



ทะลุใจกษัตริย์คณิตศาสตร์

เคล็ดลับป้องกัน



ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย

ประกอบด้วย

- ◆ สรุปเนื้อหาตามบทเรียน พร้อมตัวอย่างและแนวคิด
- ◆ เหมาะสำหรับใช้เป็นคู่มือเตรียมสอบ
และสอบเข้ามหาวิทยาลัยทุกแห่ง
ทั้งระบบรับตรงและระบบกลาง (ADMISSIONS)

เรียบเรียงโดย กวียา เนาวประทีป



โครงการตำราเรียน สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

ชื่อหนังสือ ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น
เรียบเรียงโดย กวียา เนาวประทีป
ราคา 79 บาท
ISBN 978-616-306-055-6
จัดพิมพ์จำหน่ายเมื่อ มีนาคม 2556

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

45, 47 ซอยจรัญสนิทวงศ์ 40 ถนนจรัญสนิทวงศ์ แขวงบางยี่ขัน
เขตบางพลัด กรุงเทพฯ 10700
โทร. 0-2433-7755-7, 0-2433-7704-6 แฟกซ์. 0-2433-7703

อนุญาตให้สงวนลิขสิทธิ์ ปณ. พระปิ่นเกล้า ในนาม หจก. สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
บรรณาธิการ พรทิพย์ แฝงสุด
ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

กวียา เนาวประทีป

ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น. - - กรุงเทพฯ :
ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2556.

71 หน้า.

1. คณิตศาสตร์ (แคลคูลัสเบื้องต้น). I. ชื่อเรื่อง.

510

ISBN 978-616-306-055-6

website : www.physicscenter.com

e-mail : sales@physicscenter.com

คำนำ

หนังสือ **ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์ : แคลคูลัสเบื้องต้น** เล่มนี้ เป็นฉบับปรับปรุงใหม่ล่าสุดที่ผู้เขียนได้ทำการรวบรวมและปรับปรุงเนื้อหาให้ตรงตามมาตรฐานการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สาระการเรียนรู้เพิ่มเติม โดยมีจุดมุ่งหมายให้นักเรียนและผู้สนใจที่จะสมัครสอบเข้าศึกษาต่อในสถาบันอุดมศึกษา ในระบบกลาง (แอดมิสชันส์ : ADMISSIONS) ได้ใช้ศึกษาทบทวนความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาที่สรุปย่อด้วยภาษาที่อ่านเข้าใจง่าย รวมทั้งนำเสนอเทคนิคการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาและตัวอย่างข้อสอบอย่างเป็นระบบ ซึ่งจะช่วยให้ผู้อ่านสามารถทำความเข้าใจได้ในเวลาที่ไม่มากนัก

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้จะอำนวยประโยชน์ให้แก่ผู้ใช้ได้เป็นอย่างดีอีกเล่มหนึ่ง

ด้วยความปรารถนาดี

กวิยา เนาวประทีป

คำนำสำนักพิมพ์

การสอบเข้ามหาวิทยาลัยเป็นจุดหมายของนักเรียน นักศึกษา ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายแทบทุกคน และปลายทางของความมุ่งมั่นนั้น คือ การสอบได้ แต่หนทางที่จะก้าวเดินไปนั้นมีการสอบหลายวิชาเพื่อเป็นเครื่องทดสอบความรู้ความสามารถของนักเรียน ซึ่งในปัจจุบันมีการสอบในระบบกลาง (แอดมิสชันส์ : ADMISSIONS) คณิตศาสตร์ ก็เป็นอีกวิชาหนึ่งที่มีความสำคัญในการตัดสินความไฝ่ฝันของนักเรียน นักศึกษาได้ สำนักพิมพ์ฟิลิกส์เซ็นเตอร์ได้เล็งเห็นความสำคัญของการสอบในระบบนี้จึงได้จัดทำหนังสือ **ตะลุยโจทย์คณิตศาสตร์** ระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แคลคูลัส เบื้องต้น เล่มนี้ขึ้นมา เพื่อให้ให้นักเรียน นักศึกษา ได้นำไปใช้เป็นแนวทางในการทำข้อสอบเข้าศึกษาต่อในมหาวิทยาลัยได้สะดวกยิ่งขึ้น

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยประโยชน์อย่างมากแก่นักเรียน นักศึกษาทุกคนที่มีโอกาสได้ใช้เพื่อการสอบเข้าศึกษาต่อในมหาวิทยาลัยต่อไป

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟิลิกส์เซ็นเตอร์

สารบัญ

แคลคูลัสเบื้องต้น

1. ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	6
1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน	6
1.2 ทฤษฎีของลิมิต	6
1.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	7
2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	7
2.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ขณะ x เปลี่ยนจาก x ไปเป็น $x + h$	7
2.2 อัตราการเปลี่ยนแปลง $y = f(x)$ ขณะ x ใดๆ	7
2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	7
2.4 สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน	8
2.5 ความเร็วและความเร่ง	8
2.6 การประยุกต์ของอนุพันธ์	8
3. การอินทิเกรต	9
3.1 การอินทิเกรต	9
3.2 อินทิกรัลไม่จำกัดเขต	9
3.3 อินทิกรัลจำกัดเขต	9
3.4 พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง	9

ตะลุยโจทย์ แคลคูลัสเบื้องต้น	10
------------------------------	----

แคลคูลัสเบื้องต้น

1. ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.1 ลิมิตของฟังก์ชัน กำหนด f เป็นฟังก์ชันใดๆ ที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1 \text{ และ } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$$

$$\text{ถ้า } L_1 = L_2 = L \text{ แล้ว กล่าวได้ว่า } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

แต่ถ้า $L_1 \neq L_2$ แล้ว กล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ a

1.2 ทฤษฎีของลิมิต

กำหนด a, L และ M เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ และ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$

3. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$

4. $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = cL$ เมื่อ $c \in \mathbb{R}$

5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + M$

6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - M$

7. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = LM$

$$8. \quad \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{M} ; M \neq 0$$

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{I}^+$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \text{ เมื่อ } n \in \mathbb{I}^+ \text{ และ } n \geq 2 \text{ และ } \sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$$

1.3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทนิยาม ให้ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ เมื่อฟังก์ชัน f มีสมบัติต่อไปนี้

$$1. \quad f(a) \text{ หาได้}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ หาได้}$$

$$\text{และ } 3. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

2. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

2.1 อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ขณะ x เปลี่ยนจาก x ไปเป็น $x + h$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x ขณะ x เปลี่ยนจาก x ไปเป็น $x + h$ คือ

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ เมื่อ } h \neq 0$$

2.2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $y = f(x)$ ขณะ x ใดๆ

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใดๆ คือ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

2.3 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ขณะ x ใดๆ คือ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \text{ เขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน } y = f(x) \text{ ด้วย } \frac{dy}{dx} \text{ หรือ } \frac{d(f(x))}{dx} \text{ หรือ } y' \text{ หรือ } f'(x)$$

นั่นคือ

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$