



ทะลุใจกายคณิตศาสตร์

ระบบจำนวนจริง และจำนวนเชิงซ้อน



ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

ประกอบด้วย

- ♦ สรุปเนื้อหาตามบทเรียน พร้อมตัวอย่างและแนวคิด
- ♦ เหมาะสำหรับใช้เป็นคู่มือเตรียมสอบ
และสอบเข้ามหาวิทยาลัยทุกแห่ง
ทั้งระบบรับตรงและระบบกลาง (ADMISSIONS)

เรียบเรียงโดย กวียา เนาวประทีป



โครงการตำราเรียน สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

ชื่อหนังสือ	ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ : ระบบจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน
เรียบเรียงโดย	กวิยา เนาวประทีป
ราคา	79 บาท
ISBN	978-616-306-045-7
จัดพิมพ์จำหน่ายเมื่อ	มีนาคม 2556

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

45, 47 ซอยจรัญสนิทวงศ์ 40 ถนนจรัญสนิทวงศ์ แขวงบางยี่ขัน
เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700
โทร. 0-2433-7755-7, 0-2433-7704-6 แฟกซ์. 0-2433-7703

ธนาณัติสั่งจ่าย ปณ. พระปิ่นเกล้า ในนาม หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
บรรณาธิการ พรทิพย์ แพงสุด
ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

กวิยา เนาวประทีป

ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ : ระบบจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน. - -

กรุงเทพฯ : ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2556.

123 หน้า.

1. คณิตศาสตร์ (ระบบจำนวนจริง). I. ชื่อเรื่อง.

510

ISBN 978-616-306-045-7

website : www.physicscenter.com

e-mail : sales@physicscenter.com

คำนำ

หนังสือ **ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ : ระบบจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน** เล่มนี้ เป็นฉบับปรับปรุงใหม่ล่าสุดที่ผู้เขียนได้ทำการรวบรวมและปรับปรุงเนื้อหาให้ตรงตามมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม โดยมีจุดมุ่งหมายให้นักเรียนและผู้สนใจที่จะสมัครสอบเข้าศึกษาต่อในสถาบันอุดมศึกษาในระบบกลาง (แอดมิสชันส์ : ADMISSIONS) ได้ใช้ศึกษาทบทวนความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาที่สรุปย่อด้วยภาษาที่อ่านเข้าใจง่าย รวมทั้งนำเสนอเทคนิคการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา และตัวอย่างข้อสอบอย่างเป็นระบบ ซึ่งจะช่วยให้ผู้อ่านสามารถทำความเข้าใจได้ในเวลาที่ไม่มากนัก

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะอำนวยประโยชน์ให้แก่ผู้ใช้ได้เป็นอย่างดีอีกเล่มหนึ่ง

ด้วยความปรารถนาดี

กวียา เนาวประทีป

คำนำสำนักพิมพ์

การสอบเข้ามหาวิทยาลัยเป็นจุดหมายของนักเรียน นักศึกษา ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายแทบทุกคน และปลายทางของความมุ่งมั่นนั้น คือ การสอบได้ แต่หนทางที่จะก้าวเดินไปนั้นมีการสอบหลายวิชาเพื่อเป็นเครื่องทดสอบความรู้ความสามารถของนักเรียน ซึ่งในปัจจุบันมีการสอบในระบบกลาง (แอดมิสชันส์ : ADMISSIONS) คณิตศาสตร์ ก็เป็นอีกวิชาหนึ่งที่มีความสำคัญในการตัดสินความไฝ่ฝันของนักเรียน นักศึกษาได้ สำนักพิมพ์ฟิลิกส์เซ็นเตอร์ได้เล็งเห็นความสำคัญของการสอบในระบบนี้จึงได้จัดทำหนังสือ **ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์** ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระบบ-จำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อน เล่มนี้ขึ้นมา เพื่อให้นักเรียน นักศึกษา ได้นำไปใช้เป็นแนวทางในการทำข้อสอบเข้าศึกษาต่อในมหาวิทยาลัยได้สะดวกยิ่งขึ้น

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยประโยชน์อย่างมากแก่นักเรียน นักศึกษาทุกคนที่มีโอกาสได้ใช้เพื่อการสอบเข้าศึกษาต่อในมหาวิทยาลัยต่อไป

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟิลิกส์เซ็นเตอร์

สารบัญ

บทที่ 1	ระบบจำนวนจริง	7
1.1	จำนวนเต็ม	7
1.2	จำนวนตรรกยะ	8
1.3	จำนวนอตรรกยะ	8
1.4	จำนวนจริง	9
1.5	การแก้สมการพหุนาม	11
1.6	การไม่เท่ากันของจำนวนจริง	16
1.7	ช่วง	17
1.8	อสมการ	18
1.9	ค่าสัมบูรณ์	20
	ตะลุยโจทย์ ระบบจำนวนจริง	21
บทที่ 2	กำหนดการเชิงเส้น	46
2.1	ระบบอสมการเชิงเส้นตัวแปรตัวเดียว	46
2.2	ระบบอสมการเชิงเส้นของสองตัวแปร	47
2.3	ตัวแบบของปัญหาคำหนดการเชิงเส้นพร้อมทั้งวิธีหาคำตอบ	49
	ตะลุยโจทย์ กำหนดการเชิงเส้น	65
บทที่ 3	ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	77
3.1	สัจพจน์ของระบบจำนวนจริง	77
3.2	สมบัติความสมบูรณ์	77
3.3	สมบัติของจำนวนเต็ม	79
3.4	สมบัติการหารลงตัว	79
3.5	จำนวนเฉพาะ	79
3.6	ขั้นตอนวิธีการหาร	80
3.7	จำนวนคู่ และจำนวนคี่	80
3.8	ตัวหารร่วมมาก : ห.ร.ม.	80

3.9	ตัวหารร่วมน้อย : ค.ร.น.	81
3.10	ความสัมพันธ์ระหว่าง ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของจำนวนเต็มใดๆ	81
ตะลุยโจทย์ ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น		82
บทที่ 4	จำนวนเชิงซ้อน	90
4.1	จำนวนจินตภาพ	90
4.2	จำนวนเชิงซ้อน	90
4.3	การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน	90
4.4	การบวกจำนวนเชิงซ้อน	91
4.5	การคูณจำนวนเชิงซ้อน	91
4.6	สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน	92
4.7	ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	92
4.8	การเขียนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูปเชิงชี้	93
4.9	การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงชี้	93
4.10	ค่าของ z^n และ $z^{\frac{1}{n}}$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$	94
4.11	การแก้สมการ	94
ตะลุยโจทย์ จำนวนเชิงซ้อน		94

บทที่ 1

ระบบจำนวนจริง

1.1 จำนวนเต็ม

1.1.1 จำนวนนับ หรือจำนวนเต็มบวก

กำหนดให้ N เป็นเซตของจำนวนนับ

$$\therefore N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

จำนวนนับเป็นจำนวนแรกที่มนุษย์ได้คิดขึ้น จำนวนนับที่มีค่าน้อยที่สุด คือ 1 แต่จำนวนนับที่มีค่ามากที่สุดไม่สามารถจะบอกได้

กำหนดให้ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

$$\therefore I^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\therefore I^+ = N$$

1.1.2 จำนวนเต็มศูนย์

กำหนดให้ I^0 เป็นเซตของจำนวนเต็มศูนย์

$$\therefore I^0 = \{0\}$$

1.1.3 จำนวนเต็มลบ

กำหนด I^- เป็นเซตของจำนวนเต็มลบ

$$\therefore I^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$$

1.1.4 จำนวนเต็ม

กำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

$$\therefore I = I^- \cup I^0 \cup I^+$$

$$\therefore I = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

สมบัติเกี่ยวกับการบวกของจำนวนเต็ม

1. สมบัติปิด
ถ้า $a, b \in I$ แล้ว $a + b \in I$
2. สมบัติการสลับที่
ถ้า $a, b \in I$ แล้ว $a + b = b + a$
3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้
ถ้า a, b และ $c \in I$ แล้ว $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. สมบัติการมีเอกลักษณ์
มีจำนวนเต็มศูนย์ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกของ $a \in I$ กล่าวคือ $0 + a = a + 0 = a$
5. สมบัติการมีอินเวอร์ส
ถ้า $a \in I$ มี $-a \in I$ เป็นอินเวอร์สสำหรับการบวกของ a กล่าวคือ
 $a + (-a) = (-a) + a = 0$

สมบัติเกี่ยวกับการคูณของจำนวนเต็ม

1. สมบัติปิด
ถ้า $a, b \in I$ แล้ว $ab \in I$
2. สมบัติการสลับที่
ถ้า $a, b \in I$ แล้ว $ab = ba$
3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้
ถ้า a, b และ $c \in I$ แล้ว $(ab)c = a(bc)$
4. สมบัติการมีเอกลักษณ์
จำนวนเต็ม 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณของ $a \in I$ กล่าวคือ $a \times 1 = 1 \times a = a$
สำหรับจำนวนเต็มไม่มีอินเวอร์สการคูณ

1.2 จำนวนตรรกยะ

กำหนดให้ Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ

$$\therefore Q = \{x \mid x = \frac{a}{b} ; a, b \in I \text{ และ } b \neq 0\}$$

เซตของจำนวนตรรกยะ ประกอบด้วยเซตของจำนวนเต็ม และเซตของจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ได้แก่ เศษส่วน หรือทศนิยม รวมถึงทศนิยมซ้ำด้วย

1.3 จำนวนอตรรกยะ

จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

$$\text{เช่น } \sqrt{2} = 1.414213...$$

$$\sqrt{3} = 1.732050...$$

$$\sqrt{5} = 2.236067...$$

$$\sqrt{7} = 2.645751...$$

$$\pi = 3.14159... \text{ เป็นต้น}$$

เซตของจำนวนอตรรกยะไม่มีสมบัติปิดสำหรับการบวก การลบ การคูณ และการหาร

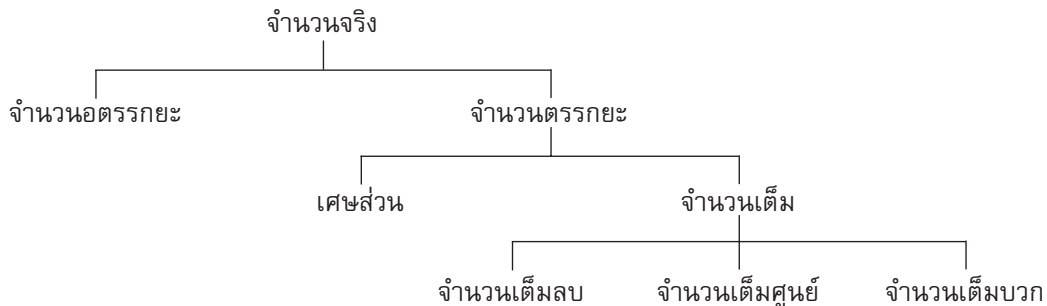
$$\begin{aligned} \text{เช่น } (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) &= 4 && \text{เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ (2 + \sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 4) &= 6 && \text{เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ (2 + \sqrt{5})(2 - \sqrt{5}) &= -1 && \text{เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} &= 2 && \text{เป็นจำนวนตรรกยะ} \end{aligned}$$

1.4 จำนวนจริง

กำหนดให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง

เซตของจำนวนจริงประกอบด้วยเซตของจำนวนตรรกยะ และเซตจำนวนอตรรกยะ

แผนภาพแสดงระบบจำนวนจริง



สมบัติเกี่ยวกับการบวกของเซตจำนวนจริง

1. สมบัติปิด
ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a + b \in \mathbb{R}$
2. สมบัติการสลับที่
ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $a + b = b + a$
3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้
ถ้า a, b และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว $(a + b) + c = a + (b + c)$
4. สมบัติการมีเอกลักษณ์
มีจำนวนจริง 0 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวกของจำนวนจริง a กล่าวคือ $0 + a = a + 0 = a$
5. สมบัติการมีอินเวอร์ส
ถ้า $a \in \mathbb{R}$ มี $-a \in \mathbb{R}$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ a กล่าวคือ $(-a) + a = a + (-a) = 0$

สมบัติเกี่ยวกับการคูณของเซตจำนวนจริง

1. สมบัติปิด
ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $ab \in \mathbb{R}$
2. สมบัติการสลับที่
ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ แล้ว $ab = ba$

3. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้
ถ้า a, b และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว $(ab)c = a(bc)$
4. สมบัติการมีเอกลักษณ์
มีจำนวนจริง 1 เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณของจำนวนจริง a กล่าวคือ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
5. สมบัติการมีอินเวอร์ส
กำหนด $a \in \mathbb{R}$ และ $a \neq 0$ มีจำนวนจริง a^{-1} เป็นอินเวอร์สสำหรับการคูณของจำนวนจริง a กล่าวคือ $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$
6. สมบัติการแจกแจง
ถ้า a, b และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว $a(b + c) = ab + ac$ และ $(a + b)c = ac + bc$

สรุประบบจำนวนจริงมีสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณ

กำหนด a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

สมบัติ	การบวก	การคูณ
1. การปิด	$a + b \in \mathbb{R}$	$ab \in \mathbb{R}$
2. การสลับที่	$a + b = b + a$	$ab = ba$
3. การเปลี่ยนกลุ่มได้	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
4. การมีเอกลักษณ์	มีจำนวนจริง 0 โดยที่ $0 + a = a + 0 = a$	มีจำนวนจริง 1 โดยที่ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$
5. การมีอินเวอร์ส	สำหรับจำนวนจริง a จะมี $-a$ โดยที่ $a + (-a) = (-a) + a = 0$	สำหรับจำนวนจริง a ที่ $a \neq 0$ จะมี a^{-1} โดยที่ $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$
6. การแจกแจง $a(b + c) = ab + ac$		

สมบัติการเท่ากันของจำนวนจริง

1. สมบัติสะท้อน
ถ้า $a \in \mathbb{R}$ แล้ว $a = a$
2. สมบัติสมมาตร
ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a = b$ แล้ว $b = a$
3. สมบัติการถ่ายทอด
ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
4. สมบัติการบวกด้วยจำนวนเดียวกัน
ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
5. สมบัติการคูณด้วยจำนวนเดียวกัน ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a = b$ แล้ว $ac = bc$
6. กฎการตัดออกสำหรับการบวก
ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$

7. กฎการตัดออกสำหรับการคูณ

ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนจริง และ $c \neq 0$ โดยที่ $ac = bc$ แล้ว $a = b$

1.5 การแก้สมการพหุนาม

1.5.1 ทฤษฎีบทเศษเหลือ

เมื่อ $P(x)$ คือพหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ ถ้าหารพหุนาม $P(x)$ ด้วยพหุนาม $x - c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงแล้ว เศษจะเท่ากับ $P(c)$

ตัวอย่างที่ 1

จงหาเศษเมื่อ $2x^3 - x^2 - 6x - 3$ หารด้วย $x - 4$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ให้ } P(x) &= 2x^3 - x^2 - 6x - 3 \\ \therefore P(4) &= 2(4)^3 - (4)^2 - 6(4) - 3 \\ &= 128 - 16 - 24 - 3 \\ &= 85 \\ \therefore \text{เศษ} &= 85 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2

จงหาเศษเมื่อหาร $9x^3 + 4x - 1$ ด้วย $x - \frac{1}{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ให้ } P(x) &= 9x^3 + 4x - 1 \\ \therefore P\left(\frac{1}{2}\right) &= 9\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{9}{8} + 2 - 1 = \frac{17}{8} \\ \therefore \text{เศษ} &= \frac{17}{8} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3

จงหาเศษเมื่อหาร $x^3 - 2x^2 - x + 2$ ด้วย $x + 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{ให้ } P(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \\ P(-1) &= (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 \\ &= -1 - 2 + 1 + 2 = 0 \\ \therefore \text{เศษ} &= 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า $x + 1$ หาร $P(x)$ ลงตัว

$\therefore x + 1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

นำ $x + 1$ ไปหาร $P(x)$ ได้ผลลัพธ์ $x^2 - 3x + 2$

$$\begin{aligned} \therefore x^3 - 2x^2 - x + 2 &= (x + 1)(x^2 - 3x + 2) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4

วิธีทำ

จงหาค่า t ที่ทำให้ $x + 2$ หาร $x^3 - tx^2 + 3x + 7t$ ลงตัว

$$\text{ให้ } P(x) = x^3 - tx^2 + 3x + 7t$$

$$\begin{aligned}\therefore P(-2) &= (-2)^3 - t(-2)^2 + 3(-2) + 7t \\ &= -8 - 4t - 6 + 7t \\ &= 3t - 14\end{aligned}$$

$$\therefore 3t - 14 = 0$$

$$\therefore t = \frac{14}{3}$$

ตัวอย่างที่ 5

วิธีทำ

จงหาค่า t ที่ทำให้ $x + t$ หาร $x^2 + 5x - 2$ เหลือเศษ -8

$$\text{ให้ } P(x) = x^2 + 5x - 2$$

$$\begin{aligned}\therefore P(-t) &= (-t)^2 + 5(-t) - 2 \\ &= t^2 - 5t - 2\end{aligned}$$

$$\therefore t^2 - 5t - 2 = -8$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t - 2)(t - 3) = 0$$

$$\therefore t = 2, 3$$

1.5.2 ทฤษฎีบทตัวประกอบ

เมื่อ $P(x)$ คือ พหุนาม $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ พหุนาม $P(x)$ นี้จะมี $x - c$ เป็นตัวประกอบก็ต่อเมื่อ $P(c) = 0$

ตัวอย่างที่ 6

วิธีทำ

จงแยกตัวประกอบของพหุนาม $x^3 + x^2 - 8x - 12$

$$\text{ให้ } P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$$

เนื่องจากจำนวนเต็มที่หาร -12 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ เมื่อพิจารณา $P(1), P(-1), P(2)$ ปรากฏว่าไม่เท่ากับศูนย์

$$\begin{aligned}\therefore P(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 - 8(-2) - 12 \\ &= -8 + 4 + 16 - 12 \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore x = -2 \text{ ทำให้ } P(x) = 0$$

$$\therefore x + 2 \text{ หาร } P(x) \text{ ลงตัว}$$

$$\therefore x + 2 \text{ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ } P(x)$$

$$\therefore \frac{x^3 + x^2 - 8x - 12}{x + 2} = x^2 - x - 6$$

$$\begin{aligned}\therefore x^3 + x^2 - 8x - 12 &= (x + 2)(x^2 - x - 6) \\ &= (x + 2)(x + 2)(x - 3)\end{aligned}$$