



สรุปเนื้อหา ม.4-6

Examination Notes

ม.ปลาย

คณิตศาสตร์เพิ่มเติม

กวียา เนาวประทีป

เอาไว้ทบทวนก็ได้
อ่านเตรียมสอบก็ดี



โครงการตำราเรียน สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

ชื่อหนังสือ Examination Notes
คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.ปลาย
เรียบเรียงโดย กวียา เนาวประทีป
ราคา 59 บาท
ISBN (E-book) 978-616-306-228-4
จัดพิมพ์จำหน่ายเมื่อ พฤษภาคม 2564

ผู้จัดจำหน่าย บริษัท เกรท มีเดีย เอเจนซี จำกัด
85 ซอยบรมราชชนนี 75 แขวงบางระมาด เขตตลิ่งชัน
กรุงเทพฯ 10170
โทร. 0-2433-7755-7, 086-330-6425

บรรณาธิการ กวียา เนาวประทีป
ปก/รูปเล่ม ฝ่ายศิลปกรรม

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์

เนื้อหา รูปเล่ม และภาพประกอบในหนังสือเล่มนี้เป็นลิขสิทธิ์ของสำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
ห้ามคัดลอก ยกเว้นได้รับอนุญาต

ข้อมูลทางบรรณานุกรม

กวียา เนาวประทีป

Examination Notes คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.ปลาย- กรุงเทพฯ :
ฟิสิกส์เซ็นเตอร์, 2564.

156 หน้า.

1. คณิตศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง.

510

ISBN (E-book) 978-616-306-228-4

จัดพิมพ์โดย ท้าวทนต์ส่วนจำกัด สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์
เลขที่ 52 หมู่ที่ 4 ถนนศาลายา-บางภาษี ตำบลคลองโยง อำเภอพุทธมณฑล
จังหวัดนครปฐม 73170
โทร. 0-3429-8288-91 แฟกซ์. 0-3429-8292

ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

นายปราโมทย์ เนาวประทีป

website : www.physicscenter.com

e-mail : sales@physicscenter.com

คำนำ

เนื่องจากสภาวะความกดดันจากการสอบแข่งขันเข้าศึกษาต่อตามสถาบันชั้นนำในประเทศทำให้นักเรียนต้องศึกษาค้นคว้าและทบทวนบทเรียนเป็นจำนวนมาก สำนักพิมพ์ฟิสิกส์-เซ็นเตอร์ได้เล็งเห็นถึงความเหนื่อยยากของนักเรียนที่จะต้องทำการสรุปข้อมูลความรู้จากแหล่งต่างๆ เข้าไว้ด้วยกันเพื่อใช้ทบทวนในการสอบ จึงได้ทำการสรุปเนื้อหา สาระ ที่สำคัญของวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม เข้าไว้ในหนังสือชุด “**Examination Notes**” เพื่อเป็นคู่มือให้นักเรียนได้ใช้ในการเตรียมตัวสอบ โดยในหนังสือเล่มนี้จะมีการสรุปสูตรและเทคนิคที่สำคัญไว้อย่างเป็นหมวดหมู่ ทำให้ง่ายต่อการทบทวนและทำความเข้าใจในระยะเวลาจำกัด

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือ **Examination Notes คณิตศาสตร์เพิ่มเติม** เล่มนี้ จะเป็นประโยชน์แก่นักเรียนและผู้ที่สนใจศึกษาวิชาคณิตศาสตร์บ้าง ไม่มากก็น้อย

กวิยา เนาวประทีป

คำนำสำนักพิมพ์

การเรียนการสอนในปัจจุบัน ครู-อาจารย์ผู้สอนจะต้องรู้จักปรับเปลี่ยนรูปแบบการสอนด้วยการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ด้วยการให้คำแนะนำและสร้างเจตคติให้แก่ผู้เรียน เพื่อให้ผู้เรียนจะได้มีทักษะในการคิดวิเคราะห์ สังเคราะห์ ตามความสามารถและความแตกต่างระหว่างบุคคลของผู้เรียนได้ รวมทั้งต้องปลูกฝังให้ผู้เรียนมีสุขภาวะที่ดีในการเรียนรู้จักนำความรู้ไปใช้ให้เกิดประโยชน์ทั้งต่อตนเองและสังคม ซึ่งจะมีผลต่อประเทศชาติในอนาคต และครู-อาจารย์ผู้สอนจะต้องเน้นในเรื่องที่จะให้เด็กเรียนอย่างไรจึงจะได้รับผลสำเร็จตามความคาดหวังของหลักสูตร ตลอดจนแผนพัฒนาการศึกษา และปฏิรูปการศึกษาของชาติ

ดังนั้น สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์ จึงได้จัดทำหนังสือ **Examination Notes คณิตศาสตร์เพิ่มเติม เล่มนี้ขึ้น** เพื่อให้ผู้เรียนครู-อาจารย์ผู้สอน และผู้ปกครองได้นำไปใช้ประโยชน์ในการเรียนการสอนต่อไป

สำนักพิมพ์ฯ หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเล่มนี้คงจะอำนวยความสะดวกให้แก่ผู้เรียน ครู-อาจารย์ผู้สอน และผู้ที่สนใจในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ได้เป็นอย่างดีอีกเล่มหนึ่ง

ฝ่ายวิชาการ
สำนักพิมพ์ฟิสิกส์เซ็นเตอร์

สารบัญ

บทที่ 1	ตรรกศาสตร์	13
	1.1 ประพจน์	13
	1.2 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม	13
	1.3 สมมูล นิเสธ และสัจนิรันดร์	14
	1.4 ตัวบ่งปริมาณ	16
	1.5 การอ้างเหตุผล	19
บทที่ 2	ระบบจำนวนจริง	20
	2.1 จำนวนเต็ม	20
	2.2 จำนวนตรรกยะ	22
	2.3 จำนวนอตรรกยะ	22
	2.4 จำนวนจริง	23
	2.5 การแก้มการพหุนาม	24
	2.6 การไม่เท่ากันของจำนวนจริง	28
	2.7 ช่วง	29
	2.8 อสมการ	31
	2.9 ค่าสัมบูรณ์	32
บทที่ 3	ทฤษฎีจำนวนเบื้องต้น	35
	3.1 สัจพจน์ของระบบจำนวนจริง	35
	3.2 สมบัติความสมบูรณ์	36
	3.3 สมบัติของจำนวนเต็ม	36

3.4	สมบัติการหารลงตัว	36
3.5	จำนวนเฉพาะ	37
3.6	ขั้นตอนวิธีการหาร	37
3.7	จำนวนคู่ และจำนวนคี่	38
3.8	ตัวหารร่วมมาก : ห.ร.ม.	38
3.9	ตัวคูณร่วมน้อย : ค.ร.น.	39
3.10	ความสัมพันธ์ระหว่าง ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของจำนวนเต็มใดๆ	39

บทที่ 4	เมตริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์	40
4.1	เมตริกซ์	40
4.2	การเขียนสัญลักษณ์แทนเมตริกซ์	41
4.3	การเท่ากันของเมตริกซ์	41
4.4	เมตริกซ์ทรานสโพส	42
4.5	เมตริกซ์ศูนย์	42
4.6	การบวกเมตริกซ์	43
4.7	การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์	44
4.8	การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์	45
4.9	เมตริกซ์จัตุรัส	45
4.10	อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ 2×2	46
4.11	ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ 2×2	47
4.12	ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ $n \times n$	48
4.13	อินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ $n \times n$	50
4.14	สรุปสมบัติทั่วไปเกี่ยวกับเมตริกซ์ ที่ควรทราบ	51

บทที่ 5	เรขาคณิตวิเคราะห์	55
	5.1 เส้นตรง	55
	5.2 ภาคตัดกรวย	62
บทที่ 6	ฟังก์ชัน	75
	6.1 ฟังก์ชัน	75
	6.2 ฟังก์ชันจาก A ไป B	76
	6.3 ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด	77
	6.4 ฟังก์ชันที่ควรทราบ	77
	6.5 ฟังก์ชันคอมโพสิท	79
	6.6 ฟังก์ชันอินเวอร์ส	79
	6.7 พีชคณิตของฟังก์ชัน	80
บทที่ 7	ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม	81
	7.1 เลขยกกำลัง	81
	7.2 การบวก การลบ การคูณ และการหาร จำนวนตรรกยะที่อยู่ในรูปกรณ์	82
	7.3 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล	83
	7.4 ลอการิทึม	84
	7.5 ฟังก์ชันลอการิทึม	85
บทที่ 8	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และการประยุกต์	87
	8.1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	87
	8.2 ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่ควรทราบ	89

8.3	ฟังก์ชันของมุมหรือจำนวนจริง $\alpha + \beta$ และ $\alpha - \beta$	89
8.4	ฟังก์ชันของมุมหรือจำนวนจริง 2α	90
8.5	การเปลี่ยนฟังก์ชันผลคูณเป็นผลบวก หรือผลต่าง	90
8.6	การเปลี่ยนฟังก์ชันผลบวกหรือผลต่าง เป็นผลคูณ	91
8.7	อินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	91
8.8	ความสัมพันธ์ระหว่างอินเวอร์สของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	91
8.9	การแก้สามเหลี่ยม	92
บทที่ 9	เวกเตอร์	94
9.1	เวกเตอร์	94
9.2	เวกเตอร์ใน 2 มิติ และ 3 มิติ	97
บทที่ 10	จำนวนเชิงซ้อน	103
10.1	จำนวนจินตภาพ	103
10.2	จำนวนเชิงซ้อน	103
10.3	การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน	103
10.4	การบวกจำนวนเชิงซ้อน	104
10.5	การคูณจำนวนเชิงซ้อน	104
10.6	สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน	105
10.7	ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	106
10.8	การเขียนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ ในรูปเชิงชี้	107

10.9	การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อน ในรูปเชิงชี้	108
10.10	ค่าของ z^n และ $z^{\frac{1}{n}}$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$	108
10.11	การแก้มการ	108
บทที่ 11	ทฤษฎีกราฟเบื้องต้น	109
11.1	กราฟ	109
11.2	กราฟออยเลอร์	112
11.3	การประยุกต์ของกราฟ	113
บทที่ 12	ความน่าจะเป็น	114
12.1	กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ	114
12.2	แฟกทอเรียล n	114
12.3	วิธีเรียงสับเปลี่ยน	115
12.4	วิธีจัดหมู่	116
12.5	ทฤษฎีบททวินาม	116
12.6	ทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น	117
บทที่ 13	การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น	119
13.1	การเก็บรวบรวมข้อมูล	119
13.2	แหล่งข้อมูล	119
13.3	การจำแนกข้อมูล	119
13.4	การนำเสนอข้อมูล	120
13.5	การแจกแจงความถี่	121
13.6	ความหมายของสัญลักษณ์ Σ	121
13.7	การวัดค่ากลางของข้อมูล	122

13.8	การวัดตำแหน่งของข้อมูล	125
13.9	การวัดการกระจายของข้อมูล	129
13.10	ความสัมพันธ์ระหว่างเส้นโค้งแจกแจง ความถี่ ค่ากลาง และการกระจาย ของข้อมูล	132
บทที่ 14	การแจกแจงปกติ	134
14.1	ค่ามาตรฐาน	134
14.2	การแจกแจงปกติ และเส้นโค้งปกติ	134
บทที่ 15	ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล	139
15.1	ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟ เป็นเส้นตรง	139
15.2	ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟ เป็นรูปพาราโบลา	139
15.3	ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟ เป็นรูปเอกซ์โพเนนเชียล	140
บทที่ 16	ลำดับและอนุกรม	141
16.1	ลำดับ	141
16.2	อนุกรม	144
บทที่ 17	แคลคูลัสเบื้องต้น	146
17.1	ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	146
17.2	อนุพันธ์ของฟังก์ชัน	148
17.3	การอินทิเกรต	150

บทที่ 18	กำหนดการแข่งขัน	152
18.1	ระบบสมการเชิงเส้นตัวแปรตัวเดียว	152
18.2	ระบบสมการเชิงเส้นของสองตัวแปร	152
18.3	ตัวอย่างปัญหาคำหนดการแข่งขัน	153

บทที่ 1

ตรรกศาสตร์

1.1 ประพจน์

ประพจน์ คือ ประโยคหรือข้อความที่อยู่ในรูปประโยคบอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธที่สามารถระบุได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

ประโยคคำถาม คำสั่ง คำขอร้อง คำอุทาน หรือประโยคที่ไม่สามารถระบุได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จจะไม่ใช่ประพจน์

ประโยคเปิด คือ ประโยคที่มีตัวแปร ระบุค่าความจริงไม่ได้ จึงไม่เป็นประพจน์

ตัวแปร คือ สัญลักษณ์ซึ่งอาจถูกแทนที่ด้วยสมาชิกใดๆ ในเอกภพสัมพัทธ์

1.2 ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม

กำหนด p และ q เป็นประพจน์ใดๆ

1. $p \wedge q$ อ่านว่า p และ q
2. $p \vee q$ อ่านว่า p หรือ q
3. $p \rightarrow q$ อ่านว่า ถ้า p แล้ว q
4. $p \leftrightarrow q$ อ่านว่า p ก็ต่อเมื่อ q
5. $\sim p$ อ่านว่า นิเสธของ p

โดยมีค่าความจริง ตามตารางต่อไปนี้

ตารางแสดงค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
T	T	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T	T	T

1.3 สมมูล นิเสธ และสัจนิรันดร์

1.3.1 สมมูล ประพจน์ 2 ประพจน์สมมูลกันก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกัน

ประพจน์ที่สมมูลกันที่ควรทราบ

- $p \wedge q$ สมมูลกับ $q \wedge p$
- $p \vee q$ สมมูลกับ $q \vee p$
- $(p \wedge q) \wedge r$ สมมูลกับ $p \wedge (q \wedge r)$
- $(p \vee q) \vee r$ สมมูลกับ $p \vee (q \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r)$ สมมูลกับ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- $p \vee (q \wedge r)$ สมมูลกับ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$
- $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$
- $p \leftrightarrow q$ สมมูลกับ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

1.3.2 นิเสธ ประพจน์ 2 ประพจน์เป็นนิเสธกันก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงกันข้ามกัน

นิเสธที่ควรทราบ

1. นิเสธของ $p \wedge q$ คือ $\sim p \vee \sim q$
หรือ $\sim(p \wedge q)$ สมมูลกับ $\sim p \vee \sim q$
2. นิเสธของ $p \vee q$ คือ $\sim p \wedge \sim q$
หรือ $\sim(p \vee q)$ สมมูลกับ $\sim p \wedge \sim q$
3. นิเสธของ $p \rightarrow q$ คือ $p \wedge \sim q$
หรือ $\sim(p \rightarrow q)$ สมมูลกับ $p \wedge \sim q$
4. นิเสธของ $p \leftrightarrow q$ คือ $(p \leftrightarrow \sim q) \vee (q \leftrightarrow \sim p)$
หรือ $\sim(p \leftrightarrow q)$ สมมูลกับ $(p \leftrightarrow \sim q) \vee (q \leftrightarrow \sim p)$
5. นิเสธของ $p \leftrightarrow q$ คือ $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
หรือ $\sim(p \leftrightarrow q)$ สมมูลกับ $(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

1.3.3 สัจนิรันดร์

ประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณีของประพจน์ย่อย

ประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ที่ควรทราบ

1. $p \vee \sim p$
2. $\sim(p \wedge \sim p)$
3. $(p \wedge q) \rightarrow p$
4. $(p \rightarrow q) \rightarrow q$
5. $p \rightarrow (p \vee q)$
6. $q \rightarrow (p \vee q)$
7. $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
8. $[\sim q \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow \sim p$
9. $[\sim q \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$
10. $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

11. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
12. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
13. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
14. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
15. $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
16. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

1.4 ตัวบ่งปริมาณ

1.4.1 ประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวแปร 1 ตัว

กำหนดให้ $P(x)$ เป็นประโยคเปิดที่ประกอบด้วยตัวแปร x

$\forall x[P(x)]$ หมายถึง ตัวแปร x ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์
จะเป็นไปตามเงื่อนไข $P(x)$

ตัวอย่างเช่น $\forall x[x^2 \geq 0]$ เมื่อ $u = \mathbb{R}$ แปลว่า “สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว $x^2 \geq 0$ ”

$\exists x[P(x)]$ หมายถึง มีตัวแปร x บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์
ที่เป็นไปตามเงื่อนไข $P(x)$

ตัวอย่างเช่น $\exists x[x^2 < 0]$ เมื่อ $u = \mathbb{R}$ แปลว่า “มีจำนวนจริง x บางจำนวนที่ $x^2 < 0$ ”

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ

1. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อเซตคำตอบของ $P(x)$ คือ u
2. $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เมื่อเซตคำตอบของ $P(x)$

ไม่ใช่ u