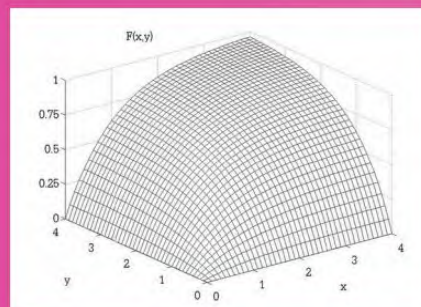
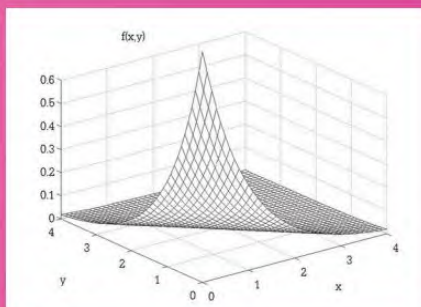
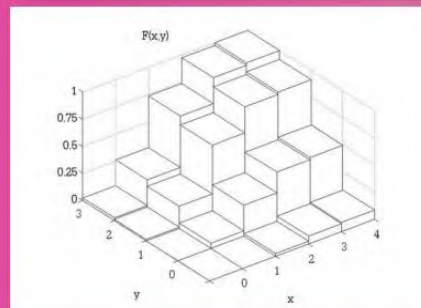
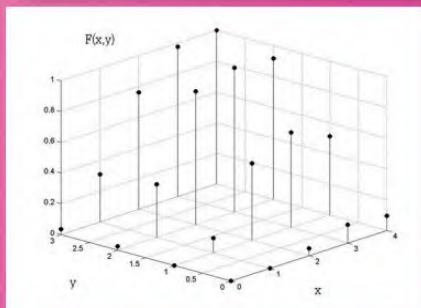
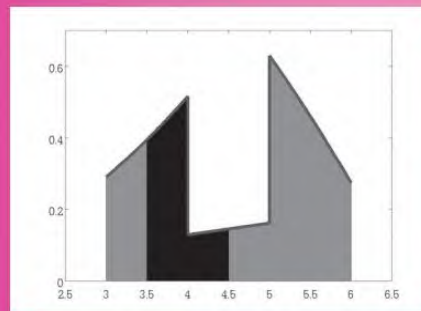
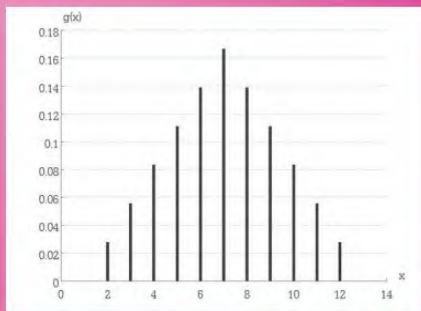




มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

Introduction to Probability



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นุชรินทร์ ทิพย์วรรณกร
ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

Introduction to Probability

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นุชรินทร์ ทิพย์วรรณกร
ภาควิชาสถิติประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ความน่าจะเป็นเบื้องต้น

Introduction to Probability

สงวนลิขสิทธิ์ โดยมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
ห้ามการลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาต

เรียบเรียงโดย ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.นุชรินทร์ ทิพย์วรรณกร
พิมพ์ครั้งที่ 6 2565

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

นุชรินทร์ ทิพย์วรรณกร.

ความน่าจะเป็นเบื้องต้น = Introduction to probability.-- กรุงเทพฯ : กองส่งเสริมวิชาการ
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ, 2560.

296 หน้า.

1. ความน่าจะเป็น. I. ชื่อเรื่อง.

519.2

ISBN 978-616-368-048-8

จัดพิมพ์โดย กองส่งเสริมวิชาการ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
1518 ถนนประชาชื่น 1 แขวงวงศ์สว่าง เขตบางซื่อ กรุงเทพมหานคร 10800
โทรศัพท์ 0-2555-2240 โทรสาร 0-2555-2236

พิมพ์ที่ ศูนย์ผลิตตำราเรียน มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ
1518 ถนนประชาชื่น 1 แขวงวงศ์สว่าง เขตบางซื่อ กรุงเทพมหานคร 10800
โทรศัพท์ 0-2555-2000 ต่อ 1437 โทรสาร 0-2586-9012

ได้รับการรับรองคุณภาพจากคณะกรรมการประสานงานวิชาการ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัย
เทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

คำนำ

จากประสบการณ์สอนวิชาหลักสถิติ สถิติและความน่าจะเป็น รวมถึงวิชาความน่าจะเป็นเบื้องต้น ซึ่งรายวิชาที่ได้กล่าวมาแล้วเป็นวิชาแรกของนักศึกษาระดับปริญญาตรีภาควิชาสถิติประยุกต์ในหลักสูตรต่างๆ ที่ผู้เขียนได้รับมอบหมายจากภาควิชาสถิติประยุกต์ให้สอนนับตั้งแต่ปีการศึกษา 2542 ถึงปัจจุบัน ผู้เขียนพบว่านักศึกษาที่เรียนวิชาเหล่านี้มีพื้นฐานทางคณิตศาสตร์และสถิติที่แตกต่างกัน ในปี พ.ศ. 2547 ผู้เขียนได้จัดทำตำราหลักสถิติซึ่งสื่อสารความเข้าใจโดยใช้รูปภาพแสดงรายละเอียดและความสัมพันธ์ของเนื้อหาในบทเรียน เพื่อช่วยให้ผู้เรียนที่ไม่ชำนาญในการสร้างโมเดลของฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ หรือลำดับขั้นตอนของการทดลองสามารถมองเห็นภาพของปัญหานั้นได้อย่างชัดเจนมากยิ่งขึ้น ปีการศึกษา 2558 ผู้เขียนจึงจัดทำตำราความน่าจะเป็นเบื้องต้น เพื่อเป็นตำราที่ผู้เรียนสามารถเข้าใจเนื้อหาการเรียนรู้ได้ง่ายขึ้นเช่นเดียวกับตำราหลักสถิติที่เคยได้จัดทำไว้ โดยคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์พิจารณาให้เป็นตำราในโครงการที่ได้รับทุนสนับสนุนการผลิตตำราเรียนประจำปีงบประมาณ 2559 ตำราเล่มนี้ประกอบด้วยบทเรียนทั้งหมด 5 บท โดยในตอนท้ายของแต่ละบทเรียนมีแบบฝึกหัดซึ่งเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับผู้เรียนได้ทดสอบความเข้าใจของตนเอง และสามารถตรวจสอบความถูกต้องได้จากเฉลยแบบฝึกหัดที่อยู่ในส่วนท้ายของตำราเล่มนี้

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดามารดาผู้คอยส่งเสริมให้กำลังใจมาโดยตลอด และรองศาสตราจารย์ ดร.ธีรพร วีระถาวร ผู้สอนและอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ผู้ให้คำแนะนำในการเชื่อมโยงทฤษฎีความน่าจะเป็นและสถิติให้เกิดความเข้าใจอย่างกระจ่างต่อผู้เขียน คณาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทวิชาการและวิชาชีพให้แก่ผู้เขียนจนมีวันนี้ และคณาจารย์ภาควิชาสถิติประยุกต์ทุกท่านที่เป็นกำลังใจและให้คำแนะนำในการปรับปรุงต้นฉบับเพื่อให้ได้ตำราที่สื่อความหมายได้อย่างถูกต้องและง่ายต่อการเข้าใจ

ท้ายที่สุดนี้ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า ตำราเล่มนี้จะเป็นมีประโยชน์ต่อนักศึกษาและผู้สนใจทั่วไป สำหรับความดีงามอันเกิดจากตำราเล่มนี้ผู้เขียนขอน้อมถวายแด่องค์สมเด็จพระสัมมาสัมพุทธเจ้า และขอน้อมมอบให้แก่บุพพการีที่ให้ชีวิตและการอบรมเลี้ยงดู คณาจารย์ทุกท่านที่ประสิทธิ์ประสาทความรู้และให้ความกรุณาต่อศิษย์มาโดยตลอด หากมีข้อผิดพลาดคลาดเคลื่อนใดๆ ในตำราเล่มนี้ หรือต้องการแสดงความคิดเห็น โปรดแจ้งมายังผู้เขียนจักขอบคุณยิ่ง ทั้งนี้เพื่อนำไปแก้ไขปรับปรุงให้ดีขึ้นในโอกาสต่อไป

นุชรินทร์ ทิพย์วรรณการ

สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 การวิเคราะห์การจัดหมู่	1
1.1 หลักการพื้นฐานของการนับ	2
1.2 การสุ่มตัวอย่าง	6
1.2.1 การจัดลำดับ	8
1.2.2 การจัดหมู่	16
แบบฝึกหัดท้ายบท	23
บทที่ 2 ความน่าจะเป็น	27
2.1 นิยามศัพท์	28
2.2 ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์	31
2.3 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข	39
2.4 ความเป็นอิสระ	46
2.5 ทฤษฎีของเบย์	50
แบบฝึกหัดท้ายบท	54
บทที่ 3 ตัวแปรสุ่ม	59
3.1 ตัวแปรสุ่ม	60
3.1.1 ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง	61
3.1.1.1 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง	62
3.1.1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม	68
3.1.2 ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง	73
3.1.2.1 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง	74
3.1.2.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม	81

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
3.2 ตัวแปรสุ่มสองมิติ	87
3.2.1 ฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม	88
3.2.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นสะสมร่วม	96
3.2.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นมาร์จิ้นัล	103
3.2.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข	111
3.2.5 ความเป็นอิสระ	114
3.3 ค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์	118
3.3.1 ค่าคาดหวังทางคณิตศาสตร์ของตัวแปรสุ่ม	119
3.3.2 ค่าคาดหวังแบบมีเงื่อนไข	131
3.3.3 ความแปรปรวน	133
3.4 ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์	150
3.4.1 โมเมนต์ที่ k และโมเมนต์ที่ k รอบศูนย์กลางของตัวแปรสุ่ม	150
3.4.2 ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์	165
แบบฝึกหัดท้ายบท	171
บทที่ 4 การแจกแจงความน่าจะเป็นไม่ต่อเนื่อง	179
4.1 การแจกแจงสมำเสมอไม่ต่อเนื่อง	179
4.2 การแจกแจงแบร์นูลลี	182
4.3 การแจกแจงทวินาม	184
4.4 การแจกแจงทวินามลบ	188
4.5 การแจกแจงเรขาคณิต	190
4.6 การแจกแจงพหุนาม	192
4.7 การแจกแจงไฮเพอร์จีโอเมตริก	195

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
4.8 การแจกแจงปัวซอง	201
แบบฝึกหัดท้ายบท	206
บทที่ 5 การแจกแจงความน่าจะเป็นต่อเนื่อง	211
5.1 การแจกแจงสม่ำเสมอต่อเนื่อง	211
5.2 การแจกแจงปกติ	215
5.3 การแจกแจงซิก้ากำลัง	225
5.4 การแจกแจงแกมมา	227
5.5 การแจกแจงไคสแควร์	229
5.6 การแจกแจงเอฟ	232
5.7 การแจกแจงที	235
แบบฝึกหัดท้ายบท	238
เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบท	243
บรรณานุกรม	253
ภาคผนวก	255
ดัชนี	291

บทที่ 1

การวิเคราะห์การจัดหมู่

การตัดสินใจเป็นกระบวนการที่จะเกิดขึ้นเมื่อผู้ตัดสินใจมีทางเลือกมากกว่าหนึ่งทางเลือก ดังนั้นรายละเอียดต่างๆ ของแต่ละทางเลือกเป็นสิ่งสำคัญที่มีผลต่อการตัดสินใจ หากผู้ตัดสินใจไม่ทราบจำนวนทางเลือกที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด การตัดสินใจนั้นอาจไม่ใช่การตัดสินใจที่เหมาะสมที่สุดก็ได้ ดังนั้นในปัญหาใดๆ เราควรจะทราบจำนวนทางเลือกทั้งหมดที่อาจเป็นไปได้แล้วหารายละเอียดที่ช่วยในการตัดสินใจของแต่ละทางเลือกเพื่อเปรียบเทียบกัน จากนั้นเลือกทางเลือกที่เหมาะสมที่สุดจะช่วยให้ตัดสินใจได้อย่างมีประสิทธิภาพ ตัวอย่างเช่น พนักงานติดตามหนี้สินคนหนึ่งต้องติดตามลูกหนี้ของบริษัทหลายรายใน 4 จังหวัด เขาควรเลือกเส้นทางการเดินทางใดจึงจะมีประสิทธิภาพดีที่สุด การเลือกเส้นทางที่มีประสิทธิภาพอาจคำนึงถึงค่าใช้จ่ายหรือระยะเวลาของการเดินทาง ดังนั้นเขาควรมีข้อมูลเกี่ยวกับค่าใช้จ่ายหรือระยะเวลาที่ใช้ในการเดินทางของเส้นทางทุกเส้นทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดเสียก่อน หรือบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งต้องการแบ่งประเภทผู้เอาประกันภัยรถยนต์ตามเงื่อนไขต่างๆ ดังนี้ 1) เพศ แบ่งเป็น 2 กลุ่ม คือ ชาย หรือหญิง 2) ช่วงอายุ แบ่งเป็น 3 ช่วง คือ อายุต่ำกว่า 25 ปี อายุระหว่าง 25 ถึง 60 ปี หรืออายุมากกว่า 60 ปี 3) เขตที่พักอาศัย แบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม คือ ในเมือง ชานเมือง หรือนอกเมือง 4) ระยะทางที่ขับรถเพื่อไปทำงาน แบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม คือ ระยะทางน้อยกว่า 10 กิโลเมตร ระยะทางระหว่าง 10 ถึง 30 กิโลเมตร หรือระยะทางมากกว่า 30 กิโลเมตร 5) ราคาของรถยนต์ที่เอาประกันภัย แบ่งออกเป็น 3 กลุ่ม คือ ราคาต่ำกว่า 500,000 บาท ราคาระหว่าง 500,000 ถึง 1,000,000 บาท หรือราคาสูงกว่า 1,000,000 บาท ดังนั้นบริษัทจะจัดประเภทผู้เอาประกันภัยเพื่อกำหนดระดับเบี้ยประกันภัยได้ทั้งสิ้นที่ประเภท หรือรายการเกมโชว์รายการหนึ่ง ผู้แข่งขันจะต้องเรียงตัวเลข 4 ตัวที่ทางรายการเตรียมไว้ ดังนั้นเขาจึงต้องคำนวณโอกาสที่คำตอบที่เขาทายจะถูกต้อง การคำนวณโอกาสที่จะทายถูกจะต้องทราบว่าคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมดกี่แบบ

จะเห็นว่าการหาจำนวนทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัญหาที่มีรายละเอียดไม่มาก การจำแนกรายละเอียดทั้งหมดแล้วนับจำนวนทางเลือกทำได้ไม่ยาก แต่ถ้าปัญหามีรายละเอียดหรือเงื่อนไขมาก การจำแนกรายละเอียดจะยุ่งยากและเสียเวลามาก จึงจำเป็นต้องใช้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ช่วยคำนวณหาจำนวนทางเลือกที่เป็นไปได้ทั้งหมดแทนการนับจำนวนทางเลือกทั้งหมด

ในบทเรียนนี้จะกล่าวถึงวิธีการคำนวณจำนวนทางเลือกหรือผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลอง โดยแบ่งเนื้อหาออกเป็น

- 1) หลักการพื้นฐานของการนับ
- 2) การสุ่มตัวอย่าง

ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

1.1 หลักการพื้นฐานของการนับ (Principle of counting)

1) หลักเกณฑ์ของการบวก (Addition principle)

ถ้าการทดลองหนึ่งๆ ประกอบด้วย ทางเลือกตั้งแต่สองทางขึ้นไป และทางเลือกเหล่านี้เกิดขึ้นพร้อมกันไม่ได้ ต้องเลือกเพียงทางเลือกเดียวเท่านั้น เช่น ถ้านายสมเดชต้องการตัดผมโดยมีทรงผมให้เลือก 2 แบบ เขาจะต้องเลือกตัดผมแบบใดแบบหนึ่งเท่านั้นไม่สามารถเลือกตัดผม 2 แบบพร้อมๆ กันได้ หรือการโยนเหรียญเที่ยงตรงหนึ่งเหรียญ 1 ครั้ง จะหยายหน้าหัวหรือหน้าก้อยอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

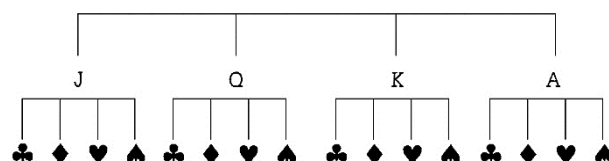
นิยามที่ 1 หลักเกณฑ์ของการบวก

กำหนดให้การทดลองหนึ่งมีทางเลือกที่เป็นไปได้ k ทางเลือก และในแต่ละทางเลือกมีผลการทดลอง n_i วิธีที่แตกต่างกัน โดยที่ $i=1, 2, \dots, k$

$$\text{จำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด} = n_1 + n_2 + \dots + n_k \text{ แบบ}$$

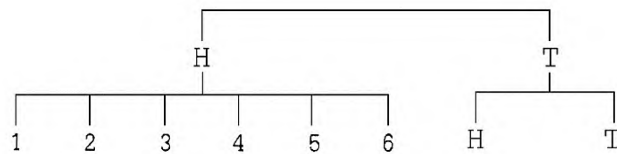
ตัวอย่างที่ 1 หยิบไพ่หนึ่งใบจากไพ่ทั้งสำรับ จงหาจำนวนวิธีที่จะหยิบได้ไพ่แฉ็ค ควีน คิง หรือ เอจ

วิธีทำ การทดลองหยิบไพ่หนึ่งใบจากไพ่อำรับหนึ่ง จะมีผลลัพธ์เป็นสองแบบพร้อมกันไม่ได้ เช่น หยิบได้ ไพ่แฉ็คและควีนพร้อมๆ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่สามารถเกิดขึ้นได้ เป็นต้น ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะหยิบได้ ไพ่แฉ็ค ควีน คิง หรือ เอจ สามารถหาได้จากการนำจำนวนวิธีหยิบได้ไพ่แต่ละแบบมารวมกัน คือ $4+4+4+4 = 16$ วิธี ดังรูป



ตัวอย่างที่ 2 การทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรงหนึ่งเหรียญ 1 ครั้ง ถ้าเหรียญหงายหน้าหัวให้โยนลูกเต๋ายี่ตรงหนึ่งลูก 1 ครั้ง ถ้าเหรียญหงายหน้าก้อยให้ทดลองโยนเหรียญเดิมอีก 1 ครั้ง จงหาจำนวนผลลัพธ์ของการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ การทดลองนี้มีสองทางเลือกในขั้นตอนแรก คือ ได้เหรียญหงายหน้าหัว หรือหงายหน้าก้อย จึงนับจำนวนผลลัพธ์เป็นได้จากแต่ละทางเลือกมารวมกัน ดังนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด $= 6 + 2 = 8$ วิธี แสดงได้ดังรูป



ตัวอย่างที่ 3 การแจกรางวัลในงานเลี้ยงฉลองประจำปีของบริษัทแห่งหนึ่ง ผู้รับรางวัลมีโอกาสเลือกประเภทของรางวัล โดยต้องเลือกอย่างใดอย่างหนึ่งระหว่างเงินสดหรือสิ่งของ หากเขาเลือกประเภทเงินสด เขาจะต้องสุ่มเลือกซองเงินหนึ่งซองจากซองทั้งหมด 4 ซองที่มีลักษณะภายนอกเหมือนกัน โดยแต่ละซองจะมีเงินสดอยู่ 500 บาท 1,000 บาท 1,500 บาท หรือ 2,000 บาท หากเขาเลือกประเภทสิ่งของ เขาจะต้องสุ่มเลือกกล่องหนึ่งกล่องจากกล่องทั้งหมด 3 กล่องที่มีลักษณะภายนอกเหมือนกันทั้งหมด โดยแต่ละกล่องบรรจุสิ่งของที่แตกต่างกัน คือ ปากกา 1 ด้าม โทรศัพท์มือถือ 1 เครื่อง หรือโทรศัพท์ไร้สาย 1 เครื่อง หากเงื่อนไขของการรับรางวัลคือเขาไม่สามารถจับต้องของรางวัลใดๆ ได้ก่อนตัดสินใจ ท่านคิดว่าเขาสามารถเลือกรางวัลได้แตกต่างกันกี่แบบ

วิธีทำ 1) การทดลองมีเพียงขั้นตอนเดียว คือ เลือกของรางวัลเพียง 1 ชิ้น
 2) มีทางเลือก 2 ทาง คือ เงินสด (มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 4 แบบ)
 หรือสิ่งของ (มีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 3 แบบ)
 3) จำนวนผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $4 + 3 = 7$ วิธี (โดยใช้หลักเกณฑ์การบวก)
 เพราะฉะนั้นผู้รับรางวัลมีวิธีเลือกของรางวัลได้แตกต่างกันทั้งหมด 7 แบบ แสดงได้ดังรูป



2) หลักเกณฑ์ของการคูณ (Multiplication principle)

ถ้าการทดลองหนึ่งๆ ประกอบด้วยขั้นตอนหลายขั้นตอน และในแต่ละขั้นตอนไม่ว่าจะได้ผลลัพธ์เป็นอย่างไรจะต้องทำขั้นตอนต่อไปจนกว่าครบทุกขั้นตอน จำนวนผลการทดลองทั้งหมดคำนวณได้จากผลคูณของจำนวนผลลัพธ์ในแต่ละขั้นตอน เช่น การทดลองโยนเหรียญเที่ยงตรงหนึ่งเหรียญ 2 ครั้ง ไม่ว่าผลลัพธ์จากการโยนเหรียญครั้งแรกจะเป็นปรากฏหน้าหัวหรือหน้าก้อยก็ตาม จะต้องทดลองโยนเหรียญอีกครั้งเสมอ

นิยามที่ 2 หลักเกณฑ์ของการคูณ

กำหนดให้ การทดลองหนึ่งมีขั้นตอนการทำงาน k ขั้นตอน ในแต่ละขั้นตอนให้ผลการทดลอง n_i วิธีที่แตกต่างกัน โดยที่ $i=1, 2, \dots, k$

$$\text{จำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด} = n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k \text{ แบบ}$$

ตัวอย่างที่ 4 สมมติให้แผ่นป้ายทะเบียนรถยนต์ประกอบด้วยตัวอักษรภาษาไทย 2 ตัวที่แตกต่างกัน และตามด้วยตัวเลข 4 ตัว ซึ่งตัวแรกไม่เป็นศูนย์ จะมีแผ่นป้ายทะเบียนแตกต่างกันทั้งสิ้นกี่แผ่น

วิธีทำ จากโจทย์จะพบว่า

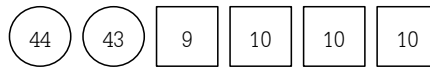
1) การทดลองมีทั้งหมด 6 ขั้นตอน คือเลือกตัวอักษร 2 ขั้นตอน และเลือกตัวเลข 4 ขั้นตอน

2) นับจำนวนผลลัพธ์ในแต่ละขั้นตอน ดังนี้

- ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวอักษร 1 ตัว จากบรรดาตัวอักษรภาษาไทยทั้งหมด 44 ตัว
- ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวอักษร 1 ตัว จากบรรดาตัวอักษรภาษาไทยที่เหลืออยู่ทั้งหมด 43 ตัว (เนื่องจากต้องไม่ซ้ำกับตัวอักษรที่เลือกไว้แล้ว)
- ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขตัวแรก 1 ตัวจากตัวเลขทั้งหมดที่จำนวน 9 ตัว (ตัวเลขตัวแรกต้องไม่เป็นศูนย์ จึงมีเพียงเลข 1 ถึง 9 เท่านั้น)
- ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวเลขตัวที่สอง 1 ตัวจากตัวเลขทั้งหมด 10 ตัว
- ขั้นตอนที่ 5 เลือกตัวเลขตัวที่สาม 1 ตัวจากตัวเลขทั้งหมด 10 ตัว
- ขั้นตอนที่ 6 เลือกตัวเลขตัวที่สี่ 1 ตัวจากตัวเลขทั้งหมด 10 ตัว

(ตัวเลขตัวที่สอง สาม และสี่ ไม่มีข้อกำหนดใดๆ แสดงว่าเป็นศูนย์ได้หรือซ้ำกับตัวเลขที่ได้เลือกไว้แล้วก็ได้)

3) คำนวณจำนวนแผ่นป้ายทะเบียนทั้งหมด โดยนำจำนวนผลลัพธ์ในแต่ละขั้นตอนมาคูณกัน (โดยใช้หลักเกณฑ์การคูณ) คือ $44 \times 43 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 = 17028 \times 10^3$ แผ่น สามารถแสดงได้ดังรูป



ตัวอย่างที่ 5 จากตัวอย่างที่ 4 แผ่นป้ายทะเบียนรถยนต์ประกอบด้วยตัวอักษรภาษาไทย 2 ตัวที่แตกต่างกัน และตามด้วยตัวเลข 4 ตัว ซึ่งตัวแรกไม่เป็นศูนย์ อยากทราบว่าแผ่นป้ายทะเบียนที่เป็นเลขคี่และตัวเลขไม่ซ้ำกันเลย

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 4 ขั้นตอนที่ 1-2 จะเหมือนเดิม ดังนั้นจะแสดงเฉพาะขั้นตอนที่ 3-6 ดังนี้

- พิจารณาเลขคี่ แสดงว่าในขั้นตอนที่ 6 เลือกตัวเลข 1 ตัวจากบรรดาตัวเลขทั้งหมด 5 ตัว

(มีตัวเลขที่เป็นเลขคี่ เพียง 5 ตัว คือ 1 3 5 7 และ 9)

- ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลข 1 ตัวจากบรรดาตัวเลขที่เหลืออยู่ทั้งหมด 8 ตัว

(ตัวเลขตัวแรกจะต้องไม่เป็นศูนย์ และต้องเป็นตัวเลขที่ไม่ซ้ำกับตัวเลขที่เลือกไว้แล้ว นั่นคือ ถ้าเป็น

เลขคู่ จะมีเพียงเลข 2 4 6 และ 8 ถ้าเป็นเลขคี่ จะเป็นตัวเลขที่เหลืออยู่จากการเลือกในขั้นตอนที่ 6 จำนวน 4 ตัว รวมแล้วจึงมีเพียง 8 ตัวเท่านั้น)

- ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวเลข 1 ตัวจากบรรดาตัวเลขที่เหลืออยู่ทั้งหมด 8 ตัว

(ตัวเลขที่เหลือจากขั้นตอนที่ 3 จำนวน 7 ตัว และตัวเลขศูนย์)

- ขั้นตอนที่ 5 เลือกตัวเลข 1 ตัวจากบรรดาตัวเลขที่เหลืออยู่ทั้งหมด 7 ตัว

ดังนั้น จำนวนแผ่นป้ายทะเบียนที่เป็นเลขคี่และมีตัวเลขไม่ซ้ำกันทั้งหมดจะเป็น

$$44 \times 43 \times 8 \times 8 \times 7 \times 5 = 4238080 \text{ แผ่น สามารถแสดงได้ดังรูป}$$



ตัวอย่างที่ 6 จากตัวอย่างที่ 4 แผ่นป้ายทะเบียนรถยนต์ประกอบด้วยตัวอักษรภาษาไทย 2 ตัวที่แตกต่างกัน และตามด้วยตัวเลข 4 ตัว ซึ่งตัวแรกไม่เป็นศูนย์ จงหา

ก) จำนวนวิธีถ้าตัวเลขหลักหน่วยและพันเป็นศูนย์ไม่ได้

$$(44) (43) [9] [10] [10] [9] = 15,325,200$$

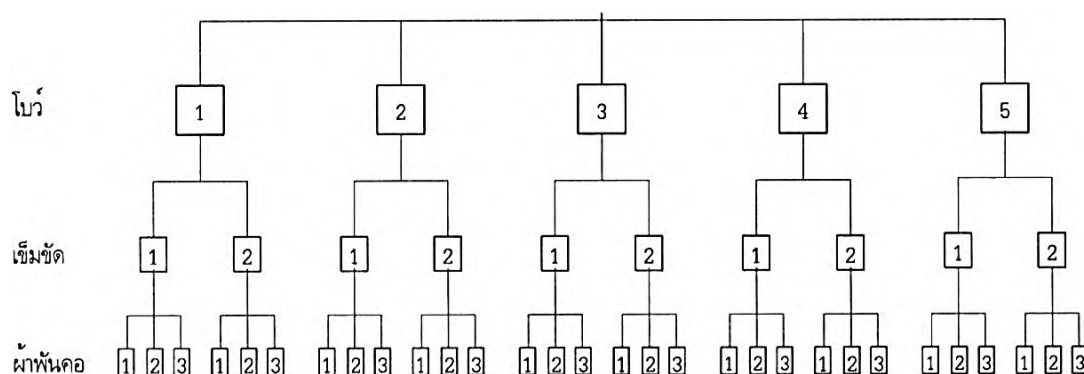
ข) จำนวนวิธีถ้าตัวเลขหลักหน่วยและสิบเป็น 9 เท่านั้น

$$(44) (43) [9] [10] [1] [1] = 179,280$$

ตัวอย่างที่ 7 ชะเอมต้องการเลือกเครื่องประดับสำหรับใส่ไปเที่ยว เธอมีโบว์ติดผมสีต่างกัน 5 สี เข็มขัดสีต่างกัน 2 สี และผ้าพันคอสีต่างกัน 3 สี ชะเอมจะเลือกเครื่องประดับได้กี่แบบ

วิธีทำ การทดลองแบ่งออกเป็น 3 ขั้นตอน โดยชะเอมต้องแต่งเครื่องประดับให้ครบทั้ง 3 ชิ้น

ดังนั้นจำนวนแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมด $= 5 \times 2 \times 3 = 30$ แบบ แสดงได้ดังรูป

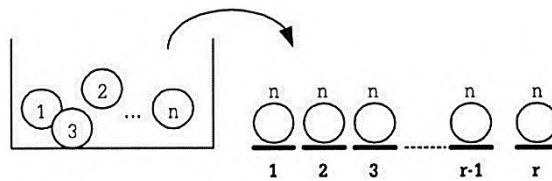


1.2 การสุ่มตัวอย่าง

การคำนวณหาจำนวนทางเลือกหรือผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะขึ้นอยู่กับว่าอยมให้ผลการทดลองในแต่ละขั้นตอนเกิดซ้ำกันได้หรือไม่ ศึกษาเรื่องนี้โดยใช้ตัวแบบจำลองของการสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่อง (Urn model) ซึ่งมีข้อสมมติดังนี้

กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลที่แตกต่างกันทั้งหมด n ลูก (กำหนดหมายเลขให้แก่ลูกบอลแต่ละลูก โดยต้องไม่มีเลขซ้ำกัน นั่นคือในกล่องจะมีลูกบอลที่ติดหมายเลข $1, 2, 3, \dots, n$) ทดลองสุ่มหยิบลูกบอลครั้งละหนึ่งลูกจากกล่อง บันทึกหมายเลขที่ติดอยู่บนลูกบอลไว้ในตำแหน่งที่ $1, 2, 3, \dots, r$ ตามลำดับ ซึ่งวิธีการทดลองสุ่มหยิบลูกบอลทำได้ 2 แบบ ดังนี้

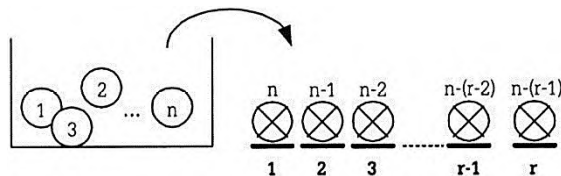
1) การสุ่มแบบใส่คืน (Sampling with replacement) เมื่อสุ่มลูกบอลลูกแรกให้บันทึกหมายเลขลงในตำแหน่งที่ 1 แล้วให้นำลูกบอลดังกล่าวใส่กลับเข้าไปในกล่องก่อนที่จะสุ่มหยิบลูกบอลต่อไป ดังนั้นการหยิบลูกบอลเพื่อบันทึกหมายเลขลงในตำแหน่งที่ $1, 2, 3, \dots, r$ นั้น อาจหยิบได้ลูกบอลที่มีหมายเลขซ้ำกันได้ จะพบว่าในแต่ละตำแหน่งจะยังคงมีจำนวนลูกบอลให้เลือกเท่าเดิมเสมอ คือ จำนวน n ลูก



รูปที่ 1 การทดลองสุ่มแบบใส่คืน

$$\text{จำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นทั้งหมด} = n \times n \times \dots \times n = n^r \text{ แบบ}$$

2) การสุ่มแบบไม่ใส่คืน (Sampling without replacement) เมื่อสุ่มลูกบอลลูกแรกให้บันทึกหมายเลขลงในตำแหน่งที่ 1 แล้วให้ลูกบอลดังกล่าวไว้นอกกล่อง จากนั้นจึงสุ่มหยิบลูกบอลต่อไป ดังนั้นการหยิบลูกบอลเพื่อบันทึกหมายเลขลงในตำแหน่งที่เหลือจะไม่มีตำแหน่งใดที่หยิบได้ลูกบอลหมายเลขซ้ำกันเลย ดังนั้นจะพบว่าในแต่ละตำแหน่งจะมีจำนวนลูกบอลให้เลือกลดลงครั้งละ 1 ลูกเสมอ ดังนั้นจำนวนครั้งที่หยิบลูกบอลได้มากที่สุดไม่เกินจำนวนลูกบอลที่มีอยู่ นั่นคือ $r \leq n$



รูปที่ 2 การทดลองสุ่มแบบไม่ใส่คืน

จำนวนผลลัพธ์ในแต่ละครั้ง (ขั้นตอน) จะลดลงครั้งละ 1 แต่ทั้งนี้จะต้องพิจารณาต่อไปว่า ถ้ารูปแบบการจัดเรียงลำดับของลูกบอลที่มีหมายเลขแตกต่างกันถือว่าเป็นวิธีที่แตกต่างกันจะมีผลให้จำนวนผลการทดลองเพิ่มขึ้นเรียกว่า การจัดลำดับ แต่ถ้าการจัดเรียงลำดับของลูกบอลที่มีหมายเลขแตกต่างกันไม่ถือว่าเป็นวิธีที่แตกต่างกัน ดังนั้นการจัดเรียงลำดับไม่ทำให้จำนวนผลการทดลองเพิ่มขึ้น เรียกว่า การจัดหมู่ ซึ่งจะได้อธิบายต่อไป

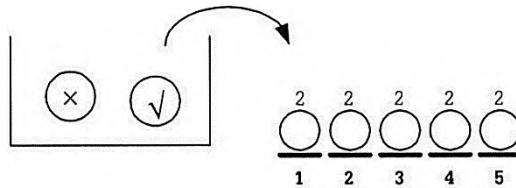
ตัวอย่างที่ 8 ข้อสอบวิชาหนึ่งมีคำถามประเภทเลือกตอบว่าถูกหรือผิดจำนวน 5 ข้อ นักศึกษาคนหนึ่งจะตอบคำถามได้กี่วิธีที่แตกต่างกัน ถ้าเขาเดาคำตอบของข้อสอบชุดนี้ครบทุกข้อ

- วิธีทำ**
- 1) การทดลองนี้มีทั้งหมด 5 ขั้นตอน (ทำข้อสอบทีละข้อโดยทำทุกข้อ)
 - 2) จำนวนผลลัพธ์ของแต่ละขั้นตอนเป็น 2 ทางเลือก (เลือกถูกหรือผิดอย่างใดอย่างหนึ่ง)

3) คำตอบแต่ละข้อสามารถเลือกซ้ำกันได้ (ตอบ ✓ ในข้อแรกแล้วสามารถตอบ ✓ ในข้ออื่นได้อีก)

4) จำนวนผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด (โดยหลักเกณฑ์การคูณ) ของการทำข้อสอบนี้คือ

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 \text{ สามารถแสดงได้ดังรูป}$$



ตัวอย่างที่ 9 ถ้ามีข้อสอบชนิดเลือกตอบ 5 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ แบบถูกหรือผิดจำนวน 5 ข้อ จะมีวิธีหาคำตอบทั้งหมดของข้อสอบชุดนี้ได้กี่แบบ

- วิธีทำ**
- 1) การทดลองนี้มีทั้งหมด 15 ขั้นตอน (ทำข้อสอบทีละข้อ และต้องทำให้ครบทุกข้อ)
 - 2) จำนวนผลลัพธ์ของแต่ละขั้นตอน เป็นดังนี้
 - สำหรับข้อสอบแบบ 5 ตัวเลือก แต่ละข้อจะมีวิธีตอบได้ 5 แบบ
 - สำหรับข้อสอบแบบถูกหรือผิด แต่ละข้อจะมีวิธีตอบได้ 2 แบบ
 - 3) การหยิบตัวอย่างแต่ละครั้งสามารถซ้ำกันได้ (แนวคิดเหมือนกับตัวอย่างที่ 8)
 - 4) จำนวนผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $5^{10} \times 2^5$ แบบ

ตัวอย่างที่ 10 บริษัทแห่งหนึ่งมีพนักงาน 30 คน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่พนักงานจะมีวันเกิดในวันใดๆ ก็ได้ใน 1 ปี (ถ้ากำหนดให้ 1 ปีมี 365 วัน)

- วิธีทำ**
- 1) การทดลองนี้มีทั้งหมด 30 ขั้นตอน (จัดวันเกิดให้พนักงาน 30 คน โดยต้องจัดให้แก่ทุกคน)
 - 2) จำนวนผลลัพธ์ของแต่ละขั้นตอนเป็น 365 ทางเลือก (เลือกวันใดวันหนึ่งใน 1 ปีซึ่งมี 365 วัน)
 - 3) พนักงานแต่ละคนสามารถมีวันเกิดซ้ำกันได้
 - 4) จำนวนผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมด (โดยหลักเกณฑ์การคูณ) คือ 365^{30} วิธี

1.2.1 การจัดลำดับ (Permutation)

การทดลองสุ่มแบบไม่ใส่คืน ถ้าลำดับการเรียงของหมายเลขลูกบอลแตกต่างกัน ถือว่าเป็นผลการทดลองที่แตกต่างกันแล้ว แสดงว่าลำดับมีผลต่อการคำนวณจำนวนผลลัพธ์ของการทดลอง เรียกการทดลองดังกล่าวว่า การจัดลำดับหรือการจัดเรียงลำดับ เช่น AB จะแตกต่างจาก BA เพราะตำแหน่งของ A อยู่ในลำดับที่แตกต่างกัน

และเพื่อให้การคำนวณจำนวนวิธีการสุ่มตัวอย่างแบบไม่ใส่คืนเขียนอยู่ในรูปสูตรที่ง่ายต่อการจดจำ สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต้องทราบก่อน คือ แฟกทอเรียล n

นิยามที่ 1 แฟกทอเรียล n (n-Factorial)

แฟกทอเรียล n เขียนแทนด้วย $n!$ หมายถึง ผลคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n โดยกำหนดให้ $0!=1$ กล่าวได้ว่า

$$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 \times 0!$$

เมื่อ n มีขนาดใหญ่ เราสามารถประมาณค่า $n!$ โดยใช้การประมาณของสเตอร์ลิง (Stirling's approximation)

$$\text{ดังนี้ } n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

การจัดลำดับสามารถกระทำได้ 2 แนวทาง คือ การจัดลำดับในแนวเส้นตรง และการจัดลำดับในแนววงกลม ดังมีรายละเอียดต่อไปนี้

1.2.1.1 การจัดลำดับในแนวเส้นตรง

การคำนวณเหมือนกับการหยิบลูกบอลแบบไม่ใส่คืนครั้งละ 1 ลูก ดังแสดงในรูปที่ 2 โดยจำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นทั้งหมด คือ

$$\begin{aligned} n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1) &= n(n-1)(n-2) \dots (n-r+1) \frac{(n-r)(n-r-1) \dots (3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1) \dots (3)(2)(1)} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \\ &= {}^n P_r \end{aligned}$$

$$\text{จำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด} = {}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ แบบ}$$

ถ้านำลูกบอล n ลูกที่แตกต่างกันทั้งหมดมาจัดลำดับ ($r=n$) จะหมายถึง การนำลูกบอลทั้งหมดมาเรียงกัน ดังนั้นจำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นทั้งหมด เท่ากับ $n!$

ตัวอย่างที่ 11 รถไฟฟ้าขบวนหนึ่งมีที่นั่งว่างอยู่ 12 ที่นั่ง ถ้ามีผู้โดยสารขึ้นมาจำนวน 6 คน อยากทราบว่าผู้โดยสารทั้งหมดจะมีวิธีจัดที่นั่งได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ 1) การจัดที่นั่งของผู้โดยสาร 6 คน เป็นการสุมแบบไม่ใส่คืน เพราะผู้โดยสารหนึ่งคนจะนั่งบนที่นั่งเพียง 1 ที่เท่านั้น และที่นั่ง 1 ที่ จะสามารถรองรับผู้โดยสารได้เพียง 1 คนเท่านั้น เรียกการทดลองแบบนี้ว่าเป็นการสุมแบบไม่ใส่คืน ถ้านาย ก นั่งบนที่นั่งหมายเลข 1 และนาย ข นั่งบนที่นั่งหมายเลข 2 จะเป็นวิธีที่แตกต่างจากวิธีที่นาย ก นั่งบนที่นั่งหมายเลข 2 และนาย ข นั่งบนที่นั่งหมายเลข 1 ดังนั้นลำดับที่แตกต่างกันมีผลทำให้จำนวนวิธีการจัดที่นั่งเพิ่มขึ้นถือว่าเป็นการจัดลำดับ

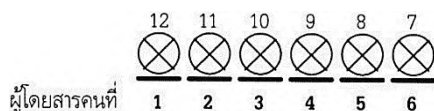
เนื่องจากการจัดที่นั่งทำให้เกิดความสับสน คือ กำหนดให้จำนวนผู้โดยสารเลือกที่นั่ง หรือจำนวนที่นั่งเลือกผู้โดยสาร จึงให้พิจารณาเงื่อนไขของการสุมแบบไม่ใส่คืนที่ว่า จำนวนขั้นตอนที่จะทำการทดลองจะต้องไม่เกินจำนวนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดการทดลองนั้นคือ $r \leq n$ พบว่าจำนวนผู้โดยสารน้อยกว่าจำนวนที่นั่ง ดังนั้นผู้โดยสารจึงเป็นผู้เลือกที่นั่ง

2) จำนวนขั้นตอนทั้งหมดที่ทดลอง คือ $r=6$ ขั้นตอน (จำนวนผู้โดยสาร)

3) จำนวนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $n=12$ แบบ (จำนวนที่นั่งว่างบนรถไฟฟ้า)

4) การจัดที่นั่งโดยผู้โดยสารเป็นผู้เลือกที่นั่ง ไม่ถือว่าเป็นแนววงกลม เพราะผู้โดยสารคนแรกจะเลือกที่นั่งก่อนคนที่สอง จึงเปรียบเสมือนการจัดในแนวเส้นตรง

5) จำนวนผลการจัดที่นั่งบนรถไฟฟ้าขบวนนี้ คือ $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 = \frac{12!}{6!}$ วิธี แสดงดังรูป



ตัวอย่างที่ 12 นักวิจัยการศึกษากลุ่มหนึ่งนำเสนอสื่อการสอนซึ่งเป็นผลงานของตนในนิทรรศการเทคโนโลยีการศึกษา ซึ่งได้แก่ สื่อประเภทซีดีรอม จำนวน 10 เรื่อง ประเภทวีดิทัศน์ จำนวน 7 เรื่อง และประเภทชิ้นงาน จำนวน 6 เรื่อง ถ้าต้องการจัดเรียงสื่อต่างๆ เหล่านี้บนชั้นนิทรรศการโดยให้สื่อประเภทเดียวกันวางอยู่ติดกันจะมีวิธีจัดเรียงได้กี่วิธี

วิธีทำ 1) การจัดเรียง หมายถึง ลำดับของสิ่งของที่แตกต่างกัน ถือว่าได้ผลลัพธ์ที่แตกต่างกัน โดยจัดลำดับตามประเภทของสื่อการสอนเสียก่อน แล้วจึงจัดลำดับให้แก่สื่อประเภทเดียวกัน ดังนี้

- ประเภทของสื่อ มี 3 ประเภท จำนวนวิธีจัดเรียงประเภทสื่อในแนวเส้นตรง เป็น 3! วิธี
- สื่อประเภทซีดีรอมสามารถเรียงสลับที่กันได้ 10! วิธี
- สื่อประเภทวีดิทัศน์สามารถเรียงสลับที่กันได้ 7! วิธี
- สื่อประเภทชิ้นงานสามารถเรียงสลับที่กันได้ 6! วิธี

2) คำนวณจำนวนวิธีในการจัดเรียงสี่ทั้งหมดบนพื้นฐานหลักการโดยให้สี่ประเภทเดียวกันต้องวางอยู่ติดกันได้ทั้งสิ้น $3!10!7!6!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 13 จงหาจำนวนวิธีที่จะหาวันเกิดของคน 4 คน โดยไม่อนุญาตให้วันเกิดซ้ำกัน (1 ปี มี 365 วัน)

วิธีทำ ${}^{365}P_4 = \frac{365!}{(365-4)!} = 1,745,860,116$ วิธี

ตัวอย่างที่ 14 จงหาจำนวนวิธีที่คน 12 คน จะเกิดในเดือนที่ต่างกัน

วิธีทำ ${}^{12}P_{12} = \frac{12!}{(12-12)!} = 12! = 479,001,600$ วิธี

ตัวอย่างที่ 15 จงหาจำนวนวิธีที่เด็ก 10 คนจะนั่งเป็นแถว โดยเด็ก 3 คนจะต้องนั่งติดกัน

วิธีทำ ${}^8P_3 {}^3P_3 = 8!3! = 241,920$ วิธี

ตัวอย่างที่ 16 จงหาจำนวนวิธีที่เด็ก 5 คนจะเข้าแถวเพื่อขึ้นรถโรงเรียน

วิธีทำ ${}^5P_5 = \frac{5!}{(5-5)!} = 5! = 120$ วิธี

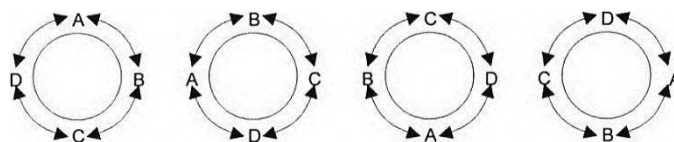
ตัวอย่างที่ 17 จงหาจำนวนวิธีที่เด็ก 5 คน จะเข้าแถวขึ้นรถโรงเรียนโดยที่มีเด็ก 2 คน ไม่ยอมยืนชิดกัน

วิธีทำ จำนวนวิธีทั้งหมดเพื่อจัดทั้งหมดเข้าแถว - จำนวนวิธีทั้งหมดที่จัดเด็ก 2 คนยืนชิดกัน

$${}^5P_5 - {}^4P_4 {}^2P_2 = 5! - 4!2! = 72 \text{ วิธี}$$

1.2.1.2 การจัดลำดับในแนวงกลม

การจัดลำดับลูกบอลที่แตกต่างกันทั้งสิ้น 4 ลูกในแนวงกลม ดังรูปที่ 3 แตกต่างหรือไม่

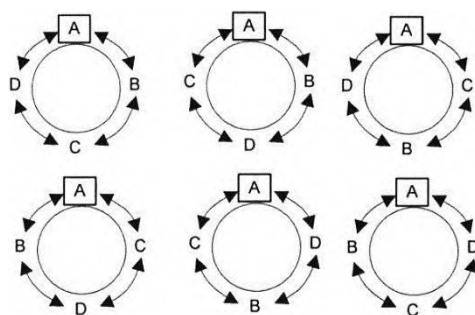


รูปที่ 3 แสดงการจัดเรียงลูกบอลที่แตกต่างกัน 4 ลูกในแนวงกลม

จากรูปที่ 3 พบว่าการจัดลำดับลูกบอลทั้ง 4 แบบไม่ถือว่าแตกต่างกัน เพราะความสัมพันธ์ระหว่างตำแหน่งของ A B C และ D ยังคงเดิมทุกรูป ความแตกต่างของการจัดเรียงในแนวงกลมกับแนวเส้นตรงคือการจัดลำดับในแนวงกลมไม่มีการกำหนดตำแหน่งหัวแถว (ตำแหน่งแรกของการจัดลำดับ) ดังนั้นก่อนการ

จัดลำดับจะต้องสูญเสียตำแหน่งใดๆ ก็ได้หนึ่งตำแหน่งในแนวงกลมเพื่อกำหนดให้เป็นเสมือนหัวแถวแล้วจึงคำนวณจำนวนผลการทดลองที่เป็นไปได้ทั้งหมดเหมือนกับการจัดลำดับลูกบอลที่เหลือในแนวเส้นตรงต่อไป

ดังนั้นการจัดลำดับในแนวงกลม จะได้รูปแบบที่แตกต่างกันทั้งหมด $3 \times 2 \times 1 = 6$ แบบ ดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 แสดงการจัดเรียงลูกบอลที่แตกต่างกัน 4 ลูกในแนวงกลมเมื่อกำหนดให้ A เป็นตำแหน่งหัวแถว

ดังนั้นจะได้ว่า หากต้องการจัดลำดับลูกบอลที่แตกต่างกัน n ลูก ในแนวงกลม จำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นทั้งหมด คือ $(n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = (n-1)!$

จำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นทั้งหมด $= (n-1)!$ แบบ
--

ตัวอย่างที่ 18 การประชุมกลุ่มย่อยของนักศึกษาวิชาการบริหารโครงการกลุ่มหนึ่งซึ่งมีนักศึกษาจำนวน 9 คน นั่งประชุมรอบโต๊ะกลม จงหาจำนวนวิธีในการจัดที่นั่งเพื่อประชุม

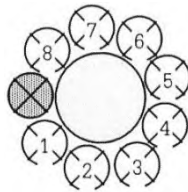
วิธีทำ 1) การจัดตำแหน่งที่นั่งของนักศึกษา 9 คน เป็นการสุ่มแบบไม่ใส่คืน เพราะเก้าอี้ 1 ที่จะมีนักศึกษาหนึ่งเพียง 1 คนเท่านั้น และนักศึกษา 1 คนจะนั่งเก้าอี้เพียง 1 ที่นั่งเท่านั้น เรียกว่าเป็นการทดลองแบบไม่ใส่คืน และลำดับที่หนึ่งที่แตกต่างของนักศึกษาถือว่าทำให้มีวิธีหนึ่งที่แตกต่างกัน จึงเรียกว่า เป็นการจัดลำดับ

2) จำนวนขั้นตอนทั้งหมดที่ทดลอง คือ $r=9$ ขั้นตอน (จำนวนที่นั่ง)

3) จำนวนผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ $n=9$ แบบ (จำนวนนักศึกษา)

4) การจัดที่นั่งรอบโต๊ะกลม ถือว่าเป็นการจัดเรียงในแนวงกลม จึงสูญเสียที่นั่ง 1 ตำแหน่งเพื่อกำหนดให้เป็นหัวแถว (ให้ใครก็ได้หนึ่งลงในตำแหน่งนั้น) สำหรับการจัดเรียงที่นั่งที่เหลืออยู่ในแนวเส้นตรง

5) จำนวนผลการจัดที่นั่งรอบโต๊ะกลม คือ $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 8!$ แสดงดังรูป



ตัวอย่างที่ 19 จากตัวอย่างที่ 18 ถ้านักศึกษา 9 คนนี้มี 4 คนที่ไม่ยอมนั่งติดกันพร้อมกัน 4 คน จงหาจำนวนวิธีในการจัดที่นั่งเพื่อประชุม

วิธีทำ วิธีการจัดที่นั่งให้คน 9 คนซึ่งมี 4 คนที่ไม่ยอมนั่งติดกันพร้อมๆ กันทั้ง 4 คน สามารถหาได้จากจำนวนวิธีจัดลำดับที่นั่งที่เป็นไปได้ทั้งหมดแล้วหักออกด้วยจำนวนวิธีที่จัดให้คนทั้ง 4 นั่งติดกันนั่นเอง

1) จำนวนวิธีจัดลำดับที่นั่งรอบโต๊ะกลมให้นักศึกษาทั้งหมดได้แตกต่างกัน $(9-1)! = 8!$ ดังรูปที่ 5 (ก)

2) การจัดลำดับที่นั่งรอบโต๊ะกลม โดยมีนักศึกษา 4 คนนั่งติดกันทั้งหมด ทำได้โดย

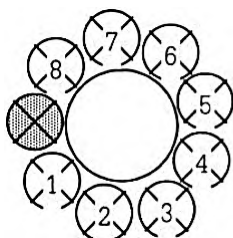
2.1) ให้นักศึกษาทั้ง 4 คนถูกผูกเข้าไว้ด้วยกันแล้วพิจารณาเป็นหน่วยเดียวกัน ซึ่งหมายความว่า ทุกๆ ครั้งที่ย้ายตำแหน่งหน่วยนี้จะต้องมีเก้าอี้มารองรับ 4 ที่นั่งเสมอ ดังนั้นจำนวนหน่วยที่จะนำมาจัดที่นั่งจาก 9 หน่วย จะกลายเป็น 6 หน่วย ดังนั้นการจัดลำดับในแนววงกลมจะได้จำนวนวิธีจัดลำดับที่แตกต่างกันทั้งสิ้นเป็น $(6-1)! = 5!$ ดังรูปที่ 5 (ข)

2.2) นักศึกษาที่ถูกผูกเข้าไว้ด้วยกันสามารถจัดที่นั่งสลับกันได้ในแนวเส้นตรง ซึ่งจะมีความหมายเหมือนกันทุกวิธี คือ นักศึกษาทั้ง 4 คนนี้นั่งติดกัน จำนวนวิธีจัดลำดับที่แตกต่างกันทั้งสิ้นเป็น $4!$ ดังรูปที่ 5 (ค)

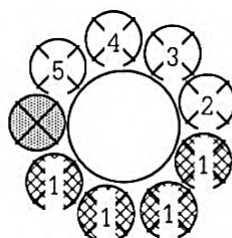
ดังนั้นจำนวนวิธีจัดที่นั่งรอบโต๊ะกลมโดยมีนักศึกษา 4 คนนั่งติดกัน จัดลำดับได้แตกต่างกันทั้งสิ้น

$5!4!$

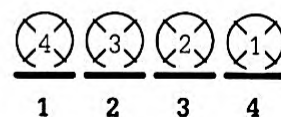
3) จำนวนผลการทดลองที่เป็นไปได้สำหรับการจัดให้นักศึกษา 9 คนนั่งรอบโต๊ะกลมโดยที่มีนักศึกษา 4 คนไม่ยอมนั่งติดกันพร้อมๆ กัน คือ $8! - 5!4!$ วิธี นั่นเอง



(ก)



(ข)



(ค)

รูปที่ 5 แสดงจัดลำดับที่นั่งของนักศึกษา

ตัวอย่างที่ 20 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดเด็ก 10 คนให้หนึ่งเป็นวงกลมโดยมีเด็ก 3 คนจะต้องนั่งติดกันเสมอ

วิธีทำ $(8-1)!3! = 7!3!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 21 จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดชาย 4 คน หญิง 4 คนให้หนึ่งเป็นวงกลม โดยชายหญิงนั่งสลับกัน

วิธีทำ $(4-1)!4! = 3!4!$ วิธี

1.2.1.3 การจัดลำดับสิ่งของที่แตกต่างกันไม่ทั้งหมด n สิ่งในแนวเส้นตรง

ถ้ากำหนดให้มีอักษร 3 ตัว คือ X Y Z นำมาจัดลำดับในแนวเส้นตรงได้แตกต่างกัน $3!$ วิธี แสดงวิธีการจัดลำดับที่เป็นไปได้ทั้งหมดดังรูปที่ 6

XYZ	YXZ	ZXY
XZY	YZX	ZYX

รูปที่ 6 แสดงรูปแบบการจัดลำดับของตัวอักษรที่แตกต่างกันทั้งหมด

แต่ถ้ากำหนดให้ Y และ Z เหมือนกัน ดังนั้นการสลับตำแหน่งของ Y และ Z จะถือว่าไม่แตกต่างกัน จึงสมมติให้เป็น Y และ Z เขียนแทนด้วย O ดังนั้นการจัดลำดับในรูปที่ 6 จะเปลี่ยนไปแสดงได้ดังรูปที่ 7

XOO	OXO	OXO
XOO	OOX	OOX

รูปที่ 7 แสดงรูปแบบการจัดลำดับของตัวอักษรที่แตกต่างกันไม่ทั้งหมด

ดังนั้นจะมีเพียง $\frac{3!}{2!1!} = 3$ วิธี เท่านั้นที่แตกต่างกัน

ในทางเดียวกันถ้าจัดลำดับอักษร 4 ตัว คือ W X Y Z จะจัดรูปแบบได้แตกต่างกันทั้งหมด $4!$ วิธี แต่ถ้า W เหมือนกับ X และ Y เหมือนกับ Z จะเหลือรูปแบบที่แตกต่างกันทั้งหมดเพียง $\frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี

ดังนั้นจะได้ว่า การจัดลำดับสิ่งของ n สิ่ง ซึ่งมี r_1 สิ่งเหมือนกัน r_2 สิ่งเหมือนกัน, ..., r_k

สิ่งเหมือนกัน โดยที่ $\sum_{i=1}^k r_i = n$ จะได้

$$\text{จำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นทั้งหมด} = \frac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!}$$

ตัวอย่างที่ 22 นายอำเภอเต่างอยต้องการตกแต่งสถานที่โดยประดับหลอดไฟฟ้าสีต่างๆ ด้านหน้าที่ทำการอำเภอเขามีหลอดไฟฟ้าทั้งหมด 4 สี คือ สีเขียวจำนวน 20 หลอด สีเหลืองจำนวน 15 หลอด สีแดงจำนวน 30 หลอด และสีน้ำเงินจำนวน 20 หลอด นายอำเภอจะออกแบบการประดับหลอดไฟฟ้าได้แตกต่างกันทั้งสิ้นกี่วิธี

วิธีทำ 1) หลอดไฟฟ้าทั้งสิ้น 85 หลอดที่แตกต่างกันนำมาเรียงลำดับในแนวเส้นตรงได้แตกต่างกัน 85! วิธี
 2) หลอดไฟฟ้าสีเดียวกันถึงแม้จะแตกต่างกัน เมื่อเรียงสลับที่กันยังคงได้รูปแบบของสีเหมือนกัน จึงถือว่าการเรียงลำดับที่ไม่มีผลทำให้จำนวนวิธีเพิ่มขึ้น หรือหลอดไฟฟ้าสีเดียวกันถือว่าไม่แตกต่างกันนั่นเอง แต่จากขั้นตอนที่ 1) ได้รวมเอาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันไว้แล้วโดยการคูณ จึงจำเป็นต้องลดจำนวนวิธีซึ่งสลับที่กันระหว่างหลอดไฟฟ้าสีเดียวกันโดยการหาร

- การสลับที่หลอดของหลอดไฟฟ้าสีเขียว ทำได้ทั้งหมด 20! วิธี
- การสลับที่หลอดของหลอดไฟฟ้าสีเหลือง ทำได้ทั้งหมด 15! วิธี
- การสลับที่หลอดของหลอดไฟฟ้าสีแดง ทำได้ทั้งหมด 30! วิธี
- การสลับที่หลอดของหลอดไฟฟ้าสีน้ำเงิน ทำได้ทั้งหมด 20! วิธี

3) จำนวนวิธีทั้งหมดในการประดับหลอดไฟฟ้าได้แตกต่างกัน คือ $\frac{85!}{20!15!30!20!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 23 ผู้จัดการนักกีฬาสี่แห่งหนึ่งจะสามารถสร้างสัญญาณธงที่แขวนเรียงกันเป็นแนวตั้ง 8 อันได้กี่วิธี เมื่อมีธงสีแดง 4 อัน สีขาว 3 อัน และสีน้ำเงิน 1 อัน

วิธีทำ $\frac{8!}{4!3!1!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 24 เราสามารถสร้างเลขจำนวนเต็ม 6 หลักได้จากจำนวนจากเลข 2, 2, 4, 6, 7, 7

วิธีทำ $\frac{6!}{2!2!1!1!}$ จำนวน

ตัวอย่างที่ 25 จากตัวอักษรในคำว่า SWEETHEART เราสามารถเรียงลำดับเป็นคำใหม่ที่แตกต่างกันได้กี่คำ โดยไม่คำนึงถึงความหมายของคำที่สร้างได้

วิธีทำ $\frac{10!}{3!2!1!1!1!1!1!}$ คำ

1.2.2 การจัดหมู่ (Combination)

การทดลองที่กำหนดให้เป็นการสุ่มแบบไม่ใส่คืน เมื่อการจัดเรียงสิ่งของในลำดับที่แตกต่างกันไม่ถือเป็นรูปแบบใหม่ แสดงว่าลำดับไม่มีผลต่อการคำนวณจำนวนผลลัพธ์ของการทดลอง เรียกว่าเป็น การจัดหมู่ เช่น AB ไม่แตกต่างจาก BA เพราะถือว่าอยู่ในหมู่หรือกลุ่มเดียวกัน กล่าวคือ มีสมาชิกทั้ง A และ B เช่นเดียวกัน จึงถือเป็นวิธีเดียวกัน

การคำนวณจำนวนวิธีจัดหมู่จะเหมือนกับการหยิบลูกบอลแบบไม่ใส่คืนครั้งละ 1 ลูก ดังแสดงในรูปที่ 2 แต่การเรียงลำดับตำแหน่งที่แตกต่างกันของลูกบอลที่ถูกนำมาเรียง ถือว่าเป็นการหยิบได้ลูกบอลชุดเดียวกัน หรือกล่าวได้ว่าเป็นการหาจำนวนชุดที่แตกต่างกันของลูกบอลที่จะถูกเลือกนั่นเอง ซึ่งเหมือนกับการนำสิ่งของมาเรียงลำดับ แต่ต้องการทราบเพียงจำนวนผลการทดลองที่มีชุดสิ่งของที่แตกต่างกันเท่านั้น หากผลการทดลองใดก็ตามที่มีชุดสิ่งของเหมือนกันแต่มีการจัดลำดับที่แตกต่างกันจะถือว่าเป็นผลการทดลองเดียวกัน

$$\text{จำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นทั้งหมด} = \frac{{}^n P_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^n C_r = \binom{n}{r} \text{ แบบ}$$

โดยสัญลักษณ์ $\binom{n}{r}$ เรียกว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial coefficient)**

ข้อสังเกต คุณสมบัติของสัมประสิทธิ์ทวินาม

- 1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- 2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- 3) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$
- 4) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$
- 5) $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \cdot a^r \cdot b^{n-r}$ (ทฤษฎีบททวินาม)

ตัวอย่างที่ 26 จงกระจายเทอม $(3x + 4y)^2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(3x + 4y)^2 &= \binom{2}{0}(3x)^0 \cdot (4y)^{2-0} + \binom{2}{1}(3x)^1 \cdot (4y)^{2-1} + \binom{2}{2}(3x)^2 \cdot (4y)^{2-2} \\ &= 16y^2 + 2 \times 3x \times 4y + 9x^2 \\ &= 16y^2 + 24xy + 9x^2\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 28 จงหาค่าของ $\binom{25}{6} + \binom{25}{5}$

วิธีทำ จากคุณสมบัติของสัมประสิทธิ์ทวินาม $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

ดังนั้นจะได้ $\binom{25}{6} + \binom{25}{5} = \binom{26}{6}$

$$= 230230$$

ตรวจสอบโดยการหาค่าของ ${}^{25}C_6 + {}^{25}C_5$ จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\binom{25}{6} + \binom{25}{5} &= 177100 + 53130 \\ &= 230230\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 28 การแข่งขันฟุตบอลโลกรอบคัดเลือกโซนเอเชียใต้ มีทีมเข้าแข่งขัน 6 ทีม โดยจัดการแข่งขันแบบพบกันทั้งหมด จงหาจำนวนครั้งทั้งหมดที่จะต้องจัดการแข่งขัน

วิธีทำ 1) การจัดทีมแข่งขันแบบพบกันทั้งหมดนี้ แต่ละทีมถือว่าแตกต่างกัน และถ้าทีมที่ทำการแข่งขันด้วยกัน ต้องไม่เป็นทีมเดียวกัน เพราะฉะนั้นเป็นการสุ่มแบบไม่ใส่คืน การจัดลำดับของทีมที่แข่งด้วยกันถือว่าการแข่งขันคู่เดียวเท่านั้น เพราะฉะนั้นลำดับไม่มีผลให้จำนวนการแข่งขันเพิ่มขึ้น ถือเป็นการจัดหมู่

2) จำนวนกลุ่ม $k=2$ คือ กลุ่มทีมที่ทำการแข่งขัน และกลุ่มทีมที่ไม่ได้ทำการแข่งขัน

3) จำนวนทีมที่มีอยู่ทั้งหมด $n=6$

4) จำนวนทีมในกลุ่มที่ทำการแข่งขัน $r_1 = r = 2$ จำนวนทีมในกลุ่มที่ไม่ได้ทำการแข่งขัน $r_2 = n - r = 4$

5) จำนวนการแข่งขันทั้งหมด เป็นดังนี้

$$\frac{{}^6P_2}{2!} = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \binom{6}{2} = 15 \text{ ครั้ง}$$

ตัวอย่างที่ 29 กล้องอุปกรณ์หนึ่งบรรจุชิ้นงานที่แตกต่างกัน 10 ชิ้น โดยมีชิ้นงานที่ชำรุด 3 ชิ้น อยากทราบว่า ถ้าสุ่มหยิบชิ้นงานจำนวน 4 ชิ้น จงหาจำนวนวิธีที่จะสุ่มพบชิ้นงานซึ่งชำรุดอย่างน้อย 2 ชิ้น

วิธีทำ 1) การสุ่มหยิบชิ้นงานจำนวน 4 ชิ้นเป็นการสุ่มแบบไม่ใส่คืน และชิ้นงานชุดเดียวกันแต่มีลำดับของการสุ่มหยิบที่แตกต่างกันยังคงถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน ดังนั้นลำดับจึงไม่ทำให้จำนวนวิธีเพิ่มขึ้น ถือเป็นการจัดหมู่

2) ชิ้นงานที่นำมาจัดหมู่มีทั้งสิ้น 10 ชิ้น แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม คือ กลุ่มที่ถูกสุ่มหยิบ และกลุ่มที่ไม่ถูกสุ่มหยิบ โดยชิ้นงานในแต่ละกลุ่มอาจมีทั้งชิ้นงานที่ชำรุดและหรือชิ้นงานที่ไม่ชำรุด หรืออย่างใดอย่างหนึ่ง ดังนั้น การสุ่มหยิบชิ้นงานทั้งหมด 4 ชิ้น เกิดจากจำนวนชิ้นงานชำรุดซึ่งสุ่มหยิบได้รวมกับจำนวนชิ้นงานที่ไม่ชำรุดซึ่งสุ่มหยิบได้

3) การสุ่มหยิบชิ้นงานโดยให้มีชิ้นงานชำรุดอย่างน้อย 2 ชิ้น มีทางเป็นไปได้ คือ สุ่มได้ชิ้นงานชำรุด 2 ชิ้น (ชิ้นงานไม่ชำรุด 2 ชิ้น) หรือสุ่มได้ชิ้นงานชำรุด 3 ชิ้น (ชิ้นงานไม่ชำรุด 1 ชิ้น) กรณีใดกรณีหนึ่งเท่านั้น

4) การคำนวณจำนวนวิธีทั้งหมดของการทดลอง คือ

$$\begin{aligned}
 &= \text{จำนวนวิธีที่สุ่มได้ชิ้นงานชำรุด 2 ชิ้น} + \text{จำนวนวิธีที่สุ่มได้ชิ้นงานชำรุด 3 ชิ้น} \\
 &= \binom{3}{2} \times \binom{7}{2} + \binom{3}{3} \times \binom{7}{1} \\
 &= \frac{3!}{(3-2)!2!} \times \frac{7!}{(7-2)!2!} + \frac{3!}{(3-3)!3!} \times \frac{7!}{(7-1)!1!} = 63 + 7 = 70 \text{ วิธี}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 30 จงหาจำนวนวิธีที่จะเลือกกรรมการ 3 คนจากสามีมัรยา 4 คู่

ก) ทุกคนมีโอกาสได้รับเลือกเท่าๆ กัน

วิธีทำ $\binom{8}{3} = 56 \text{ วิธี}$

ข) กรรมการจะต้องประกอบด้วย หญิง 2 คน ชาย 1 คน

วิธีทำ $\binom{4}{2} \times \binom{4}{1} = 6 \times 4 = 24 \text{ วิธี}$

ค) ถ้าเลือกทั้งสามีมัรยาเป็นกรรมการพร้อมๆ กันไม่ได้

วิธีทำ $\binom{4}{3} \times 2^3 = 4 \times 8 = 32 \text{ วิธี}$

ตัวอย่างที่ 31 ข้อสอบฉบับหนึ่งมีจำนวน 10 ข้อ ให้ตอบเพียง 8 ข้อ โดยต้องทำอย่างน้อย 3 ข้อจาก 4 ข้อแรก อยากทราบว่าผู้ทำข้อสอบครบ 8 ข้อคนหนึ่งจะมีวิธีเลือกทำข้อสอบได้กี่วิธี

วิธีทำ $\binom{4}{3} \binom{6}{5} + \binom{4}{4} \binom{6}{4} = 24 + 15 = 39 \text{ วิธี}$

1.2.2.1 การแบ่งกลุ่ม (Partitioning)

ถ้าต้องการแบ่งสิ่งของออกเป็นกลุ่มมากกว่า 2 กลุ่ม (k กลุ่ม) เช่น แบ่งกลุ่มนักศึกษาเพื่อทำกิจกรรมระดมสมอง โดยแบ่งนักศึกษา 18 คนออกเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละ 3 4 5 และ 6 คนตามลำดับ การจัดตำแหน่งที่นั่งของคนในกลุ่มเดียวกันก็ยังคงได้ผลของการระดมสมองเหมือนกัน แสดงว่าการจัดเรียงลำดับในแต่ละกลุ่มไม่เปลี่ยนสมาชิกในกลุ่ม

1.2.2.1.1 การแบ่งกลุ่มโดยคำนึงถึงลำดับที่ของกลุ่ม

ถ้ามีสิ่งของ n สิ่ง ต้องการแบ่งออกเป็น k กลุ่มย่อย โดยกลุ่มย่อยที่ 1 มีสิ่งของจำนวน n_1 กลุ่มย่อยที่ 2 มีสิ่งของจำนวน n_2 , ..., กลุ่มย่อยที่ k มีสิ่งของจำนวน n_k โดยที่ $\sum_{i=1}^k n_i = n$ ดังนั้นจำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นทั้งหมดคือ

$$\begin{aligned} \binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-\sum_{i=1}^{k-1} n_i}{n_k} &= \frac{n!}{(n-n_1)!n_1!} \times \frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!n_2!} \times \dots \times \frac{\left(n-\sum_{i=1}^{k-1} n_i\right)!}{\left(n-\sum_{i=1}^k n_i\right)!n_k!} \\ &= \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \end{aligned}$$

จำนวนผลการทดลองที่เกิดขึ้นทั้งหมด $= \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ แบบ

โดยสัญลักษณ์ $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k}$ เรียกว่า **สัมประสิทธิ์พหุนาม (Multinomial coefficient)**

ตัวอย่างที่ 32 โรงงานแห่งหนึ่งจัดรอบการทำงาน 3 ช่วง คือ 0.00–8.00 น. 8.00–16.00 น. และ 16.00–24.00 น. จัดกลุ่มนักควบคุมคุณภาพ 8 คนออกเป็น 3 กลุ่ม เพื่อควบคุมการผลิตในแต่ละรอบโดยแบ่งเป็นกลุ่มละ 3 คน 2 คน และ 3 คน ตามลำดับ จะจัดกลุ่มนักควบคุมคุณภาพได้กี่วิธีที่แตกต่างกัน