

ตะลุยโจทย์ สอบ. คณิตศาสตร์

พิชิตเหรียญทองโอลิมปิก



เหมาะสำหรับเตรียมความพร้อมเพื่อคัดเลือกเข้าสู่ ค่าย สอบ.
และเตรียมความพร้อมสู่การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ

ทะลุจอทฤษฎี สอวน. คณิตศาสตร์

(พีชคณิตเรขาคณิตของโอลิมปิก)

โดย ญัฐพล บัณฑิตแสน

ตะลุยโจทย์ สอวน. คณิตศาสตร์ (พิชิตเหรียญทองโอลิมปิก)

นักเขียน : ญัฐพล บัณฑิตเสน

บรรณาธิการ : จันทราจิรา มีนิตดี

ราคา 380 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

(National Library of Thailand Cataloging in Publication Data)

ญัฐพล บัณฑิตเสน.

ตะลุยโจทย์ สอวน. คณิตศาสตร์ (พิชิตเหรียญทองโอลิมปิก).-- นนทบุรี : ริงค์ บียอนด์บุ๊กส์, 2565.
320 หน้า.

1. คณิตศาสตร์ -- ข้อสอบและเฉลย. 2. คณิตศาสตร์ -- การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา).

I. ชื่อเรื่อง.

510.76

Barcode 885-90993-0917-2

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ
ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 โดยบริษัท
ริงค์ บียอนด์ บুকส์ จำกัด ห้ามลอก
เลียนไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือ
เล่มนี้ ไม่ว่ารูปแบบใดๆ นอกจากจะได้
รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจาก
ผู้จัดพิมพ์เท่านั้น

ฝ่ายผลิต

ผู้ช่วยบรรณาธิการ : รตนภรณ์ สุขประดิษฐ์

ออกแบบปก : Duckable Studio

ออกแบบรูปเล่ม : วทีญญ พรอัมรา

พิสูจน์อักษร : วลีษฐา ญาณสุคนธ์

เรียบเรียง : สุนิสา ไพโรจิตร

ตรวจสอบวิชาการ : ชูบิน, ญัฐวัตร ศิริประทุม, วลีษฐา ญาณสุคนธ์

เทคนิคการผลิต : ระพีพัฒน์ โทจำปา

พิมพ์ครั้งที่ 2 : 2566

E-Book : พฤศจิกายน 2567

พิมพ์ที่

บริษัท ด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด

307 ซอยลาดพร้าว 87 ถนนลาดพร้าว แขวงคลองเจ้าคุณสิงห์

เขตวังทองหลาง กรุงเทพมหานคร 10310

Tel.02-966-1600-6 Fax.02-966-1609

จัดพิมพ์โดย



บริษัท ริงค์ บียอนด์ บุกส์ จำกัด

200 หมู่ 4 ชั้น 19 ห้อง 1903A

จัสมินอินเตอร์เนชั่นแนลทาวเวอร์ ถ.แจ้งวัฒนะ

ต.ปากเกร็ด อ.ปากเกร็ด จ.นนทบุรี ประเทศไทย 11120

โทรศัพท์ 0-2962-1081-3 (อัตโนมัติ 10 คู่สาย)

โทรสาร 0-2962-1084

เสนองานเขียน/งานแปล/งานวาดได้ที่

www.thinkbeyondbook.com

จัดจำหน่ายโดย



บริษัท ไอทีซี พรีเมียร์ จำกัด

200 หมู่ 4 ชั้น 19 ห้อง 1901 จัสมินอินเตอร์เนชั่นแนลทาวเวอร์

ถ.แจ้งวัฒนะ ต.ปากเกร็ด อ.ปากเกร็ด จ.นนทบุรี 11120

โทรศัพท์ 0-2962-1081, 0-2962-2626 (อัตโนมัติ 10 คู่สาย)

โทรสาร 0-2962-1084

สำหรับร้านค้า และตัวแทนจำหน่าย สนใจสั่งซื้อจำนวนมาก

โทรศัพท์ 0-2962-1081, 0-2962-2626 ต่อ 112-114 โทรสาร 0-2962-1084

หากต้องการนำเนื้อหาภายในเพื่อใช้ในการสอนหรือใช้เป็นเอกสารประกอบการสอน
ติดต่อขออนุญาตได้ที่ Email : Thinkbeyondbooks@gmail.com หรือ โทร 0-2962-2626 ต่อ 708

คำนำ

โอลิมปิกวิชาการเป็นโครงการที่พัฒนาและเพิ่มทักษะทางวิชาการให้กับนักเรียน ก่อให้เกิดการแข่งขันด้านวิชาการของนักเรียนทั่วประเทศ โครงการนี้มีการแข่งขันในสาขาวิชาคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และคอมพิวเตอร์

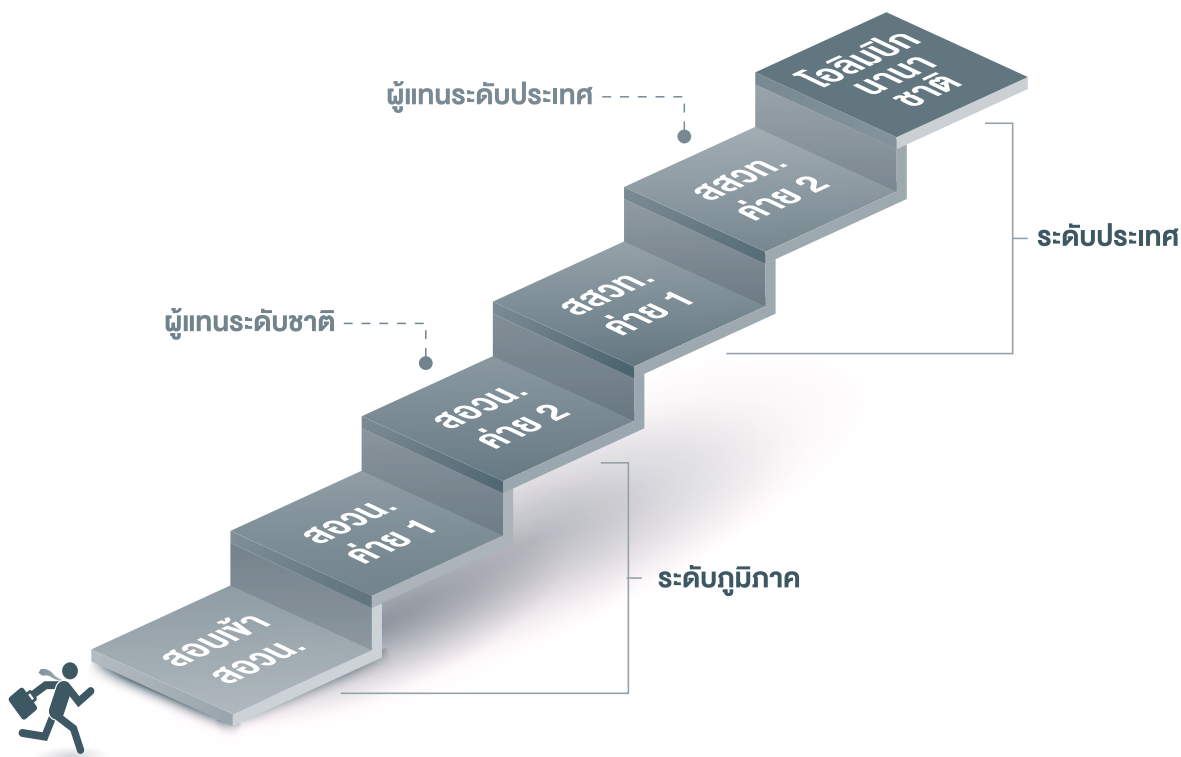
การที่จะเข้าร่วมแข่งขันดังกล่าวได้ นักเรียนต้องมีพื้นฐานที่ดี ฝึกทำโจทย์ที่หลากหลาย เพื่อพัฒนาตัวเอง เตรียมความพร้อมเมื่อสอบผ่าน จะได้ก้าวเข้าสู่ค่ายโอลิมปิกวิชาการของมูลนิธิ สอวน.

ค่าย สอวน. นั้นเป็นสิ่งที่ดีต่อนักเรียน ที่รักในวิชาคณิตศาสตร์ ถึงแม้ว่านักเรียนจะไม่ได้เป็นผู้แทนประเทศในการร่วมแข่งขันโอลิมปิกวิชาการ แต่การได้ผ่านค่าย สอวน. ก็ช่วยเตรียมความพร้อม และเป็นใบเบิกทางที่ดีในการเข้าเรียนต่อในมหาวิทยาลัยชั้นนำของประเทศ จะเห็นได้จากโครงการรับเข้าศึกษาต่อในระดับปริญญาตรีของมหาวิทยาลัย จะมีทั้งโครงการที่รับนักเรียนที่ผ่านค่าย สอวน. โดยเฉพาะ และนำไปเป็นผลงานในแฟ้มสะสมผลงาน ก็ถือว่าช่วยให้ผลงานด้านวิชาการของนักเรียนโดดเด่นอย่างมาก

ผู้เขียนจึงได้รวบรวมแนวข้อสอบตามข้อสอบจริงที่ใช้ในการคัดเลือกเข้าค่ายโอลิมปิกวิชาการ วิชาคณิตศาสตร์ไว้ ผู้เขียนหวังว่านักเรียนที่สนใจจะนำหนังสือเล่มนี้ไปฝึกฝนและให้เป็นส่วนหนึ่งของความสำเร็จในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

ณัฐพล บัณฑิตเสน

เส้นทาง สู่โอลิมปิกวิชาการ



ข้อดีของการเป็นเด็กค่าย สอวน.

- ได้ประสบการณ์ที่มากกว่าในโรงเรียนปกติ
- ได้เรียนเกินจากหลักสูตรกับอาจารย์ระดับมหาวิทยาลัย
- ได้เป็นตัวแทนระดับประเทศ
- ได้รับประกาศนียบัตรสำหรับเข้ามหาวิทยาลัย
- ได้ทุนการศึกษา
- ได้มิตรภาพ ได้แลกเปลี่ยนความรู้กับเพื่อนในค่าย
- ได้ความภูมิใจในตนเอง 😊

ตะลุยโจทย์ ส่วน.

คณิตศาสตร์

(พิชิตเหรียญทองโอลิมปิก)

แนวข้อสอบคณิตศาสตร์

1. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ $a + a^{-1} = 3\sqrt{3}$ จงหาค่าของ $(a^3 - a^{-3})^2$

2. จงหาจำนวนเต็มบวก i ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้มีจำนวนเต็มบวก j ที่สอดคล้องกับสมการ
$$1,000 = i + (i + 1) + (i + 2) + \dots + (i + j)$$

3. จำนวนเต็มบวก X ในเลขฐานสิบจำนวนหนึ่ง ประกอบด้วยเลขหลักหลักเขียนแทนได้เป็น $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$ ถ้า $a_5 = 9$ และ $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0} = \frac{1}{25}X$ แล้ว $a_5 + a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$ เท่ากับเท่าไร

4. จงหาจำนวนเต็มที่ยิ่งใหญ่ที่สุด ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ A เมื่อ $A = \frac{10^{97}}{10^{94} + 5}$

5. จงหาจำนวนเต็มบวก P ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $3^{\frac{1}{9}} \cdot 3^{\frac{3}{9}} \cdot 3^{\frac{5}{9}} \cdot \dots \cdot 3^{\frac{2P-1}{9}}$ มีค่ามากกว่า 6,000

6. ให้ $U = \{|x - 3| + |x + 5| + |x - 7| \mid 0 \leq x \leq 10\}$ ถ้า $U = [m, n]$ แล้ว $m + n$ มีค่าเท่าไร

7. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ $a + \frac{1}{a} = n$ จงหาค่า n ที่ทำให้ $\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)^2 = 12,100$

8. จงหา ค.ร.น. ที่มากที่สุด ที่จะเป็นไปได้ของ m และ n เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $m + n = 900$

9. ให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ จงหาผลรวมของสมาชิกของ A ที่มี ห.ร.ม. ของจำนวนนั้นและ 21 เป็น 1

10. จงหาค่า x เมื่อ $x = \sqrt[3]{3^{12} - 3^9 \cdot 5^2 + 3^5 \cdot 5^4 - 5^6}$

11. จงหาค่าของ $\sqrt{12 + \sqrt{140}} + \sqrt{12 - \sqrt{140}}$

12. จงหา pq ในรูปตัวแปร a, b เมื่อ $p = 100\dots07$ และ $q = 100\dots04$

13. จงหาผลบวกของกำลังสองของรากที่เป็นจำนวนจริงทุกรากของสมการ $x^{108} - 27^{36} = 0$

14. จงหาค่าของ $\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} + \sqrt{x^2 - 8x + 16}$ เมื่อ $x \in (1, 4)$

15. เมื่อ $\frac{x-3}{x^2+20}$ ไม่เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ โดยมี x เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว x ที่น้อยที่สุดมีค่าเท่าใด

16. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก กำหนด $P(n)$ เป็นผลคูณของตัวประกอบที่เป็นบวกทั้งหมดของ n เช่น
 $P(2) = 1 \times 2$, $P(9) = 1 \times 3 \times 9 = 27$ เป็นต้น
จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุด ที่สอดคล้องกับ $P(n) = n^{10}$

17. ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $f(a)$ แทนผลบวกของเลขโดดทุกจำนวนที่เขียนแทน a จงหาผลรวมของจำนวนเต็มบวก a ทุกจำนวนที่สอดคล้องกับ $a - f(a) = 567$

18. กำหนดให้ A เป็นจำนวนเต็มบวก ตั้งแต่ 2,000 ถึง 8,888 จะมี A กี่จำนวน ที่ผลต่างระหว่างหลักหน่วยกับหลักพันเท่ากับ 2

19. ให้ $N = (10^2 + 1)(10^4 + 1)(10^8 + 1) \dots (10^{64} + 1)$ จงหา $\text{sum}(N)$

บทนิยาม สำหรับจำนวนเต็มบวก n กำหนดให้ $\text{sum}(n)$ แทนผลบวกของเลขโดดทุกจำนวนที่เขียนแทน n ในระบบเลขฐาน 10 เช่น $\text{sum}(112) = 1 + 1 + 2 = 4$ เป็นต้น

20. ให้ n เป็นจำนวนจริงบวกที่เป็นคำตอบของสมการ $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = x$

จงหาจำนวนเต็มที่มากที่สุด ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ n

21. กำหนดให้ p เป็นจำนวนเต็มลบที่น้อยกว่า -350 จงหา p ที่มากที่สุดที่สอดคล้องกับ
- ก. p เป็นผลบวกของจำนวนเต็มลบที่ติดกัน 3 จำนวน
 - ข. p เป็นผลบวกของจำนวนเต็มลบที่ติดกัน 4 จำนวน
 - ค. p เป็นผลบวกของจำนวนเต็มลบที่ติดกัน 5 จำนวน

22. กำหนดให้ A และ B เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้
- ก. $A > B$
 - ข. ค.ร.น. ของ A, B เท่ากับ 500
- จงหา (A, B) มีทั้งหมดกี่คู่อันดับ

23. จงหาจำนวนนับที่น้อยที่สุดที่ไม่เกิน 100,000 โดยที่จำนวนตั้งแต่ 2 ถึง 13 หารลงตัว
แต่จะมีสองจำนวนต่อเนื่องกันที่หารจำนวนนั้นไม่ลงตัว

24. กำหนดให้ $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt[3]{3}} = \frac{1}{2} (3^{a_1} + 3^{a_2} + 3^{a_3} + \dots + 3^{a_n})$

จงหาค่าของ $n^2 + 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$

25. จากอสมการ $200 < \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \leq 400$

จะได้ $x \in (a, b]$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด

26. เลขสามหลักจำนวนหนึ่งประกอบขึ้นจากเลขโดดที่ไม่มีเลขศูนย์ จะมีกี่จำนวนที่เลขโดดในหลักสิบมากกว่าเลขโดดในหลักหน่วย และเลขโดดในหลักร้อยมีค่ามากกว่าเลขโดดในหลักสิบ

27. $\sum_{i=1}^{2564} i! - \sum_{i=1}^{1281} \frac{(2i+1)!}{2i} = A$ แล้ว A มีค่าเท่าใด

28. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $a^2 + 2021$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์
แล้ว a เป็นจำนวนใดได้บ้าง

29. จำนวนเต็มสามจำนวนมีผลคูณของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. เท่ากับ 1764 แล้วสามจำนวนนั้นรวมกัน จะมีค่ามากที่สุดได้เท่าใด

30. การหา ห.ร.ม. ของจำนวนเต็ม x และ y ด้วยขั้นตอนของยูคลิด จะทำขั้นตอนการหารในลักษณะดังต่อไปนี้

$$x = yq_1 + r_1$$

$$y = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

$$\vdots$$

$$r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n$$

ถ้า $0 < x \leq y \leq 120$ แล้ว n จะมีค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าใด

31. จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{2000} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i j \right)$

32. กำหนดให้ p, q, r, s และ t เป็นจำนวนเต็มที่สุดคณึงกับ

ก. $p > q > r > s > t$

ข. $(5 - p)(5 - q)(5 - r)(5 - s)(5 - t) = 175$

จงหา $p + q + r + s + t$

33. นิยาม $[x]$ แทนจำนวนเต็มที่ยกที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x เช่น $[10.7] = 10$, $[-12.5] = -13$
จงหาค่าของ $\left[\frac{1}{2[\sqrt{1}] + 1} + \frac{1}{2[\sqrt{2}] + 1} + \frac{1}{2[\sqrt{3}] + 1} + \dots + \frac{1}{2[\sqrt{50}] + 1} \right]$

34. กำหนดให้ $O(x)$ เป็นผลบวกของเลขโดดที่เป็นจำนวนคี่ทุกจำนวนของ x
เช่น $O(34651) = 3 + 5 + 1 = 9$ จงหา $\sum_{x=1}^{100} O(x)$

35. กำหนดให้ $\frac{x}{y} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{24} - \frac{1}{48} - \frac{1}{80} - \frac{1}{120} - \frac{1}{168}$ และ ห.ร.ม. ของ x และ y มีค่าเท่ากับ 1
จงหา $x + y$

36. จงหาเศษที่ได้จากการหาร A ด้วย 100 เมื่อ $A = 4(243^7) - 2 \cdot 3^{35} + 9^{17}$

37. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับสมบัติทุกข้อ ต่อไปนี้

ก. $1000 < n < 9999$

ข. $1000 < 2n < 9999$

ค. $d(n) \cup d(2n) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

กำหนดให้ $d(n)$ เป็นเซตของเลขโดดที่เขียนแทน n

เช่น $d(3463) = \{3, 4, 6\}$, $d(25835) = \{2, 3, 5, 8\}$, $d(11111) = \{1\}$

38. กำหนดให้ N เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งเขียนแทนด้วยเลขโดดที่ไม่ซ้ำกันและไม่มีเลข 0 และผลรวมของเลขโดดทุกตัวที่เขียนแทน N เท่ากับ 10 แล้ว N เป็นไปได้ทั้งหมดกี่จำนวน

39. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้สมการ $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < 10^{-2}$ เป็นจริง

40. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข ต่อไปนี้

ก. เลขโดดที่มีค่าประจำหลักมากที่สุดเป็น 1

ข. $M(n) = 3n$

เมื่อ $M(n)$ เป็นจำนวนที่เกิดจากการย้ายเลขโดดหลักแรกไปเป็นหลักหน่วย

เช่น $M(123) = 231$, $M(8527) = 5278$

41. จงหาจำนวนเต็มบวก a ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องกับ

ก. $n(d(a)) = 6$

ข. $d(a) = d(2a) = d(3a) = d(4a) = d(5a) = d(6a)$

ค. $10^5 \leq a \leq 10^6$

กำหนดให้ $n(A)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A และ $d(a)$ เป็นเซตของเลขโดดที่เขียนแทน a
เช่น $d(3463) = \{3, 4, 6\}$, $d(25835) = \{2, 3, 5, 8\}$, $d(11111) = \{1\}$ เป็นต้น

42. กำหนดให้ p และ q เป็นจำนวนเต็มบวกที่ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน

ถ้า $\frac{p}{q} = \frac{(25642021)^2}{(25642019)^2 + (25642023)^2 - 8}$ แล้ว $p + q$ เท่ากับเท่าไร

43. จงหาทุกจำนวน $a = \overline{a_1a_2a_3}$ ซึ่งเป็นเลขสามหลัก ที่มีเลขโดดทั้งสามไม่ซ้ำกัน และเป็นไปตามเงื่อนไข

ก. $n(d(a)) = n(d(2a)) = n(d(3a))$

ข. $d(a) \cup d(2a) \cup d(3a) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

กำหนดให้ $n(A)$ เป็นจำนวนสมาชิกของเซต A และ $d(a)$ เป็นเซตของเลขโดดที่เขียนแทน a

เช่น $d(3463) = \{3, 4, 6\}$, $d(25835) = \{2, 3, 5, 8\}$, $d(11111) = \{1\}$ เป็นต้น

44. ให้ $Y = \{\text{ห.ร.ม. } (5x + 6, 8x + 29) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ จงหาว่าผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน Y เท่ากับเท่าไร เมื่อ Z เป็นจำนวนเต็ม

45. ให้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ กำหนด $X = \{x_1 + x_2 \mid x_1, x_2 \in U \text{ และ } |x_1^2 - 2x_2^2| = 1\}$
ผลต่างระหว่างสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดและน้อยที่สุดใน X เป็นเท่าใด

46. จงหาค่าน้อยที่สุดของ $P = \{x^2 - 5x + 7 \mid x^2 - x - 2 \geq 0\}$

47. ให้ $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid 10 \leq x \leq 100\}$ และ $Y \in U$

เมื่อ $P(Y)$ เป็นผลคูณของเลขโดดที่เขียนแทน Y

$Q(Y)$ เป็นผลบวกของเลขโดดที่เขียนแทน Y

และ $G(Y) = P(Y) + Q(Y)$

กำหนด $H = \{Y \in U \mid G(Y) < Y\}$

$J = \{Y \in U \mid G(Y) = Y\}$

$K = \{Y \in U \mid G(Y) > Y\}$

จงหาว่า $|H|^2 + |J|^2 + |K|^2$ เท่ากับเท่าไร

48. ให้ $f: I^+ \rightarrow I$ ที่กำหนดโดย $f(x) = y$ ก็ต่อเมื่อ y เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุด
และมี 10^y เป็นตัวประกอบของ $x!$ จงหาว่า $\sum_{i=1}^{25} f(i)$ เท่ากับเท่าไร

49. จงหาผลรวมของรากทั้งหมดที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $(36x^2 + 18x + 1)(12x^2 + 6x + 1) = 5$

50. ถ้า $2^x = 7$ จงหาค่า 2^{4x+1}

51. ให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนจริง ถ้า $f(-2) = 0, f(2) = 4, f(-4) = -10$
จงหาค่า $f(-1)$

52. จงหาจำนวนสมาชิกในเซต A เมื่อ $A = \{(X, Y) \mid X, Y \text{ เป็นเซต ซึ่ง } X \cup Y = \{2, 4, 6, 8\}\}$