



แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์

จำนวนเชิงซ้อน

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่

4-6

$$i^2 = -1$$

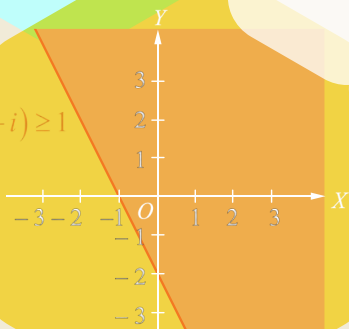
$$\bar{z} = a - bi$$

$\mathbb{C}$

$$z = a + bi$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$2\operatorname{Re}(z+1) + \operatorname{Im}(z+i) \geq 1$$





แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6

จำนวนเชิงซ้อน

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2567

มีลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรื่อง จำนวนเชิงซ้อน ฉบับ e-book นี้ขึ้น โดยสอดคล้องกับเนื้อหาในหนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ของ สสวท. เพื่อให้ นักเรียน ครู ผู้ปกครอง นักวิชาการ และผู้สนใจทั่วไป เข้าถึงได้ง่ายและสะดวก รวดเร็ว รวมทั้งสามารถเลือกใช้ตามความเหมาะสมกับจุดประสงค์ต่าง ๆ ทั้งนี้ สสวท. ขอสงวนสิทธิ์ในแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องจำนวนเชิงซ้อน ฉบับ e-book นี้ ตามกฎหมายลิขสิทธิ์ ห้ามผู้ใดทำซ้ำ คัดลอก ดัดแปลง เลียนแบบ จำหน่ายหรือ เผยแพร่ โดยมิได้รับอนุญาต

สามารถเข้าถึงสื่อดิจิทัลต่าง ๆ ของ สสวท. ได้ที่ <https://www.ipst.ac.th/ebook-resource/>

ข้อมูลหนังสือ

ชื่อหนังสือ : แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6
เรื่องจำนวนเชิงซ้อน

จัดทำโดย : สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

จำนวน : 128 หน้า

ราคา : 85 บาท (จัดจำหน่ายในรูปแบบ e-book)

ISBN (e-book) : 978-616-576-434-6

คำนำ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) มีพันธกิจในการศึกษา ค้นคว้า วิจัยและพัฒนาหลักสูตร วิธีการเรียนรู้ วิธีสอนและการประเมินผลการจัดการเรียนรู้ รวมทั้งจัดทำหนังสือเรียน คู่มือครู แบบฝึกทักษะ กิจกรรม และสื่อการเรียนรู้ เพื่อใช้ประกอบการจัดการศึกษาขั้นพื้นฐานด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์ และเทคโนโลยี

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 เรื่องจำนวนเชิงซ้อน นี้ จัดทำขึ้นตามพันธกิจและพัฒนาให้สอดคล้องกับเนื้อหาในหนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ของสสวท. ที่จัดทำตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยมุ่งหวังให้ครู นักเรียน ผู้ปกครอง หรือผู้ที่สนใจ นำไปใช้เป็นแนวทางในการส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะการคิดวิเคราะห์ การให้เหตุผล และการแก้ปัญหา โดยแบบฝึกทักษะแต่ละข้อประกอบด้วยสถานการณ์หรือปัญหา และเฉลยพร้อมแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

สสวท. หวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการจัดการเรียนรู้ และเป็นส่วนสำคัญในการพัฒนาคุณภาพและมาตรฐานการศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ขอขอบคุณผู้ทรงคุณวุฒิ บุคลากรทางการศึกษา และหน่วยงานต่าง ๆ ที่มีส่วนเกี่ยวข้องในการจัดทำไว้ ณ โอกาสนี้



(รองศาสตราจารย์ธีระเดช เจียรสุขสกุล)

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สารบัญ

สรุปเนื้อหาสาระ.....	1
แบบฝึกทักษะ เรื่องจำนวนเชิงซ้อน.....	9
เฉลยแบบฝึกทักษะพร้อมแสดงวิธีทำอย่างละเอียด.....	57
บรรณานุกรม.....	117
คณะผู้จัดทำ.....	118



สรุปเนื้อหาสาระ

1. บทนิยาม 1

จำนวนเชิงซ้อน คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

1) การเท่ากัน

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

2) การบวก

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

3) การคูณ

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

อาจเขียนแทน $(a, b) \cdot (c, d)$ ด้วย $(a, b)(c, d)$ และเขียนแทนเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{C}$

2. เมื่อเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ ด้วยสัญลักษณ์ i จะได้ว่า $i^2 = -1$ 3. จำนวนเชิงซ้อน (a, b) สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $a + bi$

4. บทนิยาม 2

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ หรือ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง เรียก a ว่า **ส่วนจริง** ของ z และเขียนแทนด้วย $\text{Re}(z)$

เรียก b ว่า **ส่วนจินตภาพ** ของ z และเขียนแทนด้วย $\text{Im}(z)$

5. จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ คือ จำนวนจริง

จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์แต่ส่วนจินตภาพไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้**

6. เอกลักษณ์การบวก ในระบบจำนวนเชิงซ้อน คือ $(0, 0)$ หรือ 0

7. **ตัวผกผันการบวก** ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย $-z$

เมื่อ $z = a + bi$ จะได้ $-z = -a - bi$

8. **บทนิยาม 3**

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w จะได้ว่า $z - w = z + (-w)$

9. **เอกลักษณ์การคูณ** ในระบบจำนวนเชิงซ้อน คือ $(1, 0)$ หรือ 1

10. **ตัวผกผันการคูณ** ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย z^{-1}

เมื่อ $z = a + bi$ และ $z \neq 0$ จะได้ว่า $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$

11. **บทนิยาม 4**

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w ซึ่ง $w \neq 0$ จะได้ว่า $z \div w = zw^{-1}$ และเขียนแทน

$z \div w$ ด้วย $\frac{z}{w}$

12. ระบบจำนวนเชิงซ้อนสอดคล้องกับสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณ ซึ่งเรียกว่าสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน สามารถสรุปได้ดังนี้

ให้ z, z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	1) $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$	6) $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$
สมบัติการสลับที่	2) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	7) $z_1 z_2 = z_2 z_1$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	3) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	8) $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	4) $z + 0 = z = 0 + z$ เรียก 0 ว่า เอกลักษณ์การบวก	9) $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$ เรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณ
สมบัติการมีตัวผกผัน	5) $z + (-z) = 0 = (-z) + z$ เรียก $-z$ ว่า ตัวผกผันการบวก หรืออินเวอร์สการบวกของ z	10) ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z$ เรียก z^{-1} ว่า ตัวผกผันการคูณ หรืออินเวอร์สการคูณของ z
สมบัติการแจกแจง	11) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	

13. บทนิยาม 5

ให้ $z = a + bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค ของ z คือ $a - bi$

14. สังยุคของ z เขียนแทนด้วย $\bar{z}$ ซึ่ง $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

15. ทฤษฎีบท 1

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \text{ และ } \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

$$2) \bar{\bar{z}} = z$$

$$3) \frac{1}{\bar{z}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} \text{ เมื่อ } z \neq 0$$

$$4) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$5) \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$6) \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$7) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \text{ เมื่อ } z_2 \neq 0$$

16. บทนิยาม 6

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ รากที่สองของ z คือ จำนวนเชิงซ้อน w ซึ่ง $w^2 = z$

17. ถ้า w เป็นรากที่สองของ z แล้ว $-w$ จะเป็นรากที่สองของ z ด้วย และ รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองจำนวนเท่านั้น

18. ทฤษฎีบท 2

กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ และให้ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ จะได้ว่ารากที่สองของ z คือ

$$\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}} i \right) \text{ เมื่อ } b \geq 0$$

$$\pm \left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}} i \right) \text{ เมื่อ } b < 0$$

19. ทฤษฎีบท 3

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a \neq 0$ จะได้ว่าคำตอบของสมการกำลังสอง $ax^2 + bx + c = 0$ คือ

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{เมื่อ } b^2 - 4ac \geq 0$$

และ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}i}{2a} \quad \text{เมื่อ } b^2 - 4ac < 0$

20. เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนอาจเขียนอยู่ในรูปของคู่อันดับ (a, b) หรือในรูป $a + bi$ โดยที่ a เป็นส่วนจริง และ b เป็นส่วนจินตภาพ ดังนั้น อาจแทนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ใด ๆ ด้วยจุดในระนาบได้เช่นเดียวกับการแทนคู่อันดับในความสัมพันธ์ใด ๆ ด้วยจุดในระนาบในระบบพิกัดฉาก และเรียกแกน X ว่า **แกนจริง** เรียกแกน Y ว่า **แกนจินตภาพ** และเรียกระนาบนี้ว่า **ระนาบเชิงซ้อน**

21. บทนิยาม 7

ค่าสัมบูรณ์ ของจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ คือ จำนวนจริง $\sqrt{a^2 + b^2}$

นั่นคือ $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

22. ค่าสัมบูรณ์ของ $a + bi$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และ (a, b)

23. ทฤษฎีบท 4

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

$$1) |z|^2 = z\bar{z}$$

$$2) |z| = |-z| = |\bar{z}|$$

$$3) \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \text{เมื่อ } z \neq 0$$

$$4) |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

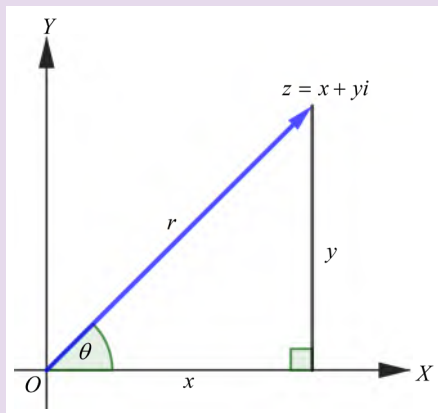
$$5) |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$6) |z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

24. ถ้า $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วค่าสัมบูรณ์ของ $z_1 - z_2$ หรือ $|z_1 - z_2|$ หมายถึง ระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อน $z_1 - z_2$ ในระนาบเชิงซ้อน

25. รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ จะสามารถเขียนแสดง z ด้วยเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



เมื่อกำหนดให้ r แทนระยะทางระหว่างจุดกำเนิด O กับ z และ θ เป็นขนาดของมุม ซึ่งถ้าวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{Oz}$ จะได้ $\theta > 0$ และถ้าวัดมุมตามเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{Oz}$ จะได้ $\theta < 0$ และได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = r \cos \theta \quad \text{และ} \quad y = r \sin \theta$$

นอกจากนี้ ยังได้ความสัมพันธ์ที่ทำให้หา r และ θ จาก x และ y ดังนี้

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{และ} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

ดังนั้น อาจเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ในรูป r และ θ ได้ดังนี้

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เรียกว่า **รูปเชิงขั้ว** ของ z และเรียก θ ว่า **อาร์กิวเมนต์** ของ z

26. สำหรับทุกจำนวนเต็ม k ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $\theta + 2k\pi$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย

27. ให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $z_1 = z_2$ จะได้ว่า $|z_1| = |z_2|$ นั่นคือ $r_1 = r_2$ และเนื่องจาก $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ และ $\sin \theta_1 = \sin \theta_2$ ก็ต่อเมื่อ $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 = r_2$ และ $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

28. ทฤษฎีบท 5

ให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ โดยที่ $z_1 \neq 0$ และ $z_2 \neq 0$ จะได้ว่า

$$1) \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

$$2) \quad \frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2} (\cos \theta_2 - i \sin \theta_2)$$

$$3) \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$4) \quad \bar{z}_1 = r_1 (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))$$

29. ทฤษฎีบท 6 ทฤษฎีบทของเดอมัวร์

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

30. ทฤษฎีบท 7

ให้ $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$