left(\frac{x(1-x^5)}{1-x} \right) \left(\frac{(-x)(1-(-x))^5}{1-(-x)} \right) \\
 &= \frac{-x^2(1-x^5)(1+x^5)}{1-x^2} = \frac{-x^2(1-x^{10})}{1-x^2} \\
 &= \frac{-x^2(1-x^2)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)}{1-x^2} \\
 &= -x^2(1+x^2+x^4+x^6+x^8+x^{10}) \\
 &= -x^2 - x^4 - x^6 - x^8 - x^{10}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = a_{10} = -1$

หมายเหตุ โดยการจัดรูปพีชคณิตจะทำให้เข้าใจได้ง่ายว่า $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังเลขคู่

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{n=1}^5 x^n \right) \left(\sum_{n=1}^5 (-x)^n \right) &= (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(-x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5) \\
 &= ((x^2 + x^4) + (x + x^3 + x^5))((x^2 + x^4) - (x + x^3 + x^5)) \\
 &= (x^2 + x^4)^2 - (x + x^3 + x^5)^2 \\
 &= (x^2 + x^4)^2 - x^2(1 + x^2 + x^4)^2
 \end{aligned}$$

เพราะว่า $(x^2 + x^4)^2$ และ $x^2(1 + x^2 + x^4)^2$ เป็นพหุนามกำลังเลขคู่

เพราะฉะนั้น $\left(\sum_{n=1}^5 x^n \right) \left(\sum_{n=1}^5 (-x)^n \right)$ เป็นพหุนามกำลังเลขคู่

ในทำนองเดียวกัน $f(x) = \left(\sum_{n=1}^k x^n \right) \left(\sum_{n=1}^k (-x)^n \right)$ เป็นพหุนามกำลังเลขคู่ ทุกจำนวนเต็มบวก n

□

25. แนวคิด ให้ $f(x) = \sum_{n=1}^{20} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{10} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{10} (-x)^n \right)$

เพราะว่า $\left(\sum_{n=1}^{10} 1^n \right) \left(\sum_{n=1}^{10} (-1)^n \right) = (10)(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{20} a_n = f(1) = 0$

เพราะว่า $\left(\sum_{n=1}^{10} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{10} (-x)^n \right)$ เป็นพหุนามกำลังเลขคู่ เพราะฉะนั้น $a_1 = a_3 = \dots = a_{19} = 0$

เพราะฉะนั้น $f(x) = a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots + a_{20} x^{20}$

ให้ $x \neq 1$ และ $x \neq -1$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(\sum_{n=1}^{10} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{10} (-x)^n \right) \\
 &= (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{10})(-x + x^2 - x^3 + \dots + x^{10})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x(x - x^{10})}{1 - x} \right) \left(\frac{(-x)(1 - (-x)^{10})}{1 - (-x)} \right) \\
&= \frac{-x^2(1 - x^{10})(1 - x^{10})}{(1 - x)(1 + x)} \\
&= \frac{-x^2(1 - 2x^{10} + x^{20})}{1 - x^2} \\
&= \frac{-x^2 + 2x^{12} - x^{22}}{1 - x^2}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$(1 - x^2)f(x) = -x^2 + 2x^{12} - x^{22}$$

$$(1 - x^2)(a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots + a_{20} x^{20}) = -x^2 + 2x^{12} - x^{22}$$

$$-x^2 + 2x^{12} - x^{22} = a_2 x^2 + (a_4 - a_2)x^4 + (a_6 - a_4)x^6 + \dots + (a_{20} - a_{18})x^{20} - a_{20} x^{22}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$a_2 = -1$$

$$a_4 - a_2 = 0$$

$$a_4 = a_2 = -1$$

$$a_6 - a_4 = 0$$

$$a_6 = a_4 = -1$$

$$a_8 - a_6 = 0$$

$$a_8 = a_6 = -1$$

$$a_{10} - a_8 = 0$$

$$a_{10} = a_8 = -1$$

$$a_{12} - a_{10} = 2$$

$$a_{12} = 2 + a_{10} = 1$$

$$a_{14} - a_{12} = 0$$

$$a_{14} = a_{12} = 1$$

$$a_{16} - a_{14} = 0$$

$$a_{16} = a_{14} = 1$$

$$a_{18} - a_{16} = 0$$

$$a_{18} = a_{16} = 1$$

$$a_{20} - a_{18} = 0$$

$$a_{20} = a_{18} = 1$$

$$a_{20} = 1$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = -x^2 - x^4 - x^6 - x^{10} + x^{12} + x^{14} + x^{16} + x^{18} + x^{20}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{10} a_n = 0 + (-1) + 0 + (-1) + \dots + 0 + (-1) = -5$



26. แนวคิด ให้ $f(x) = \sum_{n=1}^{40} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{20} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{20} (-x)^n \right)$... (1)

เพราะว่า $f(x) = f(-x)$ เพราะฉะนั้น $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังเลขคู่ ... (2)

เพราะฉะนั้น $f(x) = a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \dots + a_{40} x^{40}$... (3)

ให้ $x \neq 1$ และ $x \neq -1$

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{20} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{20} (-x)^n \right) = (x + x^2 + x^3 + \dots + x^{20})(-x + x^2 - x^3 + \dots + x^{20})$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{x(1-x^{20})}{1-x} \right) \left(\frac{(-x)(1-(-x)^{20})}{1-(-x)} \right) \\
 &= \frac{-x^2(1-x^{20})(1-x^{20})}{(1-x)(1+x)}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \frac{-x^2(1-x^{20})(1-x^{20})}{1-x^2}$... (4)

$$\begin{aligned}
 &(1-x^2)(-x^2 - x^4 - x^6 - \dots - x^{20} + x^{22} + x^{24} + x^{26} + \dots + x^{40}) \\
 &= (1-x^2)(-x^2(1+x^2+x^4+\dots+x^{18}) + x^{22}(1+x^2+x^4+\dots+x^{18})) \\
 &= (1-x^2)(-x^2+x^{22})(1+x^2+x^4+\dots+x^{18}) \\
 &= (1-x^2)(-x^2+x^{22}) \left(\frac{1-x^{20}}{1-x^2} \right) \\
 &= \frac{(1-x^2)(-x^2)(1-x^{20})(1-x^{20})}{1-x^2} \\
 &= (1-x^2) \left(\frac{(-x^2)(1-x^{20})(1-x^{20})}{1-x^2} \right)
 \end{aligned}$$

... (5)

จาก (4) และ (5) จะได้ $f(x) = -x^2 - x^4 - x^6 - \dots - x^{20} + x^{22} + x^{24} + x^{26} + \dots + x^{40}$ □

27. แนวคิด ให้ $f(x) = \sum_{n=1}^{2000} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{1000} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{1000} (-x)^n \right)$... (1)

27.1 $\sum_{n=1}^{2000} a_n = \sum_{n=1}^{2000} a_n (1)^n = \left(\sum_{n=1}^{1000} (1)^n \right) \left(\sum_{n=1}^{1000} (-1)^n \right) = (1000)(0) = 0$

27.2 ให้ $x \neq 1$ และ $x \neq -1$

เพราะว่า $a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{1000} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{1000} = \frac{x(1-x^{1000})}{1-x}$

$$\sum_{n=1}^{1000} (-x)^n = -x + x^2 - x^3 + \dots + x^{1000} = \frac{-x(1-x^{1000})}{1+x}$$

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{1000} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{1000} (-x)^n \right) = \left(\frac{x(1-x^{1000})}{1-x} \right) \left(\frac{-x(1-x^{1000})}{1+x} \right) = \frac{-x^2(1-2x^{1000}+x^{2000})}{(1-x)(1+x)} \quad \dots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\sum_{n=1}^{2000} a_n x^n = \frac{-x^2(1-2x^{1000}+x^{2000})}{(1-x)(1+x)} = \frac{-x^2+2x^{1002}-x^{2002}}{1-x^2}$... (3)

$$\begin{aligned}
 &-x^2 - x^4 - x^6 - \dots - x^{1000} + x^{1002} + x^{1004} + \dots + x^{2000} \\
 &= -(x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{1000}) + (x^{1002} + x^{1004} + \dots + x^{2000}) \\
 &= -x^2(1+x^2+x^4+x^6+\dots+x^{998}) + x^{1002}(1+x^2+x^4+x^6+\dots+x^{998})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x^{1002} - x^2)(1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{998}) \\
&= (x^{1002} - x^2) \left(\frac{1 - (x^2)^{500}}{1 - x^2} \right) \\
&= \frac{-x^2(1 - x^{1000})(1 - x^{1000})}{1 - x^2} \\
&= \frac{-x^2(1 - 2x^{1000} + x^{2000})}{1 - x^2} \quad \dots (4)
\end{aligned}$$

จาก (3) และ (4) จะได้ $\sum_{n=1}^{2000} a_n x^n = -x^2 - x^4 - x^6 - \dots - x^{1000} + x^{1002} + x^{1004} + \dots + x^{2000}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{2000} |a_n| = 1000$

$$27.3 \sum_{n=1}^{1000} a_n = -500$$

□

$$28. \text{แนวคิด ให้ } f(x) = \sum_{n=1}^{4m} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{2m} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{2m} (-x)^n \right) \quad \dots (1)$$

ให้ $x \neq 1$ และ $x \neq -1$

$$f(x) = \left(\sum_{n=1}^{2m} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{2m} (-x)^n \right) = \left(\frac{x(1 - x^{2m})}{1 - x} \right) \left(\frac{(-x)(1 - (-x)^{2m})}{1 - (-x)} \right) = \frac{-x^2(1 - x^{2m})^2}{1 - x^2} \quad \dots (2)$$

$$\begin{aligned}
&\text{เพราะว่า } (1 - x^2)(-x^2 - x^4 - x^6 - \dots - x^{2m} + x^{2m+2} + x^{2m+4} + \dots + x^{4m}) \\
&= (1 - x^2)(-x^2(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2m-2}) + x^{2m+2}(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2m-2})) \\
&= (1 - x^2)(x^{2m+2} - x^2)(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2m-2}) \\
&= (1 - x^2)(-x^2)(1 - x^{2m})(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2m-2}) \\
&= (1 - x^2)(-x^2)(1 - x^{2m}) \left(\frac{1 - x^{2m}}{1 - x^2} \right) \\
&= -x^2(1 - x^{2m})^2
\end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{-x^2(1 - x^{2m})^2}{1 - x^2} = -x^2 - x^4 - x^6 - \dots - x^{2m} + x^{2m+2} + x^{2m+4} + \dots + x^{4m} \quad \dots (3)$$

จาก (2) และ (3) จะได้ $f(x) = -x^2 - x^4 - x^6 - \dots - x^{2m} + x^{2m+2} + x^{2m+4} + \dots + x^{4m}$ □

$$29. \text{แนวคิด ให้ } f(x) = \sum_{n=1}^{4m+2} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{2m+1} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{2m+1} (-x)^n \right) \quad \dots (1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f(1) = \sum_{n=1}^{4m+2} a_n = \left(\sum_{n=1}^{2m+1} 1^n \right) \left(\sum_{n=1}^{2m+1} (-1)^n \right) = \left(\sum_{n=1}^{2m+1} 1 \right) (-1) = -(2m+1)$$

ให้ $x \neq 1$ และ $x \neq -1$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=1}^{4m+2} a_n x^n = \left(\sum_{n=1}^{2m+1} x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{2m+1} (-x)^n \right) = \left(\frac{x(1-x^{2m+1})}{1-x} \right) \left(\frac{(-x)(1-(-x)^{2m+1})}{1-(-x)} \right) \\
 &= \frac{-x^2(1-x^{2m+1})(1+x^{2m+1})}{1-x^2} \\
 &= \frac{-x^2(1-x^{4m+2})}{1-x^2} \\
 &= \frac{-(x^2)(1-(x^2)^{2m+1})}{1-x^2} \\
 &= -x^2(1+x^2+x^4+\dots+(x^2)^{2m}) \\
 &= -(x^2+x^4+x^6+\dots+x^{4m+2}) \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $f(x) = \sum_{n=1}^{4m+2} a_n x^n = -(x^2+x^4+x^6+\dots+x^{4m+2})$ □

30. แนวคิด เพราะว่า $3 \equiv -2 \pmod{5}$ เพราะฉะนั้น $3^n \equiv (-2)^n \pmod{5}$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

เพราะว่า $4 \equiv -1 \pmod{5}$ เพราะฉะนั้น $4^n \equiv (-1)^n \pmod{5}$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

เพราะฉะนั้น $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^n + 2^n + (-2)^n + (-1)^n \pmod{5}$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

การแสดงว่า $4 \nmid n \Rightarrow 5 \mid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$

สมมติ $4 \nmid n$

เพราะฉะนั้น $n \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$

กรณีที่ 1 $n \equiv 1 \pmod{4}$

เพราะฉะนั้นมี $m \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n = 4m + 1$

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^{4m+1} + 2^{4m+1} + 3^{4m+1} + 4^{4m+1} \pmod{5}$$

$$\equiv 1 + 2^{4m+1} + (-2)^{4m+1} + (-1)^{4m+1} \pmod{5}$$

$$\equiv 1 + 2^{4m+1} - 2^{4m+1} - 1 \pmod{5}$$

$$\equiv 0 \pmod{5}$$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$

กรณีที่ 2 $n \equiv 2 \pmod{4}$

เพราะฉะนั้นมี $m \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n = 4m + 2$

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^{4m+2} + 2^{4m+2} + 3^{4m+2} + 4^{4m+2} \pmod{5}$$

$$\equiv 1 + 2^{4m+2} + (-2)^{4m+2} + (-1)^{4m+2} \pmod{5}$$

$$\equiv 1 + 2^{4m+2} + 2^{4m+2} + 1 \pmod{5}$$

$$\equiv 2(1 + 2^{4m+2}) \pmod{5} \quad \dots (1)$$

$$16 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 16^m \equiv 1^m \pmod{5} \Rightarrow 2^{4m} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2^{4m+2} \equiv 4 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 1 + 2^{4m+2} \equiv 5 \pmod{5} \Rightarrow 2(1 + 2^{4m+2}) \equiv 0 \pmod{5}$$

$$\Rightarrow 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod{5} \quad (\text{จาก (1)})$$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$

กรณีที่ 3 $n \equiv 3 \pmod{4}$

เพราะฉะนั้นมี $m \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $n = 4m + 3$

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^{4m+3} + 2^{4m+3} + 3^{4m+3} + 4^{4m+3} \pmod{5}$$

$$\equiv 1 + 2^{4m+3} + (-2)^{4m+3} + (-1)^{4m+3} \pmod{5}$$

$$\equiv 1 + 2^{4m+3} - 2^{4m+3} - 1 \pmod{5}$$

$$\equiv 0 \pmod{5}$$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$

การแสดงว่า $5 \mid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n) \Rightarrow 4 \nmid n$

เพราะว่า $5 \mid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n) \Rightarrow 4 \nmid n$ สมมูลกับ $4 \mid n \Rightarrow 5 \nmid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$

เพราะฉะนั้นพิสูจน์ว่า $4 \mid n \Rightarrow 5 \nmid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ แทน

สมมติ $4 \mid n$

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $n = 4m$

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1^{4m} + 2^{4m} + 3^{4m} + 4^{4m} \pmod{5}$$

$$\equiv 1 + 2^{4m} + (-2)^{4m} + (-1)^{4m} \pmod{5}$$

$$\equiv 1 + 2^{4m} + (-2)^{4m} + (-1)^{4m} \pmod{5}$$

$$\equiv 1 + 2^{4m} + 2^{4m} + 1 \pmod{5}$$

$$\equiv 2(1 + 2^{4m}) \pmod{5} \quad \dots (2)$$

$$16 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 16^m \equiv 1^m \pmod{5} \Rightarrow 2^{4m} \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 1 + 2^{4m} \equiv 1 + 1 \pmod{5}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2(1 + 2^{4m}) \equiv 4 \pmod{5} \text{ เพราะฉะนั้น } 5 \nmid (2(1 + 2^{4m})) \quad \dots (3)$$

จาก (2) และ (3) จะได้ $5 \nmid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ ก็ต่อเมื่อ $4 \nmid n$



31. แนวคิด ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$

เลือก $A = \{0\} \cup C$ เมื่อ $C \subset U$

เลือก $B = \{0\} \cup D$ เมื่อ $D \subset U$

เพราะว่า $A \cup B = U$ และ $A \cap B = \{0\}$ เพราะฉะนั้น $C \cap D = \emptyset$ และ $C = \{1, 2, 3, \dots, 9\} - D$

การเลือกเซต A คือการเลือก C โดยที่ $C \subset \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ และให้ $D = \{1, 2, 3, \dots, 9\} - C$

เพราะฉะนั้นการเลือกเซต A มีจำนวนวิธีเท่ากับ 2^9

หมายเหตุ $n(S) = n(\{(A, B) \mid A \subset U, B \subset U, A \cup B = U \text{ และ } A \cap B = \{0\}\})$

$$= n(\{(C \cup \{0\}, \{0\} \cup \{1, 2, 3, \dots, 9\} - C) \mid C \subset \{1, 2, 3, \dots, 9\}\})$$

$$= n(P(\{1, 2, 3, \dots, 9\}))$$

$$= 2^9$$



32. แนวคิด $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$

$$16 \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = 1$$

$$8(2 \sin x \cos x) \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x$$

$$8 \sin 2x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \sin x$$

$$4(2 \sin 2x \cos 2x) \cos 4x \cos 8x = \sin x$$

$$4 \sin 4x \cos 4x \cos 8x = \sin x$$

$$2 \sin 8x \cos 8x = \sin x$$

$$\sin 16x = \sin x$$

... (1)

แบบที่ 1 $\sin 16x - \sin x = 0$

$$2 \cos \frac{16x+x}{2} \sin \frac{16x-x}{2} = 0$$

$$2 \cos \frac{17x}{2} \sin \frac{15x}{2} = 0$$

กรณีที่ 1 $\cos \frac{17x}{2} = 0$ เมื่อ $\frac{17x}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$

$$\text{เพราะว่า } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ เพราะฉะนั้น } x = \frac{\pi}{17}, \frac{3\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \frac{7\pi}{17}$$

กรณีที่ 2 $\sin \frac{15x}{2} = 0$ เมื่อ $\frac{15x}{2} = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \dots$

$$\text{เพราะว่า } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ เพราะฉะนั้น } x = \frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{6\pi}{15}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \{x \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}, \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}\}$$

$$= \left\{ \frac{\pi}{17}, \frac{3\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \frac{7\pi}{17}, \frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{6\pi}{15} \right\}$$

แบบที่ 2 จาก (1) เพราะว่า $\sin 16x = \sin x$ เพราะฉะนั้น $16x = n\pi + (-1)^n x$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม
 เพราะฉะนั้น $16x = 2m\pi + (-1)^{2m} x$ หรือ $16x = (2m+1)\pi + (-1)^{2m+1} x$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม
 เพราะฉะนั้น $16x = 2m\pi + x$ หรือ $16x = (2m+1)\pi - x$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $0 < x < \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $15x = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi$ หรือ $17x = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{6\pi}{15}$ หรือ $x = \frac{\pi}{17}, \frac{3\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \frac{7\pi}{17}$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}, \cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}\}$

$$= \left\{ \frac{\pi}{17}, \frac{3\pi}{17}, \frac{5\pi}{17}, \frac{7\pi}{17}, \frac{2\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{6\pi}{15} \right\}$$

□

33. แนวคิด ให้ $n, k \in \mathbb{N}$ และ $x \in (0, \infty)$ และ $S = x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x^2 + x + 1$

กรณีที่ 1 $x = 1$

$$\text{เพราะฉะนั้น } S = k + 1 \quad \dots (1)$$

กรณีที่ 2 $0 < x < 1$

$$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^3 < x^2 < x < 1$$

$$\Rightarrow 0 < x^k < x^{k-1} < \dots < x^3 < x^2 < x < 1$$

เพราะฉะนั้น $x^2 < x < 1, x^3 < x^2 < x < 1, \dots, x^k < x^{k-1} < \dots < x^3 < x^2 < x < 1$

เพราะฉะนั้น $x^k \leq x^i < 1$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, k$... (2)

เพราะฉะนั้น $x^k + x^k + x^k + \dots + x^k + x^k + x^k$

$$< x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x^2 + x + 1 < 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1$$

$$(k+1)x^k < S < k+1$$

เพราะว่า $0 < x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0$ เพราะฉะนั้น $(k+1)x^k(x-1) > S(x-1) > (k+1)(x-1) \dots (3)$

กรณีที่ 3 $x > 1$

$$x > 1 \Rightarrow 0 > x^2 > x > 1 \Rightarrow 0 > x^3 > x^2 > x > 1$$

$$\Rightarrow 0 > x^k > x^{k-1} > \dots > x^3 > x^2 > x > 1$$

เพราะฉะนั้น $x^k > x^i > 1$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, k$

เพราะฉะนั้น $x^k + x^k + x^k + \dots + x^k + x^k + x^k$

$$> x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x^2 + x + 1 > 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1$$

$$(k+1)x^k > S > k+1$$

$$(k+1)x^k(x-1) > S(x-1) > (k+1)(x-1) \quad (x > 1 \Rightarrow x-1 > 0) \quad \dots (4)$$

เพราะว่า $S(x-1) = (x^k + x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x^2 + x + 1)(x-1) = x^{k+1} - 1$

จาก (3) และ (4) จะได้ $(k+1)x^k(x-1) > x^{k+1} - 1 > (k+1)(x-1)$ ทุกค่า $x \neq 1$... (5)

ให้ $p \in \mathbb{N}$ และ $p \geq 2$

ให้ $x = \frac{p}{p-1}$ จะได้ $x \neq 1$

แทนค่า $x = \frac{p}{p-1}$ ใน (5) จะได้

$$(k+1)\left(\frac{p}{p-1}\right)^k \left(\frac{p}{p-1} - 1\right) > \left(\frac{p}{p-1}\right)^{k+1} - 1 > (k+1)\left(\frac{p}{p-1} - 1\right)$$

$$(k+1)\left(\frac{p}{p-1}\right)^k \left(\frac{1}{p-1}\right) > \left(\frac{p}{p-1}\right)^{k+1} - 1 > (k+1)\left(\frac{1}{p-1}\right)$$

$$\frac{(k+1)p^k}{(p-1)^{k+1}} > \frac{p^{k+1} - (p-1)^{k+1}}{(p-1)^{k+1}} > \frac{(k+1)(p-1)^k}{(p-1)^{k+1}}$$

เพราะว่า $(p-1)^{k+1} > 0$ เพราะฉะนั้น $(k+1)p^k > p^{k+1} - (p-1)^{k+1} > (k+1)(p-1)^k$... (6)

จาก (6) แทนค่า p ด้วย $p+1$ จะได้ $(k+1)(p+1)^k > (p+1)^{k+1} - p^{k+1} > (k+1)p^k$... (7)

จาก (6) และ (7) จะได้ $(p+1)^{k+1} - p^{k+1} > (k+1)p^k > p^{k+1} - (p-1)^{k+1}$... (8)

$$2^{k+1} - 1^{k+1} = (1+1)^{k+1} - 1$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} - 1$$

$$> \sum_{r=0}^{k+1} 1 - 1$$

$$> (k+2) - 1$$

$$= k+1$$

$$= (k+1)1^k$$

$$> 1^{k+1} - 0^{k+1}$$

เพราะฉะนั้น $2^{k+1} - 1^{k+1} > (k+1)1^k > 1^{k+1} - 0^{k+1}$... (9)

จาก (8) แทนค่า $p = 2, 3, 4, \dots, n+1$

$p = 2$ จะได้ $3^{k+1} - 2^{k+1} > (k+1)2^k > 2^{k+1} - 1^{k+1}$... (10)

$p = 3$ จะได้ $4^{k+1} - 3^{k+1} > (k+1)3^k > 3^{k+1} - 2^{k+1}$... (11)

:

$p = n$ จะได้ $(n+1)^{k+1} - n^{k+1} > (k+1)n^k > n^{k+1} - (n-1)^{k+1}$... (12)

จาก (9), (10), (11) และ (12) จะได้

$$(n+1)^{k+1} - 1^{k+1} > (k+1)(1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k) > n^{k+1} - 0^{k+1}$$

$$\frac{1}{k+1} ((n+1)^{k+1} - 1) > 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k > \frac{1}{k+1} n^{k+1}$$

$$\frac{1}{k+1} n^{k+1} < 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k < \frac{1}{k+1} ((n+1)^{k+1} - 1)$$

$$\frac{1}{k+1} n^{k+1} < 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k < \frac{1}{k+1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} - \frac{1}{n^{k+1}} \right) n^{k+1} \quad \square$$

34. แนวคิด ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ k เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้

$$\frac{1}{k+1} n^{k+1} < 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k < \frac{1}{k+1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} - \frac{1}{n^{k+1}} \right) n^{k+1} \quad (\text{จากข้อ 33})$$

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} < \frac{1}{k+1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} - \frac{1}{n^{k+1}} \right)$$

เพราะว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}$ และ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k+1} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} - \frac{1}{n^{k+1}} \right) = \frac{1}{k+1}$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$ □

35. แนวคิด ให้ $p(x) = (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots + x^{1998} - x^{1999} + x^{2000})^{2543}$

เมื่อทำการกระจายจะได้ $p(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{5086000}x^{5086000}$

พหุนาม $A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_{5086000}x^{5086000}$ มีผลบวกของสัมประสิทธิ์เท่ากับ $p(1)$

$$p(1) = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_{5086000}$$

$$= p(1)$$

$$= (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + 1)^{2543}$$

$$= 1^{2543}$$

$$= 1 \quad \square$$

36. แนวคิด ในการกระจาย $(1 + x^2 - x^3)^{20}$ จะได้พจน์ที่มี x^{20} เท่ากับ

$$\begin{aligned} & \frac{20!}{0!10!10!} (-1)^0 (x^3)^0 (x^2)^{10} (x^0)^{10} + \frac{20!}{2!7!11!} (-1)^2 (x^3)^2 (x^2)^7 (x^0)^{11} \\ & + \frac{20!}{4!4!12!} (-1)^4 (x^3)^4 (x^2)^4 (x^0)^{12} + \frac{20!}{6!2!13!} (-1)^6 (x^3)^6 (x^2)^6 (x^0)^{13} \\ & = 184765 x^{20} + 6046560 x^{20} + 8817900 x^{20} + 542640 x^{20} \\ & = 15591856 x^{20} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^{20} ใน $(1 + x^2 - x^3)^{20}$ คือ 15591856

หมายเหตุ ในการกระจายพหุนาม $(x + y + z)^n$ จะได้ ส.ป.ส.ของ $x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}$ ใน $(x + y + z)^n$

คือ $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$ เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 = n$

การคำนวณด้วย Mathematica

In[6]:= **Expand** [$(1 + x^2 - x^3)^{20}$]

Out[6]= $1 + 20 x^2 - 20 x^3 + 190 x^4 - 380 x^5 + 1330 x^6 - 3420 x^7 + 8265 x^8 - 20520 x^9 + 44574 x^{10} - 96900 x^{11} + 198645 x^{12} - 387600 x^{13} + 736440 x^{14} - 1333344 x^{15} + 2335290 x^{16} - 3953520 x^{17} + 6447080 x^{18} - 10193880 x^{19} + 15591856 x^{20} - 23088040 x^{21} + 33172100 x^{22} - 46189000 x^{23} + 62397140 x^{24} - 81830112 x^{25} + 104128740 x^{26} - 128657360 x^{27} + 154352010 x^{28} - 179755960 x^{29} + 203263900 x^{30} - 223115480 x^{31} + 237658555 x^{32} - 245635040 x^{33} + 246224040 x^{34} - 239253852 x^{35} + 225263620 x^{36} - 205353900 x^{37} + 181115810 x^{38} - 154420220 x^{39} + 127134283 x^{40} - 100950440 x^{41} + 77210110 x^{42} - 56784540 x^{43} + 40082685 x^{44} - 27098408 x^{45} + 17500140 x^{46} - 10762360 x^{47} + 6280735 x^{48} - 3462560 x^{49} + 1793296 x^{50} - 866780 x^{51} + 387600 x^{52} - 158460 x^{53} + 58330 x^{54} - 18924 x^{55} + 5225 x^{56} - 1160 x^{57} + 190 x^{58} - 20 x^{59} + x^{60}$

□

37. แนวคิด ให้ $(1 + x^2 + x^3)^{2000} = \sum_{n=0}^{6000} a_n x^n$ และ $(1 - x^2 - x^3)^{2000} = \sum_{n=0}^{6000} c_n x^n$

สัมประสิทธิ์ x^{20} ใน $(1 + x^2 + x^3)^{2000}$ คือ $a_{20} = \sum_{(n_1, n_2, n_3) \in A} \frac{2000!}{n_1! n_2! n_3!} (1)^{n_1} (1)^{n_2} (1)^{n_3}$

เมื่อ $A = \{(1990, 10, 0), (1991, 7, 2), (1992, 4, 4), (1993, 1, 6)\}$

สัมประสิทธิ์ของ x^{20} ใน $(1 - x^2 - x^3)^{2000}$ คือ $c_{20} = \sum_{(n_1, n_2, n_3) \in A} \frac{2000!}{n_1! n_2! n_3!} (1)^{n_1} (-1)^{n_2} (-1)^{n_3}$

เมื่อ $A = \{(1990, 10, 0), (1991, 7, 2), (1992, 4, 4), (1993, 1, 6)\}$

เพราะว่าพจน์ของ $\frac{2000!}{n_1! n_2! n_3!}$ เมื่อ $(n_1, n_2, n_3) \in A$ ใน a_{20} และ c_{20} เหมือนกัน

และพจน์ใน a_{20} เป็นบวกทุกตัว และพจน์ใน c_{20} มีบางตัวเป็นลบ เพราะฉะนั้น $a_{20} > c_{20}$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^{20} ใน $(1 + x^2 + x^3)^{2000}$

มีค่ามากกว่าสัมประสิทธิ์ของ x^{20} ใน $(1 - x^2 - x^3)^{2000}$

□

38. แนวคิด ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนเต็ม

แบบที่ 1 เพราะว่า $(A - a)^2 - (x - a)^2 = A^2 - x^2 - 2a(A - x)$

เพราะฉะนั้น $(A - a_1)^2 - (x - a_1)^2 = A^2 - x^2 - 2a_1(A - x)$

$$(A - a_2)^2 - (x - a_2)^2 = A^2 - x^2 - 2a_2(A - x)$$

:

$$(A - a_n)^2 - (x - a_n)^2 = A^2 - x^2 - 2a_n(A - x)$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } ((A - a_1)^2 + (A - a_2)^2 + \dots + (A - a_n)^2) - ((x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_n)^2) \\ = n(A^2 - x^2) - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(A - x) \end{aligned} \quad \dots (1)$$

ให้ $x = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$ จะได้

$$\begin{aligned} n(A^2 - x^2) - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(A - x) &= n(A^2 - x^2) - 2nx(A - x) \\ &= n(A^2 - x^2) - 2nxA + 2nx^2 \\ &= n(A^2 - 2xA + x^2) \\ &= n(A - x)^2 \end{aligned}$$

$$\geq 0 \quad \dots (2)$$

$$\text{และ } n(A^2 - x^2) - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(A - x) = 0 \text{ เมื่อ } A = x \quad \dots (3)$$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้

$$((A - a_1)^2 + (A - a_2)^2 + \dots + (A - a_n)^2) \geq ((x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_n)^2)$$

$$\text{และ } ((A - a_1)^2 + (A - a_2)^2 + \dots + (A - a_n)^2) = ((x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_n)^2)$$

เมื่อ $A = x$

เพราะฉะนั้น $(A - a_1)^2 + (A - a_2)^2 + \dots + (A - a_n)^2$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ $A = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

เพราะฉะนั้น $(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

แบบที่ 2 ให้ $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$

$$f'(x) = 2(x - a_1) + 2(x - a_2) + \dots + 2(x - a_n)$$

$$= nx - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 2n(x - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n})$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f'(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}) = 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2n(x - \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ และ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มแท้บน $(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, \infty)$

และ f เป็นฟังก์ชันลดแท้บน $(-\infty, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n})$

เพราะฉะนั้น $f(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n})$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

เพราะฉะนั้น $(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ □

39. แนวคิด $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

$$\sqrt{(x-1)-2(2)\sqrt{x-1}+4} + \sqrt{(x-1)-2(3)\sqrt{x-1}+9} = 1$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 1$$

$$|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1 \quad \dots (1)$$

กรณีที่ 1 $\sqrt{x-1} < 2$

... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $-(\sqrt{x-1}-2) + (-\sqrt{x-1}-3) = 1$

$$-2\sqrt{x-1} + 5 = 1$$

$$\sqrt{x-1} = 2$$

$$x-1 = 4$$

$$x = 5 \quad \text{เป็นไปได้}$$

กรณีที่ 2 $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$

... (3)

จาก (1) และ (3) จะได้ $(\sqrt{x-1}-2) + (-(\sqrt{x-1}-3)) = 1$

$$-2 + 3 = 1$$

$$1 = 1$$

เพราะฉะนั้น $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$

$$4 \leq x-1 \leq 9$$

$$5 \leq x \leq 10$$

กรณีที่ 3 $\sqrt{x-1} > 3$

... (4)

จาก (1) และ (4) จะได้ $(\sqrt{x-1}-2) + (\sqrt{x-1}-3) = 1$

$$2\sqrt{x-1} - 5 = 1$$

$$\sqrt{x-1} = 3$$

$$x-1 = 9$$

$$x = 10 \quad \text{เป็นไปได้}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } A = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1 \} = [5, 10]$$

□

40. แนวคิด ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะว่า $k+1, k+2, k+3, k+4, k+5$ เป็นจำนวนที่เรียงค่าติดกัน 5 ตัว

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} (k+1)^n + (k+2)^n + (k+3)^n + (k+4)^n + (k+5)^n &\equiv 0^n + 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \pmod{5} \\ &\equiv 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \pmod{5} \quad \dots (1) \end{aligned}$$

จากข้อ 30 ได้พิสูจน์ว่า $5 \mid (1^n + 2^n + 3^n + 4^n)$ ก็ต่อเมื่อ $4 \nmid n$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow 4 \nmid n \quad \dots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$(k+1)^n + (k+2)^n + (k+3)^n + (k+4)^n + (k+5)^n \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow 4 \nmid n$$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $k \in \mathbb{N}$ และ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$ และ $4 \nmid n$

จะได้ว่า $5 \mid ((k+1)^n + (k+2)^n + (k+3)^n + (k+4)^n + (k+5)^n)$

หมายเหตุ ผลจากการพิสูจน์ข้างต้น กล่าวได้ว่า

$$5 \nmid ((k+1)^{4m} + (k+2)^{4m} + (k+3)^{4m} + (k+4)^{4m} + (k+5)^{4m}) \quad \text{ทุกค่า } m, k \in \mathbb{N}$$

□

41. แนวคิด แบบที่ 1 เศษเหลือที่เป็นไปได้ในการหาร a ด้วย 8 คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

$$\text{เพราะฉะนั้น } a \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \pmod{8} \quad (\text{ความหมายของ } \equiv, \text{ คือ หรือ}) \quad (1)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a^2 \equiv 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2 \pmod{8}$$

$$\equiv 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 \pmod{8}$$

$$\equiv 0, 1, 4, 1, 0, 1, 4, 1 \pmod{8}$$

$$\equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$$

เพราะฉะนั้น $a^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$ ในทำนองเดียวกัน $b^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a^2 + b^2 \equiv 0, 1, 2, 4, 5 \pmod{8} \quad \text{เพราะฉะนั้น } a^2 + b^2 - 8c \equiv 0, 1, 2, 4, 5 \pmod{8}$$

เพราะฉะนั้นไม่มีจำนวนเต็มบวก a, b, c ที่ทำให้ $a^2 + b^2 - 8c = 6$

$$\text{แบบที่ 2 สมมติ มีจำนวนเต็มบวก } a, b, c \text{ ที่ทำให้ } a^2 + b^2 - 8c = 6 \quad \dots (1)$$

$$a^2 + b^2 - 8c = 6 \Rightarrow a^2 + b^2 = 8c + 6 \Rightarrow a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{2} \quad \dots (2)$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } (a, b \text{ เป็นเลขคู่พร้อมกัน}) \text{ หรือ } (a, b \text{ เป็นเลขคี่พร้อมกัน}) \quad \dots (3)$$

กรณีที่ 1 a, b เป็นเลขคู่พร้อมกัน

$$a \equiv 0, 2, 4, 6 \pmod{8} \Rightarrow a^2 \equiv 0, 4, 16, 36 \pmod{8} \Rightarrow a^2 \equiv 0, 4 \pmod{8}$$

ในทำนองเดียวกัน $b^2 \equiv 0, 4 \pmod{8}$ เพราะฉะนั้น $a^2 + b^2 \equiv 0, 4 \pmod{8}$

เพราะว่า $a^2 + b^2 = 8c + 6$ เพราะฉะนั้น $8c + 6 \equiv 0, 4 \pmod{8}$

เพราะฉะนั้น $6 \equiv 0, 4 \pmod{8}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 a, b เป็นเลขคี่พร้อมกัน

$$a \equiv 1, 3, 5, 7 \pmod{8} \Rightarrow a^2 \equiv 1, 9, 25, 49 \pmod{8} \Rightarrow a^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

ในทำนองเดียวกัน $b^2 \equiv 1 \pmod{8}$ เพราะฉะนั้น $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{8}$

เพราะว่า $a^2 + b^2 = 8c + 6$ เพราะฉะนั้น $8c + 6 \equiv 2 \pmod{8}$

เพราะฉะนั้น $6 \equiv 2 \pmod{8}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นไม่มีจำนวนเต็มบวก a, b, c ที่ทำให้ $a^2 + b^2 - 8c = 6$



42. แนวคิด 42.1 แยกตัวประกอบ $30 = (2)(3)(5)$

จำนวนเต็มบวกที่หาร 30 ลงตัวต้องมีตัวประกอบเป็น $2^x 3^y 5^z$ เมื่อ $x = 0, 1, y = 0, 1$ และ $z = 0, 1$

จำนวนตัวประกอบ 2 คือ $2^0, 2^1$ เลือกได้ 2 วิธี

จำนวนตัวประกอบ 3 คือ $3^0, 3^1$ เลือกได้ 2 วิธี

จำนวนตัวประกอบ 5 คือ $5^0, 5^1$ เลือกได้ 2 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 30 ลงตัวมีทั้งหมด $= (2)(2)(2) = 8$ ตัว

42.2 แยกตัวประกอบ $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

จำนวนเต็มบวกที่หาร 300 ลงตัวต้องมีตัวประกอบเป็น $2^x 3^y 5^z$ เมื่อ $x = 0, 1, 2; y = 0, 1; z = 0, 1, 2$

จำนวนตัวประกอบ 2 คือ $2^0, 2^1, 2^2$ เลือกได้ 3 วิธี

จำนวนตัวประกอบ 3 คือ $3^0, 3^1$ เลือกได้ 2 วิธี

จำนวนตัวประกอบ 5 คือ $5^0, 5^1, 5^2$ เลือกได้ 3 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 300 ลงตัวมีทั้งหมด $= (3)(2)(3) = 18$ ตัว

42.3 แยกตัวประกอบ $3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

จำนวนเต็มบวกที่หาร 3600 ลงตัวต้องมีตัวประกอบเป็น $2^x 3^y 5^z$ เมื่อ $x = 0, 1, 2, 3, 4; y, z = 0, 1, 2$

จำนวนตัวประกอบ 2 เลือกได้ $4 + 1$ วิธี

จำนวนตัวประกอบ 3 เลือกได้ $2 + 1$ วิธี

จำนวนตัวประกอบ 5 เลือกได้ $2 + 1$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 3600 ลงตัวมีทั้งหมด $= (5)(3)(3) = 45$ ตัว

หมายเหตุ ให้ $n \in \mathbb{N}$, $T(n)$ = จำนวนของจำนวนเต็มบวกที่หาร n ลงตัว เช่น $T(2) = 2$, $T(4) = 3$

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ $T(p) = 2$, $T(p^k) = k + 1$

ให้ p_i เป็นจำนวนเฉพาะ และ k_i เป็นจำนวนเต็มบวก ทุกค่า $i = 1, 2, \dots, n$

จะได้ $T(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_n + 1)$

ดูการพิสูจน์ได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 37 โลกทฤษฎีจำนวน หน้า 141

เพราะฉะนั้น $T(30) = T(2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1) = (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$

$$T(300) = T(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^2) = (2 + 1)(1 + 1)(2 + 1) = 18$$

$$T(3600) = T(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2) = (4 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 45$$

42.4 ในการหยิบเหรียญออกมาพร้อมกันจำนวนวิธีต่าง ๆ ที่จะได้มีขั้นตอนการนับดังนี้

จำนวนวิธีที่จะได้เหรียญ 1 บาท 0, 1, 2, 3, 4 เหรียญ มี $4 + 1$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะได้เหรียญ 5 บาท 0, 1, 2, 3, 4, 5 เหรียญ มี $5 + 1$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะได้เหรียญ 10 บาท 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 เหรียญ มี $6 + 1$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด $= (5)(6)(7) = 210$ วิธี

42.5 จำนวนวิธีที่ได้เหรียญไม่ครบทุกชนิดคือ

กรณีที่ 1 ได้เหรียญชนิดเดียวกันทั้ง 3 เหรียญ ทำได้ 3 วิธีคือ

เหรียญ 1 บาท 3 เหรียญ, เหรียญ 5 บาท 3 เหรียญ, เหรียญ 10 บาท 3 เหรียญ

กรณีที่ 2 ได้เหรียญ 2 ชนิด ทำได้ 6 วิธีคือ

1 บาท 2 เหรียญ, 5 บาท 1 เหรียญ 1 บาท 2 เหรียญ, 10 บาท 1 เหรียญ

5 บาท 2 เหรียญ, 1 บาท 1 เหรียญ 5 บาท 2 เหรียญ, 10 บาท 1 เหรียญ

10 บาท 2 เหรียญ, 1 บาท 1 เหรียญ 10 บาท 2 เหรียญ, 5 บาท 1 เหรียญ

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่จะได้เหรียญไม่ครบทุกชนิด $= 9$ วิธี

42.6 มีเหรียญ 1 บาทจำนวน 3 เหรียญ เหรียญ 5 บาทจำนวน 5 เหรียญ และ เหรียญ 10 บาทจำนวน 6 เหรียญ เหรียญทั้งหมดบรรจุในกล่อง ในการหยิบเหรียญออกมาพร้อมกันอย่างน้อย 3 เหรียญ จำนวนวิธีที่จะได้เหรียญครบทุกชนิดมีขั้นตอนการนับดังนี้

จำนวนวิธีที่จะได้เหรียญ 1 บาท จำนวน 1, 2, 3, 4 เหรียญ มี 4 วิธี

จำนวนวิธีที่จะได้เหรียญ 5 บาท จำนวน 1, 2, 3, 4, 5 เหรียญ มี 5 วิธี

จำนวนวิธีที่จะได้เหรียญ 10 บาท จำนวน 1, 2, 3, 4, 5, 6 เหรียญ มี 6 วิธี
 เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด = $(4)(5)(6) = 120$ วิธี □

43. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ K เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5, 4, 3, 2 เหลือเศษ 4, 3, 2, 1 ตามลำดับ

เพราะฉะนั้นมี $A, B, C, D \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $K = 5A + 4, K = 4B + 3, K = 3C + 2$ และ $K = 2D + 1$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (K + 1), 4 \mid (K + 1), 3 \mid (K + 1)$ และ $2 \mid (K + 1)$ เพราะฉะนั้น $\ell_{\text{cm}}(5, 4, 3, 2) \mid (K + 1)$

เพราะว่า $\ell_{\text{cm}}(5, 4, 3, 2) = 60$ เพราะฉะนั้น $60 \mid (K + 1)$

หมายเหตุ ให้ K เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5, 4, 3, 2 เหลือเศษ 4, 3, 2, 1 ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น $K + 1$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5, 4, 3, 2 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $K + 1$ เป็นตัวคูณร่วมมากของ 5, 4, 3, 2 เพราะฉะนั้น $\ell_{\text{cm}}(5, 4, 3, 2)$ หาร $K + 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5, 4, 3, 2 เหลือเศษ 4, 3, 2, 1 ตามลำดับ

คือ $K + 1 = 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, 540, 600$

$K = 59, 119, 179, 239, 299, 359, 419, 479, 539, 599$

เพราะฉะนั้น 539 เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่หารด้วย 5, 4, 3, 2 เหลือเศษ 4, 3, 2, 1

และหารด้วย 11 ลงตัว

แบบที่ 2 ให้ W เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5, 4, 3, 2 เหลือเศษ 4, 3, 2, 1 และหารด้วย 11 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $60 \mid (W + 1)$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม r ที่ทำให้ $W + 1 = 60r$ จัดรูปเป็น $W = 60r - 1 = 55r + 5r - 1$

เพราะว่า $11 \mid W$ เพราะฉะนั้น $11 \mid (55r + 5r - 1)$ เพราะฉะนั้น $11 \mid (5r - 1)$ เลือก $r = 9$

เพราะฉะนั้น $W = 60(9) - 1 = 540 - 1 = 539$

แบบที่ 3 ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5, 4, 3, 2 เหลือเศษ 4, 3, 2, 1 ตามลำดับ

และหารด้วย 11 ลงตัว

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \equiv -1 \pmod{5} \\ x \equiv -1 \pmod{4} \\ x \equiv -1 \pmod{3} \\ x \equiv -1 \pmod{2} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \equiv -1 \pmod{\ell_{\text{cm}}(5, 4, 3, 2)} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \equiv -1 \pmod{60} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{array} \right\}$$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม s, t ที่ทำให้ $x = -1 + 60s$ และ $x = 0 + 11t$ เพราะฉะนั้น $-1 + 60s = 11t$

เพราะฉะนั้น $60s - 11t = 1$

เลือก $s = 9$ และ $t = 49$ จะได้ $60s - 11t = 60(9) - 11(49) = 540 - 539 = 1$

เพราะฉะนั้น $x = -1 + 60(9) = 539$

เพราะฉะนั้น $x \equiv 539 \pmod{\text{lcm}(60, 11)} \equiv 539 \pmod{660}$

เพราะฉะนั้น 539 เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่หารด้วย 5, 4, 3, 2 เหลือเศษ 4, 3, 2, 1 ตามลำดับ และหารด้วย 11 ลงตัว □

44. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ K เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 6, 5, 4, 3 เหลือเศษ 5, 4, 3, 2 ตามลำดับ

เพราะฉะนั้นมี $A, B, C, D \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้ $K = 6A + 5$, $K = 5B + 4$, $K = 4C + 3$ และ $K = 3D + 2$

เพราะฉะนั้น $6 \mid (K + 1)$, $5 \mid (K + 1)$, $4 \mid (K + 1)$ และ $3 \mid (K + 1)$ เพราะฉะนั้น $\text{lcm}(6, 5, 4, 3) \mid (K + 1)$

เพราะว่า $\text{lcm}(6, 5, 4, 3) = 60$ เพราะฉะนั้น $60 \mid (K + 1)$

เพราะฉะนั้น $K + 1 = 60, 120, 180, 240, 300, \dots$ เพราะฉะนั้น $K = 59, 119, 179, \dots$

เพราะว่า 119 หารด้วย 17 ลงตัว และ 119 หารด้วย 60 เหลือเศษ 59 และ $\text{lcm}(17, 60) = 1020$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 17 ลงตัว และหารด้วย 60 เหลือเศษ 59 คือ 119, 1139, 2159, 3179, 4199, 5219, 6239, ...

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดและมีค่าไม่เกิน 6543 ซึ่งหารด้วย 6, 5, 4, 3 เหลือเศษ 5, 4, 3, 2 ตามลำดับ และหารด้วย 17 ลงตัว คือ 6239

หมายเหตุ การหาค่า K สามารถใช้เหตุผลดังนี้

เพราะว่า K เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่หารด้วย 6, 5, 4, 3 แล้วเหลือเศษ 5, 4, 3, 2

เพราะฉะนั้น $K + 1$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่หารด้วย 6, 5, 4, 3 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $K + 1 = \text{lcm}(6, 5, 4, 3) = 60$ เพราะฉะนั้น $K = 59$

แบบที่ 2 ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 6, 5, 4, 3 เหลือเศษ 5, 4, 3, 2 ตามลำดับ

และหารด้วย 17 ลงตัว

$$\left\{ \begin{array}{l} x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv 2 \pmod{3} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \equiv -1 \pmod{6} \\ x \equiv -1 \pmod{5} \\ x \equiv -1 \pmod{4} \\ x \equiv -1 \pmod{3} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \equiv -1 \pmod{\text{lcm}(6,5,4,3)} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \equiv -1 \pmod{60} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{array} \right\}$$

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม s, t ที่ทำให้ $x = -1 + 60s$ และ $x = 0 + 17t$ เพราะฉะนั้น $-1 + 60s = 17t$

เพราะฉะนั้น $60s - 17t = 1$ เลือก $s = 2$ และ $t = 7$ จะได้ $60s - 17t = 60(2) - 17(7) = 120 - 119 = 1$

เมื่อ $s = 2$ จะได้ $x = -1 + 60s = 119$ เพราะฉะนั้น $x \equiv 119 \pmod{60}$ และ $x \equiv 119 \pmod{17}$

เพราะฉะนั้น $x \equiv 119 \pmod{\ell\text{cm}(60, 17)} \equiv 119 \pmod{1020}$

เพราะฉะนั้น $x = 119 + 1020k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 17 ลงตัวและหารด้วย 60 เหลือเศษ 59 คือ 119, 1139, 2159, 3179, 4199, 5219, 6239, ...

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดและมีค่าไม่เกิน 6543 ซึ่งหารด้วย 6, 5, 4, 3 เหลือเศษ 5, 4, 3, 2 ตามลำดับ และหารด้วย 17 ลงตัวคือ 6239 □

45. แนวคิด ให้ K เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่หารด้วย 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2

เหลือเศษ 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น $K + 1$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่หารด้วย 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $K + 1$ เท่ากับ $\ell\text{cm}(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$

เพราะว่า 2520 หาร $K + 1$ ลงตัว เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก m ที่ทำให้ $K + 1 = m(2520)$

เพราะฉะนั้น $K = m(2520) - 1$

หาค่า m มากที่สุดที่ทำให้ $m(2520) - 1 \leq 9!$

$$m(2520) \leq 9! - 1$$

$$m \leq \frac{9! - 1}{2520} = \frac{362880 - 1}{2520} = 143.99$$

เลือก $m = 143$ เพราะฉะนั้น $K = 143(2520) - 1 = 360359$ □

46. แนวคิด ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $n \geq 4$

สมมติ $n + 1$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

... (1)

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก a, b โดยที่ $2 \leq a < n + 1$ และ $2 \leq b < n + 1$ ที่ทำให้ $n + 1 = ab$

เพราะว่า a, b เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้น $2 \leq a \leq n$ และ $2 \leq b \leq n$

เพราะว่า $n + 1 \geq 5$ เพราะฉะนั้น a และ b เท่ากับ 2 พร้อมกันไม่ได้

กรณีที่ 1 $a \neq b$ เพราะว่ $2 \leq a \leq n$, $2 \leq b \leq n$ เพราะฉะนั้น $a \mid n!$ และ $b \mid n!$

เพราะฉะนั้น $ab \mid n!$

เพราะว่า $n + 1 = ab$ เพราะฉะนั้น $(n + 1) \mid n!$

กรณีที่ 2 $a = b$ เพราะฉะนั้น $n + 1 = a^2$

... (2)

หมายเหตุ ทุกค่า $k \geq 4$

$$\text{จะได้ } k - 4 \geq 0 \Rightarrow (k - 4)k \geq 0 \Rightarrow k^2 - 4k \geq 0 \Rightarrow 4k \leq k^2 \Rightarrow \sqrt{k} \leq \frac{k}{2}$$

เพราะฉะนั้น $a = \sqrt{a^2} = \sqrt{n+1} \leq \frac{n+1}{2}$ เพราะฉะนั้น $2a \leq n+1$

ถ้า $2a = n+1$ แล้ว $2a = a^2$ ทำให้ $a = 2$ ทำให้เกิดข้อขัดแย้งกับ $n+1 > 5$

เพราะฉะนั้น $2a < n+1$

เพราะฉะนั้น $2a \leq n$ และ $(2a)! \mid n!$... (3)

เพราะว่า $(2a)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a(a+1)(a+2) \dots (a+a)$ เพราะฉะนั้น $a^2 \mid (2a)!$... (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $a^2 \mid n!$

เพราะว่า $n+1 = a^2$ (จาก (2)) เพราะฉะนั้น $(n+1) \mid n!$

เพราะฉะนั้น ถ้า $n+1$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $(n+1) \mid n!$

หมายเหตุ สมมติ $n+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ

เพราะฉะนั้นจึงไม่มีตัวประกอบร่วม 1, 2, 3, ..., $n-1$, n ใน $n!$ ที่เป็นตัวประกอบร่วมของ $n+1$

เพราะฉะนั้น $n+1$ หาร $n!$ ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้น ถ้า $n+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $n+1$ หาร $n!$ ไม่ลงตัว

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ถ้า $n+1$ หาร $n!$ ลงตัวแล้ว $n+1$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

เพราะฉะนั้นเมื่อ $n \geq 4$ เราสรุปได้ว่า

$n+1$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $n+1$ หาร $n!$ ลงตัว

หรือ $n+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $n+1$ หาร $n!$ ไม่ลงตัว



47. แนวคิด $(n+1) \nmid n!$ ก็ต่อเมื่อ $n+1$ เป็นจำนวนเฉพาะ เมื่อ $n \geq 4$

เพราะฉะนั้น $n \nmid (n-1)!$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเฉพาะ เมื่อ $n \geq 5$

เพราะฉะนั้น $\{n \mid n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งน้อยกว่า } 51 \text{ และ } n \nmid (n-1)!\}$

$$= \{n \mid 5 \leq n \leq 50 \text{ และ } n \nmid (n-1)!\} \cup \{2, 3, 4\}$$

$$= \{n \mid 5 \leq n \leq 50 \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\} \cup \{2, 3, 4\}$$

$$= \{5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\} \cup \{2, 3, 4\}$$

$$= \{2, 3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$$

มีจำนวนทั้งหมด 16 ตัว



48. แนวคิด ให้ $\cos A = 2k$, $\cos B = 9k$ และ $\cos C = 12k$ และ $k > 0$... (1)

เพราะว่า $\cos(A+B) = \cos(180^\circ - C)$

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = -\cos C$$

$$(2k)(9k) - \sqrt{1-\cos^2 A} \sqrt{1-\cos^2 B} = -12k$$

$$18k^2 - \sqrt{1-4k^2} \sqrt{1-81k^2} = -12k$$

$$-\sqrt{1-4k^2} \sqrt{1-81k^2} = -12k - 18k^2$$

$$1 - 85k^2 + 324k^4 = 144k^2 + 432k^3 + 324k^4$$

$$432k^3 + 229k^2 - 1 = 0$$

$$(16k-1)(27k^2+16k+1) = 0$$

เพราะฉะนั้น $k = \frac{1}{16}$ หรือ $k = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(27)(1)}}{2(27)} = \frac{-8 \pm \sqrt{37}}{27} < 0$

เพราะว่า $k > 0$ เพราะฉะนั้น $k = \frac{1}{16}$... (2)

เพราะฉะนั้น $\cos A = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ (จาก (1) และ (2))

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-\frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{63}{64}}$$

$\cos B = \frac{9}{16}$ (จาก (1) และ (2))

$$\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\frac{81}{256}} = \sqrt{\frac{175}{256}}$$

$\cos C = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$ (จาก (1) และ (2))

$$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}}$$

เพราะฉะนั้น $\sin A : \sin B : \sin c = \sqrt{\frac{63}{64}} : \sqrt{\frac{175}{256}} : \sqrt{\frac{7}{16}}$

$$= \sqrt{\frac{252}{256}} : \sqrt{\frac{175}{256}} : \sqrt{\frac{112}{256}}$$

$$= \sqrt{252} : \sqrt{175} : \sqrt{112}$$

$$= 6\sqrt{7} : 5\sqrt{7} : 4\sqrt{7}$$

$$= 6 : 5 : 4$$



49. แนวคิด เพราะว่า $\arcsin(\cos(\arcsin x)) = \arcsin(\cos(\arccos \sqrt{1-x^2}))$
 $= \arcsin(\sqrt{1-x^2})$

และ $\arccos(\sin(\arccos x)) = \arccos(\sin(\arcsin \sqrt{1-x^2}))$
 $= \arccos(\sqrt{1-x^2})$

เพราะฉะนั้น $\arcsin(\cos(\arcsin x)) + \arccos(\sin(\arccos x))$

$$= \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + \arccos(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$$



50. แนวคิด $2^{-\frac{2}{3x}} - 2^{1+x^2+x^4+x^6+\dots} = 0$

$$2^{-\frac{2}{3x}} = 2^{1+x^2+x^4+x^6+\dots}$$

$$-\frac{2}{3x} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

$$= \frac{1}{1-x^2}$$

$$\text{เมื่อ } |x^2| < 1$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, -2$$

เพราะว่า $|x^2| < 1$ เพราะฉะนั้น $x = -\frac{1}{2}$



ปัญหาเสริมความรู้สู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก

ชุดที่ 2

1. ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม
ถ้า $p(x)$ หารด้วย $x - 1, x - 2, x - 3$ เหลือเศษ 1, 2, 3 ตามลำดับ
แล้ว $p(x)$ หารด้วย $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ เหลือเศษเท่าใด
2. ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม
ถ้า $p(x)$ หารด้วย $x - 2, x - 3, x - 4$ เหลือเศษ 2, 3, 4 ตามลำดับ
แล้ว $p(x)$ หารด้วย $(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ เหลือเศษเท่าใด
3. ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม
ถ้า $p(x)$ หารด้วย $x - 1, x - 2, x - 3, x - 4$ เหลือเศษ 1, 2, 3, 4 ตามลำดับ
แล้ว $p(x)$ หารด้วย $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ เหลือเศษเท่าใด
4. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม และ $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม
ถ้า $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m ที่หารด้วย $x - a, x - b, x - c, x - d$ เหลือเศษ a, b, c, d
แล้ว $p(x)$ หารด้วย $(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ เหลือเศษเท่าใด
5. ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $n \leq m$
ถ้า $x - a_i$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ a_i ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$
แล้ว $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษเท่าใด
6. 6.1 ให้ $A = \{ n \mid n! \text{ ลงท้ายด้วย } 0 \text{ จำนวน } 1 \text{ ตัว} \}$ จงหาเซต A
6.2 จงแสดงว่า จำนวนของเลข 0 ที่อยู่ท้าย $n!$ เท่ากับจำนวนตัวประกอบของเลข 5 ใน $n!$
7. ให้ $A = \{ n \mid n! \text{ ลงท้ายด้วย } 0 \text{ จำนวน } 40 \text{ ตัว} \}$ จงหาเซต A
8. ให้ $A = \{ n \mid n! \text{ ลงท้ายด้วย } 0 \text{ จำนวน } 247 \text{ ตัว} \}$ จงหาเซต A
ข้อตกลง $\gcd(m, n)$ หมายถึงตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็ม m และ n
 $\ell_{\text{cm}}(m, n)$ หมายถึงตัวคูณร่วมน้อยของจำนวนเต็ม m และ n
9. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มและ $\gcd(a, b) = d$
9.1 จงแสดงว่า สมการ $ax + by = c$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ $d \mid c$
9.2 จงแสดงว่า ถ้า $(x = x^*, y = y^*)$ เป็นคำตอบชุดหนึ่งของสมการ $ax + by = c$
แล้วผลเฉลยทั่วไปของสมการคือ $x = x^* + \left(\frac{b}{d}\right)t$ และ $y = y^* - \left(\frac{a}{d}\right)t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็ม

10. ให้ a, b, c, d, e เป็นจำนวนเต็มบวกและ $b \geq a$

จงแสดงว่า ถ้า $\gcd(d, e) \mid (b - a)$ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก x, y ที่ทำให้ $dx - ey = b - a$

11. ให้ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก และ $A = \{5 + rx \mid r \in \mathbb{N}\} = \{5, 5 + x, 5 + 2x, 5 + 3x, \dots\}$

$$B = \{8 + sy \mid s \in \mathbb{N}\} = \{8, 8 + y, 8 + 2y, 8 + 3y, \dots\}$$

จงแสดงว่า $A \cap B \neq \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $\gcd(x, y) \mid (8 - 5)$

12. ให้ a, b, d, e เป็นจำนวนเต็มบวก และ $A = \{a, a + d, a + 2d, \dots\}$ และ $B = \{b, b + e, b + 2e, \dots\}$

จงแสดงว่า $A \cap B \neq \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $\gcd(d, e) \mid (b - a)$

13. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n > 1$

จงแสดงว่า $n! + 2, n! + 3, n! + 4, \dots, n! + n$ เป็นจำนวนประกอบ

14. ให้ p และ $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \geq 5$ จงแสดงว่า $6 \mid (p + 1)$

15. ให้ p และ $p + 2$ เป็นจำนวนเฉพาะและ $p \geq 5$ จงแสดงว่า $12 \mid (2p + 2)$

16. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า n และ $n + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

17. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ จงแสดงว่า n และ $n - 2$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

18. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $n! + 1$ และ $(n + 1)! + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

19. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a > b$

จงแสดงว่า ถ้า $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $\gcd(a + b, a - b) = 1$ หรือ 2

20. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า ถ้า $\gcd(a, b) = 1$ และ $c \mid (a + b)$ แล้ว $\gcd(a, c) = 1$

21. ให้ b, c, m เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า ถ้า $\gcd(b, c) = 1$ และ $m \mid b$ แล้ว $\gcd(m, c) = 1$

22. 22.1 ให้ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะ

จงแสดงว่า ถ้า $(p \mid \ell_{\text{cm}}(a, b) \text{ และ } p \mid (a + b))$ แล้ว $(p \mid a \text{ และ } p \mid b)$

22.2 จงหาจำนวนเต็มบวก a, b ที่ทำให้ $a + b = 5432$ และ $\ell_{\text{cm}}(a, b) = 223020$

23. ให้ d, M เป็นจำนวนเต็มบวก

จงแสดงว่า มีจำนวนเต็มบวก a, b ที่ทำให้ $d = \gcd(a, b)$ และ $M = \ell_{\text{cm}}(a, b)$ ก็ต่อเมื่อ $d \mid M$

24. ให้ a, b และ m เป็นจำนวนเต็มบวก

จงแสดงว่า $\ell_{\text{cm}}(ma, mb) = m \ell_{\text{cm}}(a, b)$ และ $\gcd(ma, mb) = m \gcd(a, b)$

25. ให้ a, b และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า ถ้า $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $\gcd(a^n, b^n) = 1$

26. ให้ a, b และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\text{จงแสดงว่า } \gcd(a^n, b^n) = (\gcd(a, b))^n \text{ และ } \text{lcm}(a^n, b^n) = (\text{lcm}(a, b))^n$$

27. ให้ a, b และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า ถ้า $a^n \mid b^n$ แล้ว $a \mid b$

28. 28.1 จงแสดงว่า $a^2 + b^2 + c^2 = 1849$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม

28.2 จงแสดงว่า $a^2 + b^2 + c^2 = 2023$ ไม่มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม

29. ให้ a, b, m, n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า ถ้า $\gcd(a, b) = 1$ แล้ว $\gcd(a^m, b^n) = 1$

30. ให้ $S = \{ \gcd(a^3, b^4) \mid a, b \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } \gcd(a, b) = 10 \}$ จงหาเซต S

31. ให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า ถ้า $a^3 \mid b^2$ แล้ว $a \mid b$

32. จงหาจำนวนตรรกยะบวกที่มีค่าน้อยที่สุดที่สามารถเขียนในรูปของ $\frac{x}{30} + \frac{y}{36}$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนเต็ม

33. ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่าทุกจำนวนเต็มบวกในรูปแบบ $4k + 3$ ต้องมีตัวประกอบ

จำนวนเฉพาะ p ในรูปแบบ $p = 4d + 3$ เมื่อ d เป็นจำนวนเต็มบวก

34. จงแสดงว่า $A = \{ p \mid p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะและมี } k \in \mathbb{N} \text{ ที่ทำให้ } p = 4k + 3 \}$ เป็นเซตอนันต์

35. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $n(n+1)(n+2)(n+3)$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

36. ให้ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ และ $M = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \dots + a_n 10^n$

36.1 จงแสดงว่า $3 \mid M$ ก็ต่อเมื่อ $3 \mid (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

36.2 จงแสดงว่า $9 \mid M$ ก็ต่อเมื่อ $9 \mid (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

37. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $N = \underbrace{777\dots 7}_{3^n \text{ terms}}$ เป็นจำนวนที่ประกอบด้วย 7 จำนวน 3^n หลัก

จงแสดงว่า $3^n \mid N$

38. **บทนิยาม** จำนวนเต็มบวก n เป็น **กำลัง m สมบูรณ์** ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ $k^m = n$

จงแสดงว่าไม่มีจำนวนเต็มบวกที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ในรูปแบบ $3k + 2$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

39. จงแสดงว่า ถ้า ab, ac, bc เป็นกำลังสามสมบูรณ์แล้ว a, b, c เป็นกำลังสามสมบูรณ์

40. ให้ a, b, m เป็นจำนวนเต็มบวก

จงแสดงว่า ถ้า $\gcd(a, b) = 1$ และ ab เป็นกำลัง m สมบูรณ์ แล้ว a และ b เป็นกำลัง m สมบูรณ์

41. จงแสดงว่า $8^n + 1$ เป็นจำนวนประกอบทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

42. ให้ $A = \{ p \mid p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ และ } 17p - 1 \text{ เป็นกำลังสามสมบูรณ์} \}$ จงหาเซต A

43. 43.1 ให้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และ $A = \{ n \in U \mid 2^n + n^2 \text{ หารด้วย } 7 \text{ ลงตัว} \}$ จงหาเซต A

43.2 จงแสดงว่า $7 \nmid (2^n + n^2)$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

44. ให้ $U = \{ 500, 501, \dots, 2000 \}$, $A = \{ x \in U \mid 3 \mid x \}$ และ $B = \{ x \in U \mid 7 \mid x \}$

จำนวนสมาชิกของ A , B , $A \cap B$ และ $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

45. ให้ $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_k^{n_k}$

เมื่อ p_i เป็นจำนวนเฉพาะ n_i เป็นจำนวนเต็มบวก ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, k$

จงแสดงว่า n เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ n_i เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, k$

46. จำนวน $\frac{400!}{100!300!}$ ลงท้ายด้วยเลขศูนย์กี่ตัว

47. จงแสดงว่าเมื่อ n มีค่ามาก จำนวนของเลขศูนย์ที่อยู่ท้ายสุดของ $n!$ มีจำนวนใกล้เคียงกับ $\frac{n}{4}$

48. จงหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ $\cos x - \cos 3x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \pi$

49. จงหาค่าของ $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$ และ $\cos 36^\circ \cos 72^\circ$

50. จงหาค่าของ $\cos 18^\circ$ และ $\sin 18^\circ$

เฉลยปัญหาเสริมความรู้สู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก ชุดที่ 2

1. แนวคิด แบบที่ 1 สมมติ $p(x) = q(x)(x-1)(x-2)(x-3) + Ax^2 + Bx + C$

เพราะว่า $x-1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 1 เพราะฉะนั้น $A + B + C = 1$... (1)

เพราะว่า $x-2$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 2 เพราะฉะนั้น $4A + 2B + C = 2$... (2)

เพราะว่า $x-3$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 3 เพราะฉะนั้น $9A + 3B + C = 3$... (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $A = 0$, $B = 1$ และ $C = 0$ เพราะฉะนั้น $p(x) = q(x)(x-1)(x-2)(x-3) + x$

เพราะฉะนั้น $(x-1)(x-2)(x-3)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ x

แบบที่ 2 สมมติ $x-k$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ k ทุกค่า $k = 1, 2, 3$ เพราะฉะนั้น $p(k) = k$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3$

ให้ $g(x) = p(x) - x$ เพราะฉะนั้น $g(k) = 0$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3$

เพราะฉะนั้น $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)q(x)$ เมื่อ $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $m-3$

$$p(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)q(x)$$

$$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)q(x) + x$$

เพราะฉะนั้น $(x-1)(x-2)(x-3)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ x □

2. แนวคิด แบบที่ 1 สมมติ $p(x) = q(x)(x-2)(x-3)(x-4) + r(x)$ และ $r(x)$ เป็นพหุนามดีกรีไม่เกิน 2

เพราะว่า $x-2, x-3, x-4$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 2, 3, 4 ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น $x-2, x-3, x-4$ หาร $r(x)$ เหลือเศษ 2, 3, 4 ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น $r(2) = 2, r(3) = 3, r(4) = 4$ เลือก $g(x) = r(x) - x$ จะได้ $g(2) = g(3) = g(4) = 0$

เพราะฉะนั้น $(x-2)(x-3)(x-4)$ หาร $g(x)$ ลงตัว และ $x-2, x-3, x-4$ หาร $g(x) + x$ เหลือเศษ x

เพราะว่า $r(x) = g(x) + x$ เพราะฉะนั้น $(x-2)(x-3)(x-4)$ หาร $r(x)$ เหลือเศษ x

เพราะว่า $p(x) = q(x)(x-2)(x-3)(x-4) + r(x)$ เพราะฉะนั้น $(x-2)(x-3)(x-4)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ x

แบบที่ 2 สมมติ $x-k$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ k ทุกค่า $k = 2, 3, 4$

เพราะฉะนั้น $p(k) = k$ ทุกค่า $k = 2, 3, 4$

ให้ $g(x) = p(x) - x$... (1)

เพราะฉะนั้น $g(k) = 0$ ทุกค่า $k = 2, 3, 4$

เพราะฉะนั้น $g(x) = (x-2)(x-3)(x-4)q(x)$ เมื่อ $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $m-3$

$$p(x) - x = (x-2)(x-3)(x-4)q(x) \quad (\text{จาก (1)})$$

$$p(x) = (x-2)(x-3)(x-4)q(x) + x$$

เพราะฉะนั้น $(x-2)(x-3)(x-4)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ x □

3. แนวคิด แบบที่ 1 สมมติ $p(x) = q(x)((x-1)(x-2)(x-3)(x-4)) + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

เพราะว่า $p(x)$ หารด้วย $x-1$ เหลือเศษ 1 เพราะฉะนั้น $p(1) = 1$

เพราะฉะนั้น $A + B + C + D = 1$... (1)

ในทำนองเดียวกัน เพราะว่า $x-2, x-3, x-4$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 2, 3, 4

เพราะฉะนั้น $8A + 4B + 2C + D = 2$... (2)

$27A + 9B + 3C + D = 3$... (3)

$64A + 16B + 4C + D = 4$... (4)

โดยการแก้สมการจาก (1) – (4) จะได้ $A = 0, B = 0, C = 1$ และ $D = 0$

เพราะฉะนั้น $p(x) = q(x)((x-1)(x-2)(x-3)(x-4)) + x$

เพราะฉะนั้น $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ x

แบบที่ 2 สมมติ $x-k$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ $k, k = 1, 2, 3, 4$

เพราะฉะนั้น $p(k) = k$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, 4$

ให้ $g(x) = p(x) - x$... (1)

เพราะฉะนั้น $g(k) = 0$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, 4$

เพราะฉะนั้น $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)q(x)$ เมื่อ $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $m-4$

$p(x) - x = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)q(x)$ (จาก (1))

$p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)q(x) + x$

เพราะฉะนั้น $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ x □

4. แนวคิด สมมติ $x-k$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ k ทุกค่า $k = a, b, c, d$

เพราะฉะนั้น $p(k) = k$ ทุกค่า $k = a, b, c, d$

เพราะฉะนั้น $p(a) = a, p(b) = b, p(c) = c$ และ $p(d) = d$

ให้ $g(x) = p(x) - x$... (1)

เพราะฉะนั้น $g(k) = 0$ ทุกค่า $k = a, b, c, d$

เพราะฉะนั้น $g(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)q(x)$ เมื่อ $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $m-4$

$p(x) - x = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)q(x)$ (จาก (1))

$p(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)q(x) + x$

เพราะฉะนั้น $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ x □

5. แนวคิด ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m

สมมติ $x - a_i$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ a_i ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$... (1)

เพราะฉะนั้น $p(a_i) = a_i$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$... (2)

ให้ $g(x) = p(x) - x$... (3)

เพราะฉะนั้น $g(a_i) = 0$ ทุกค่า $i = 1, 2, 3, \dots, n$

เพราะฉะนั้น $g(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)q(x)$ เมื่อ $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $m - n$

$$p(x) - x = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)q(x)$$

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)q(x) + x \quad (\text{จาก (3)})$$

เพราะฉะนั้น $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ x □

6. แนวคิด 6.1 $5! = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $6! = 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $7! = 5040 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$,

$8! = 40320 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $9! = 362880 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, $10! = 3628800 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$,

$11! = 39916800 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ เพราะฉะนั้น $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

6.2 ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวก p เป็นจำนวนเฉพาะ

$e_p(x)$ = จำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p^{e_p(x)}$ หาร x ลงตัว

ตัวอย่างเช่น $10! = 3628800 = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

เพราะฉะนั้น $e_2(10!) = 8$, $e_3(10!) = 4$, $e_5(10!) = 2$, $e_7(10!) = 1$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ $e_p(n!) = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^4} \right\rfloor + \dots$ (สูตรเลขจางค์)

หมายเหตุ ดูหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 37 โลกทฤษฎีจำนวน หน้า 102 หรือข้อ 24 ชุดที่ 3

ให้ k เป็นจำนวนเลขศูนย์ที่อยู่ท้ายจำนวนเต็มบวก $n!$

เพราะฉะนั้น k เป็นจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่ทำให้ $n! = 10^k M$ และ $10 \nmid M$ เมื่อ $M \in \mathbb{N}$... (1)

ให้ $K \in \mathbb{N}$ และ $n! = 2^{e_2(n!)} 5^{e_5(n!)} K$... (2)

เพราะฉะนั้น $\gcd(2, K) = 1$ และ $\gcd(5, K) = 1$ และ $5 \nmid K$ และ $2 \nmid K$... (3)

เพราะว่า $\left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor$ ทุกค่า $i \in \mathbb{N}$ เพราะฉะนั้น $e_5(n!) \leq e_2(n!)$... (4)

$n! = 2^{e_5(n!)} 5^{e_5(n!)} 2^{e_2(n!)-e_5(n!)} K = 10^{e_5(n!)} 2^{e_2(n!)-e_5(n!)} K$... (5)

เพราะว่า $5 \nmid K$ เพราะฉะนั้น $5 \nmid (2^{e_2(n!)-e_5(n!)} K)$ เพราะฉะนั้น $10 \nmid (2^{e_2(n!)-e_5(n!)} K)$

เพราะฉะนั้น $n! = 10^{e_5(n!)} 2^{e_2(n!)-e_5(n!)} K$ และ $10 \nmid (2^{e_2(n!)-e_5(n!)} K)$... (6)

จาก (2) และ (6) จะได้ $e_5(n!) \leq k$... (7)

เพราะว่า $n! = 10^k M = 2^k 5^k M$ และ $n! = 2^{e_2(n!)} 5^{e_5(n!)} K$

และ $e_5(n!) =$ จำนวนเต็มบวกค่ามากที่สุดที่ทำให้ $5^{e_5(n!)} \mid n!$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $k \leq e_5(n!)$... (8)

จาก (7) และ (8) จะได้ $k = e_5(n!)$ □

7. แนวคิด $n!$ ลงท้ายด้วยเลขศูนย์จำนวน 40 ตัว ก็ต่อเมื่อ 40 เป็นจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่ทำให้ $5^{40} \mid n!$

$e_5(n!) =$ ค่ามากที่สุดของจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ $5^k \mid n!$ ลงตัว (จากข้อ 6)

เพราะฉะนั้น 40 เป็นจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่ทำให้ $5^{40} \mid n!$ ก็ต่อเมื่อ $e_5(n!) = 40$

จะได้ $e_5(n!) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \dots$ (สูตรเลอจองด์)

$$e_5(125!) = \left\lfloor \frac{125}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{125}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{125}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{125}{5^4} \right\rfloor + \dots = 25 + 5 + 1 + 0 + \dots = 31$$

$$e_5(200!) = \left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{5^4} \right\rfloor + \dots = 40 + 8 + 1 + 0 + \dots = 49$$

เพราะว่า $(n+1)! = (n!)(n+1)$

เพราะฉะนั้นจำนวนของเลขศูนย์ที่อยู่ท้าย $n!$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ จำนวนของเลขศูนย์ที่อยู่ท้าย $(n+1)!$

เพราะฉะนั้น $e_5(n!) \leq e_5((n+1)!)$

เพราะว่า $e_5(125!) = 31 \leq e_5(n!) = 40 \leq 49 = e_5(200!)$ เพราะฉะนั้น $125 < n < 200$

เพราะว่า $5^3 < n < 5^4$ และจำนวนเต็มในระบบเลขฐาน 5 สามารถเขียน n ได้เป็น

$A5^3 + B5^2 + C5 + D$ โดยที่ A, B, C, D เป็นสมาชิกของ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

เพราะฉะนั้นเราเลือกให้ $n = 125 + 25s + 5u + v$ เมื่อ $s, u, v \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

เพราะฉะนั้น $e_5(n!) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \dots$

$$= \left\lfloor \frac{125 + 25s + 5u + v}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{125 + 25s + 5u + v}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{125 + 25s + 5u + v}{5^3} \right\rfloor + \dots$$

$$= (25 + 5s + 1) + (5 + s) + 1 + 0 + \dots$$

$$= 31 + 6s + u$$

เพราะฉะนั้น $e_5(n!) = 31 + 6s + u$

เพราะฉะนั้น $e_5(n!) = 40$ ก็ต่อเมื่อ $6s + u = 9$

เพราะว่า $s, u \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ เพราะฉะนั้น $s = 1$ และ $u = 3$

$n = 125 + 25s + 5u + v = 165 + v$ เมื่อ $v \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

เพราะฉะนั้น $A = \{165, 166, 167, 168, 169\}$ □

8. **แนวคิด** $n!$ ลงท้ายด้วยเลขศูนย์จำนวน 248 ตัว ก็ต่อเมื่อ 248 เป็นจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่ทำให้ $5^{248} \mid n!$

$e_5(n!) =$ ค่ามากที่สุดของจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ 5^k หาร $n!$ ลงตัว (จากข้อ 6)

เพราะฉะนั้น 248 เป็นจำนวนเต็มค่ามากที่สุดที่ทำให้ $5^{248} \mid n!$ ก็ต่อเมื่อ $e_5(n!) = 248$

จะได้ $e_5(n!) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \dots$ (สูตรเลขจอร์จ)

เพราะว่า $e_5(1000!) = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{5^4} \right\rfloor + \dots$

$$= 200 + 40 + 8 + 1 + 0 = 249$$

และ $e_5(999!) = \left\lfloor \frac{999}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{999}{5^4} \right\rfloor + \dots = 199 + 39 + 7 + 1 + 0 = 246$

เพราะฉะนั้น $999!$ ลงท้ายด้วยเลขศูนย์จำนวน 246 ตัว และ $1000!$ ลงท้ายด้วยเลขศูนย์จำนวน 249 ตัว

เพราะว่า $e_5(n!) \leq e_5((n+1)!) \leq e_5((n+2)!)$ ทุกค่า $n \in \mathbb{N}$

และ $246 = e_5(999!) < e_5(1000!) = 249$

เพราะฉะนั้นไม่มี n ที่ทำให้ $n!$ ลงท้ายด้วยเลขศูนย์จำนวน 248 ตัว เพราะฉะนั้น $A = \emptyset$ □

9. **แนวคิด** 9.1 ($\Rightarrow$) สมมติ $ax + by = c$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม

ให้ $x = x^*$ และ $y = y^*$ เป็นผลเฉลยจำนวนเต็มของ $ax + by = c$

เพราะฉะนั้น $c = ax^* + by^*$

เพราะว่า $d = \gcd(a, b)$ เพราะฉะนั้น $d \mid a$ และ $d \mid b$ เพราะฉะนั้น $d \mid ax^*$ และ $d \mid by^*$

เพราะฉะนั้น $d \mid (ax^* + by^*)$ เพราะว่า $c = ax^* + by^*$ เพราะฉะนั้น $d \mid c$

($\Leftarrow$) สมมติ $d \mid c$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $c = kd$

เพราะว่า $d = \gcd(a, b)$ เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม r และ s ที่ทำให้ $ra + sb = d$... (1)

หมายเหตุ (1) ดูจากหนังสือคณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 37 โลกทฤษฎีจำนวน หน้า 30

เพราะฉะนั้น $kra + ksb = kd$

ให้ $x^* = kr$ และ $y^* = ks$ เพราะฉะนั้น x^* และ y^* เป็นจำนวนเต็ม และ $x^*a + y^*b = c$

เพราะฉะนั้นสมการ $ax + by = c$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนเต็ม

9.2 ให้ $(x = x^*, y = y^*)$ เป็นคำตอบชุดหนึ่งของสมการ $ax + by = c$... (2)

คำตอบทั่วไปของสมการคือ $x = x^* + \left(\frac{b}{d}\right)t$ และ $y = y^* - \left(\frac{a}{d}\right)t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็ม

(i) การแสดงว่า $x = x^* + \left(\frac{b}{d}\right)t$ และ $y = y^* - \left(\frac{a}{d}\right)t$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็ม

เป็นผลเฉลยของ $ax + by = c$