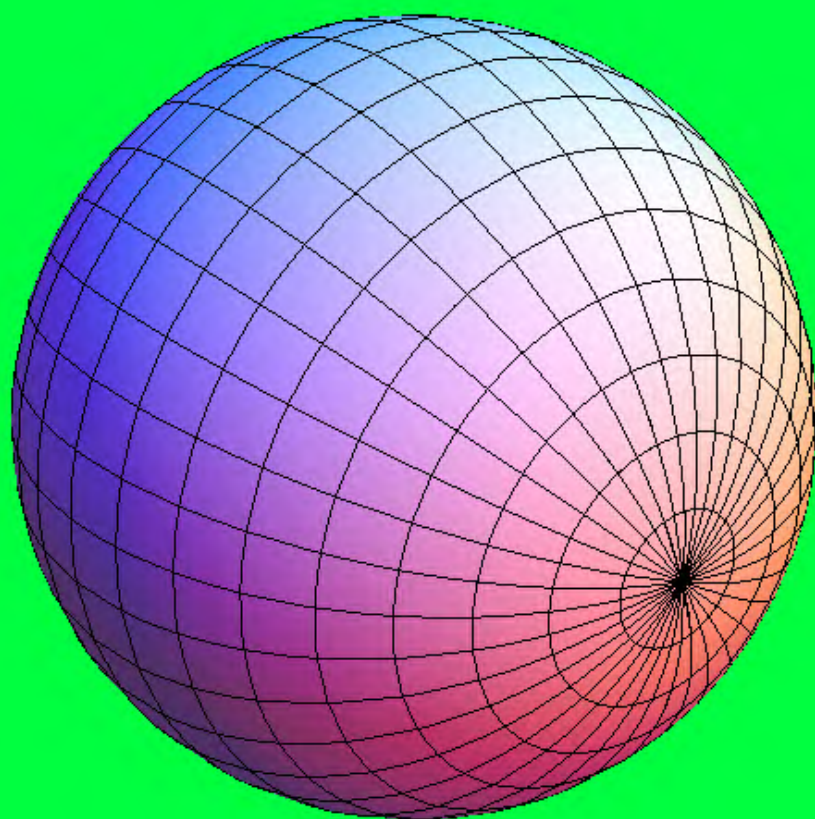


คณิตศาสตร์ปณิธิ เล่มที่ 29

โลกอสมการ

เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โลกอสมการ

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

<http://www.math.sc.chula.ac.th>

<http://www.math.sc.chula.ac.th/~tdumrong/homepage>

<http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~tdumrong/homepage>

ชื่อหนังสือ : คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 29 โลกอสมการ

ชื่อผู้แต่ง : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

จัดทำโดย : รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ : 2

เดือนและปีที่ พ.ศ. ที่จัดพิมพ์ : มีนาคม พ.ศ. 2560

เลขมาตรฐานสากลประจำหนังสืออิเล็กทรอนิกส์

ISBN (e-book) : 978-616-429-760-9

พิมพ์ที่ : ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

หนังสือ คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 29 โลกอสมการ เป็นหนังสือเสริมความรู้ม่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์ เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย การแก้สมการพีชคณิต การแก้สมการพหุนาม การพิสูจน์อสมการที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ และการประยุกต์ใช้งาน เช่น

- ◆ อสมการ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต-ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (A.M.-G.M.-H.M.)
- ◆ อสมการ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ถ่วงน้ำหนัก อสมการค่าเฉลี่ยยกกำลัง
- ◆ อสมการแบร์นูลลี อสมการเชบีเชฟ อสมการโคชี อสมการโฮลเดอร์ อสมการสามเหลี่ยม
- ◆ อสมการมินคอฟสกี อสมการเจนเสน อสมการยัง อสมการไวแอร์สตราสส์

ในการเรียบเรียงหนังสือ โลกอสมการ เล่มนี้ผู้เขียนได้แสดงแนวคิดและการพิสูจน์โดยจัดลำดับเนื้อหาจากง่ายไปส่วยาก และสรุปรวบรวมเป็นเทคนิคการพิสูจน์อสมการ เช่น

- ◆ การจัดรูปพีชคณิต การจัดรูปกำลังสองสมบูรณ์ การเปรียบเทียบค่าผลหารหรือผลต่าง
- ◆ การพิสูจน์อสมการแบบย้อนกลับ การพิสูจน์อสมการในรูปแบบอสมการเอกพันธ์
- ◆ การพิสูจน์อสมการโดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และบทประยุกต์
- ◆ การใช้ calculus และ ค่า discriminant ช่วยในการพิสูจน์อสมการ

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 29 โลกอสมการ ซึ่งเป็นหนังสือเสริมความรู้ม่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์ เล่มนี้จะช่วยให้ นักเรียน ครู อาจารย์ และ ผู้ที่มีความจำเป็นจะต้องเป็นวิทยากรอบรมโครงการคณิตศาสตร์โอลิมปิกทุกท่าน ได้มีแหล่งข้อมูลของโจทย์เกี่ยวกับอสมการซึ่งผู้เขียนได้จัดเนื้อหา และจัดลำดับของการแก้ปัญหาจากง่ายไปยากเพื่อเหมาะสมกับระดับความสามารถของผู้เรียน เช่นใช้เหตุผลที่นักเรียนรู้อยาก่อนตามหลักสูตร ม.ปลาย เพื่อใช้ในการแก้ปัญหาแล้วจึงแนะนำวิธีทำแบบใหม่หรือเพิ่มสูตรต่าง ๆ ที่มีใช้กันในระดับคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณผู้อ่านทุกท่านที่ติดตาม คณิตศาสตร์ปรัญ มาโดยตลอด

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

มีนาคม 2560

สารบัญ

บทนำ	โลกอสมการ	1 – 8
บทที่ 1	เทคนิคการแก้สมการ	
	โจทย์เสริมประสบการณ์การแก้สมการ	9 – 58
บทที่ 2	ฟังก์ชันพหุนาม และ สมการพหุนาม	
	โจทย์เสริมประสบการณ์เกี่ยวกับฟังก์ชันพหุนาม และ สมการพหุนาม	59 – 100
บทที่ 3	เทคนิคการพิสูจน์อสมการ	101 – 128
บทที่ 4	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับอสมการเอกพันธ์	
	โจทย์เสริมประสบการณ์การแก้อสมการ ชุดที่ 1	129 – 192
บทที่ 5	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเฉลี่ยเรขาคณิต	
	โจทย์เสริมประสบการณ์การแก้อสมการ ชุดที่ 2	193 – 238
บทที่ 6	การประยุกต์ค่าดิฟเฟอเรนเชียลกับการแก้อสมการ	
	โจทย์เสริมประสบการณ์การแก้อสมการ ชุดที่ 3	239 – 280
บทที่ 7	การใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และบทประยุกต์ช่วยแก้อสมการ	
	โจทย์เสริมประสบการณ์การแก้อสมการ ชุดที่ 4	281 – 338
บทที่ 8	อสมการเชบีเชฟและการประยุกต์	
	โจทย์เสริมประสบการณ์การแก้อสมการ ชุดที่ 5	339 – 376
บทที่ 9	อสมการ A.M.–G.M.–H.M.	
	โจทย์เสริมประสบการณ์การแก้อสมการ ชุดที่ 6	377 – 422
บทที่ 10	อสมการที่สำคัญทางคณิตศาสตร์	
	โจทย์เสริมประสบการณ์การแก้อสมการ ชุดที่ 7	423 – 455

บทนำ

โลกอสมการ

ในการศึกษาคณิตศาสตร์ ทั้งคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ และ คณิตศาสตร์ประยุกต์ เนื้อหาเกี่ยวกับ อสมการ สมการ และ พหุนาม เป็นเนื้อหาที่จัดได้ว่ามีความสำคัญ ซึ่งมีการนำไปใช้ในการศึกษาชั้นสูง และ การประยุกต์ในงานในสาขาวิทยาศาสตร์ และ วิศวกรรมศาสตร์ ในบทนำ เพื่อเข้าสู่เนื้อหาของหนังสือ โลกอสมการนี้จึงขอแนะนำสมบัติเกี่ยวกับจำนวนจริง มากล่าวไว้เพื่อเป็นการทบทวนความรู้ และ อ้างอิงใช้งาน

สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับอสมการ

กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq c$ แล้ว $a \leq c$
2. $a \leq b$ และ $a \geq b$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$
3. $a \geq b$ หรือ $a \leq b$
4. ถ้า $0 < a \leq b$ แล้ว $a^2 \leq b^2$
5. ถ้า $0 \leq a$ และ $0 \leq b$ แล้ว $0 \leq ab$
6. $a < b, a = b, a > b$ เป็นจริงเพียง 1 ข้อความเท่านั้น
7. ถ้า $a \leq b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
8. $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c \leq b + c$
9. $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c < b + c$
10. ถ้า $0 < c$ และ $a < b$ แล้ว $ac < bc$
11. $a \leq b$ ก็ต่อเมื่อ $a - b \leq 0$
12. ถ้า $a \leq b$ และ $c \geq 0$ แล้ว $ac \leq bc$
13. ถ้า $a \leq 0$ และ $b \geq 0$ แล้ว $ab \leq 0$
14. ถ้า $a \leq 0$ และ $b \leq 0$ แล้ว $ab \geq 0$
15. $a^2 \geq 0$
16. ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a^2 > 0$

17. $a < 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} < 0$, $a > 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{a} > 0$

18. $0 < a < b$ ก็ต่อเมื่อ $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

19. ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $\frac{a}{b} > 0$

20. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $-a > -b$

21. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$

22. ถ้า $a \leq b$ และ $c \leq d$ แล้ว $a + c \leq b + d$

23. ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^2 > a$

24. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^2 < a$

25. ถ้า $c \geq 0$ และ $0 < a \leq b$ แล้ว $a^c \leq b^c$

26. ถ้า $a < \varepsilon$ ทุกจำนวนจริงบวก ε แล้ว $a \leq 0$

27. บทนิยาม x เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ ของ x แทนด้วย $|x|$ กำหนดค่าโดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

28. x, y เป็นจำนวนจริง และ $a \geq 0, b \geq 0$

28.1 $|x| \geq 0$

28.2 $|x| \leq |y|$ ก็ต่อเมื่อ $x^2 \leq y^2$

28.3 $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

28.4 $|x - a| < b$ ก็ต่อเมื่อ $-b < x - a < b$

28.5 $|xy| = |x| |y|$

28.6 $xy \leq |x| |y|$

28.7 $|x + y| \leq |x| + |y|$

28.8 $|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

28.9 $-|a| \leq a \leq |a|$

28.10 ถ้า $b \neq 0$ แล้ว $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

ตัวอย่างในบทนำนี้เป็นตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถทำได้หลายวิธี เช่น การใช้พื้นฐานทางด้านพีชคณิต การแยกตัวประกอบ การจัดรูปเป็นกำลังสองสมบูรณ์ การประยุกต์ใช้เนื้อหาทางด้าน calculus เกี่ยวกับ ฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด การหาค่าสูงสุด-ค่าต่ำสุด หรือ การอ้างทฤษฎีบทเกี่ยวกับอสมการที่สำคัญ เช่น อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต อสมการโคชี - ออยเลอร์ ในที่นี้ขอกล่าวเฉพาะ อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต สำหรับจำนวนจริงบวก 2 จำนวน

อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (A.M.-G.M.) กล่าวว่า

สำหรับจำนวนจริงบวก a, b จะได้ว่า $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ และ สมการเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $a = b$

หมายเหตุ เนื่องจากในหนังสือเล่มนี้การพิสูจน์เกี่ยวข้องกับอสมการในรูปแบบ $L \leq R$ (หรือ $L \geq R$) เมื่อ L, R เป็นพจน์ทางคณิตศาสตร์ คำว่า สมการเป็นจริง จะหมายถึง พจน์ $L = R$ เป็นจริง เพราะฉะนั้นคำว่าสมการเป็นจริงจากอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต หมายถึง $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $a = b$

สำหรับอสมการอื่น ๆ จะได้ศึกษา การพิสูจน์และการประยุกต์ใช้งาน ต่อไป

ตัวอย่างที่ 1. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

แนวคิด $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

$$\text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a = b$$

ตัวอย่างที่ 2. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + y = 1$ จงแสดงว่า $xy \leq \frac{1}{4}$

แนวคิด แบบที่ 1. ใช้การจัดรูปพีชคณิต $xy = x(1 - x)$

$$= -x^2 + x$$

$$= -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}$$

$$= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$$

$$\leq \frac{1}{4}$$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{4}$ เมื่อ $x = y = \frac{1}{2}$

แบบที่ 2. ใช้สมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต

$$\text{เพราะว่า} \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad xy \leq \frac{1}{4}$$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{1}{4}$ เมื่อ $x = y = \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 3. กำหนดให้ x, y และ k เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + y = 2k$ จงแสดงว่า $xy \leq k^2$

แนวคิด แบบที่ 1. ใช้การจัดรูปพีชคณิต $xy = x(2k - x)$

$$= -x^2 + 2kx$$

$$= -(x^2 - 2kx + k^2) + k^2$$

$$= -(x - k)^2 + k^2$$

$$\leq k^2$$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ k^2 เมื่อ $x = y = k$

$$\text{แบบที่ 2. ใช้สมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต} \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

$$= \frac{2k}{2} = k$$

$$xy \leq k^2$$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ k^2 เมื่อ $x = y = k$

ตัวอย่างที่ 4. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ $x + y = 20$ จงแสดงว่า $xy \leq 100$

แนวคิด แบบที่ 1. ใช้การจัดรูปพีชคณิต

$$\begin{aligned} xy &= x(20 - x) \\ &= -x^2 + 20x \\ &= -(x^2 - 20x + 100) + 100 \\ &= -(x - 10)^2 + 100 \\ &\leq 100 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ 100 เมื่อ $x = y = 10$

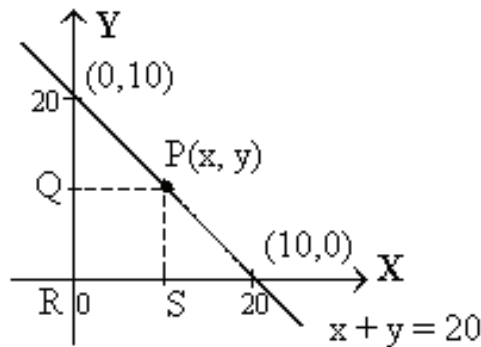
แบบที่ 2. ใช้สมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} &\leq \frac{x+y}{2} \\ &= \frac{20}{2} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$xy \leq 100$$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ 100 เมื่อ $x = y = 10$

หมายเหตุ ความหมายทางเรขาคณิตวิเคราะห์



รูปที่ 1

ค่าของ xy คือค่าของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $P(x, y)$ เป็นจุดบนเส้นตรง $x + y = 20$ ดังรูปที่ 1 เพราะฉะนั้น พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS มีค่าสูงสุดเท่ากับ 100 เมื่อ $x = y = 10$

ตัวอย่างที่ 5. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ $3x + 4y = 24$ จงหาค่าสูงสุดของ xy

แนวคิด แบบที่ 1. ใช้การจัดรูปพีชคณิต

$$\begin{aligned} xy &= x\left(\frac{24-3x}{4}\right) \\ &= -\frac{3}{4}(x^2 - 8x) \\ &= -\frac{3}{4}(x^2 - 8x + 16) + 12 \\ &= -\frac{3}{4}(x - 4)^2 + 12 \\ &\leq 12 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ 12 เมื่อ $x = 4$ และ $y = 3$

แบบที่ 2. ใช้เหตุผลจากตัวอย่างที่ 2. ที่กล่าวว่า $p > 0$, $q > 0$ และ $p + q = 1$ จะได้ว่า $pq \leq \frac{1}{4}$

และ $pq = \frac{1}{4}$ ก็ต่อเมื่อ $p = q = \frac{1}{2}$

จากสมการ $3x + 4y = 24$ จะได้ว่า $\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1$

เพราะฉะนั้น $(\frac{x}{8})(\frac{y}{6}) \leq \frac{1}{4}$... (1)

$xy \leq 12$... (2)

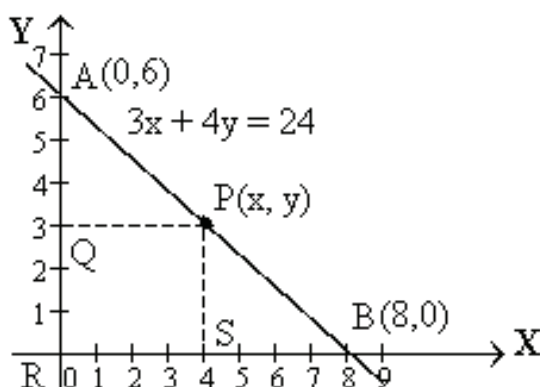
$xy = 12$ ก็ต่อเมื่อ $(\frac{x}{8})(\frac{y}{6}) = \frac{1}{4}$

ก็ต่อเมื่อ $\frac{x}{8} = \frac{y}{6} = \frac{1}{2}$

ก็ต่อเมื่อ $x = 4$ และ $y = 3$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ 12 เมื่อ $x = 4$ และ $y = 3$

หมายเหตุ ความหมายทางเรขาคณิตวิเคราะห์



รูปที่ 2

ค่าของ xy คือค่าของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $P(x, y)$ เป็นจุดบนเส้นตรง $3x + 4y = 24$ ดังรูปที่ 2 เพราะฉะนั้น พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS มีค่าสูงสุดเท่ากับ 12 เมื่อ $x = 4$ และ $y = 3$

ตัวอย่างที่ 6. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ $x^2 + y^2 = 20$ จงหาค่าสูงสุดของ xy

แนวคิด แบบที่ 1. ใช้การจัดรูปพีชคณิต

$$xy = x\sqrt{20-x^2}$$

$$x^2 y^2 = x^2(20 - x^2)$$

$$= 20x^2 - x^4$$

$$= -(x^4 - 20x^2)$$

$$= -(x^4 - 20x^2 + 100) + 100$$

$$= -(x^2 - 10)^2 + 100$$

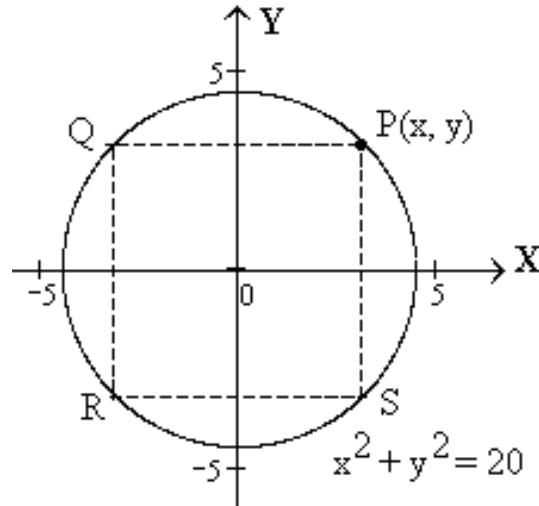
$$\leq 100$$

เพราะฉะนั้น $x^2 y^2$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 100 เมื่อ $x^2 = 10$ และ $y^2 = 10$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ 10 เมื่อ $x = \sqrt{10}$ และ $y = \sqrt{10}$

แบบที่ 2. ใช้ผลของตัวอย่างที่ 4. ซึ่งกล่าวว่า a, b เป็นจำนวนจริงบวก และ $a + b = 20$ จะได้ว่า $ab \leq 100$ เพราะว่า $x^2 y^2 = x^2 (20 - x^2)$ เป็นผลคูณของจำนวน x^2 และ $20 - x^2$ ซึ่งบวกกันมีค่าเท่ากับ 20 เพราะฉะนั้น $x^2 (20 - x^2)$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 100 เมื่อ $x^2 = 10$ เพราะฉะนั้น $x^2 y^2$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 100 เมื่อ $x^2 = 10$ และ $y^2 = 10$ เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ 10 เมื่อ $x = \sqrt{10}$ และ $y = \sqrt{10}$

หมายเหตุ ความหมายทางเรขาคณิตวิเคราะห์



รูปที่ 3

ค่าของ $4xy$ คือค่าของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 = 20$ ดังรูปที่ 3 เพราะฉะนั้น พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS มีค่าสูงสุดเท่ากับ 40 เมื่อ $x = \sqrt{10}$ และ $y = \sqrt{10}$

ตัวอย่างที่ 7. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ $9x^2 + 16y^2 = 144$ จงหาค่าสูงสุดของ xy

แนวคิด แบบที่ 1. ใช้การจัดรูปพีชคณิต

$$\begin{aligned} xy &= x \sqrt{\frac{144 - 9x^2}{16}} \\ x^2 y^2 &= \frac{1}{16} x^2 (144 - 9x^2) \\ &= -\frac{9}{16} (x^4 - 16x^2) \\ &= -\frac{9}{16} (x^4 - 16x^2 + 64) + 36 \\ &= -\frac{9}{16} (x^2 - 8)^2 + 36 \\ &\leq 36 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x^2 y^2$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 36 เมื่อ $x^2 = 8$ และ $y^2 = \frac{9}{2}$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ 6 เมื่อ $x = 2\sqrt{2}$ และ $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

แบบที่ 2. ใช้เหตุผลจากตัวอย่างที่ 2. ที่กล่าวว่า $p > 0, q > 0$ และ $p + q = 1$ จะได้ว่า $pq \leq \frac{1}{4}$

และ $pq = \frac{1}{4}$ ก็ต่อเมื่อ $p = q = \frac{1}{2}$

จากเงื่อนไข $9x^2 + 16y^2 = 144$ เพราะฉะนั้น $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

เพราะฉะนั้น $(\frac{x^2}{16})(\frac{y^2}{9}) \leq \frac{1}{4}$

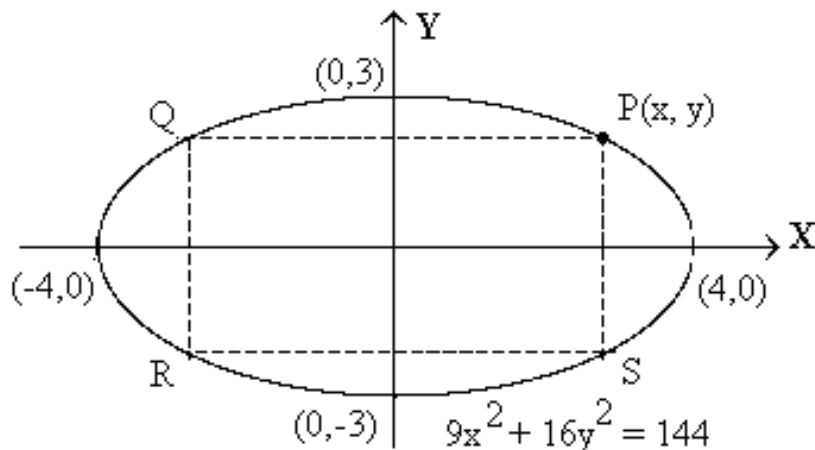
และ $(\frac{x^2}{16})(\frac{y^2}{9}) = \frac{1}{4}$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{x^2}{16} = \frac{y^2}{9} = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $x^2 y^2 \leq 36$

และ $x^2 y^2 = 36$ ก็ต่อเมื่อ $x^2 = 8$ และ $y^2 = \frac{9}{2}$

เพราะฉะนั้น xy มีค่าสูงสุดเท่ากับ 6 เมื่อ $x = 2\sqrt{2}$ และ $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

หมายเหตุ ความหมายทางเรขาคณิตวิเคราะห์



รูปที่ 4

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงรี $9x^2 + 16y^2 = 144$

ค่าของ $4xy$ คือค่าของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS ดังรูปที่ 4

เพราะฉะนั้น พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS มีค่าสูงสุดเท่ากับ 24 เมื่อ $x = 2\sqrt{2}$ และ $y = \frac{3}{\sqrt{2}}$

ตัวอย่างที่ 8. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

แนวคิด แบบที่ 1. ใช้การจัดรูปพีชคณิต

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 \geq 0$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

แบบที่ 2. โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $0 < a \leq b \leq c$

โดยใช้อสมการเชบิเชฟ ซึ่งกล่าวว่า ทุกการเรียงสับเปลี่ยน (x, y, z) ของ (a, b, c) จะได้ว่า

$$ax + by + cz \leq aa + bb + cc$$

$$ax + by + cz \leq a^2 + b^2 + c^2$$

เพราะว่า (b, c, a) เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ (a, b, c)

เพราะฉะนั้น $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ อสมการเชบิเชฟ ได้ที่ บทที่ 8 ข้อ 25.

ตัวอย่างที่ 9. จงแสดงว่า $3 - 4x + x^4 \geq 0$ ทุกจำนวนจริงบวก x

แนวคิด แบบที่ 1. ใช้ calculus

ให้ $f(x) = 3 - 4x + x^4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4 + 4x^3 \\ &= 4(x^3 - 1) \\ &= 4(x - 1)(x^2 + x + 1) \\ &= 4(x - 1)\left(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \\ &= 4(x - 1)\left(\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$

ถ้า $x < 1$ แล้ว $f'(x) < 0$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลด บนช่วง $(0, 1)$

ถ้า $x > 1$ แล้ว $f'(x) > 0$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนช่วง $(1, \infty)$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

เพราะฉะนั้น $f(x) \geq f(1)$ ทุกค่า $x > 0$

เพราะฉะนั้น $3 - 4x + x^4 \geq 0$ ทุกค่า $x > 0$

แบบที่ 2. ใช้สมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต ซึ่งกล่าวว่า

สำหรับจำนวนจริงบวก a, b, c, d จะได้ว่า $\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}$

และ $\frac{a+b+c+d}{4} = \sqrt[4]{abcd}$ ก็ต่อเมื่อ $a = b = c = d$

เพราะฉะนั้น $\frac{1+1+1+x^4}{4} \geq \sqrt[4]{(1)(1)(1)(x^4)}$

$$\frac{3+x^4}{4} \geq x$$

$$3 - 4x + x^4 \geq 0$$

แบบที่ 3. ใช้การจัดรูปพีชคณิต

$$\begin{aligned} x^4 - 4x + 3 &= (x^4 - 2x^2 + 1) + (2x^2 - 4x + 2) \\ &= (x^2 - 1)^2 + 2(x - 1)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

จากตัวอย่างต่าง ๆ ที่กล่าวมาทั้งหมด จะเห็นได้ชัดเจนว่า การพิสูจน์ อสมการมีได้หลายวิธี โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ตัวอย่างที่ 9. จะเห็นได้ว่าวิธีที่ดีที่สุดกลับมาเป็นการใช้พื้นฐานคือการจัดรูปพีชคณิตด้วยการบวกเข้าและ ลบออก อย่างไรก็ตามการที่เราสมบัติของจำนวนจริง ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอสมการ ก็จะทำให้เราแก้ปัญหาต่าง ๆ เกี่ยวกับ สมการ อสมการ และสมการพหุนามได้ง่ายขึ้น

การพิสูจน์อสมการและปัญหาเกี่ยวกับพหุนาม จะได้ศึกษาในรูปแบบของการแก้ปัญหาจากง่ายไปสู่ยากในบทต่อไป

เทคนิคการแก้สมการ

การหาผลเฉลยของสมการเป็นปัญหาสำคัญของการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ในบทที่ 1 นี้จึงรวบรวมแนวคิด และเทคนิคต่าง ๆ ในการหาผลเฉลยเช่น

1. การหาผลเฉลย หรือรากของสมการที่อยู่ในพจน์ของรากที่ n หรือรากที่ 2 เมื่อทำการยกกำลังสอง สมการของโจทย์แล้วจะทำให้หาผลเฉลยได้ง่าย แต่ผลเฉลยที่ได้จากสมการใหม่ต้องนำมาตรวจสอบกับสมการเดิมก่อนเพื่อตรวจสอบหาผลเฉลยที่แท้จริง

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6$

แนวคิด
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+6} = 6 \quad \dots (1)$$

$$\sqrt{2x+6} = 6 - \sqrt{x-1}$$

$$2x + 6 = 36 - 12\sqrt{x-1} + (x - 1) \quad \dots (2)$$

$$12\sqrt{x-1} = 29 - x$$

$$144(x - 1) = 841 - 58x + x^2$$

$$x^2 - 202x + 985 = 0$$

$$(x - 5)(x - 197) = 0$$

$$x = 5, 197$$

เพราะว่า $x = 5, 197$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2) ที่เกิดจากการยกกำลังสองของสมการ (1)

เพราะฉะนั้นต้องทำการตรวจสอบค่ากับสมการ (1)

เพราะว่า $\sqrt{197-1} + \sqrt{2(197)+6} \neq 6$ และ $\sqrt{5-1} + \sqrt{2(5)+6} = 6$ เพราะฉะนั้น $x = 5$ เท่านั้นเป็นผลเฉลย

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{x-1}$

แนวคิด
$$\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{x-1} \quad \dots (1)$$

$$-\sqrt{2x-3} = \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$$

$$2x - 3 = (x - 1) - 2\sqrt{x-1}\sqrt{x+2} + (x + 2) \quad \dots (2)$$

$$2\sqrt{x-1}\sqrt{x+2} = 4$$

$$(x-1)(x+2) = 4$$

$$x^2 + x - 2 = 4$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x = 2, -3$$

เพราะว่า $x = 2, -3$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2) ที่เกิดจากการยกกำลังสองของสมการ (1)

เพราะฉะนั้นต้องทำการตรวจสอบค่ากับสมการ (1)

$$\text{เพราะว่า } \sqrt{2+2} - \sqrt{2(2)-3} = \sqrt{2-1} \text{ และ } \sqrt{-3+2} - \sqrt{2(-3)-3} \neq \sqrt{-3-1}$$

เพราะฉะนั้น $x = 2$ เท่านั้นที่เป็นผลเฉลยที่ต้องการ

2. เทคนิคเฉพาะสำหรับสมการในรูปแบบ

$$F(x) + G(x) = H(x) \quad \dots (1)$$

ให้นำ $F(x) - G(x)$ คูณสมการ (1) แล้วจัดรูปให้ได้สมการ

$$F(x) - G(x) = L(x) \quad \dots (2)$$

นำสมการ (1) และ (2) มาบวก หรือ ลบ กันเพื่อลดพจน์ของ $F(x)$ หรือ $G(x)$ ออกจากสมการ แล้วจึงหาผลเฉลยจากสมการที่ได้มาใหม่

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x$

แนวคิด ให้ $F(x) = \sqrt{2x^2+3x+5}$

$$G(x) = \sqrt{2x^2-3x+5}$$

เพราะฉะนั้น $F(x) + G(x) = 3x \quad \dots (1)$

$$\begin{aligned} (F(x) + G(x))(F(x) - G(x)) &= (\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5})(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5}) \\ &= (2x^2 + 3x + 5) - (2x^2 - 3x + 5) \\ &= 6x \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (1) จะได้

$$6x = 3x(F(x) - G(x))$$

$$6x = 3x(\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5})$$

จากโจทย์ $x \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{2x^2+3x+5} - \sqrt{2x^2-3x+5} = 2$

$$F(x) - G(x) = 2 \quad \dots (2)$$

(1) + (2) จะได้ว่า

$$2F(x) = 3x + 2$$

$$2\sqrt{2x^2+3x+5} = 3x + 2$$

$$4(2x^2 + 3x + 5) = 9x^2 + 12x + 4$$

$$x^2 - 16 = 0$$

$$x = 4, -4$$

ตรวจสอบโดยการแทนค่าในโจทย์จะได้ว่า $x = 4$ เท่านั้นที่เป็นคำตอบ

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt{2x^2+5x-2} - \sqrt{2x^2+5x-9} = 1$

แนวคิด ให้ $F(x) = \sqrt{2x^2+5x-2}$

$$G(x) = \sqrt{2x^2+5x-9}$$

เพราะฉะนั้น $F(x) - G(x) = 1$... (1)

$$(F(x) - G(x))(F(x) + G(x)) = (1)(F(x) + G(x))$$

$$(F(x))^2 - (G(x))^2 = F(x) + G(x)$$

$$(2x^2 + 5x - 2) - (2x^2 + 5x - 9) = F(x) + G(x)$$

$$7 = F(x) + G(x)$$

$$F(x) + G(x) = 7 \quad \dots (2)$$

(1) + (2) จะได้ $2F(x) = 8$

$$2\sqrt{2x^2+5x-2} = 8$$

$$2x^2 + 5x - 2 = 16$$

$$2x^2 + 5x - 18 = 0$$

$$(2x + 9)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{9}{2}, 2$$

ตรวจสอบกับสมการของโจทย์แล้ว $x = -\frac{9}{2}$ และ $x = 2$ ใช้ได้

3. ใช้การเปลี่ยนตัวแปร โดยเลือกบางส่วนของสูตรที่เหมาะสมของสมการโจทย์มาเป็นตัวแปรใหม่ แล้วหาค่าของตัวแปรใหม่ก่อน ต่อไปจึงนำค่าของตัวแปรใหม่ที่ได้มาช่วยในการหาผลเฉลยของตัวแปรในสมการโจทย์ตามต้องการ

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt{x-\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+\sqrt{x-2}} = 3$

แนวคิด เลือกแทนค่าพจน์ $\sqrt{x-2}$ ด้วยตัวแปร t จะทำให้โครงสร้างของสมการง่ายขึ้น

แทนค่า $t = \sqrt{x-2}$ เพราะฉะนั้น $t^2 = x - 2$ และ $x = t^2 + 2$

จากสมการ $\sqrt{x-\sqrt{x-2}} + \sqrt{x+\sqrt{x-2}} = 3$

จะได้ $\sqrt{t^2+2-t} + \sqrt{t^2+2+t} = 3$

$$\sqrt{t^2-t+2} + \sqrt{t^2+t+2} = 3 \quad \dots (1)$$

$$(\sqrt{t^2-t+2} + \sqrt{t^2+t+2})(\sqrt{t^2-t+2} - \sqrt{t^2+t+2}) = 3(\sqrt{t^2-t+2} - \sqrt{t^2+t+2})$$

$$(t^2 - t + 2) - (t^2 + t + 2) = 3(\sqrt{t^2-t+2} - \sqrt{t^2+t+2})$$

$$-2t = 3(\sqrt{t^2-t+2} - \sqrt{t^2+t+2})$$

$$3(\sqrt{t^2-t+2} - \sqrt{t^2+t+2}) = -2t \quad \dots (2)$$

จาก (1) จะได้ $3(\sqrt{t^2-t+2} + \sqrt{t^2+t+2}) = 9 \quad \dots (3)$

(2) + (3) ;

$$6\sqrt{t^2 - t + 2} = 9 - 2t$$

$$36(t^2 - t + 2) = 81 - 36t + 4t^2$$

$$32t^2 - 9 = 0$$

$$t^2 = \frac{9}{32}$$

$$x = t^2 + 2 = \frac{9}{32} + 2 = \frac{73}{32}$$

ตรวจสอบคำตอบ โดยการแทนค่าในโจทย์จะได้ว่า $x = \frac{73}{32}$ เป็นคำตอบที่ใช้ได้

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4$

แนวคิด แทนค่า $t = \sqrt{\frac{3-x}{2+x}}$ ในสมการ $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4$

จะได้ $t + \frac{3}{t} = 4$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t - 3)(t - 1) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$t = 1, 3$$

กรณีที่ 1.

$$\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 1$$

$$3 - x = 2 + x$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

กรณีที่ 2.

$$\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} = 3$$

$$3 - x = 9(2 + x)$$

$$10x = -15$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

แทนค่า $x = \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ ในสมการโจทย์ แล้ว $x = \frac{1}{2}$ และ $x = -\frac{3}{2}$ ใช้ได้

4. สมการในรูปแบบผลบวก หรือ ผลต่าง ของรากที่ 3 รากที่ 4 รากที่ 5 ควรนำสูตรผลบวกหรือผลต่าง มาช่วย ในการแยกตัวประกอบเพื่อให้โครงสร้างของสมการสามารถหาผลเฉลยได้ง่าย

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = 1$

แนวคิด $1^3 = (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1})^3$

$$1 = (2x - 1) + 3(\sqrt[3]{2x-1})^2 \sqrt[3]{x-1} + 3\sqrt[3]{2x-1} (\sqrt[3]{x-1})^2 + (x - 1)$$

$$= 3x - 2 + 3\sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{x-1} (\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1})$$

$$3 - 3x = 3\sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{x-1}$$

$$1 - x = \sqrt[3]{2x-1} \sqrt[3]{x-1}$$

$$(1 - x)^3 = (2x - 1)(x - 1)$$

$$(2x - 1)(x - 1) + (x - 1)^3 = 0$$

$$(x - 1)((2x - 1) + (x - 1)^2) = 0$$

$$(x - 1)(2x - 1 + x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$(x - 1)x^2 = 0$$

$$x = 1, 0$$

ตรวจสอบด้วยการแทนค่าในโจทย์ คำตอบที่ใช้ได้คือ $x = 1$ เท่านั้น

หมายเหตุ สูตรผลบวกที่สำคัญเช่น

1. เพราะว่า $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

เพราะฉะนั้น $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv$

2. เพราะว่า $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

$$= u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$$

เพราะฉะนั้น $u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3uv(u + v)$

3. เพราะว่า $(u + v)^4 = u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4$

$$= u^4 + v^4 + 4uv(u^2 + v^2) + 6u^2v^2$$

$$u^4 + v^4 = (u + v)^4 - 4uv(u^2 + v^2) - 6u^2v^2$$

4. เพราะว่า $(u + v)^5 = u^5 + 5u^4v + 10u^3v^2 + 10u^2v^3 + 5uv^4 + v^5$

$$= u^5 + v^5 + 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2v^2(u + v)$$

$$= u^5 + v^5 + 5uv((u + v)^3 - 3uv(u + v)) + 10u^2v^2(u + v)$$

$$= u^5 + v^5 + 5uv(u + v)^3 - 5u^2v^2(u + v)$$

เพราะฉะนั้น $u^5 + v^5 = (u + v)^5 - 5uv(u + v)^3 + 5u^2v^2(u + v)$

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$

แนวคิด $5^3 = (\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x})^3$

$$125 = (x + 7) + 3(\sqrt[3]{x+7})^2 \sqrt[3]{28-x} + 3\sqrt[3]{x+7} (\sqrt[3]{28-x})^2 + (28 - x)$$

$$= 35 + 3\sqrt[3]{x+7} \sqrt[3]{28-x} (\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x})$$

$$= 35 + 3\sqrt[3]{x+7} \sqrt[3]{28-x} (5)$$

$$15\sqrt[3]{x+7} \sqrt[3]{28-x} = 90$$

$$\sqrt[3]{7+x} \sqrt[3]{28-x} = 6$$

$$(7 + x)(28 - x) = 216$$

$$196 + 21x - x^2 = 216$$

$$x^2 - 21x + 20 = 0$$

$$(x - 20)(x - 1) = 0$$

$$x = 1, 20$$

ตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่าในสมการ $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$ จะได้ว่า $x = 1, 20$ ใช้ได้

เพราะฉะนั้น $x = 1, 20$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{28-x} = 5$

5. ใช้การเปลี่ยนตัวแปร 2 ตัวแปรเพื่อช่วยในการหาผลเฉลยของสมการ โดยเลือกให้ พจน์บางพจน์ในสมการมีค่าเป็น u, v แล้ว หาผลเฉลยในพจน์ของ u, v ต่อไปจึงนำผลเฉลยของ u, v ที่ได้ไปช่วยในการหาผลเฉลยของสมการเดิม

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$

แนวคิด ให้ $u = \sqrt[3]{1+\sqrt{x}}$ และ $v = \sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$

เพราะว่า $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2$ เพราะฉะนั้น $u + v = 2$

เพราะว่า $u^3 + v^3 = 1 + \sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} = 2$

เพราะฉะนั้น $2 = u^3 + v^3 = (u + v)^3 - 3uv(u + v) = 2^3 - 3uv(2) = 8 - 6uv$

เพราะฉะนั้น $uv = 1$

เพราะฉะนั้น $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 1$

$$1 - x = 1$$

$$x = 0$$

ตัวอย่างที่ 1.10 จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt[5]{1+2x} + \sqrt[5]{1-2x} = \sqrt[5]{2}$

แนวคิด ให้ $u = \sqrt[5]{1+2x}$ และ $v = \sqrt[5]{1-2x}$

เพราะฉะนั้น $u^5 + v^5 = 1 + 2x + 1 - 2x = 2$

เพราะว่า $\sqrt[5]{1+2x} + \sqrt[5]{1-2x} = \sqrt[5]{2}$ เพราะฉะนั้น $u + v = \sqrt[5]{2}$

เพราะว่า $u^5 + v^5 = (u + v)^5 - 5(u + v)^3 uv + 5(u + v) u^2 v^2$

เพราะฉะนั้น $2 = (\sqrt[5]{2})^5 - 5(\sqrt[5]{2})^3 uv + 5\sqrt[5]{2} u^2 v^2$

$$-5\sqrt[5]{4} uv + u^2 v^2 = 0$$

$$uv(uv - \sqrt[5]{4}) = 0$$

กรณีที่ 1. $u = 0$ จะได้ $\sqrt[5]{1+2x} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = -\frac{1}{2}$

กรณีที่ 2. $v = 0$ จะได้ $\sqrt[5]{1-2x} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{2}$

กรณีที่ 3. $uv = \sqrt[5]{4}$ จะได้ $\sqrt[5]{1+2x} \sqrt[5]{1-2x} = \sqrt[5]{4}$

$$(1 + 2x)(1 - 2x) = 4$$

$$1 - 4x^2 = 4$$

$$4x^2 = -3 \text{ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง}$$

แทนค่า $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ในสมการ $\sqrt[5]{1+2x} + \sqrt[5]{1-2x} = \sqrt[5]{2}$ แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt[5]{1+2x} + \sqrt[5]{1-2x} = \sqrt[5]{2}$ คือ $x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

โจทย์เสริมประสบการณ์การแก้สมการ

จงหาผลเฉลยของสมการ

$$1. \quad x^2 + \sqrt{x^2 + 20} = 22$$

$$2. \quad \sqrt{x^2 + 7} = 2x + 2$$

$$3. \quad 3.1 \quad \sqrt{4-x} = \sqrt{x-6}$$

$$3.2 \quad \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+3} = 0$$

4. จงหาผลเฉลยของสมการ

$$4.1 \quad \sqrt{x-6} + \sqrt{3-x} = 4x - 3x^2 + 1$$

$$4.2 \quad \sqrt{4x+7} + \sqrt{3-4x+x^2} + 2 = 0$$

$$4.3 \quad \sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 2$$

$$5. \quad \sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$$

$$6. \quad 1 + \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x$$

$$7. \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$$

$$8. \quad \sqrt{x^3 + x^2 - 1} + \sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 3$$

$$9. \quad \sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} - \sqrt{9x+7} + \sqrt{x-2} = 0$$

$$10. \quad \sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$$

$$11. \quad \sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} - \sqrt{8x} - \sqrt{2x+3} = 0$$

$$12. \quad \sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$$

$$13. \quad x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2 + 2x} = 3$$

$$14. \quad \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$$

$$15. \quad \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$$

$$16. \quad x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$$

$$17. \quad 2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3(x + 4)$$

$$18. \quad \sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6$$

$$19. \quad 3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$$

$$20. \quad \frac{x\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[3]{x+1}} = 4$$

$$21. \quad \sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5$$

$$22. \quad \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$$

$$23. \sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$$

$$24. \sqrt{x^2+x+7} + \sqrt{x^2+x+2} = \sqrt{3x^2+3x+19}$$

$$25. \sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4$$

$$26. \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x$$

$$27. x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$$

$$28. \sqrt{2x-4} - \sqrt{3x-11} = \sqrt{x-3}$$

$$29. \sqrt[4]{11x+3} - \sqrt[4]{2-x} - \sqrt[4]{9x+7} + \sqrt[4]{x-2} = 0$$

$$30. \sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$$

$$31. \sqrt{6-x} + 2\sqrt{(6-x)(x-2)} + \sqrt{x-2} = 2$$

$$32. \sqrt{5x+1} - \sqrt{6x-2} - \sqrt{x+6} + \sqrt{2x+3} = 0$$

$$33. \sqrt{31+x-x^2} = 5 - x$$

$$34. \sqrt[4]{2x-2} + \sqrt[4]{6-2x} = \sqrt{2}$$

$$35. \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$$

$$36. \sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$$

37. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$x_1 + x_2 = 3$$

$$x_1^5 + x_2^5 = 33$$

$$38. \sqrt[5]{32-x} + \sqrt[5]{1+x} = 3$$

$$39. \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12} \text{ และ } x > 0$$

$$40. \frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

$$41. \sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$$

$$42. \sqrt{\frac{2x}{x+1}} - \sqrt{\frac{2(x+1)}{x}} = 1$$

$$43. 4(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = x$$

$$44. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$$

$$45. \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$$

$$46. \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$$

47. จงหาค่า a ที่ทำให้สมการ $\sqrt{x^2+a} = a-x$ มีผลเฉลย

48. จงหาผลเฉลยของสมการ $x^2 - \sqrt{a-x} = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

49. จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt{x^2 + a^2} = x + a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
50. จงหาผลเฉลยของสมการ $1 + \sqrt{x} = \sqrt{x-a}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
51. จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt{x-a} = a\sqrt{x}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
52. จงหาผลเฉลยของสมการ $\sqrt{(x+a)^2 + 4a} + a = x$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง
53. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{y^3} &= 35 \\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[5]{y} &= 5 \end{aligned}$$

54. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} &= 4 \\ xy &= 27 \end{aligned}$$

55. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + 2\sqrt{y} &= 9 \\ x - 4y &= 9 \end{aligned}$$

56. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} &= \frac{5}{2} \\ x + y &= 10 \end{aligned}$$

57. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 4xy - 3y^2} &= x + 1 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

58. จงหาค่าของ $\binom{2n}{0} - \binom{2n}{2} + \binom{2n}{4} - \binom{2n}{6} + \dots + (-1)^n \binom{2n}{2n}$

และ $\binom{2n}{1} - \binom{2n}{3} + \binom{2n}{5} - \dots + (-1)^n \binom{2n}{2n-1}$

ข้อตกลง การเขียนพจน์ของผลบวกหรือผลต่าง $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$

หมายถึง การบวกหรือการลบจนถึงพจน์สุดท้ายของค่า $k = 0, 2, 4, \dots$ จนถึงค่า k มากสุดที่มีค่าไม่เกิน n

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$$

หมายถึง การบวกหรือการลบจนถึงพจน์สุดท้ายของค่า $k = 1, 3, 5, \dots$ จนถึงค่า k มากสุดที่มีค่าไม่เกิน n ในทำนองเดียวกัน

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{k} + \dots, \quad k = 0, 2, 4, \dots$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{k} + \dots, \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots + \binom{n}{k} + \dots, \quad k = 0, 4, 8, \dots$$

หมายถึง การบวกหรือการลบจนถึงเทอมสุดท้ายของ $\binom{n}{k}$ โดยที่ k เป็นค่ามากที่สุดที่มีค่าไม่เกิน n

59. จงหาค่าของ $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$

และ $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$

60. จงหาค่าของ $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \dots$

และ $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \binom{n}{13} + \dots$

$\binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \binom{n}{14} + \dots$

$\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \binom{n}{15} + \dots$

61. จงหาสูตรของ $\sin nx$ และ $\cos nx$ ในพจน์ของ $\sin x$ และ $\cos x$

62. จงหาสูตรของ $\tan 3x$, $\tan 4x$, $\tan 5x$ และ $\tan 6x$ ในพจน์ของ $\tan x$

63. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n > 1$

จงแสดงว่า $\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \sin \frac{3\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

64. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

จงหาค่าของ $\sin y + \sin(y+x) + \sin(y+2x) + \dots + \sin(y+nx)$

และ $\cos y + \cos(y+x) + \cos(y+2x) + \dots + \cos(y+nx)$

65. จงหาค่าของ $\binom{n}{0} - 3\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{4} - 3^3\binom{n}{6} + \dots + (-1)^k 3^k \binom{n}{2k}$

เมื่อ $2k$ เป็นค่าที่มากที่สุด ที่ทำให้ $2k \leq n$

66. จงหาค่าของ $\binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \binom{n}{11} + \dots$

67. จงหาค่าของ $\binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \binom{n}{10} + \dots$

68. จงหาค่าของ $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \dots$

69. จงหาค่าของ $\binom{n}{0} + \binom{n}{6} + \binom{n}{12} + \binom{n}{18} + \dots$

เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การแก้สมการ

1. แนวคิด $x^2 + \sqrt{x^2 + 20} = 22$
 ให้ $k = x^2$ จะได้ว่า $k + \sqrt{k+20} = 22$
 $\sqrt{k+20} = 22 - k$
 $k + 20 = 484 - 44k + k^2$
 $k^2 - 45k + 464 = 0$
 $(k - 16)(k - 29) = 0$

เพราะว่า $k \geq 0$ เพราะฉะนั้น $k = 16, 29$ เพราะฉะนั้น $x^2 = 16, 29$

เพราะว่า $29 + \sqrt{29+20} \neq 22$ และ $16 + \sqrt{16+20} = 22$

เพราะฉะนั้น $x^2 = 16, x = \pm 4$

2. แนวคิด $\sqrt{x^2+7} = 2x + 2$
 $x^2 + 7 = 4x^2 + 8x + 4$
 $3x^2 + 8x - 3 = 0$
 $(3x - 1)(x + 3) = 0$
 $x = \frac{1}{3}, -3$

เพราะว่า $\sqrt{(-3)^2+7} \neq 2(-3) + 2$ และ $\sqrt{(\frac{1}{3})^2+7} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3} = 2(\frac{1}{3}) + 2$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{3}$

3. แนวคิด 3.1 $\sqrt{4-x} = \sqrt{x-6}$

เพราะว่า $\{x \mid 4 - x \geq 0\} = (-\infty, 4]$ และ $\{x \mid x - 6 \geq 0\} = [6, \infty)$

เพราะฉะนั้นไม่มี x ที่ทำให้ $\sqrt{4-x} = \sqrt{x-6}$

3.2 $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+3} = 0$

เพราะว่า $\sqrt{2x+3} \geq 0$ และ $\sqrt{x+3} \geq 0$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+3} = 0$ เมื่อ $2x + 3 = 0$ และ $x + 3 = 0$

เพราะฉะนั้น $x = -\frac{3}{2}$ และ $x = -3$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นไม่มี x ที่ทำให้ $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+3} = 0$

4. แนวคิด 4.1 $\sqrt{x-6} + \sqrt{3-x} = 4x - 3x^2 + 1$

เพราะว่าโดเมนของ $\sqrt{x-6}$ คือ $[6, \infty)$ และโดเมนของ $\sqrt{3-x}$ คือ $(-\infty, 3]$

เพราะฉะนั้นไม่มี x ที่ทำให้ $\sqrt{x-6} + \sqrt{3-x} = 4x - 3x^2 + 1$

4.2 $\sqrt{4x+7} + \sqrt{3-4x+x^2} + 2 = 0$

เพราะว่า $\sqrt{4x+7} \geq 0$ และ $\sqrt{3-4x+x^2} \geq 0$

เพราะฉะนั้นไม่มี x ที่ทำให้ $\sqrt{4x+7} + \sqrt{3-4x+x^2} + 2 = 0$

$$4.3 \quad \sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 2$$

เพราะว่าโดเมน $\sqrt{x}$ คือ $[0, \infty)$

เมื่อ $x \geq 0$ จะได้ $\sqrt{x+9} \geq 3$ เพราะฉะนั้นไม่มี x ที่ทำให้ $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 2$

5. แนวคิด

$$\sqrt{2-x} + \frac{4}{\sqrt{2-x}+3} = 2$$

ให้ $k = \sqrt{2-x}$

$$k + \frac{4}{k+3} = 2$$

$$k^2 + 3k + 4 = 2k + 6$$

$$k^2 + k - 2 = 0$$

$$(k+2)(k-1) = 0$$

เพราะว่า $k \geq 0$ เพราะฉะนั้น

$$k = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{2-x} = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$x = 1$$

6. แนวคิด

$$1 + \sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x$$

$$\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$$

$$1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1$$

$$\sqrt{x^4 - x^2} = 2x - x^2$$

$$x^4 - x^2 = 4x^2 - 4x^3 + x^4$$

$$4x^3 - 5x^2 = 0$$

$$x^2(4x - 5) = 0$$

$$x = 0, \frac{5}{4}$$

โดยการแทนค่าในสมการโจทย์จะได้ $x = \frac{5}{4}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

7. แนวคิด

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$$

$$\sqrt{3x+12} - \sqrt{x+1} = \sqrt{4x+13}$$

$$(3x+12) + 2\sqrt{3x+12}\sqrt{x+1} + (x+1) = 4x+13$$

$$2\sqrt{3x+12}\sqrt{x+1} = 0$$

$$x = -4 \text{ หรือ } -1$$

โดยการตรวจสอบคำตอบกับ $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$ ค่าของ x ที่ใช้ได้คือ $x = -1$

8. แนวคิด

$$\sqrt{x^3+x^2-1} + \sqrt{x^3+x^2+2} = 3$$

... (1)

$$(\sqrt{x^3+x^2-1} + \sqrt{x^3+x^2+2})(\sqrt{x^3+x^2-1} - \sqrt{x^3+x^2+2})$$

$$= 3(\sqrt{x^3+x^2-1} - \sqrt{x^3+x^2+2})$$

$$(x^3 + x^2 - 1) - (x^3 + x^2 + 2) = 3(\sqrt{x^3+x^2-1} - \sqrt{x^3+x^2+2})$$

$$\sqrt{x^3 + x^2 - 1} - \sqrt{x^3 + x^2 + 2} = 1 \quad \dots (2)$$

(1) + (2) จะได้

$$2\sqrt{x^3 + x^2 - 1} = 2$$

$$x^3 + x^2 - 1 = 1$$

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$$

เพราะว่า $x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $x = 1$

ตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่าในสมการของโจทย์แล้ว $x = 1$ ใช้ได้

9. แนวคิด $\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} - \sqrt{9x+7} + \sqrt{x-2} = 0$

เพราะว่าโดเมนของ $\sqrt{2-x}$ คือ $(-\infty, 2]$ และโดเมนของ $\sqrt{x-2}$ คือ $[2, \infty)$

เพราะฉะนั้นพิจารณาเฉพาะ $x = 2$

เพราะว่า $\sqrt{11(2)+3} - \sqrt{2-2} - \sqrt{9(2)+7} + \sqrt{2-2} = \sqrt{25} - \sqrt{25} = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 2$ เป็นผลเฉลยของสมการ

10. แนวคิด แบบที่ 1. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$

$$(x + 5) - 2\sqrt{x+5}\sqrt{x} + x = 1$$

$$\sqrt{(x+5)x} = 2 + x$$

$$x(x + 5) = 4 + 4x + x^2$$

$$x^2 + 5x = 4 + 4x + x^2$$

$$x = 4$$

เพราะว่า $\sqrt{4+5} - \sqrt{4} = 1$ เพราะฉะนั้น $x = 4$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$

แบบที่ 2. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x} = 1$

$$\sqrt{x+5} = 1 + \sqrt{x}$$

$$x + 5 = 1 + 2\sqrt{x} + x$$

$$\sqrt{x} = 2$$

เพราะฉะนั้น

$$x = 4$$

11. แนวคิด $\sqrt{6x+1} + \sqrt{4x+2} = \sqrt{8x} + \sqrt{2x+3}$

$$(6x + 1) + 2\sqrt{6x+1}\sqrt{4x+2} + (4x + 2) = 8x + 2\sqrt{8x}\sqrt{2x+3} + (2x + 3)$$

$$\sqrt{6x+1}\sqrt{4x+2} = \sqrt{8x}\sqrt{2x+3}$$

$$24x^2 + 16x + 2 = 16x^2 + 24x$$

$$8x^2 - 8x + 2 = 0$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{2}$ ตรวจสอบกับสมการเริ่มต้นแล้ว $x = \frac{1}{2}$ ใช้ได้

12. แนวคิด จากโจทย์ $\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$... (1)

คูณตลอดด้วย $\sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1}$ จะได้

$$\begin{aligned} (\sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1})(\sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1}) \\ = \sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1} \\ (3x^2 + 5x + 8) - (3x^2 + 5x + 1) = \sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1} \\ \sqrt{3x^2+5x+8} + \sqrt{3x^2+5x+1} = 7 \end{aligned} \quad \dots (2)$$

(1) + (2) ; $2\sqrt{3x^2+5x+8} = 8$

$$3x^2 + 5x + 8 = 16$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$(3x + 8)(x - 1) = 0$$

$$x = -\frac{8}{3}, 1$$

เพราะว่า $\sqrt{3(1)+5(1)+8} - \sqrt{3(1)+5(1)+1} = 1$ และ $\sqrt{3(\frac{64}{9})+5(-\frac{8}{3})+8} - \sqrt{3(\frac{64}{9})+5(-\frac{8}{3})+1} = 1$

เพราะฉะนั้น $x = 1, -\frac{8}{3}$ เป็นผลเฉลยที่ต้องการ

13. แนวคิด จากโจทย์ $x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+2x} = 3$... (1)

จากโจทย์จะได้ $x \geq 0$ แทนค่า $t = \sqrt{x} + \sqrt{x+2}$... (2)

จะได้ $t^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{x+2} + (x+2) = 2x + 2 + 2\sqrt{x^2+2x}$ เพราะฉะนั้น $t > 0$

เพราะฉะนั้น
$$x + 1 + \sqrt{x^2+2x} = \frac{t^2}{2}$$

$$x + \sqrt{x^2+2x} = \frac{t^2}{2} - 1 \quad \dots (3)$$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $\frac{t^2}{2} - 1 + t = 3$

$$t^2 - 2 + 2t = 6$$

$$t^2 + 2t - 8 = 0$$

$$(t + 4)(t - 2) = 0$$

เพราะว่า $t > 0$ เพราะฉะนั้น $t = 2$

จาก (1) จะได้ว่า $\sqrt{x} + \sqrt{x+2} = 2$

$$\sqrt{x+2} = 2 - \sqrt{x}$$

$$x + 2 = 4 - 4\sqrt{x} + x$$

$$4\sqrt{x} = 2$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

14. แนวคิด จากโจทย์ $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$

แทนค่า $t = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} > 0$ จะได้ $t - \frac{2}{t} = 1$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t - 2)(t + 1) = 0$$

เพราะว่า $t > 0$ เพราะฉะนั้น $t = 2$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2$$

$$2x + 1 = 4x - 4$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

ตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่าในสมการ $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$ แล้ว $x = \frac{5}{2}$ ใช้ได้

15. แนวคิด จากโจทย์ $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{3}{2}$

แทนค่า $t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} > 0$ จะได้ $t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}$

$$2t^2 - 2 = 3t$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$(2t + 1)(t - 2) = 0$$

เพราะว่า $t > 0$ เพราะฉะนั้น $t = 2$

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 2$$

$$x + 1 = 4x - 4$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

ตรวจสอบคำตอบแล้วพบว่า $x = \frac{5}{3}$ ใช้ได้

16. แนวคิด จากสมการโจทย์ $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$

แทนค่า $t = x^2 - 4x + 6$

... (1)

เพราะว่า $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$

เพราะฉะนั้น $t = \sqrt{2t}$

$$t^2 = 2t$$

$$t^2 - 2t = 0$$

$$t(t - 2) = 0$$

เพราะว่า $t = x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2 > 0$ เพราะฉะนั้น $t = 2$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (1) จะได้

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 6 &= 2 \\x^2 - 4x + 4 &= 0 \\(x - 2)^2 &= 0 \\x &= 2\end{aligned}$$

แทนค่ากับสมการ $x^2 - 4x + 6 = \sqrt{2x^2 - 8x + 12}$ แล้ว $x = 2$ ใช้ได้

17. แนวคิด จากสมการโจทย์จะได้ $2x^2 - 3x - 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 0$... (1)

แทนค่า $t = \sqrt{2x^2 - 3x + 2}$ เพราะฉะนั้น $t^2 = 2x^2 - 3x + 2$... (2)

และ $2x^2 - 3x = t^2 - 2$

เพราะฉะนั้น จาก (1) $t^2 - 2 - 6 - 2t = 0$

$$t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(t - 4)(t + 2) = 0$$

เพราะว่า $t \geq 0$ เพราะฉะนั้น $t = 4$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (2) จะได้ $\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 4$

$$2x^2 - 3x + 2 = 16$$

$$2x^2 - 3x - 14 = 0$$

$$(2x - 7)(x + 2) = 0$$

$$x = \frac{7}{2}, -2$$

แทนค่า $x = \frac{7}{2}, -2$ ในสมการ $2x^2 + 6 - 2\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = 3(x + 4)$ พบว่าใช้ได้ทั้ง 2 ค่า

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการคือ $x = \frac{7}{2}, -2$

18. แนวคิด จากสมการโจทย์ $\sqrt{x^3 + 8} + \sqrt[4]{x^3 + 8} = 6$

แทนค่า $t = \sqrt[4]{x^3 + 8}$... (1)

$$t^2 = \sqrt{x^3 + 8}$$

เพราะฉะนั้น $t^2 + t = 6$

$$t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t + 3)(t - 2) = 0$$

เพราะว่า $t \geq 0$ เพราะฉะนั้น $t = 2$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $2 = \sqrt[4]{x^3 + 8}$

$$16 = x^3 + 8$$

$$x^3 = 8$$

$$x = 2$$

เพราะว่า $\sqrt{8+8} + \sqrt[4]{8+8} = 4 + 2 = 6$ เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการคือ $x = 2$

19. แนวคิด จากสมการโจทย $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$... (1)

แทนค่า $t = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$... (2)

$$t^2 = x^2 + 5x + 1$$

$$x^2 + 5x = t^2 - 1$$

$$3x^2 + 15x = 3t^2 - 3$$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (1) จะได้

$$3t^2 - 3 + 2t = 2$$

$$3t^2 + 2t - 5 = 0$$

$$(3t + 5)(t - 1) = 0$$

เพราะว่า $t \geq 0$ เพราะฉะนั้น $t = 1$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (2) จะได้

$$1 = \sqrt{x^2 + 5x + 1}$$

$$1 = x^2 + 5x + 1$$

$$x(x + 5) = 0$$

$$x = 0, -5$$

ตรวจสอบโดยการแทนค่าในสมการ $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$ แล้ว $x = 0, -5$ ใช้ได้

20. แนวคิด จากสมการโจทย $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1} = 4$

แทนค่า $t = \sqrt[3]{x}$ เพราะฉะนั้น $t^3 = x$

เพราะฉะนั้น $\frac{t^4-1}{t^2-1} - \frac{t^2-1}{t+1} = 4$

$$(t^2 + 1) - (t - 1) = 4$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t - 2)(t + 1) = 0$$

$$t = 2, -1$$

เพราะว่า $t = \sqrt[3]{x}$ เพราะฉะนั้น $x = 8, -1$

เพราะว่า $\sqrt[3]{x} + 1 = 0$ เมื่อ $x = -1$ เพราะฉะนั้น $x = -1$ ไม่เป็นผลเฉลย

เพราะว่า $\frac{(8)\sqrt[3]{8}-1}{\sqrt[3]{64}-1} - \frac{\sqrt[3]{64}-1}{\sqrt[3]{8}+1} = \frac{16-1}{4-1} - \frac{4-1}{2+1} = \frac{15}{3} - 1 = 4$

เพราะฉะนั้น $x = 8$ เป็นผลเฉลย

21. แนวคิด แบบที่ 1. $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5$

แทนค่า $t = \sqrt{x-1} \geq 0$ เพราะฉะนั้น $t^2 = x - 1$

เพราะฉะนั้น $x + 3 = t^2 + 4$ และ $x + 8 = t^2 + 9$ และ $\sqrt{t^2+4+4t} + \sqrt{t^2+9-6t} = 5$

$$\sqrt{(t+2)^2} + \sqrt{(t-3)^2} = 5$$

$$t + 2 + |t - 3| = 5$$

กรณีที่ 1. $t > 3$ เพราะฉะนั้น $|t - 3| = t - 3$

$$t + 2 + t - 3 = 5$$

$$t = 3$$

$$\sqrt{x-1} = 3$$

$$x = 10$$

กรณีที่ 2. $0 \leq t \leq 3$ เพราะฉะนั้น $|t - 3| = -t + 3$

$$t + 2 - t + 3 = 5$$

เพราะว่า $5 = 5$

เพราะฉะนั้น $0 \leq t \leq 3$ ใช้ได้ทุกค่า t เพราะฉะนั้น $0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$

$$0 \leq x - 1 \leq 9$$

$$1 \leq x \leq 10$$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของ $\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5$ คือ x ที่ค่าอยู่ในช่วง $[1, 10]$

แบบที่ 2.

$$\sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5$$

$$\sqrt{(x-1)+2\sqrt{4\sqrt{x-1}+4}} + \sqrt{(x-1)-2\sqrt{9\sqrt{x-1}+9}} = 5$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 5$$

$$\sqrt{x-1} + 2 + |\sqrt{x-1} - 3| = 5$$

กรณีที่ 1. $0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$ จะได้ว่า $\sqrt{x-1} + 2 + (-\sqrt{x-1} + 3) = 5$

$$5 = 5$$

เพราะฉะนั้น x ทุกค่าที่ $0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$ เป็นผลเฉลยได้

กรณีที่ 2. $\sqrt{x-1} > 3$ จะได้ว่า $\sqrt{x-1} + 2 + \sqrt{x-1} - 3 = 5$

$$2\sqrt{x-1} = 6$$

$$\sqrt{x-1} = 3$$

$$x = 10$$

จากทั้งสองกรณีจะได้ $0 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$

$$0 \leq x - 1 \leq 9$$

$$1 \leq x \leq 10$$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid \sqrt{x+3+4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 5\} = [1, 10]$

22. แนวคิด แบบที่ 1. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$... (1)

แทนค่า $t = \sqrt{x-1} \geq 0$

$$t^2 = x - 1$$

$$x = t^2 + 1$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{t^2+1+2t} - \sqrt{t^2+1-2t} = 2$

$$\sqrt{t^2+2t+1} - \sqrt{t^2-2t+1} = 2$$

$$\sqrt{(t+1)^2} - \sqrt{(t-1)^2} = 2$$

$$t + 1 - |t - 1| = 2$$

กรณีที่ 1. $0 \leq t - 1$ จะได้ว่า $t + 1 - t + 1 = 2$

$$2 = 2$$

กรณีที่ 2. $t - 1 < 0$ จะได้ว่า $t + 1 + t - 1 = 2$

$$t = 1 \text{ เป็นไปไม่ได้}$$

เพราะฉะนั้น $t - 1 \geq 0$

$$t \geq 1$$

$$\sqrt{x-1} \geq 1$$

$$x - 1 \geq 1$$

$$x \geq 2$$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2\} = [2, \infty)$

แบบที่ 2. เมื่อ $x - 1 \geq 0, x \geq 1$ จะได้ว่า $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2$

$$\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1} - \sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1} = 2$$

$$\sqrt{((x-1)+1)^2} - \sqrt{((x-1)-1)^2} = 2$$

$$\sqrt{x^2} - \sqrt{(x-2)^2} = 2$$

$$x - |x - 2| = 2$$

กรณีที่ 1. $x - 2 < 0$ $x - (-(x - 2)) = 2$

$$2x - 2 = 2$$

$$x = 2 \text{ เป็นไปไม่ได้}$$

กรณีที่ 2. $x - 2 \geq 0$ $x - (x - 2) = 2$

$$2 = 2$$

เพราะฉะนั้น $x - 2 \geq 0$ หรือ $x \geq 2$ เป็นผลเฉลยทุกค่า x

เพราะฉะนั้น $\{x \mid \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2\} = [2, \infty)$

23. แนวคิด $\sqrt{x^2+x+4} + \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{2x^2+2x+9}$... (1)

แทนค่า $t = \sqrt{x^2+x+1} \geq 0$... (2)

$$t^2 = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 4 = t^2 + 3$$

$$2x^2 + 2x + 9 = 2t^2 + 7$$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $\sqrt{t^2+3} + t = \sqrt{2t^2+7}$

$$t^2 + 3 + 2t\sqrt{t^2+3} + t^2 = 2t^2 + 7$$

$$2t\sqrt{t^2+3} = 4$$

$$t^2(t^2 + 3) = 4$$

$$t^4 + 3t^2 - 4 = 0$$

$$(t^2 + 4)(t^2 - 1) = 0$$

เพราะว่า $t^2 + 4 > 0$ เพราะฉะนั้น $t^2 = 1$

เพราะว่า $t \geq 0$ เพราะฉะนั้น $t = 1$ เพราะฉะนั้นจากสมการ (2) จะได้ $x^2 + x + 1 = 1$

$$x(x + 1) = 0$$

$$x = -1, 0$$

ตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่าในสมการ (1) จะได้ว่า $x = -1$ และ $x = 0$ เป็นผลเฉลย

$$24. \text{แนวคิด} \quad \sqrt{x^2 + x + 7} + \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{3x^2 + 3x + 19} \quad \dots (1)$$

$$\text{แทนค่า} \quad t = \sqrt{x^2 + x + 2} \geq 0 \quad \dots (2)$$

$$t^2 = x^2 + x + 2$$

$$x^2 + x + 7 = t^2 + 5$$

$$3x^2 + 3x + 19 = 3t^2 + 13$$

$$\text{เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้} \quad \sqrt{t^2 + 5} + t = \sqrt{3t^2 + 13}$$

$$(t^2 + 5) + 2t\sqrt{t^2 + 5} + t^2 = 3t^2 + 13$$

$$2t\sqrt{t^2 + 5} = t^2 + 8$$

$$4t^2(t^2 + 5) = t^4 + 16t^2 + 64$$

$$3t^4 + 4t^2 - 64 = 0$$

$$(3t^2 + 16)(t^2 - 4) = 0$$

เพราะว่า $3t^2 + 16 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $t^2 = 4$

เพราะว่า $t \geq 0$ เพราะฉะนั้น $t = 2$ เพราะฉะนั้นจาก (2) จะได้ $x^2 + x + 2 = 4$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x = 1, -2$$

ตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่าในสมการ (1) จะได้ว่า $x = 1$ และ $x = -2$ เป็นผลเฉลย

$$25. \text{แนวคิด} \quad \sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4 \quad \dots (1)$$

$$\text{แทนค่า} \quad t = \sqrt{x + 11} \geq 0$$

$$t^2 = x + 11 \quad \dots (2)$$

$$x = t^2 - 11$$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \sqrt{t^2 - 11 + t} + \sqrt{t^2 - 11 - t} = 4 \quad \dots (3)$$

$$4 = \sqrt{t^2 + t - 11} + \sqrt{t^2 - t - 11}$$

เอา $\sqrt{t^2 + t - 11} - \sqrt{t^2 - t - 11}$ คูณทั้ง 2 ข้างจะได้

$$4(\sqrt{t^2+t-11} - \sqrt{t^2-t-11}) = (t^2 + t - 11) - (t^2 - t - 11) \\ = 2t$$

$$2(\sqrt{t^2+t-11} - \sqrt{t^2-t-11}) = t \quad \dots (4)$$

จาก (3) ; $2(\sqrt{t^2+t-11} + \sqrt{t^2-t-11}) = 8 \quad \dots (5)$

เพราะฉะนั้น (4) + (5) ; $4\sqrt{t^2+t-11} = t + 8$

$$16(t^2 + t - 11) = t^2 + 16t + 64$$

$$15t^2 - 240 = 0$$

$$t^2 = 16$$

จาก (2) จะได้ว่า $x + 11 = 16$

เพราะฉะนั้น $x = 5$

เพราะว่า $\sqrt{5+\sqrt{5+11}} + \sqrt{5-\sqrt{5+11}} = 4$ เพราะฉะนั้น $x = 5$ เป็นผลเฉลย

26. แนวคิด $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = 4 - 2x \quad \dots (1)$

$$\sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} = (4 - 2x) - \sqrt{x-1}$$

$$(x + 3) + 4\sqrt{x+3}\sqrt{(x-1)(x+3)} + 4(x-1)(x+3)$$

$$= (4 - 2x)^2 - 2(4 - 2x)\sqrt{x-1} + (x - 1)$$

$$x + 3 + 4(x + 3)\sqrt{x-1} + 4x^2 + 8x - 12 = 16 - 16x + 4x^2 - 4(2 - x)\sqrt{x-1} + x - 1$$

$$20\sqrt{x-1} = -24x + 24$$

$$5\sqrt{x-1} = -6(x - 1)$$

เพราะฉะนั้น $x - 1 = 0$ ซึ่งจะได้ว่า $x = 1$ ตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่าจะได้ $x = 1$ เป็นผลเฉลย

27. แนวคิด $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

แทนค่า $y = \sqrt[3]{2x-1}$ เพราะฉะนั้น $y^3 = 2x - 1$

$$y^3 + 1 = 2x \quad \dots (1)$$

จากโจทย์จะได้ $x^3 + 1 = 2y \quad \dots (2)$

(2) - (1) จะได้ว่า $x^3 - y^3 = 2(y - x)$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 2(y - x)$$

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$$

เพราะว่า $x^2 + xy + y^2 + 2 = x^2 + yx + \frac{y^2}{4} + \frac{3y^2}{4} + 2$

$$= (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$$

เพราะฉะนั้น $x - y = 0$

$$x = y$$

จาก (1) ; $x^3 + 1 = 2x$

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = 1, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

ตรวจสอบในสมการ $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ แล้วใช้ได้ทั้ง 3 ค่า เพราะฉะนั้น $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ เป็นผลเฉลย

28. แนวคิด จากโจทย์จะได้ $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-3} = \sqrt{3x-11}$

$$(2x - 4) - 2\sqrt{2x-4}\sqrt{x-3} + (x - 3) = 3x - 11$$

$$-2\sqrt{2x-4}\sqrt{x-3} = -4$$

$$\sqrt{2x-4}\sqrt{x-3} = 2$$

$$(2x - 4)(x - 3) = 4$$

$$2x^2 - 10x + 12 = 4$$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 4)(x - 1) = 0$$

$$x = 1, 4$$

เพราะว่า $\sqrt{2(1)-4} - \sqrt{3(1)-11} \neq \sqrt{1-3}$ และ $\sqrt{2(4)-4} - \sqrt{3(4)-11} = \sqrt{4-3}$

เพราะฉะนั้น $x = 4$ เป็นผลเฉลย

29. แนวคิด $\sqrt[4]{11x+3} - \sqrt[4]{2-x} - \sqrt[4]{9x+7} + \sqrt[4]{x-2} = 0$ เพราะว่าโดเมนของ $\sqrt[4]{2-x}$ คือ $(-\infty, 2]$

และโดเมนของ $\sqrt[4]{x-2}$ คือ $[2, \infty)$ เพราะฉะนั้นพิจารณาเฉพาะ $x = 2$

เพราะว่า $\sqrt[4]{11(2)+3} - \sqrt[4]{2-2} - \sqrt[4]{9(2)+7} + \sqrt[4]{2-2} = \sqrt[4]{25} - \sqrt[4]{25} = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 2$ เป็นผลเฉลยสมการ

30. แนวคิด $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$

$$2^3 = (\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x})^3$$

$$8 = (12-x) + 3(\sqrt[3]{12-x})^2\sqrt[3]{14+x} + 3\sqrt[3]{12-x}(\sqrt[3]{14+x})^2 + (14+x)$$

$$= 26 + 3\sqrt[3]{12-x}\sqrt[3]{14+x}(\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x})$$

$$= 26 + 3\sqrt[3]{12-x}\sqrt[3]{14+x}(2)$$

$$-18 = 6\sqrt[3]{12-x}\sqrt[3]{14+x}$$

$$\sqrt[3]{12-x}\sqrt[3]{14+x} = -3$$

$$(12-x)(14+x) = -27$$

$$168 - 2x - x^2 = -27$$

$$x^2 + 2x - 195 = 0$$

$$(x+15)(x-13) = 0$$

$$x = -15, 13$$

ตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่าในสมการ $\sqrt[3]{12-x} + \sqrt[3]{14+x} = 2$ จะได้ $x = -15, 13$ เป็นผลเฉลย

31. แนวคิด $\sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)} + \sqrt{x-2} = 2$

ให้ $u = \sqrt[4]{6-x}$ และ $v = \sqrt[4]{x-2}$

เพราะฉะนั้น $u^4 + v^4 = 6 - x + x - 2 = 4$... (1)

เพราะว่า $\sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)} + \sqrt{x-2} = 2$

เพราะฉะนั้น $u^2 + 2uv + v^2 = 2$

เพราะฉะนั้น $(u + v)^2 = 2$

เพราะว่าจาก (1) $4 = u^4 + v^4$
 $= (u + v)^4 - 4uv(u^2 + v^2) - 6u^2v^2$... (ดูการพิสูจน์ที่หน้า 13)
 $= (u + v)^4 - 4uv((u + v)^2 - 2uv) - 6u^2v^2$
 $= (u + v)^4 - 4(u + v)^2uv + 2u^2v^2$
 $= 4 - 8uv + 2u^2v^2$

$$2u^2v^2 - 8uv = 0$$

$$uv(uv - 4) = 0$$

กรณีที่ 1. $u = 0$ จะได้ $\sqrt[4]{6-x} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 6$

กรณีที่ 2. $v = 0$ จะได้ $\sqrt[4]{x-2} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 2$

กรณีที่ 3. $uv - 4 = 0$ จะได้ $uv = 4$

$$\sqrt[4]{6-x} \sqrt[4]{x-2} = 4$$

$$(6-x)(x-2) = 256$$

$$-12 + 8x - x^2 = 256$$

$$x^2 - 8x + 268 = 0$$

$$(x-4)^2 + 252 = 0 \quad \text{ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง}$$

ตรวจสอบ $x = 6, 2$ กับสมการ $\sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)} + \sqrt{x-2} = 2$ แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt{6-x} + 2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)} + \sqrt{x-2} = 2$ คือ $x = 2, 6$

32. แนวคิด จากโจทย์จะได้ $\sqrt{5x+1} + \sqrt{2x+3} = \sqrt{6x-2} + \sqrt{x+6}$

$$(5x+1) + 2\sqrt{5x+1}\sqrt{2x+3} + (2x+3) = (6x-2) + 2\sqrt{6x-2}\sqrt{x+6} + (x+6)$$

$$\sqrt{5x+1}\sqrt{2x+3} = \sqrt{6x-2}\sqrt{x+6}$$

$$(5x+1)(2x+3) = (6x-2)(x+6)$$

$$10x^2 + 17x + 3 = 6x^2 + 34x - 12$$

$$4x^2 - 17x + 15 = 0$$

$$(x-3)(4x-5) = 0$$

$$x = 3, \frac{5}{4}$$

โดยการตรวจสอบคำตอบจะได้ $x = 3, \frac{5}{4}$ เป็นผลเฉลยของสมการ

33. แนวคิด $\sqrt{31+x-x^2} = 5-x$

$$31+x-x^2 = 25-10x+x^2$$

$$2x^2-11x-6 = 0$$

$$(2x+1)(x-6) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, 6$$

เพราะว่า $\sqrt{31-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}\right)} = 5 - \left(-\frac{1}{2}\right)$ และ $\sqrt{31+6-36} \neq 5-6$
 เพราะฉะนั้น $x = -\frac{1}{2}$

34. แนวคิด $\sqrt[4]{2x-2} + \sqrt[4]{6-2x} = \sqrt{2}$

ให้ $u = \sqrt[4]{2x-2}$ และ $v = \sqrt[4]{6-2x}$

เพราะฉะนั้น $u^4 + v^4 = 2x-2 + 6-2x = 4$

เพราะว่า $\sqrt[4]{2x-2} + \sqrt[4]{6-2x} = \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $u+v = \sqrt{2}$

เพราะว่า $4 = u^4 + v^4$

$$= (u+v)^4 - 4uv(u^2 + v^2) - 6u^2 v^2$$

... (ดูการพิสูจน์ที่หน้า 13)

$$= (u+v)^4 - 4uv((u+v)^2 - 2uv) - 6u^2 v^2$$

$$= (\sqrt{2})^4 - 4uv((\sqrt{2})^2 - 2uv) - 6u^2 v^2$$

$$= 4 - 4uv(2 - 2uv) - 6u^2 v^2$$

$$= 4 - 8uv + 8u^2 v^2 - 6u^2 v^2$$

เพราะฉะนั้น $0 = -8uv + 2u^2 v^2$

$$uv(uv - 4) = 0$$

กรณีที่ 1. $u = 0$ จะได้ $\sqrt[4]{2x-2} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 1$

กรณีที่ 2. $v = 0$ จะได้ $\sqrt[4]{6-2x} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 3$

กรณีที่ 3. $uv = 4$ จะได้ $\sqrt[4]{2x-2} \sqrt[4]{6-2x} = 4$

$$(2x-2)(6-2x) = 256$$

$$(x-1)(3-x) = 64$$

$$-3 + 4x - x^2 = 64$$

$$x^2 - 4x + 67 = 0 \text{ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง}$$

แทนค่า $x = 1, 3$ ในสมการ $\sqrt[4]{2x-2} + \sqrt[4]{6-2x} = \sqrt{2}$ แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt[4]{2x-2} + \sqrt[4]{6-2x} = \sqrt{2}$ คือ $x = 1, 3$

35. แนวคิด $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$

ให้ $u = \sqrt[4]{1-x}$ และ $v = \sqrt[4]{15+x}$

เพราะฉะนั้น $u^4 + v^4 = 1-x + 15+x = 16$

เพราะว่า $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$

เพราะฉะนั้น $u + v = 2$

เพราะว่า $16 = u^4 + v^4$

$$= (u + v)^4 - 4uv(u^2 + v^2) - 6u^2 v^2 \quad \dots \text{ (ดูการพิสูจน์ที่หน้า 13)}$$

$$= (u + v)^4 - 4uv((u + v)^2 - 2uv) - 6u^2 v^2$$

$$= 2^4 - 4uv(2^2 - 2uv) - 6u^2 v^2$$

เพราะฉะนั้น $0 = -16uv + 2u^2 v^2$

$$uv(uv - 8) = 0$$

กรณีที่ 1. $u = 0$ จะได้ $\sqrt[4]{1-x} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 1$

กรณีที่ 2. $v = 0$ จะได้ $\sqrt[4]{15+x} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = -15$

กรณีที่ 3. $uv = 8$ จะได้ $\sqrt[4]{1-x} \sqrt[4]{15+x} = 8$

$$(1 - x)(15 + x) = 4096$$

$$15 - 14x - x^2 = 4096$$

$$x^2 + 14x + 4081 = 0$$

$$(x + 7)^2 + 4032 = 0 \quad \text{ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง}$$

แทนค่า $x = 1, -15$ ในสมการ $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$ แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$ คือ $x = 1, -15$

36. แนวคิด $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$

ให้ $u = \sqrt[3]{8+x}$ และ $v = \sqrt[3]{8-x}$

เพราะฉะนั้น $u^3 + v^3 = 8 + x + 8 - x = 16$

เพราะว่า $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$

เพราะฉะนั้น $u + v = 1$

เพราะว่า $16 = u^3 + v^3$

$$= (u + v)^3 - 3uv(u + v) \quad \dots \text{ (ดูการพิสูจน์ที่หน้า 13)}$$

$$= 1^3 - 3uv(1)$$

$$= 1 - 3uv$$

เพราะฉะนั้น $uv = -5$

$$\sqrt[3]{8+x} \sqrt[3]{8-x} = -5$$

$$64 - x^2 = -125$$

$$x^2 = 189$$

$$x = \pm 3\sqrt{21}$$

แทนค่า $x = \pm 3\sqrt{21}$ ในสมการ $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$ แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt[3]{8+x} + \sqrt[3]{8-x} = 1$ คือ $x = \pm 3\sqrt{21}$

37. แนวคิด $x_1 + x_2 = 3$... (1)

$x_1^5 + x_2^5 = 33$... (2)

ให้ $\sigma_1 = x_1 + x_2 = 3$, $\sigma_2 = x_1 x_2$

และ $s_k = x_1^k + x_2^k$ เมื่อ $k = 1, 2, \dots$

เพราะว่า $33 = x_1^5 + x_2^5$
 $= s_5$
 $= \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$... (ดูการพิสูจน์ที่หน้า 13)

$33 = 3^5 - 5(3^3)\sigma_2 + 5(3)\sigma_2^2$
 $= 243 - 135\sigma_2 + 15\sigma_2^2$

เพราะฉะนั้น $15\sigma_2^2 - 135\sigma_2 + 210 = 0$

$\sigma_2^2 - 9\sigma_2 + 14 = 0$

$(\sigma_2 - 7)(\sigma_2 - 2) = 0$

$\sigma_2 = 2, 7$

$x_1 x_2 = 2, 7$

กรณีที่ 1. $x_1 x_2 = 7$

เพราะว่า $x_1 + x_2 = 3$ เพราะฉะนั้น $x_1 + \frac{7}{x_1} = 3$

$x_1^2 - 3x_1 + 7 = 0$

$(x_1 - \frac{3}{2})^2 + \frac{19}{4} = 0$ เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2. $x_1 x_2 = 2$

เพราะว่า $x_1 + x_2 = 3$ เพราะฉะนั้น $x_1 + \frac{2}{x_1} = 3$

$x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$

$(x_1 - 2)(x_1 - 1) = 0$

$x_1 = 2, 1$

และ $x_2 = 1, 2$

เพราะฉะนั้น $(x_1, x_2) = (2, 1), (1, 2)$

38. แนวคิด $\sqrt[5]{32-x} + \sqrt[5]{1+x} = 3$

ให้ $u = \sqrt[5]{32-x}$ และ $v = \sqrt[5]{1+x}$

เพราะฉะนั้น $u^5 + v^5 = (32-x) + (1+x) = 33$

เพราะว่า $\sqrt[5]{32-x} + \sqrt[5]{1+x} = 3$

เพราะฉะนั้น $u + v = 3$

เพราะว่า $u + v = 3$ และ $u^5 + v^5 = 33$

เพราะฉะนั้น $u = 2, v = 1$ หรือ $u = 1, v = 2$

... (ดูการหาผลเฉลยที่ข้อ 37.)

กรณีที่ 1.

$$v = 1$$

$$\sqrt[5]{1+x} = 1$$

$$1+x = 1$$

$$x = 0$$

กรณีที่ 2.

$$v = 2$$

$$\sqrt[5]{1+x} = 2$$

$$1+x = 32$$

$$x = 31$$

แทนค่า $x = 0, 31$ ในสมการ $\sqrt[5]{32-x} + \sqrt[5]{1+x} = 3$ แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt[5]{32-x} + \sqrt[5]{1+x} = 3$ คือ $x = 0, 31$

39. แนวคิด $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$ และ $x > 0$

แทนค่า

$$u = \frac{1}{x},$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$u^2 = \frac{1}{x^2},$$

$$v^2 = \frac{1}{1-x^2}$$

$$x^2 = \frac{1}{u^2},$$

$$1-x^2 = \frac{1}{v^2}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} = 1$ และ $u^2 + v^2 = u^2 v^2$... (1)

เพราะว่า $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$ เพราะฉะนั้น $u + v = \frac{35}{12}$

$$u^2 + 2uv + v^2 = \left(\frac{35}{12}\right)^2 = \frac{1225}{144}$$

$$u^2 v^2 + 2uv = \frac{1225}{144}$$

... (จาก (1))

$$144 u^2 v^2 + 288 uv - 1225 = 0$$

$$(12uv + 49)(12uv - 25) = 0$$

$$uv = -\frac{49}{12}, \frac{25}{12}$$

เพราะว่า $u = \frac{1}{x}$ และ $v = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ และ $x > 0$ เพราะฉะนั้น $uv = \frac{25}{12}$

เพราะฉะนั้น

$$\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{25}{12}$$

$$x \sqrt{1-x^2} = \frac{12}{25}$$

$$x^2 (1-x^2) = \frac{144}{625}$$

$$x^4 - x^2 + \frac{144}{625} = 0$$

$$625 x^4 - 625 x^2 + 144 = 0$$

$$(25 x^2 - 16)(25 x^2 - 9) = 0$$

$$(5x - 4)(5x + 4)(5x - 3)(5x + 3) = 0$$

เพราะว่า $0 < x < 1$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$

แทนค่า $x = \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$ ในสมการ $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$ แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{35}{12}$ คือ $x = \frac{4}{5}, \frac{3}{5}$

40. แนวคิด
$$\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

$$\sqrt{x^2+8x} + \sqrt{(x+7)(x+1)} = 7$$

$$\sqrt{x^2+8x} + \sqrt{x^2+8x+7} = 7 \quad \dots (1)$$

แทนค่า
$$t = \sqrt{x^2+8x} \geq 0$$

$$t^2 = x^2 + 8x \quad \dots (2)$$

$$t^2 + 7 = x^2 + 8x + 7$$

เพราะฉะนั้นจาก (1)
$$t + \sqrt{t^2+7} = 7$$

$$\sqrt{t^2+7} = 7 - t$$

$$t^2 + 7 = 49 - 14t + t^2$$

$$14t = 42$$

$$t = 3$$

$$t^2 = 9$$

เพราะฉะนั้นจาก (2) จะได้ว่า
$$x^2 + 8x = 9$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$(x + 9)(x - 1) = 0$$

$$x = -9, 1$$

แทนค่า $x = -9, 1$ ในสมการ $\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}$ แล้วใช้ได้เฉพาะ $x = 1$ เท่านั้น

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}$ คือ $x = 1$

41. แนวคิด
$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2} \quad \dots (1)$$

แทนค่า
$$t = \sqrt{2x-5} \geq 0 \quad \dots (2)$$

เพราะฉะนั้น
$$t^2 = 2x - 5$$

$$2x = t^2 + 5$$

$$x = \frac{t^2+5}{2} = \frac{t^2}{2} + \frac{5}{2}$$

เพราะฉะนั้น $x - 2 = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$ และ $x + 2 = \frac{t^2}{2} + \frac{9}{2} \quad \dots (3)$

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} + t} + \sqrt{\frac{t^2}{2} + \frac{9}{2} + 3t} &= 7\sqrt{2} \\ \sqrt{t^2 + 2t + 1} + \sqrt{t^2 + 6t + 9} &= 14 \\ \sqrt{(t+1)^2} + \sqrt{(t+3)^2} &= 14 \\ (t+1) + (t+3) &= 14 \\ t &= 5\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{2x-5} = 5$$

$$2x - 5 = 25$$

เพราะฉะนั้น

$$x = 15$$

แทนค่า $x = 15$ ในสมการ (1) แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$ คือ $x = 15$

42. แนวคิด $\sqrt{\frac{2x}{x+1}} - \sqrt{\frac{2(x+1)}{x}} = 1$... (1)

แทนค่า

$$t = \sqrt{\frac{2x}{x+1}} \geq 0$$
 ... (2)

$$t^2 = \frac{2x}{x+1}$$

$$\frac{t^2}{4} = \frac{x}{2(x+1)}$$

$$\frac{4}{t^2} = \frac{2(x+1)}{x}$$

$$\frac{2}{t} = \sqrt{\frac{2(x+1)}{x}}$$
 ... (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้

$$t - \frac{2}{t} = 1$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t-2)(t+1) = 0$$

เพราะว่า $t \geq 0$ เพราะฉะนั้น

$$t = 2$$

$$4 = \frac{2x}{x+1}$$

$$4x + 4 = 2x$$

$$x = -2$$

แทนค่า $x = -2$ ในสมการ (1) แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt{\frac{2x}{x+1}} - \sqrt{\frac{2(x+1)}{x}} = 1$ คือ $x = -2$

43. แนวคิด $4(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = x$... (1)

เพราะว่า $1+x \geq 0$ และ $1-x \geq 0$ เพราะฉะนั้น $-1 \leq x \leq 1$

แทนค่า $u = \sqrt{1+x}$ และ $v = \sqrt{1-x}$

เพราะฉะนั้น $0 \leq u \leq \sqrt{2}$ และ $0 \leq v \leq \sqrt{2}$ และ $u^2 = 1+x$, $v^2 = 1-x$

เพราะฉะนั้น

$$u^2 + v^2 = 1 + x + 1 - x = 2$$

$$u^2 - v^2 = (1 + x) - (1 - x) = 2x$$

2(1) ;

$$8(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = 2x$$

$$8(u - 1)(v + 1) = u^2 - v^2$$

$$8(uv + u - v - 1) = u^2 - v^2 \quad \dots (2)$$

เพราะว่า $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2 = u^2 + v^2 - 2uv = 2 - 2uv$

เพราะฉะนั้น $2uv = 2 - (u - v)^2$

เพราะฉะนั้นจาก (2) ; $4(2uv) + 8(u - v) - 8 = u^2 - v^2$

$$4(2 - (u - v)^2) + 8(u - v) - 8 = (u + v)(u - v)$$

$$-4(u - v)^2 + 8(u - v) - (u + v)(u - v) = 0$$

$$(u - v)(8 - 4(u - v) - (u + v)) = 0$$

$$(u - v)(8 - 5u + 3v) = 0$$

กรณีที่ 1. $u - v = 0 \quad \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x}$

$$1 + x = 1 - x$$

$$x = 0$$

กรณีที่ 1. $8 - 5u + 3v = 0$ จะได้ว่า $5u - 3v = 8 \quad \dots (3)$

เพราะว่า $0 \leq u \leq \sqrt{2}$, $0 \leq v \leq \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $0 \leq 5u \leq 5\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2} \leq -3v \leq 0$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (3) จะได้ว่า $8 = 5u - 3v \leq 5\sqrt{2} < 8$ ขัดแย้งกัน

เพราะฉะนั้น $x = 0$ เป็นคำตอบเดียวเท่านั้น

44. แนวคิด $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)} \quad \dots (1)$

$$\sqrt[3]{12(x-1)} = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}$$

เพราะฉะนั้น

$$12(x-1) = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3})^3$$

$$= x + 3(\sqrt[3]{x})^2(\sqrt[3]{2x-3}) + 3\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{2x-3})^2 + (2x-3)$$

$$= 3x - 3 + 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x-3}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3})$$

$$9(x-1) = 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x-3}\sqrt[3]{12(x-1)}$$

$$3(x-1) = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{2x-3}\sqrt[3]{12(x-1)}$$

$$27(x-1)^3 = x(2x-3)(12(x-1))$$

$$27(x-1)^3 - x(2x-3)(12(x-1)) = 0$$

$$(x-1)(27(x-1)^2 - 12x(2x-3)) = 0$$

$$(x-1)(27x^2 - 54x + 27 - 24x^2 + 36x) = 0$$

$$(x-1)(3x^2 - 18x + 27) = 0$$

$$(x-1)(x^2 - 6x + 9) = 0$$

$$(x - 1)(x - 3)^2 = 0$$

$$x = 1, 3$$

แทนค่า $x = 1, 3$ ในสมการ (1) แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$ คือ $x = 1, 3$

45. แนวคิด $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$... (1)

เพราะฉะนั้น

$$-\sqrt[3]{x+3} = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2}$$

$$(-\sqrt[3]{x+3})^3 = (\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2})^3$$

$$-(x+3) = (x+1) + 3(\sqrt[3]{x+1})^2 \sqrt[3]{x+2} + 3\sqrt[3]{x+1} (\sqrt[3]{x+2})^2 + (x+2)$$

$$-3x - 6 = 3\sqrt[3]{x+1} \sqrt[3]{x+2} (\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2})$$

$$-x - 2 = \sqrt[3]{x+1} \sqrt[3]{x+2} (-\sqrt[3]{x+3})$$

$$x + 2 = \sqrt[3]{x+1} \sqrt[3]{x+2} \sqrt[3]{x+3}$$

$$(x+2)^3 = (x+1)(x+2)(x+3)$$

$$(x+2)((x+2)^2 - (x+1)(x+3)) = 0$$

$$(x+2)(x^2 + 4x + 4 - x^2 - 4x - 3) = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

แทนค่า $x = -2$ ในสมการ (1) แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+3} = 0$ คือ $x = -2$

46. แนวคิด $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$... (1)

เพราะฉะนั้น

$$x - 8 = (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16})^3$$

$$= x + 3(\sqrt[3]{x})^2 \sqrt[3]{x-16} + 3\sqrt[3]{x} (\sqrt[3]{x-16})^2 + (x-16)$$

$$= 2x - 16 + 3\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x-16} (\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16})$$

$$= 2x - 16 + 3\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x-16} \sqrt[3]{x-8}$$

$$-x + 8 = 3\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x-16} \sqrt[3]{x-8}$$

$$(-x + 8)^3 = 27x(x-16)(x-8)$$

$$27x(x-16)(x-8) + (x-8)^3 = 0$$

$$(x-8)(27x(x-16) + (x-8)^2) = 0$$

$$(x-8)(27x^2 - 432x + x^2 - 16x + 64) = 0$$

$$(x-8)(28x^2 - 448x + 64) = 0$$

$$(x-8)(7x^2 - 112x + 16) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$x = 8, \frac{112 \pm \sqrt{12544 - 4(7)(16)}}{2(7)}$$

$$= 8, \frac{112 \pm \sqrt{12096}}{14}$$

$$= 8, \frac{112 \pm 24\sqrt{21}}{14}$$

$$= 8, 8 \pm \frac{12\sqrt{21}}{7}$$

แทนค่า $x = 8, 8 \pm \frac{12\sqrt{21}}{7}$ ในสมการ (1) แล้วใช้ได้

เพราะฉะนั้นผลเฉลยของสมการ $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$ คือ $x = 8, 8 \pm \frac{12\sqrt{21}}{7}$

47. แนวคิด $\sqrt{x^2+a} = a-x \quad \dots (1)$

$$x^2 + a = a^2 - 2ax + x^2$$

$$a^2 - 2ax - a = 0$$

$$2ax = a(a-1)$$

กรณีที่ 1. $a = 0$ จะได้เงื่อนไข $2ax = a(a-1)$ เป็นจริงทุกค่า x

จาก (1) จะได้ $\sqrt{x^2} = -x$

$$|x| = -x$$

เพราะฉะนั้น $x \leq 0$

กรณีที่ 2. $a \neq 0$ จะได้ว่า $x = \frac{a-1}{2}$

เพราะว่า $\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + a} = \sqrt{\frac{a^2 - 2a + 1 + 4a}{4}} = \sqrt{\frac{(a+1)^2}{4}} = \frac{|a+1|}{2}$

และ $a - x = a - \frac{a-1}{2} = \frac{a+1}{2}$

จากสมการ (1) จะได้ว่า $\frac{|a+1|}{2} = \frac{a+1}{2}$

เพราะฉะนั้น $a+1 \geq 0$

$$a \geq -1$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{x^2+a} = a-x$ มีผลเฉลย $x = \frac{a-1}{2}$ เมื่อ $a \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$

จากทั้ง 2 กรณีสรุปได้ว่า สมการ $\sqrt{x^2+a} = a-x$ มีผลเฉลยตามเงื่อนไขของ a ดังนี้

1. $a \in (-\infty, -1)$ ไม่มีผลเฉลย
2. $a \in [-1, 0) \cup (0, \infty)$ ผลเฉลย $x = \frac{a-1}{2}$
3. $a = 0$ $x \leq 0$ เป็นผลเฉลยทุกค่า

48. แนวคิด เพราะว่า $a-x \geq 0$ เพราะฉะนั้น $a \geq x \quad \dots (1)$

เพราะว่า $\sqrt{a-x} = x^2 - a$

เพราะฉะนั้น $x^2 - a \geq 0$

$$x^2 \geq a \quad \dots (2)$$

เพราะฉะนั้นจาก (1) และ (2) จะได้ว่า $x \leq a \leq x^2 \quad \dots (3)$

เพราะว่า $x^2 - \sqrt{a-x} = a$

เพราะฉะนั้น

$$x^4 - 2x^2\sqrt{a-x} + (a-x) = a^2$$

$$x^4 - 2x^2(x^2 - a) + (a-x) = a^2$$

$$(\text{เพราะว่า } \sqrt{a-x} = x^2 - a)$$

$$x^4 - 2x^4 + 2ax^2 + a - x = a^2$$

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + (x^4 + x) = 0$$

$$a = \frac{(2x^2 + 1) \pm \sqrt{(2x^2 + 1)^2 - 4(1)(x^4 + x)}}{2(1)}$$

เพราะว่า

$$(2x^2 + 1)^2 - 4(1)(x^4 + x) = 4x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^4 - 4x$$

$$= 4x^2 - 4x + 1$$

$$= (2x - 1)^2$$

เพราะฉะนั้น

$$a = \frac{(2x^2 + 1) \pm \sqrt{(2x - 1)^2}}{2}$$

$$a = \frac{(2x^2 + 1) + (2x - 1)}{2}, \frac{(2x^2 + 1) - (2x - 1)}{2}$$

$$= x^2 + x, x^2 - x + 1$$

กรณีที่ 1.

$$a = x^2 + x$$

$$\text{เพราะว่า } a \leq x^2 \text{ เพราะฉะนั้น } a - x^2 \leq 0$$

$$\text{เพราะว่า } x = a - x^2 \text{ เพราะฉะนั้น } x \leq 0$$

... (4)

$$\text{เพราะว่า } x^2 - x - a = 0$$

... (5)

$$\text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

$$\text{เมื่อ } 1 + 4a \geq 0 \text{ หรือ } a \geq -\frac{1}{4}$$

$$\text{กรณีที่ 1.1 } x = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a}}{2} \text{ เมื่อ } a \in [-\frac{1}{4}, 0]$$

หมายเหตุ ถ้า $a > 0$ จะทำให้ $x > 0$ ขัดแย้งกับ $x \leq 0$ จาก (4)

$$\text{กรณีที่ 1.2 } x = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4a}}{2} \text{ เมื่อ } a \geq -\frac{1}{4}$$

กรณีที่ 2.

$$a = x^2 - x + 1 \text{ เพราะฉะนั้น } -x + 1 = a - x^2$$

$$\text{เพราะว่าจาก (2) } a \leq x^2$$

$$a - x^2 \leq 0$$

$$-x + 1 \leq 0$$

$$x \geq 1$$

เพราะฉะนั้นจาก (3) จะได้ $a \geq 1$

พิจารณาสมการ

$$x^2 - x + (1 - a) = 0$$

$$\text{เมื่อ } a \geq 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1 - a)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a - 3}}{2}$$

$$\text{เมื่อ } 4a - 3 \geq 0$$

$$\text{เพราะว่า } x \geq 1 \text{ เพราะฉะนั้น } x = \frac{1 + \sqrt{4a - 3}}{2} \text{ เท่านั้น}$$

$$\text{สรุปผลเฉลยตามกรณีต่าง ๆ ของค่า } a \text{ จากสมการ } x^2 - \sqrt{a - x} = a$$