



แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

4-6





แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2567

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ฉบับ e-book นี้ขึ้น โดยสอดคล้องกับเนื้อหาในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ของ สสวท. เพื่อให้นักเรียน ครู ผู้ปกครอง นักวิชาการ และผู้สนใจทั่วไปเข้าถึงได้ง่ายและสะดวกรวดเร็ว รวมทั้งสามารถเลือกใช้ตามความเหมาะสมกับจุดประสงค์ต่าง ๆ ทั้งนี้ สสวท. ขอสงวนสิทธิ์ในแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ฉบับ e-book นี้ ตามกฎหมายลิขสิทธิ์ ห้ามผู้ใดทำซ้ำ คัดลอก ดัดแปลง เลียนแบบ จำหน่าย หรือ เผยแพร่ โดยมีได้รับอนุญาต

สามารถเข้าถึงสื่อดิจิทัลต่าง ๆ ของ สสวท. ได้ที่ <https://www.ipst.ac.th/ebook-resource/>

ข้อมูลหนังสือ

ชื่อหนังสือ : แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6

เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

จัดทำโดย : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

จำนวน : 118 หน้า

ราคา : 75 บาท (จัดจำหน่ายในรูปแบบ e-book)

ISBN (e-book) : 978-616-576-437-7

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีพันธกิจในการศึกษา ค้นคว้า วิจัยและพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ วิธีสอนและการประเมินผลการจัดการเรียนรู้ รวมทั้งจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกทักษะ กิจกรรม และสื่อการเรียนรู้ เพื่อใช้ประกอบการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐานด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรื่องฟังก์ชัน เอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม นี้ จัดทำขึ้นตามพันธกิจและพัฒนาให้สอดคล้องกับเนื้อหาในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ของ สสวท. ที่จัดทำตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยมุ่งหวังให้ครู นักเรียน ผู้ปกครอง หรือผู้ที่สนใจนำไปใช้เป็นแนวทางในการส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะการคิดวิเคราะห์ การให้เหตุผล และการแก้ปัญหา โดยแบบฝึกทักษะแต่ละข้อประกอบด้วยสถานการณ์หรือปัญหา และเฉลยพร้อมแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ บุคลากรทางการศึกษา และหน่วยงานต่าง ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้



(รองศาสตราจารย์ธีระเดช เจียรสุขสกุล)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สารบัญ

สรุปเนื้อหาสาระ.....	1
แบบฝึกทักษะ เรื่องฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม...	7
เฉลยแบบฝึกทักษะพร้อมแสดงวิธีทำอย่างละเอียด.....	59
บรรณานุกรม.....	108
คณะผู้จัดทำ.....	109



สรุปเนื้อหาสาระ

1. บทนิยาม 1

ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ตัว}}$$

$$a^0 = 1 \quad \text{เมื่อ } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{เมื่อ } a \neq 0$$

เรียก a^n ว่าเลขยกกำลัง

เรียก a ว่าฐานของเลขยกกำลัง และ เรียก n ว่าเลขชี้กำลัง

2. ทฤษฎีบท 1

ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ m, n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$1) \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2) \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3) \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$4) \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$5) \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

3. บทนิยาม 2

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง

y เป็นรากที่สองของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2 = x$

4. ถ้า $x \geq 0$ แล้ว x จะมีรากที่สองที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ เรียกรากนี้ว่า รากที่สองที่ไม่เป็นจำนวนลบของ x และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt{x}$ โดยเครื่องหมาย $\sqrt{}$ เรียกว่า เครื่องหมายกรณฑ์

5. เมื่อ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ $(-y)^2 = y^2$ ดังนั้น ถ้ามีจำนวนจริง y ยกกำลังสองแล้วได้ x ก็จะมีจำนวนจริง $-y$ ที่ยกกำลังสองแล้วได้ x ด้วย

ดังนั้น สำหรับ $x > 0$ จะมีรากที่สองของ x สองรากคือ $\sqrt{x}$ และ $-\sqrt{x}$ โดยที่ $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $-\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงลบ

ถ้า $x = 0$ แล้วจะมีจำนวนจริงจำนวนเดียว คือ 0 เป็นรากที่สองของ x นั่นคือ $\sqrt{0} = 0$

ถ้า $x < 0$ แล้วจะไม่มีรากที่สองของ x ที่เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $\sqrt{x} = y$ เมื่อ $x \geq 0$ หมายความว่า $y^2 = x$ และ $y \geq 0$

6. ทฤษฎีบท 2

ให้ $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ จะได้ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}$

7. ทฤษฎีบท 3

ให้ $x \geq 0$ และ $y > 0$ จะได้ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$

8. บทนิยาม 3

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1
 y เป็นรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$

9. บทนิยาม 4

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มีมากกว่า 1
 y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ

- 1) y เป็นรากที่ n ของ x และ
- 2) $xy \geq 0$

10. แทนค่าหลักของรากที่ n ของ x ด้วย $\sqrt[n]{x}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ x หรือ ค่าหลักของรากที่ n ของ x

11. ทฤษฎีบท 4

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

12. ทฤษฎีบท 5

ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 โดยที่ x และ y มีรากที่ n และ $y \neq 0$ แล้ว $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

หมายเหตุ

- ถ้า $x < 0$ หรือ $y < 0$ แล้ว ทฤษฎีบท 4 และ 5 จะเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวกเท่านั้น
- ถ้า n เป็นจำนวนคี่บวกแล้ว $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$
- ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้วจะได้ว่า
 - 1) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่
 - 2) $\sqrt[n]{x^n} = x$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

13. บทนิยาม 5

ให้ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ถ้า a มีรากที่ n แล้ว $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

จากบทนิยาม 5 ในกรณีที่ $a \geq 0$ สามารถนิยาม $a^{\frac{1}{n}}$ ได้เสมอ

ในกรณีที่ $a < 0$ จะนิยามเฉพาะกรณีที่ n เป็นจำนวนคี่

14. บทนิยาม 6

ให้ a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ และ r เป็นจำนวนตรรกยะ เขียน $r = \frac{p}{q}$

โดยที่ p, q เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $q > 0$ และ ห.ร.ม. ของ p และ q เป็น 1

ถ้า $a^{\frac{1}{q}}$ เป็นจำนวนจริง แล้ว $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$

หมายเหตุ

- จากบทนิยาม เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะจะนิยามเมื่อ เลขชี้กำลังเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำเท่านั้นและ $a^{\frac{1}{q}}$ ต้องเป็นจำนวนจริง
- ในกรณีที่ $a = 0$ และ r เป็นจำนวนตรรกยะบวก สามารถนิยาม $0^r = 0$ แต่จะไม่นิยาม 0^r เมื่อ r เป็นจำนวนตรรกยะลบหรือศูนย์

15. ทฤษฎีบท 6

ให้ m และ n เป็นจำนวนตรรกยะ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0 โดยที่ a^m, a^n และ b^n เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$3) (ab)^n = a^n b^n$$

$$4) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$5) \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

16. บทนิยาม 7

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = a^x\}$

โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$

17. สมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เรียกว่า สมการเอกซ์โพเนนเชียล
อสมการที่มีตัวแปรเป็นเลขชี้กำลัง เรียกว่า อสมการเอกซ์โพเนนเชียล

18. บทนิยาม 8

ฟังก์ชันลอการิทึม คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\{(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \mid y = \log_a x\}$

โดยที่ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$

19. ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ข้อสังเกต

- กราฟของฟังก์ชัน $y = \log_a x$ เมื่อ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะผ่านจุด $(1, 0)$ เสมอ เนื่องจาก $\log_a 1 = 0$
- ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด
- ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก $\mathbb{R}^+$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$
- จากสมบัติของฟังก์ชัน 1-1 จะได้ว่า $\log_a x = \log_a y$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$
- เนื่องจาก $y = \log_a x$ ก็ต่อเมื่อ $a^y = x$
เมื่อแทน y ในสมการหลังด้วย $\log_a x$ จะได้ $a^{\log_a x} = x$
และเมื่อแทน x ในสมการแรกด้วย a^y จะได้ $y = \log_a a^y$
ดังนั้น $a^{\log_a x} = x$ และ $y = \log_a a^y$

20. ทฤษฎีบท 7

ให้ a, M และ N เป็นจำนวนจริงบวกที่ $a \neq 1$ และ k เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

- 1) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
- 2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
- 3) $\log_a M^k = k \log_a M$
- 4) $\log_a a = 1$
- 5) $\log_a 1 = 0$
- 6) $\log_{a^k} M = \frac{1}{k} \log_a M$ เมื่อ $k \neq 0$
- 7) $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$ เมื่อ $b > 0$ และ $b \neq 1$

21. ลอการิทึมที่ใช้มากในการคำนวณคือ **ลอการิทึมสามัญ** ซึ่งหมายถึงลอการิทึมที่มีฐานเป็น 10 ในการเขียนลอการิทึมสามัญนิยมเขียนโดยไม่มีฐานกำกับ เช่น $\log_{10} N$ จะเขียนแทนด้วย $\log N$ เมื่อ N เป็นจำนวนจริงบวก และเรียก N ว่า **แอนติลอการิทึม** ของ $\log N$