อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

Mathematical Induction

เสริมการเรียนการสอน ม.ปลาย และ อุดมศึกษา

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
Mathematical Induction

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ชื่อหนังสือ : อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)
ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
พิมพ์ครั้งที่ : 1
เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : กรกฎาคม พ.ศ. 2560
เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์
ISBN (e–book) : 978–616–440–719–0
พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

หนังสือ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction) เล่มนี้ได้รวบรวมปัญหาต่างๆ ที่สามารถแสดงข้อพิสูจน์ด้วยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น

การพิสูจน์ว่า $2 \le (1+\frac{1}{n})^n \le 3$ ทุกค่า n ∈ N

การพิสูจน์ว่า $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$ ทุกค่า n ∈ N

การพิสูจน์ว่า $\sqrt{n} \le \sqrt[n]{n!}$ ทุกค่า n ∈ N

การพิสูจน์ว่า 11 หาร n^{11} – n ลงตัว ทุกค่า n ∈ N

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนรู้และใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ ปัญหาที่รวบรวมไว้ในหนังสือเล่มนี้จะช่วยให้นักเรียนและนักศึกษาได้ฝึกหัดพิสูจน์สูตรและข้อความ โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

Mathematical Induction

1. อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์สูตรหรือข้อความทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญเช่น

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $5 \mid (n^5 - n)$
3. a + b หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว

ให้ P(n) เป็นข้อความในพจน์ของ n

การพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริง เราเลือกใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้หลายแบบ

แบบที่ 1 ถ้า (1) P(1) เป็นจริง

(2) ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2 ให้ $m \geq 1$

ถ้า (1) P(m) เป็นจริง

(2) ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq m$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกค่า n = m, m + 1, m + 2, ...

แบบที่ 3 ถ้า (1) P(1) เป็นจริง

(2) ถ้า P(k) เป็นจริง ทุกค่า $k < n$ แล้ว P(n) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เทคนิควิธีในการพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มีหลายแบบดังต่อไปนี้

2. การจัดรูปพีชคณิตจากซ้ายไปเท่ากับขวาหรือจัดรูปเข้ามาหากันตรงกลาง

ตัวอย่าง 2.1 จงแสดงว่า $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{(1)(1+1)}{2} = 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$

เพราะฉะนั้น $1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$

$= (k + 1)(\frac{k}{2} + 1)$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

ตัวอย่าง 2.2 จงแสดงว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{6}(1 + 1)(2 (1) + 1) = 1^2$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1)$

บวกทั้งสองข้างด้วย $(k + 1)^2$ จะได้

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)^2$

$= (k + 1)(\frac{k(2k+1)}{6} + (k + 1))$

$= \frac{k+1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6)$

$= \frac{k+1}{6}(2k^2 + 7k + 6)$

$= \frac{k+1}{6}(2k + 3)(k + 2)$

$= \frac{k+1}{6}((k + 1) + 1)(2(k + 1) + 1)$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 2.3 จงแสดงว่า $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(\frac{1}{2}(1 + 1))^2 = 1^3$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = (\frac{k}{2}(k + 1))^2$

บวกทั้งสองข้างด้วย $(k + 1)^3$ จะได้ $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3$

$= (\frac{k}{2}(k + 1))^2 + (k + 1)^3$

$= (+ 1)^2(\frac{k^2}{4} + (k + 1))$

$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4)$

$= \frac{(k+1)^2}{4}(k + 2)^2$

$= (\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2})^2$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 2.4 จงแสดงว่า $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!) = (n + 1)! - 1$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1(1!) + 2(2!) + ... + n(n!) = (n + 1)! - 1$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1(1!) = 1 = (1 + 1)! - 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1(1!) + 2(2!) + \ldots + k(k!) = (k + 1)! - 1$

เพราะว่า $1(1!) + 2(2!) + \ldots + k(k!) + (k + 1)((k + 1)!) = ((k + 1)! - 1) + (k + 1)((k + 1)!)$

$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)!$

$= (k + 2)(k + 1)! - 1$

$= ((k + 1) + 1)! - 1$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1(1!) + 2(2!) + \ldots + n(n!) = (n + 1)! - 1$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 2.5 จงแสดงว่า $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{2}(3(1) - 1) = 1$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k + 1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) = \frac{k}{2}(3k - 1)$

บวกทั้ง 2 ข้างด้วย $(3(k + 1) - 2)$ จะได้

$1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) + (3(k + 1) - 2) = \frac{k}{2}(3k - 1) + (3(k + 1) - 2)$

$= \frac{k}{2}(3k - 1) + 3k + 1$

$= \frac{3k^2 - k + 6k + 1}{2}$

$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$

$= \frac{(k+1)}{2}(3k + 2)$

$= \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 2.6 จงแสดงว่า $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ ”

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(1)^2(2(1)^2 - 1) = 1 = 1^3$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2 - 1)$

บวกด้วย $(2(k+1)-1)^3$ ทั้งสองข้างจะได้

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k-1)^3 + (2(k+1)-1)^3 = k^2(2k^2 - 1) + (2(k+1)-1)^3$$

$$= 2k^4 - k^2 + (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1)$$

$$= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1$$

$$= (2k^4 + 4k^3 + k^2) + (4k^3 + 8k^2 + 2k) + (2k^2 + 4k + 1)$$

$$= (k^2 + 2k + 1)(2k^2 + 4k + 1)$$

$$= (k+1)^2(2(k+1)^2 - 1)$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ $P(n)$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

3. การจัดรูปแบบทางพีชคณิตที่ต้องมีการบวกเข้าและลบออก

ตัวอย่าง 3.1 จงแสดงว่า a + b หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว ทุกค่า n $\in$ N

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $(a + b) \mid (a^{2n} - b^{2n})$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^2 - b^2)$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1

เพราะฉะนั้น a + b หาร $a^{2k} - b^{2k}$ ลงตัว

$$a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)} = a^2 a^{2k} - b^2 b^{2k}$$

$$= a^2 a^{2k} - a^2 b^{2k} + a^2 b^{2k} - b^2 b^{2k} \qquad \text{(บวกเข้าและลบออก)}$$

$$= a^2 (a^{2k} - b^{2k}) + b^{2k}(a^2 - b^2)$$

เพราะว่า $(a + b) \mid (a^{2k} - b^{2k})$, $(a + b) \mid (a^2 - b^2)$

เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)})$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\in$ N

เพราะฉะนั้น a + b หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว ทุกค่า n $\in$ N

หมายเหตุ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$

:

$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$ เมื่อ n เป็นเลขคู่

โดยใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิตเมื่อพจน์แรก = a^{n-1} และอัตราส่วนร่วม = $-\frac{b}{a}$

เพราะฉะนั้น $a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}$

$$= \frac{(a^{n-1})(1-(-\frac{b}{a})^n)}{1-(-\frac{b}{a})} \qquad \text{(เพราะว่า n เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น } (-\tfrac{b}{a})^n = \tfrac{b^n}{a^n}\text{)}$$

$$= \frac{a^n - b^n}{a + b}$$

□

ตัวอย่าง 3.2 จงแสดงว่า a – b หาร $a^n - b^n$ ลงตัว ทุกค่า n $\in$ N

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $(a - b) \mid (a^n - b^n)$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(a - b) \mid (a - b)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1

เพราะฉะนั้น a – b หาร $a^k - b^k$ ลงตัว

$a^{k+1} - b^{k+1} = a a^k - b^k b$

$= a a^k - a b^k + a b^k - b^k b$ (บวกเข้าและลบออก)

$= a(a^k - b^k) + b^k(a - b)$

เพราะว่า $(a - b) \mid (a^k - b^k)$ และ $(a - b) \mid (a - b)$ เพราะฉะนั้น $(a - b) \mid (a^{k+1} - b^{k+1})$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\in$ N

เพราะฉะนั้น $(a - b) \mid (a^n - b^n)$ ทุกค่า n $\in$ N

หมายเหตุ 1. $\dfrac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + b^{n-1}$

2. โดยใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิตจะได้

$$a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \ldots + b^{n-1} = \frac{a^{n-1}(1 - (\frac{b}{a})^n)}{1 - (\frac{b}{a})}$$

$$= \frac{a^n - b^n}{a - b}$$

□

ตัวอย่าง 3.3 จงแสดงว่า a + b หาร $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ลงตัว ทุกค่า n $\in$ N

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $(a + b) \mid (a^{2n-1} + b^{2n-1})$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a^{2(1)-1} + b^{2(1)-1} = a + b$ เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2(1)-1} + b^{2(1)-1})$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1

เพราะฉะนั้น a + b หาร $a^{2k-1} + b^{2k-1}$ ลงตัว

$a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1} = a^{2k+1} + b^{2k+1}$

$= a^2 a^{2k-1} + b^2 b^{2k-1}$

$= a^2 a^{2k-1} + a^2 b^{2k-1} - a^2 b^{2k-1} + b^2 b^{2k-1}$ (บวกเข้าและลบออก)

$= a^2 (a^{2k-1} + b^{2k-1}) - b^{2k-1}(a^2 - b^2)$

เพราะว่า $(a + b) \mid (a^2 - b^2)$, $(a + b) \mid (a^{2k-1} + b^{2k-1})$

เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1})$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น a + b หาร $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ เมื่อ n เป็นเลขคี่

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - a b^3 + b^4)$

$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5 b + a^4 b^2 - a^3 b^3 + a^2 b^4 - a b^5 + b^6)$

โดยใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิตเมื่อ พจน์แรก = a^{n-1} และ อัตราส่วนร่วม = $(-\frac{b}{a})$

จะได้ $a^{n-1} - a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 - a^{n-4} b^3 + a^{n-5} b^4 - \dots + b^{n-1}$

$= \dfrac{(a^{n-1})(1-(-\frac{b}{a})^n)}{1-(-\frac{b}{a})}$ (เพราะว่า n เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $(-\frac{b}{a})^n = -\frac{b^n}{a^n}$)

$= \dfrac{a^n + b^n}{a + b}$ □