



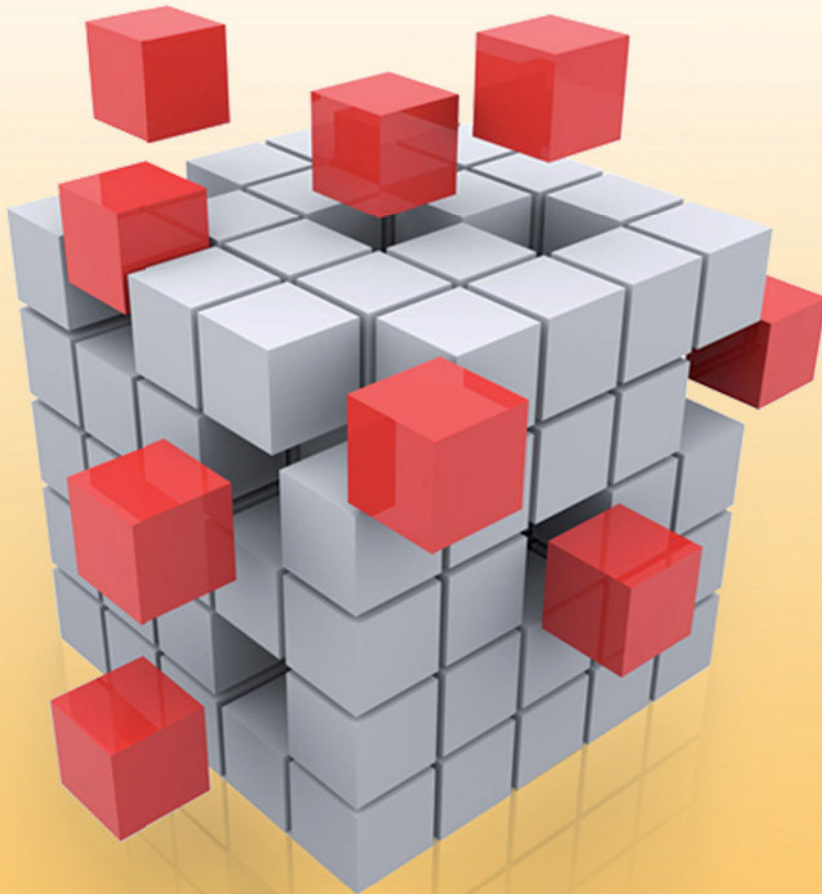
Compact

คณิตศาสตร์

ตรงตามหลักสูตรแกนกลาง พ.ศ. 2551

- ✓ เน้นเทคนิคการคิดคำนวณ เพื่อให้เข้าใจง่ายและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้
- ✓ เหมาะสำหรับเตรียมตัวสอบเก็บคะแนน กลางภาค และปลายภาค
- ✓ เพิ่มทักษะการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่อเตรียมพร้อมสอบ O-NET ล่วงหน้าในระดับชั้น ม.3

ม.1



หนังสือเล่มนี้พิมพ์ด้วย กระดาษดีบิล เอ
กระดาษจากไม้ปลูก ไม่รบกวนไม้ธรรมชาติ



ยุพดี มงคลจินดาวงศ์

 **IMAC** EDUCATION



คณิตศาสตร์ ม.1

- เน้นเทคนิคการคิดคำนวณ เพื่อให้เข้าใจง่ายและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้
- เหมาะสำหรับเตรียมตัวสอบเก็บคะแนน กลางภาค ปลายภาค
- เพิ่มทักษะการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ เพื่อเตรียมพร้อมสอบ O-NET ล่วงหน้าในระดับชั้น ม.3



ยุพดี มงคลจินดาวงศ์

Compact คณิตศาสตร์ ม.1

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

ยุพดี มงคลจินดาวงศ์.

Compact คณิตศาสตร์ ม.1.-- กรุงเทพฯ : แม็คเอ็ดดูเคชั่น, 2556.

352 หน้า. --(Compact).

1. คณิตศาสตร์--การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา). I. ชื่อเรื่อง.

510.7

ISBN 978-616-274-253-8

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

MAC | MACEDUCATION

ผู้เขียน : ยุพดี มงคลจินดาวงศ์

สงวนลิขสิทธิ์ : เมษายน 2556

ราคาจำหน่าย : 155 บาท

การสั่งซื้อ : ส่งณาคณัติสั่งจ่าย **โปรชนียลาดพร้าว 10310** ในนาม **บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด**

เลขที่ 9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว แขวงจันทระเกษม

เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

☎ : 0-2938-2022-7 FAX : 0-2938-2028

www.MACeducation.com

พิมพ์ที่ : บริษัท เพ็ชรทรัพย์ การพิมพ์

(สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร)



หนังสือเล่มนี้พิมพ์ด้วย กระดาษรีไซเคิล เอ
กระดาษจากไม้ปลูก ไม่รบกวนไม้ธรรมชาติ



คำนำ

หนังสือคู่มือ ชุด **Compact คณิตศาสตร์ ม.ต้น** ของบริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด มีเนื้อหาตรงตามมาตรฐานและตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ของกระทรวงศึกษาธิการ โดยมีจุดมุ่งหมายเพื่อให้นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-3 ใช้เป็นคู่มือประกอบการเรียนรายวิชาคณิตศาสตร์นอกเวลาเรียนปกติ หนังสือคู่มือชุดนี้มีทั้งหมด 3 เล่ม ดังนี้

1. หนังสือคู่มือ Compact คณิตศาสตร์ ม.1

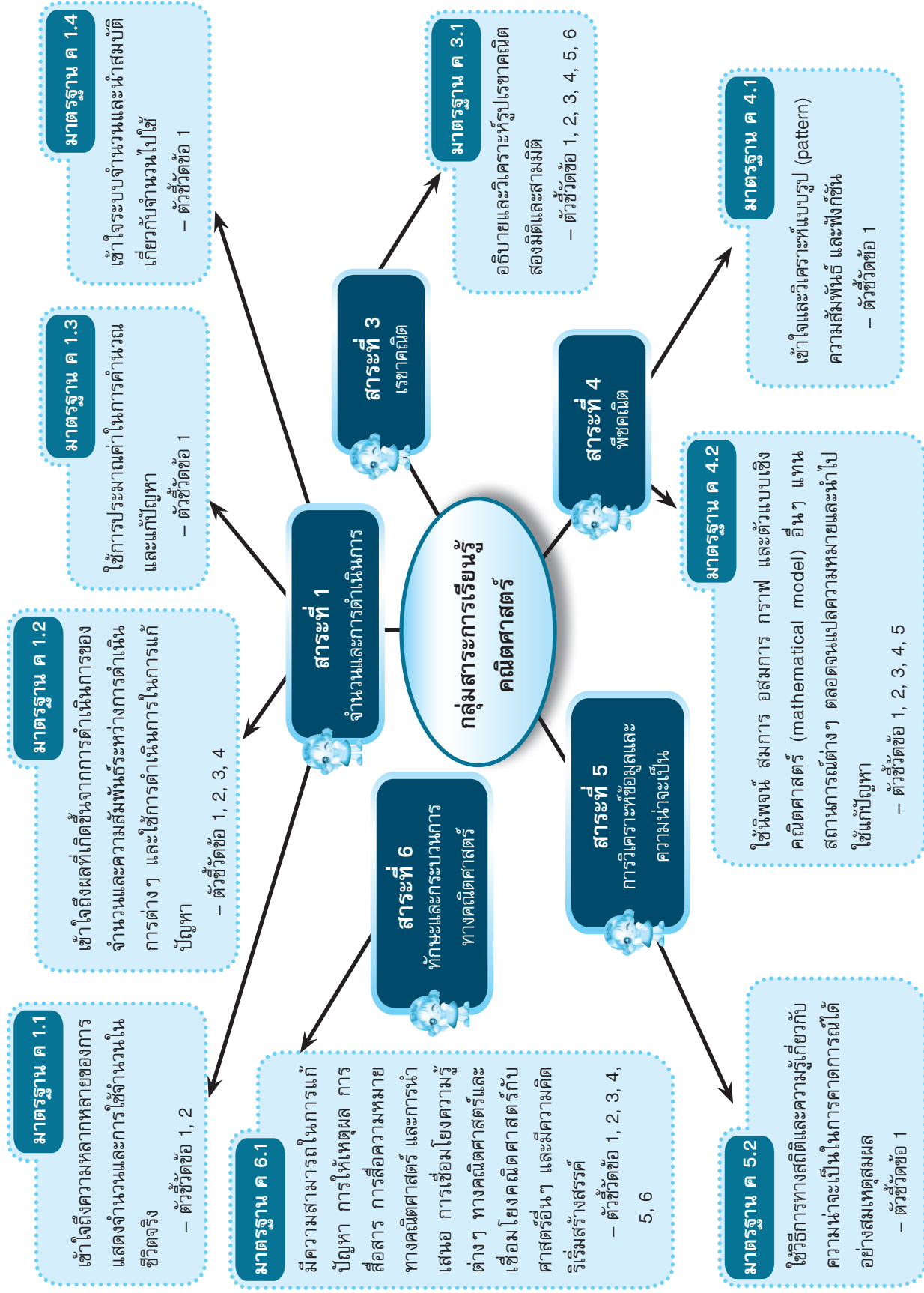
2. หนังสือคู่มือ Compact คณิตศาสตร์ ม.2

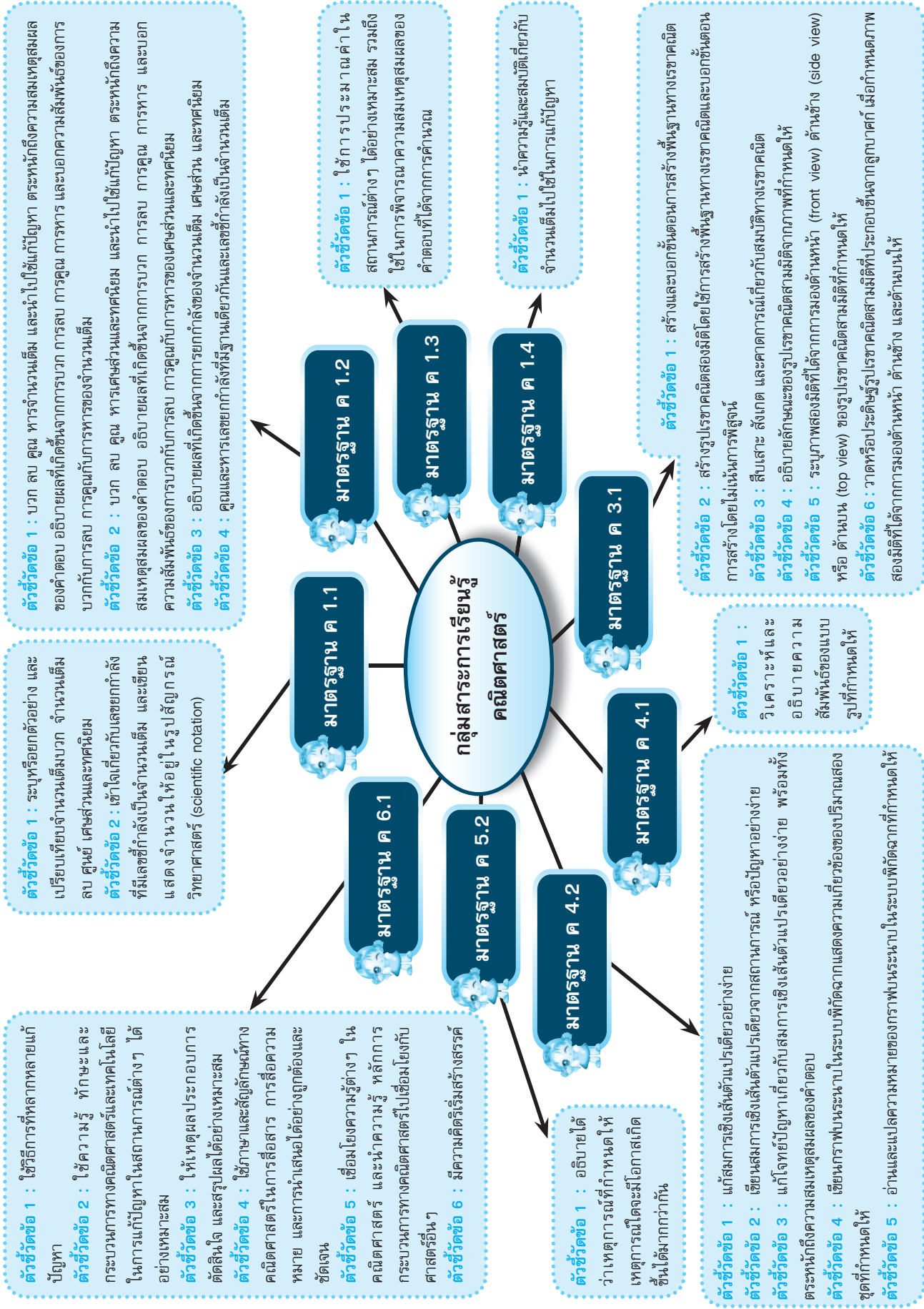
3. หนังสือคู่มือ Compact คณิตศาสตร์ ม.3

หนังสือคู่มือชุดนี้ แต่ละเล่มประกอบด้วย เนื้อหาที่นักเรียนสามารถเรียนรู้หรือทบทวนบทเรียนเพื่อสร้างความเข้าใจได้ด้วยตนเอง มีแบบทดสอบให้นักเรียนได้ฝึกทำจนเกิดความเข้าใจ สร้างทักษะและความชำนาญในการทำแบบทดสอบ อีกทั้งยังเป็นการประเมินผลตนเองในแต่ละเนื้อหาอันเป็นการเพิ่มพูนความเข้าใจและประสบการณ์ สร้างความมั่นใจ และพร้อมที่จะนำไปประยุกต์ใช้เพื่อการสอบได้

ทั้งนี้ **บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด** หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือคู่มือ ชุด Compact คณิตศาสตร์ ม.ต้น จะอำนวยความสะดวกให้แก่ผู้อ่านได้ดี และหากมีข้อสงสัยหรือข้อเสนอแนะเกี่ยวกับหนังสือคู่มือชุดนี้ กรุณาติดต่อได้ที่ บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด เพื่อเป็นประโยชน์ในการพัฒนาหนังสือคู่มือเล่มต่อไปในอนาคต

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด





สารบัญ

● บทที่ 1 ตัวหารร่วมมาก ตัวคูณร่วมน้อย และการประยุกต์

1-28

(ตรงตามมาตรฐาน ค 1.4 ตัวชี้วัดข้อ 1)

1. จำนวนนับ ตัวประกอบ และพหุคูณ	1
2. จำนวนเฉพาะและตัวประกอบเฉพาะ	4
3. การแยกตัวประกอบของจำนวนนับ	5
4. ตัวหารร่วมมากและการนำไปใช้	6
5. ตัวคูณร่วมน้อยและการนำไปใช้	11
แบบทดสอบ	17
เฉลย	22

● บทที่ 2 ระบบจำนวนเต็ม

29-57

(ตรงตามมาตรฐาน ค 1.1 ตัวชี้วัดข้อ 1, ค 1.2 ตัวชี้วัดข้อ 1 และ ค 1.4 ตัวชี้วัดข้อ 1)

1. จำนวนเต็ม	29
2. การหาผลบวกของจำนวนเต็ม	31
3. การลบจำนวนเต็ม	38
4. การคูณจำนวนเต็ม	40
5. การหารจำนวนเต็ม	40
6. สมบัติของจำนวนเต็ม	41
7. การบวกและการลบจำนวนเต็มที่มีหลายจำนวน	44
8. การบวก การลบ การคูณ และการหารจำนวนเต็ม	46
แบบทดสอบ	46
เฉลย	52

● บทที่ 3 เลขยกกำลังและการประยุกต์

58-81

(ตรงตามมาตรฐาน ค 1.1 ตัวชี้วัดข้อ 2 และ ค 1.2 ตัวชี้วัดข้อ 3, 4)

1. เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม	58
2. การหาค่าของเลขยกกำลังเมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก	59
3. การคูณเลขยกกำลังเมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก	62
4. การหารเลขยกกำลังเมื่อเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก	63
5. เลขยกกำลังที่มีฐานอยู่ในรูปการคูณหรือการหารของจำนวน	66
6. การเขียนจำนวนที่มีค่ามากๆ หรือจำนวนที่มีค่าน้อยๆ ให้อยู่ในรูปสัญกรณ์วิทยาศาสตร์	67
7. การนำไปใช้	70
แบบทดสอบ	72
เฉลย	76

● บทที่ 4 พื้นฐานทางเรขาคณิตและการสร้าง

82-118

(ตรงตามมาตรฐาน ค 3.1 ตัวชี้วัดข้อ 1, 2, 3)

1. จุด เส้นตรง ระนาบ	82
2. ส่วนของเส้นตรง	83
3. รังสี	83
4. มุม	84
5. การสร้างพื้นฐาน	87
แบบทดสอบ	106
เฉลย	113

● บทที่ 5 จำนวนและตัวเลข

119-141

(ตรงตามมาตรฐาน ค 6.1 สาระเพิ่มเติม)

1. ระบบตัวเลขโรมัน	119
2. ระบบตัวเลขฐานต่างๆ	121

3. การเปลี่ยนฐานในระบบตัวเลข	129
แบบทดสอบ	131
เฉลย	135

● บทที่ 6 ทศนิยมและเศษส่วน

142-199

(ตรงตามมาตรฐาน ค 1.1 ตัวชี้วัดข้อ 1, ค 1.2 ตัวชี้วัดข้อ 2 และ ค 5.2 ตัวชี้วัดข้อ 1)

1. จำนวนในรูปทศนิยม	142
2. การเปรียบเทียบทศนิยม	145
3. การบวกและการลบทศนิยม	148
4. การคูณทศนิยม	153
5. การหารทศนิยม	155
6. เศษส่วนและการเปรียบเทียบเศษส่วน	159
7. การบวกและการลบเศษส่วน	166
8. การคูณและการหารเศษส่วน	171
9. ความสัมพันธ์ระหว่างทศนิยมกับเศษส่วน	174
10. โจทย์ปัญหาเศษส่วน	177
11. โอกาสของเหตุการณ์	179
แบบทดสอบ	182
เฉลย	188

● บทที่ 7 การประมาณค่า

200-215

(ตรงตามมาตรฐาน ค 1.3 ตัวชี้วัดข้อ 1)

1. ค่าประมาณ	200
2. การหาค่าประมาณโดยการปิดเศษ	201
3. การประมาณค่า	204
แบบทดสอบ	207
เฉลย	211

● บทที่ 8 คู่อันดับและกราฟ

216-241

(ตรงตามมาตรฐาน ค 4.2 ตัวชี้วัดข้อ 4, 5)

1. คู่อันดับและกราฟของคู่อันดับ	216
2. กราฟและการนำไปใช้	222
แบบทดสอบ	230
เฉลย	236

● บทที่ 9 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

242-274

(ตรงตามมาตรฐาน ค 4.1 ตัวชี้วัดข้อ 1 และ ค 4.2 ตัวชี้วัดข้อ 1, 2, 3)

1. แบบรูปและความสัมพันธ์	242
2. สมการ	248
3. คำตอบของสมการ	249
4. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	251
5. โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	255
แบบทดสอบ	258
เฉลย	265

● บทที่ 10 พหุนาม

275-305

(ตรงตามมาตรฐาน ค 6.1 สาระเพิ่มเติม)

1. เอกนาม	275
2. การบวกและการลบเอกนาม	278
3. พหุนาม	280
4. การบวกและการลบพหุนาม	282
5. การคูณพหุนาม	285
6. การหารพหุนาม	288
แบบทดสอบ	292
เฉลย	297

(ตรงตามมาตรฐาน ค 3.1 ตัวชี้วัดข้อ 4, 5, 6)

1. ภาพของรูปเรขาคณิตสามมิติ	306
2. รูปคลี่ของรูปเรขาคณิตสามมิติ	309
3. หน้าตัดของรูปเรขาคณิตสามมิติ	311
4. ภาพที่ได้จากการมองด้านหน้า ด้านข้าง และด้านบนของรูปเรขาคณิตสามมิติ	314
5. รูปเรขาคณิตสามมิติที่ประกอบขึ้นจากลูกบาศก์	316
แบบทดสอบ	321
เฉลย	331



บทที่ 1 ตัวหารร่วมมาก ตัวคูณร่วมน้อย และการประยุกต์



1. จำนวนนับ ตัวประกอบ และพหุคูณ

จำนวนนับ หมายถึง จำนวนที่เริ่มตั้งแต่ 1 และเพิ่มขึ้นทีละหนึ่งไปเรื่อยๆ ไม่มีที่สิ้นสุด และได้นำมาใช้เพื่อแสดงจำนวนของสิ่งต่างๆ ใช้ในการนับ คน สัตว์ สิ่งของต่างๆ เรียกอีกชื่อหนึ่งว่า จำนวนเต็มบวก ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 5, ...

การหารจำนวนนับ

การหารจำนวนนับอาจเป็นการหารลงตัวหรือการหารไม่ลงตัว ถ้าเป็นการหารลงตัว เศษจากการหารจะเป็นศูนย์ ซึ่งมักกล่าวว่ามีเศษ แต่ถ้าเป็นการหารไม่ลงตัวแล้วจะมีเศษจากการหารที่ไม่เท่ากับศูนย์

กรณีที่เป็นการหารลงตัว เช่น $16 \div 2 = 8$ เรียก 2 ว่า **ตัวหาร** หรือ **ตัวประกอบของ 16** และเรียก 16 ว่าเป็น

พหุคูณของ 2

หรือเขียนได้ดังนี้ $16 = 2 \times 8$

กล่าวได้ว่า **2 เป็นตัวประกอบของ 16** เนื่องจาก 2 หาร 16 ลงตัว หรือ 16 หารด้วย 2 ลงตัว

8 เป็นตัวประกอบของ 16 เนื่องจาก 8 หาร 16 ลงตัว หรือ 16 หารด้วย 8 ลงตัว

และ **16 เป็นพหุคูณของ 2** เนื่องจาก 16 หารด้วย 2 ลงตัว

16 เป็นพหุคูณของ 8 เนื่องจาก 16 หารด้วย 8 ลงตัว

จะเห็นว่า ตัวประกอบที่เป็นจำนวนนับของ 16 มี 5 จำนวน ได้แก่ 1, 2, 4, 8 และ 16

แต่พหุคูณของจำนวนนับมีมากมาย เช่น พหุคูณของ 16 ได้แก่ 16, 32, 48, ...

พหุคูณของ 2 ได้แก่ 2, 4, 6, 8, 10, ...

พหุคูณของ 8 ได้แก่ 8, 16, 24, 32, ...

สรุป

ตัวประกอบของจำนวนนับใด คือ จำนวนนับที่หารจำนวนนับนั้นลงตัว

พหุคูณของจำนวนนับใด คือ จำนวนนับที่หารด้วยจำนวนนับนั้นลงตัว

2 | COMPACT คณิตศาสตร์ ม.1

ข้อสังเกต ถ้าให้ n แทนจำนวนนับใดๆ จะได้ว่า

1. 1 เป็นตัวประกอบของ n
2. n เป็นตัวประกอบของ n

ตัวอย่างที่ 1 จงหาตัวประกอบทั้งหมดของ 80

วิธีทำ ตัวประกอบของ 80 คือจำนวนนับที่หาร 80 ลงตัว ซึ่งการหาตัวประกอบของจำนวนนับใดๆ นักเรียนอาจหาได้ไม่ครบถ้วน ดังนั้น เพื่อการหาตัวประกอบได้ครบถ้วน ให้พิจารณาจากตัวคูณสองจำนวนทุกคู่ที่มีผลคูณเท่ากับ 80 โดยเริ่มจากตัวคูณ 1, 2, 3, ...

$$80 = 1 \times 80$$

$$80 = 2 \times \square \quad (\square \text{ แทนผลหารที่ได้จาก 2 หาร 80 ได้ลงตัว คือ 40})$$

$$80 = 3 \times \square \quad (\square \text{ แทนผลหารที่ได้จาก 3 หาร 80 ได้ลงตัว ไม่มี})$$

$$80 = 4 \times \square \quad (\square \text{ แทนผลหารที่ได้จาก 4 หาร 80 ได้ลงตัว คือ 20})$$

$$80 = 5 \times \square \quad (\square \text{ แทนผลหารที่ได้จาก 5 หาร 80 ได้ลงตัว คือ 16})$$

$$80 = 6 \times \square \quad (\square \text{ แทนผลหารที่ได้จาก 6 หาร 80 ได้ลงตัว ไม่มี})$$

$$80 = 7 \times \square \quad (\square \text{ แทนผลหารที่ได้จาก 7 หาร 80 ได้ลงตัว ไม่มี})$$

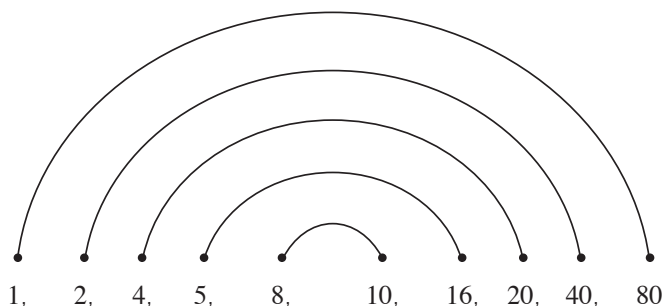
$$80 = 8 \times \square \quad (\square \text{ แทนผลหารที่ได้จาก 8 หาร 80 ได้ลงตัว คือ 10})$$

$$80 = 9 \times \square \quad (\square \text{ แทนผลหารที่ได้จาก 9 หาร 80 ได้ลงตัว ไม่มี})$$

(พิจารณาจำนวนนับถึง 9 ก็เพียงพอแล้ว เพราะจำนวนสุดท้ายที่เป็นผลหาร ที่ได้จาก 8 หาร 80 ได้ลงตัว

คือ 10)

แสดงแผนภาพการจับคู่จำนวนสองจำนวนที่คูณกันได้ 80 ดังนี้



ดังนั้น ตัวประกอบทั้งหมดของ 80 คือ 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 และ 80

ตัวอย่างที่ 2 จงหาตัวประกอบทั้งหมดของ 125**วิธีทำ** พิจารณาจำนวนนับ 2 จำนวนที่คูณกันได้ 125

$$125 = 1 \times 125$$

$$125 = 2 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 2 แล้วได้ 125 (2 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

$$125 = 3 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 3 แล้วได้ 125 (3 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

$$125 = 4 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 4 แล้วได้ 125 (4 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

$$125 = 5 \times 25$$

$$125 = 6 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 6 แล้วได้ 125 (6 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

$$125 = 7 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 7 แล้วได้ 125 (7 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

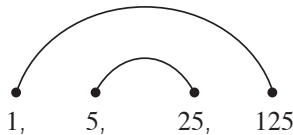
$$125 = 8 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 8 แล้วได้ 125 (8 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

$$125 = 9 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 9 แล้วได้ 125 (9 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

$$125 = 10 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 10 แล้วได้ 125 (10 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

$$125 = 11 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 11 แล้วได้ 125 (11 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

$$125 = 12 \times \square \quad \text{ไม่มีจำนวนนับใดที่คูณกับ 12 แล้วได้ 125 (12 ทหาร 125 ไม่ลงตัว)}$$

(พิจารณาจำนวนนับถึง 12 ก็เพียงพอแล้ว เพราะ 12×12 มีค่ามากกว่า 125 ก็ยุติการพิจารณาได้)

ดังนั้น ตัวประกอบทั้งหมดของ 125 คือ 1, 5, 25 และ 125

ตัวอย่างที่ 3 จงหาพหุคูณของ 3**วิธีทำ** เนื่องจากพหุคูณของ 3 คือจำนวนนับที่หารด้วย 3 ลงตัว มีมากมายนับไม่ถ้วน

พหุคูณของ 3 ได้แก่ 3(1), 3(2), 3(3), 3(4), 3(5), ...

ดังนั้น พหุคูณของ 3 ได้แก่ 3, 6, 9, 12, 15, ...

ตัวอย่างที่ 4 จงหาพหุคูณของ 7**วิธีทำ** เนื่องจากพหุคูณของ 7 คือจำนวนนับที่หารด้วย 7 ลงตัว มีมากมายนับไม่ถ้วน

พหุคูณของ 7 ได้แก่ 7(1), 7(2), 7(3), 7(4), 7(5), ...

ดังนั้น พหุคูณของ 7 ได้แก่ 7, 14, 21, 28, 35, ...



2. จำนวนเฉพาะและตัวประกอบเฉพาะ

ในระดับนี้จะศึกษาในขอบเขตของจำนวนเต็มที่เป็นจำนวนนับเท่านั้น

- จำนวนนับที่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียง 2 ตัวคือ 1 และจำนวนนับนั้น เรียกว่า **จำนวนเฉพาะ**
- ตัวประกอบของจำนวนนับใดที่เป็นจำนวนเฉพาะ เรียกว่า **ตัวประกอบเฉพาะ**

ตัวอย่างที่ 1 จำนวนนับต่อไปนี้เป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่ เพราะเหตุใด

1, 2, 3, 9, 51

- วิธีทำ**
- 1 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ เพราะไม่มากกว่า 1 และมีตัวประกอบเพียง 1 ตัว คือ 1
 - 2 เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะมากกว่า 1 และมีตัวประกอบ 2 ตัว คือ 1, 2
 - 3 เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะมากกว่า 1 และมีตัวประกอบ 2 ตัว คือ 1, 3
 - 9 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะมีตัวประกอบมากกว่า 2 ตัว คือ 1, 3, 9
 - 51 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะมีตัวประกอบมากกว่า 2 ตัว คือ 1, 3, 17, 51

- ข้อสังเกต**
1. 1 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ
 2. จำนวนเฉพาะที่เป็นจำนวนนับที่น้อยที่สุดคือ 2

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจำนวนเฉพาะทั้งหมดที่น้อยกว่า 100

วิธีทำ พิจารณาจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 100 จำนวนเฉพาะคือจำนวนที่วงกลม

1	(2)	(3)	4	(5)	6	(7)	8	9	10
(11)	12	(13)	14	15	16	(17)	18	(19)	20
21	22	(23)	24	25	26	27	28	(29)	30
(31)	32	33	34	35	36	(37)	38	39	40
(41)	42	(43)	44	45	46	(47)	48	49	50
51	52	(53)	54	55	56	57	58	(59)	60
(61)	62	63	64	65	66	(67)	68	69	70
(71)	72	(73)	74	75	76	77	78	(79)	80
81	82	(83)	84	85	86	87	88	(89)	90
91	92	93	94	95	96	(97)	98	99	100

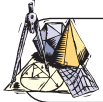
ดังนั้น มีจำนวนเฉพาะทั้งหมด 25 จำนวน ได้แก่ 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

ตัวอย่างที่ 3 จงหาตัวประกอบเฉพาะของ 12

วิธีทำ พิจารณาตัวประกอบทั้งหมดของ 12 คือ 1, 2, 3, 4, 6, 12

จากตัวประกอบทั้งหมดของ 12 มีจำนวนเฉพาะอยู่สองจำนวนคือ 2 และ 3

ดังนั้น ตัวประกอบเฉพาะของ 12 คือ 2 และ 3



3. การแยกตัวประกอบของจำนวนนับ

การแยกตัวประกอบของจำนวนนับใด คือ การเขียนจำนวนนับนั้นในรูปการคูณของตัวประกอบเฉพาะ

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ 136

วิธีทำ วิธีที่ 1 โดยวิธีตั้งหารสั้น

$$2 \overline{) 136}$$

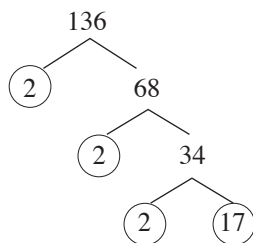
$$2 \overline{) 68}$$

$$2 \overline{) 34}$$

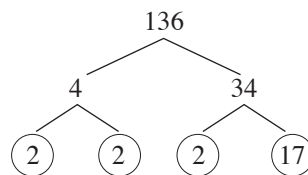
$$\underline{17}$$

ดังนั้น $136 = 2 \times 2 \times 2 \times 17 = 2^3 \times 17$

วิธีที่ 2 โดยใช้แผนภาพได้ดังนี้



หรือ



จำนวนที่วงกลมคือตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะ

ดังนั้น $136 = 2 \times 2 \times 2 \times 17 = 2^3 \times 17$

หมายเหตุ กรณีเมื่อแยกตัวประกอบแล้วได้ตัวประกอบเฉพาะซ้ำกัน สามารถเขียนตัวประกอบเฉพาะที่ซ้ำกันในรูปเลขยกกำลัง โดยให้ตัวประกอบเฉพาะเป็นฐาน และจำนวนตัวที่ซ้ำกันเป็นเลขชี้กำลัง เช่น

$$\begin{aligned} 136 &= 2 \times 2 \times 2 \times 17 \\ &= 2^3 \times 17 \text{ (เรียก 2 ว่าฐาน และเรียก 3 ว่าเลขชี้กำลัง)} \end{aligned}$$

ข้อสังเกต

ในการแยกตัวประกอบของจำนวนนับที่กำหนดให้ และเมื่อเขียนตัวประกอบเฉพาะที่ซ้ำกันในรูปเลขยกกำลัง จะนำไปใช้ประโยชน์ในการหาจำนวนตัวประกอบทั้งหมดของจำนวนนับนั้นได้รวดเร็วขึ้นโดยไม่จำเป็นต้องทราบว่าจำนวนใดบ้าง ซึ่งทำได้โดยนำเลขชี้กำลังของจำนวนเฉพาะแต่ละตัวมาบวกเพิ่มอีก 1 แล้วเอาผลลัพธ์มาคูณกัน ตัวอย่างเช่น

$$1. 136 = 2^3 \times 17$$

เลขชี้กำลังของ 2^3 คือ 3 เลขชี้กำลังของ 17 คือ 1

นำเลขชี้กำลังของแต่ละจำนวนบวกเพิ่มอีก 1 แล้วนำมาคูณกัน

ดังนั้น จำนวนตัวประกอบทั้งหมดของ 136 มีทั้งหมด $(3+1)(1+1) = 8$ จำนวน

(ตัวประกอบของ 136 คือ 1, 2, 4, 8, 17, 34, 68, 136)

$$2. 125 = 5 \times 5 \times 5$$

$$= 5^3$$

กรณีนี้จะได้ว่าตัวประกอบทั้งหมดของ 125 มีทั้งหมด $3+1 = 4$ จำนวน

(ตัวประกอบของ 125 หรือ 5^3 คือ 1, 5^1 , 5^2 , 5^3)

หรือสรุปได้ว่า ถ้าเขียนจำนวนนับ N ให้อยู่ในรูปการแยกตัวประกอบดังนี้

$$N = p_1^a \times p_2^b \times p_3^c \times \dots \text{ เมื่อ } p_1, p_2, p_3, \dots \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}$$

ดังนั้น จำนวนนับที่เป็นตัวประกอบของ N มีทั้งหมด $(a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times \dots$ จำนวน



4. ตัวหารร่วมมากและการนำไปใช้

จำนวนนับที่หารจำนวนนับตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไปที่กำหนดให้ลงตัว เรียกจำนวนนับนั้นว่า “**ตัวประกอบร่วม**” หรือ “**ตัวหารร่วม**” และตัวประกอบร่วมหรือตัวหารร่วมที่มากที่สุด เรียกว่า **ตัวหารร่วมมาก** หรือ **ห.ร.ม.**

ดังนั้น ตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) คือ ตัวประกอบร่วมที่มีค่ามากที่สุดที่สามารถหารจำนวนนับตั้งแต่สองจำนวนขึ้นไปที่กำหนดให้ลงตัว โดยการหาตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) มี 4 วิธี คือ

1. การหา ห.ร.ม. โดยพิจารณาจากตัวประกอบ
2. การหา ห.ร.ม. โดยการแยกตัวประกอบ
3. การหา ห.ร.ม. โดยการหารสั้น
4. การหา ห.ร.ม. โดยขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด

การหา ห.ร.ม. โดยพิจารณาจากตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 1 จงหา ห.ร.ม. ของ 18 และ 30

วิธีทำ ตัวประกอบของ 18 คือ 1, 2, 3, 6, 9, 18

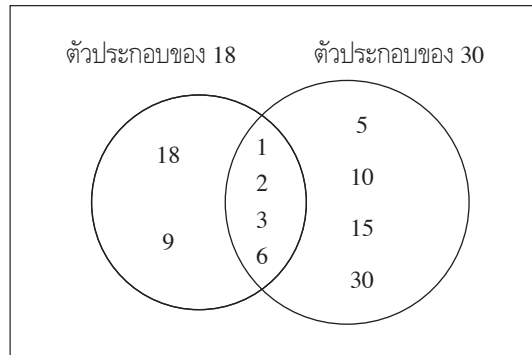
ตัวประกอบของ 30 คือ 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

ตัวประกอบร่วมหรือตัวหารร่วมของ 18 และ 30 คือ 1, 2, 3, 6

ตัวประกอบร่วมที่มากที่สุดของ 18 และ 30 คือ 6

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 18 และ 30 คือ 6

หรือพิจารณาจากแผนภาพ



จะเห็นว่า 1, 2, 3, 6 เป็นตัวหารร่วมของทั้ง 18 และ 30

ดังนั้น 6 จึงเป็นตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) ของ 18 และ 30

ตัวอย่างที่ 2 จงหา ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 27

วิธีทำ ตัวประกอบของ 12 คือ 1, 2, 3, 4, 6, 12

ตัวประกอบของ 18 คือ 1, 2, 3, 6, 9, 18

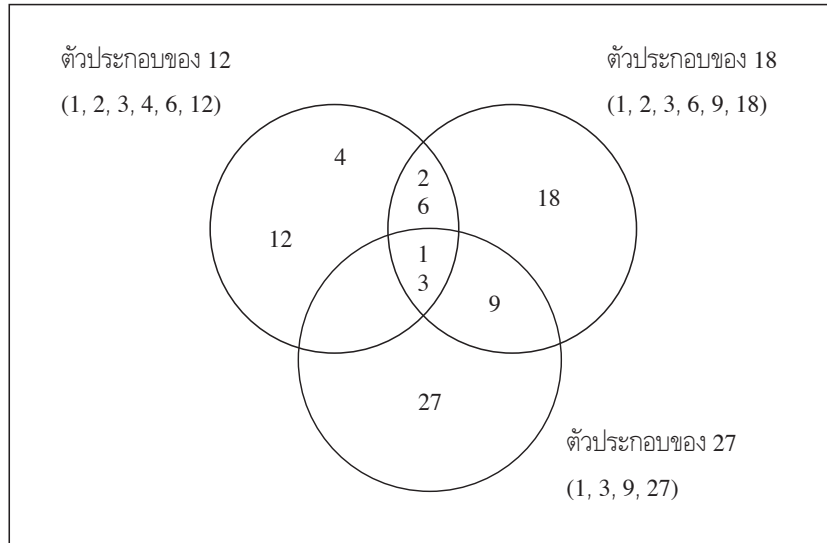
ตัวประกอบของ 27 คือ 1, 3, 9, 27

ตัวประกอบร่วมหรือตัวหารร่วมของ 12, 18 และ 27 คือ 1, 3

ตัวประกอบร่วมที่มากที่สุดของ 12, 18 และ 27 คือ 3

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 27 คือ 3

หรือพิจารณาจากแผนภาพ



ตัวประกอบร่วมหรือตัวหารร่วมของ 12, 18 และ 27 คือ 1 และ 3
ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 12, 18 และ 27 คือ 3

การหา ห.ร.ม. โดยการแยกตัวประกอบ

ตัวอย่างที่ 3 จงหา ห.ร.ม. ของ 36 และ 90

วิธีทำ

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

ตัวประกอบร่วมของ 36 และ 90 คือ $2 \times 3 \times 3 = 18$
ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 36 และ 90 คือ 18

ตัวอย่างที่ 4 จงหา ห.ร.ม. ของ 24, 48 และ 64

วิธีทำ

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

ตัวประกอบร่วมของ 24, 48 และ 64 คือ $2 \times 2 \times 2 = 8$
ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 24, 48 และ 64 คือ 8

การหา ห.ร.ม. โดยการหารสั้น

ตัวอย่างที่ 5 จงหา ห.ร.ม. ของ 36, 48 และ 72

วิธีทำ

$$\begin{array}{l} 2 \overline{) 36, 48, 72} \rightarrow 2 \text{ หาร } 36, 48 \text{ และ } 72 \text{ ได้ลงตัว} \\ 2 \overline{) 18, 24, 36} \rightarrow 2 \text{ หาร } 18, 24 \text{ และ } 36 \text{ ได้ลงตัว} \\ 3 \overline{) 9, 12, 18} \rightarrow 3 \text{ หาร } 9, 12 \text{ และ } 18 \text{ ได้ลงตัว} \\ \quad \quad \quad \underline{3, \quad 4, \quad 6} \end{array}$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 36, 48 และ 72 คือ $2 \times 2 \times 3 = 12$

ตัวอย่างที่ 6 จงหา ห.ร.ม. ของ 168, 196, 280 และ 420

วิธีทำ

$$\begin{array}{l} 4 \overline{) 168, 196, 280, 420} \rightarrow 4 \text{ หาร } 168, 196, 280 \text{ และ } 420 \text{ ได้ลงตัว} \\ 7 \overline{) 42, 49, 70, 105} \rightarrow 7 \text{ หาร } 42, 49, 70 \text{ และ } 105 \text{ ได้ลงตัว} \\ \quad \quad \quad \underline{6, \quad 7, \quad 10, \quad 15} \end{array}$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 168, 196, 280 และ 420 คือ $4 \times 7 = 28$

ข้อสังเกต ในการหา ห.ร.ม. โดยวิธีการหารสั้นนั้น ในแต่ละขั้นตอนจะต้องหาจำนวนนับที่หารทุกจำนวนของขั้นตอนนั้นๆ ลงตัว และจำนวนที่นำมาหารนั้นอาจเป็นจำนวนเฉพาะหรือไม่เป็นจำนวนเฉพาะก็ได้

การหา ห.ร.ม. โดยขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด

ตัวอย่างที่ 7 จงหา ห.ร.ม. ของ 1,147 และ 1,591

วิธีทำ	2	1,147	1,591	1	ขั้นที่ 1	นำจำนวนที่น้อยกว่าไปหารจำนวนมาก คือนำ 1,147 ไปหาร 1,591 ได้ 1 เศษ 444
		888	1,147			
	1	259	444	1	ขั้นที่ 2	นำเศษที่เหลือในขั้นที่ 1 คือ 444 ไปหาร 1,147 ได้ 2 เศษ 259
		185	259			
	2	74	185	2	ขั้นที่ 3	นำเศษที่เหลือในขั้นที่ 2 คือ 259 ไปหาร 444 ได้ 1 เศษ 185
		74	148			
			37		ขั้นที่ 4	นำเศษที่เหลือในขั้นที่ 3 คือ 185 ไปหาร 259 ได้ 1 เศษ 74
					ขั้นที่ 5	นำเศษที่เหลือในขั้นที่ 4 คือ 74 ไปหาร 185 ได้ 2 เศษ 37
					ขั้นที่ 6	นำเศษที่เหลือในขั้นที่ 5 คือ 37 ไปหาร 74 ลงตัวได้ผลหารเป็น 2 จึงยุติการหาร

เมื่อการหารลงตัวจึงยุติการหาร ตัวหารตัวสุดท้ายคือ 37 เป็น ห.ร.ม. แต่ถ้าการหารยังไม่ลงตัวหรือเศษจากการหารไม่ใช่ 0 ก็ต้องทำตามขั้นตอนดังกล่าวโดยการหารสลับไปสลับมาจกซ้าย-ขวาไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้เศษจากการหารเป็น 0 (หารลงตัว) และตัวหารตัวสุดท้ายคือ ห.ร.ม.

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 1,147 และ 1,591 คือ 37

หมายเหตุ การหา ห.ร.ม. โดยขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด เหมาะสำหรับจำนวนที่มีค่ามากๆ และถ้ามีมากกว่าสองจำนวนก็สามารถหาได้ดังนี้

1. ให้หา ห.ร.ม. ของสองจำนวนแรกหรือสองจำนวนใดๆ ก่อนก็ได้
2. หา ห.ร.ม. ของจำนวนที่เหลือกับ ห.ร.ม. ที่ได้จากข้อ 1

การนำ ห.ร.ม. ไปประยุกต์ใช้

สามารถนำความรู้เรื่อง ห.ร.ม. ไปประยุกต์ใช้แก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องการแบ่งสิ่งของให้ได้เท่าๆ กัน และมากที่สุด นอกจากนั้นยังนำไปใช้เกี่ยวกับการทอนเศษส่วนให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ เพราะว่าถ้าเศษส่วนใดเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จะมี ห.ร.ม. ของตัวเศษและตัวส่วนเท่ากับ 1 เสมอ

ตัวอย่างที่ 8 จงทำ $\frac{48}{84}$ ให้เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

วิธีทำ
$$\frac{48}{84} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 3 \times 7}$$

(นำ ห.ร.ม. ของ 48 และ 84 คือ $2 \times 2 \times 3$ มาหารทั้งตัวเศษและตัวส่วน)

$$= \frac{2 \times 2}{7}$$

$$= \frac{4}{7}$$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาจำนวนนับที่มากที่สุดซึ่งเมื่อนำไปหาร 213 และ 389 แล้วเหลือเศษ 3 และ 4 ตามลำดับ

วิธีทำ จำนวนที่นำไปหา ห.ร.ม. คือ

$$213 - 3 = 210$$

$$389 - 4 = 385$$

จำนวนนับที่มากที่สุดซึ่งหาร 210 และ 385 ได้ลงตัว คือ ห.ร.ม. ของสองจำนวนนี้

1	210	385	1
	175	210	
	35	175	5
		175	

ดังนั้น จำนวนนับที่มากที่สุดซึ่งเมื่อนำไปหาร 213 และ 389 แล้วเหลือเศษ 3 และ 4 คือ 35

ตัวอย่างที่ 10 จงหาจำนวนนับที่มากที่สุดซึ่งเมื่อนำไปหาร 111, 135 และ 159 แล้วเหลือเศษเท่ากัน

วิธีทำ สมมติให้เศษที่เหลือเท่ากันเป็น x

จำนวนนับที่มากที่สุดนี้จะต้องหาร $111-x$, $135-x$ และ $159-x$ ได้ลงตัว ซึ่งก็คือ ห.ร.ม. นั้นเอง และจะหารผลต่างระหว่างจำนวนเหล่านั้นได้ลงตัวด้วย นั่นคือ

$$(159-x)-(135-x) = 24$$

$$(135-x)-(111-x) = 24$$

$$(159-x)-(111-x) = 48$$

จำนวนที่มากที่สุดนั้นจะต้องหาร 24, 24 และ 48 ลงตัว (ห.ร.ม. ของ 24, 24 และ 48)

หา ห.ร.ม. ของ 24, 24 และ 48 ได้ 24

ดังนั้น จำนวนนับที่มากที่สุดซึ่งเมื่อนำไปหาร 111, 135 และ 159 แล้วเหลือเศษเท่ากัน คือ 24

ตัวอย่างที่ 11 มาลีมีผ้าอยู่ผืนหนึ่ง กว้าง 36 เซนติเมตร ยาว 1.20 เมตร ถ้ามาลีต้องการตัดผ้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มเซนติเมตรที่มีขนาดใหญ่ที่สุด โดยไม่ให้เหลือเศษ จะต้องตัดผ้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละกี่เซนติเมตร และได้ผ้าทั้งหมดกี่ผืน

วิธีทำ ผ้าผืนหนึ่งกว้าง 36 เซนติเมตร ยาว 1.20 เมตร (เท่ากับ 120 เซนติเมตร)

มาลีต้องการตัดผ้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านเป็นจำนวนเต็มเซนติเมตรที่มีขนาดใหญ่ที่สุด จึงต้องหาความยาวด้านที่ยาวที่สุดของผ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส นั่นคือ ต้องหา ห.ร.ม. ของ 36 และ 120

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

ห.ร.ม. ของ 36 และ 120 เท่ากับ $2 \times 2 \times 3 = 12$

ผ้าผืนนี้แบ่งด้านกว้างได้ $\frac{36}{12} = 3$ ส่วน

ผ้าผืนนี้แบ่งด้านยาวได้ $\frac{120}{12} = 10$ ส่วน

จะได้ผ้ารูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด $3 \times 10 = 30$ ผืน

ดังนั้น จะต้องตัดผ้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 12 เซนติเมตร และได้ผ้า 30 ผืน



5. ตัวคูณร่วมน้อยและการนำไปใช้

ในเรื่องการแยกตัวประกอบที่กล่าวมาแล้ว เราทราบว่าพหุคูณของจำนวนนับใด คือ จำนวนนับที่หารด้วยจำนวนนับนั้นลงตัว เช่น พหุคูณของ 3 ก็คือจำนวนนับที่หารด้วย 3 ลงตัว หรือจำนวนนับที่มี 3 เป็นตัวประกอบ ได้แก่ 3, 6, 9, 12, ... ดังนั้น พหุคูณของจำนวนนับใดๆ จึงมีมากมายนับไม่ถ้วน

ในกรณีที่ต้องการหาพหุคูณของจำนวนนับที่กำหนดให้ตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไป พหุคูณที่ได้มีมากมาย นับไม่ถ้วนเช่นกัน เรียกพหุคูณเหล่านี้ว่า **พหุคูณร่วม** ของจำนวนนับที่กำหนดให้ และเรียกพหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดว่า **ตัวคูณร่วมน้อย** หรือเขียนย่อๆ ว่า **ค.ร.น.** ของจำนวนนับที่กำหนดให้นั่นเอง ตัวอย่างเช่น ต้องการหาพหุคูณร่วมของ 3 และ 4

พหุคูณของ 3 ได้แก่ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, ... (เพิ่มขึ้นทีละ 3)

พหุคูณของ 4 ได้แก่ 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, ... (เพิ่มขึ้นทีละ 4)

พหุคูณร่วมของ 3 และ 4 ได้แก่ 12, 24, 36, ...

ดังนั้น พหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของ 3 และ 4 คือ 12 หรือ ค.ร.น. ของ 3 และ 4 คือ 12

การหา ค.ร.น. ของจำนวนนับที่กำหนดให้ ในที่นี้มี 3 วิธี คือ

1. หา ค.ร.น. โดยการพิจารณาพหุคูณของจำนวนนับที่กำหนดให้
2. หา ค.ร.น. โดยการแยกตัวประกอบ
3. หา ค.ร.น. โดยการหารสั้น

การหา ค.ร.น. โดยการพิจารณาพหุคูณของจำนวนนับที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 1 จงหา ค.ร.น. ของ 12 และ 30

วิธีทำ พหุคูณของ 12 คือ 12, 24, 36, 48, (60), 72, 84, 96, 108, (120), ...

พหุคูณของ 30 คือ 30, (60), 90, (120), ...

พหุคูณร่วมของ 12 และ 30 คือ 60, 120, ...

พหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของ 12 และ 30 คือ 60

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 12 และ 30 คือ 60

ตัวอย่างที่ 2 จงหา ค.ร.น. ของ 2, 3 และ 4

วิธีทำ พหุคูณของ 2 คือ 2, 4, 6, 8, 10, (12), 14, 16, 18, 20, 22, (24), ...

พหุคูณของ 3 คือ 3, 6, 9, (12), 15, 18, 21, (24), ...

พหุคูณของ 4 คือ 4, 8, (12), 16, 20, (24), 28, 32, ...

พหุคูณร่วมของ 2, 3 และ 4 คือ 12, 24, ...

พหุคูณร่วมที่น้อยที่สุดของ 2, 3 และ 4 คือ 12

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 2, 3 และ 4 คือ 12

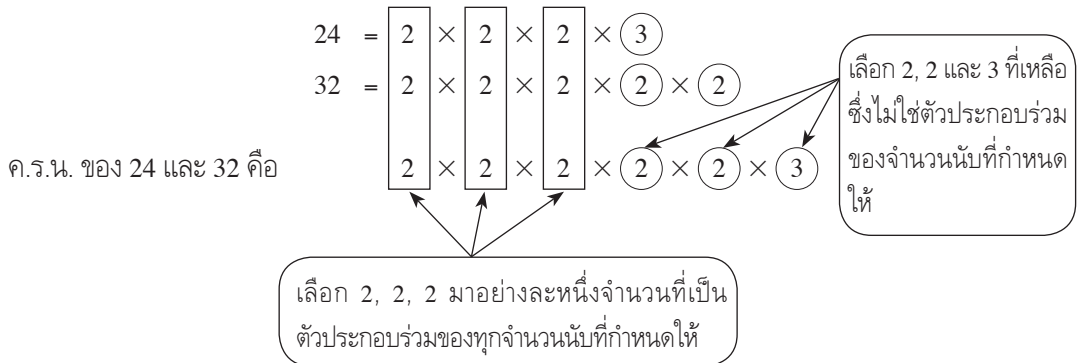
การหา ค.ร.น. โดยการแยกตัวประกอบ

หลักการหา ค.ร.น. โดยการแยกตัวประกอบ ทำได้ดังนี้

1. แยกตัวประกอบของจำนวนนับทุกจำนวนที่กำหนดให้
2. เลือกจำนวนเฉพาะหนึ่งจำนวนที่เป็นตัวประกอบร่วมของทุกจำนวนนับที่กำหนดให้
3. เลือกจำนวนเฉพาะหนึ่งจำนวนที่เป็นตัวประกอบร่วมบางจำนวนของจำนวนนับที่กำหนดให้
4. เลือกจำนวนเฉพาะที่เหลือที่ไม่ใช่ตัวประกอบร่วมของจำนวนนับที่กำหนดให้
5. ผลคูณของจำนวนเฉพาะที่เลือกในข้อ 2, 3 และ 4 คือ ค.ร.น. ของจำนวนนับที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 3 จงหา ค.ร.น. ของ 24 และ 32

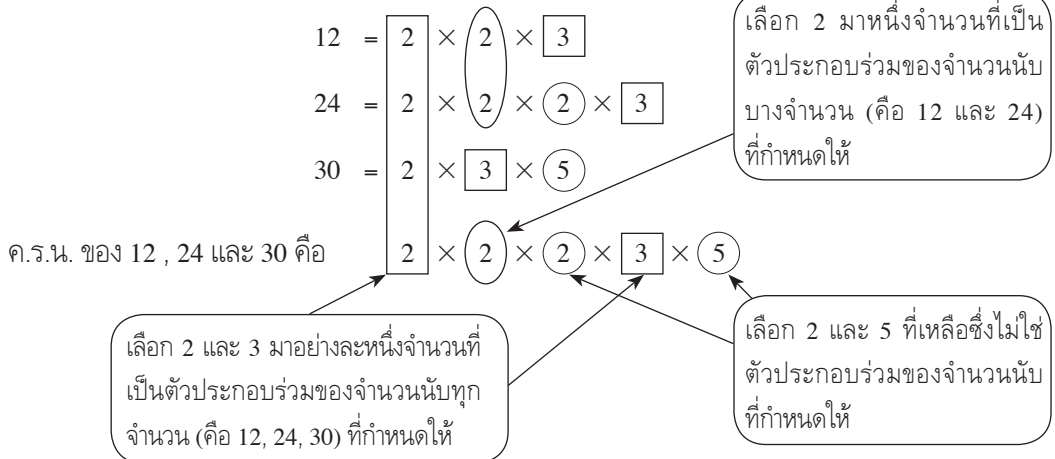
วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 24 และ 32 ได้ดังนี้



ดังนั้น ค.ร.น. ของ 24 และ 32 คือ 96

ตัวอย่างที่ 4 จงหา ค.ร.น. ของ 12, 24 และ 30

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 12, 24 และ 30 ได้ดังนี้



ดังนั้น ค.ร.น. ของ 12, 24 และ 30 คือ 120

การหา ค.ร.น. โดยการหารสั้น

หลักการหา ค.ร.น. โดยการหารสั้น ทำได้ดังนี้

1. นำจำนวนนับทั้งหมดที่ต้องการหา ค.ร.น. มาตั้งหารแบบหารสั้น
2. ในแต่ละขั้นตอนของการหาร จำนวนที่นำมาเป็นตัวหารต้องเป็นจำนวนเฉพาะ และต้องหารจำนวนเหล่านั้นลงตัวอย่างน้อยสองจำนวน
3. ถ้าตัวหารไปหารจำนวนใดไม่ลงตัวให้ตั้งจำนวนนั้นลงมาในบรรทัดต่อไป
4. การหารจะยุติเมื่อไม่มีจำนวนเฉพาะใดไปหารจำนวนเหล่านั้นได้ลงตัว
5. ค.ร.น. ที่ได้ คือ ผลคูณของจำนวนเฉพาะที่นำไปหารในแต่ละขั้นตอน และจำนวนที่เหลือจากการหารทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 5 จงหา ค.ร.น. ของ 12, 16 และ 60

วิธีทำ	2) <u>12 16 60</u>	ขั้นที่ 1	2 เป็นจำนวนเฉพาะที่หารทั้งสามจำนวนลงตัว
	6 8 30		ได้ผลหารคือ 6, 8, 30
	2) <u>6 8 30</u>	ขั้นที่ 2	2 เป็นจำนวนเฉพาะที่หารผลหารในขั้นที่ 1 ลงตัวทั้งสามจำนวน
	3 4 15		ได้ผลหารคือ 3, 4, 15
	3) <u>3 4 15</u>	ขั้นที่ 3	3 เป็นจำนวนเฉพาะที่หารผลหารในขั้นที่ 2 ลงตัวสองจำนวน คือ 3 และ 15
	<u>1 4 5</u>		ได้ผลหารคือ 1, 5 แต่ 3 หาร 4 ไม่ลงตัว ให้ตั้ง 4 ลงมา
			บรรทัดต่อไป

สรุปการหา ค.ร.น. โดยการหารสั้น ดังนี้

$$\begin{array}{r}
 2) \ 12 \ 16 \ 60 \\
 2) \ 6 \ 8 \ 30 \\
 3) \ 3 \ 4 \ 15 \\
 \underline{\underline{1 \ 4 \ 5}}
 \end{array}$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ 12, 16 และ 60 คือ $2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 4 \times 5 = 240$

ความสัมพันธ์ระหว่าง ห.ร.ม. กับ ค.ร.น. ของจำนวนนับสองจำนวน

ผลคูณของ ห.ร.ม. กับ ค.ร.น. ของจำนวนนับใดๆ สองจำนวน จะมีค่าเท่ากับผลคูณของจำนวนนับสองจำนวนนั้น นั่นคือ ถ้า a และ b เป็นจำนวนนับสองจำนวนใดๆ ซึ่งมี ห.ร.ม. และ ค.ร.น. เป็น m และ n ตามลำดับ

จะได้ว่า $a \times b = m \times n$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ a และ $b = \frac{a \times b}{\text{ห.ร.ม. ของ } a \text{ และ } b}$

การนำ ค.ร.น. ไปประยุกต์ใช้

สามารถนำความรู้เรื่อง ค.ร.น. ไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาเกี่ยวกับการบวก ลบ เศษส่วน ซึ่งจำเป็นต้องทำตัวส่วนให้เท่ากัน (เท่ากับ ค.ร.น. ของตัวส่วนของแต่ละจำนวน) และใช้แก้โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรื่องระยะทางหรือการหาจำนวนที่น้อยที่สุดที่สามารถแบ่งเป็นกลุ่มๆ ที่เท่ากันได้

ตัวอย่างที่ 6 จงหาผลลัพธ์ของ $\frac{3}{5} + \frac{5}{12} - \frac{17}{30}$

วิธีทำ ค.ร.น. ของ 5, 12 และ 30 คือ 60

$$\begin{aligned} \frac{3}{5} + \frac{5}{12} - \frac{17}{30} &= \left(\frac{3}{5} \times \frac{12}{12} \right) + \left(\frac{5}{12} \times \frac{5}{5} \right) - \left(\frac{17}{30} \times \frac{2}{2} \right) \\ &= \frac{36}{60} + \frac{25}{60} - \frac{34}{60} \\ &= \frac{27}{60} \\ &= \frac{9}{20} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาจำนวนนับที่น้อยที่สุดที่ 72, 80 และ 96 ไปหารจำนวนนับนั้นแล้วเหลือเศษ 25 เท่ากันทุกจำนวน

วิธีทำ หาจำนวนนับที่น้อยที่สุดที่ 72, 80 และ 96 ไปหารลงตัวก่อน (หรือไปหารแล้วเหลือเศษ 0) นั่นคือ หา ค.ร.น. ของ 72, 80 และ 96

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 72 \quad 80 \quad 96} \\ 2 \overline{) 36 \quad 40 \quad 48} \\ 2 \overline{) 18 \quad 20 \quad 24} \\ 2 \overline{) 9 \quad 10 \quad 12} \\ 3 \overline{) 9 \quad 5 \quad 6} \\ \underline{\underline{3 \quad 5 \quad 2}} \end{array}$$

จะได้ ค.ร.น. ของ 72, 80 และ 96 คือ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 2 = 1,440$

ดังนั้น จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่ 72, 80 และ 96 ไปหารแล้วเหลือเศษ 25 เท่ากัน คือ $1,440 + 25 = 1,465$

ตัวอย่างที่ 8 นุชมีลูกแก้วอยู่ในกล่องใบหนึ่ง ถ้านำลูกแก้วทั้งหมดในกล่องนี้มาแบ่งเป็นกอง กองละ 30 ลูก จะเหลือเศษ 27 ลูก แต่ถ้าแบ่งเป็นกอง กองละ 20 ลูก จะเหลือเศษ 17 ลูก และถ้าแบ่งใหม่เป็นกองละ 25 ลูก จะเหลือเศษ 22 ลูก ดังนั้นนุชมีลูกแก้วในกล่องนี้เป็นจำนวนน้อยที่สุดกี่ลูก

วิธีทำ ให้นุชมีลูกแก้วเป็นจำนวนน้อยที่สุด a ลูก

เมื่อแบ่งเป็นกอง กองละ 30 ลูก จะเหลือเศษ 27 ลูก (ขาดไป 3 ลูก)

ดังนั้น ถ้ามีลูกแก้ว $a+3$ ลูก ก็จะไม่เหลือเศษ

เมื่อแบ่งเป็นกอง กองละ 20 ลูก จะเหลือเศษ 17 ลูก (ขาดไป 3 ลูก)

ดังนั้น ถ้ามีลูกแก้ว $a+3$ ลูก ก็จะไม่เหลือเศษ

เมื่อแบ่งเป็นกอง กองละ 25 ลูก จะเหลือเศษ 22 ลูก (ขาดไป 3 ลูก)

ดังนั้น ถ้ามีลูกแก้ว $a+3$ ลูก ก็จะไม่เหลือเศษ

นั่นคือ $a+3$ เป็นจำนวนนับที่น้อยที่สุดที่ 30, 20 และ 25 หารลงตัว (เป็น ค.ร.น. ของ 30, 20 และ 25)

หา ค.ร.น. ของ 30, 20 และ 25

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$25 = 5 \times 5$$

ค.ร.น. ของ 30, 20 และ 25 คือ $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$

นั่นคือ $a+3 = 300$ จะได้ $a = 300 - 3 = 297$

ดังนั้น นุชมีลูกแก้วในกล่องนี้เป็นจำนวนน้อยที่สุด 297 ลูก

ตัวอย่างที่ 9 ตุ่ม ต้ม และหนึ่งซีรถจักรยานรอบสนามรูปวงกลมโดยเริ่มตั้งต้นที่เดียวกัน แต่ใช้ความเร็วไม่เท่ากัน ถ้าให้แต่ละคนขี่รถจักรยานโดยใช้ความเร็วสม่ำเสมอ ในระยะทาง 1 รอบ ตุ่ม ต้ม และหนึ่งจะใช้เวลา 18, 20 และ 24 นาที ตามลำดับ ถ้าจะให้คนทั้งสามขี่รถจักรยานมาพบกันที่จุดเริ่มต้นพร้อมกันอีกครั้ง จะใช้เวลานานเท่าไร

วิธีทำ เนื่องจากทั้งสามคนขี่รถจักรยานโดยเริ่มตั้งต้นที่เดียวกัน แล้วมาพบกันครั้งแรกที่จุดเริ่มต้น แสดงว่าทั้งสามคนจะต้องขี่รถจักรยานได้เป็นจำนวนเต็มรอบของสนามรูปวงกลมเพียงแต่มีจำนวนรอบไม่เท่ากัน ซึ่งแต่ละคนใช้เวลาในการขี่รถจักรยาน 18, 20 และ 24 นาที ต่อ 1 รอบ ตามลำดับ

ดังนั้น จำนวนเวลาเป็นนาทีที่ทั้งสามคนมาพบกัน ณ จุดเริ่มต้น จะเป็นจำนวนที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 18, 20 และ 24 ลงตัว ซึ่งก็คือ ค.ร.น. ของ 18, 20 และ 24

$$18 = 2 \times 3 \times 3$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

ค.ร.น. ของ 18, 20 และ 24 คือ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$

ดังนั้น ทั้งสามคนขี่จักรยานมาพบกันที่จุดเริ่มต้นพร้อมกันอีกครั้งจะใช้เวลานาน 360 นาที หรือ 6 ชั่วโมง

ตัวอย่างที่ 10 จำนวนนับ a และ b มี ห.ร.ม. เป็น 8 และผลคูณของจำนวนนับ a และ b คือ 960 จงหา ค.ร.น. ของ a และ b และจำนวนนับ a และ b คือจำนวนใด ถ้าสองจำนวนนั้นมีค่ามากกว่า 8 และ a มีค่ามากกว่า b

วิธีทำ เนื่องจากผลคูณของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของจำนวนนับ a และ b เท่ากับผลคูณของ a และ b

$$\text{นั่นคือ} \quad 8 \times \text{ค.ร.น.} = a \times b$$

$$8 \times \text{ค.ร.น.} = 960$$

$$\text{ค.ร.น.} = 960 \div 8 = 120$$

ดังนั้น ค.ร.น. ของ a และ b คือ 120

$$\text{จาก} \quad a \times b = 960$$

$$= 8 \times 8 \times 3 \times 5$$

โจทย์กำหนด ห.ร.ม. ของ a และ b คือ 8, a และ b มีค่ามากกว่า 8 และ a มีค่ามากกว่า b

$$\text{เนื่องจาก} \quad a \times b = (8 \times 5) \times (8 \times 3)$$

$$\text{จะได้ } a = (8 \times 5), b = (8 \times 3)$$

$$\text{ดังนั้น } a = 40 \text{ และ } b = 24$$

ตัวอย่างที่ 11 ถ้า a และ b เป็นจำนวนนับที่มี ห.ร.ม. เป็น 50 จงหาตัวหารร่วมทั้งหมดของ a และ b

วิธีทำ จำนวนนับที่หาร 50 ลงตัว (ตัวประกอบของ 50) จะเป็นตัวหารร่วมของ a และ b

จำนวนนับที่หาร 50 ลงตัว ได้แก่ 1, 2, 5, 10, 25, 50

ดังนั้น ตัวหารร่วมทั้งหมดของ a และ b ได้แก่ 1, 2, 5, 10, 25, 50

ข้อสังเกต ถ้า d เป็น ห.ร.ม. ของจำนวนนับ a และ b ตัวประกอบทั้งหมดของ d ก็คือตัวประกอบร่วมหรือตัวหารร่วมทั้งหมดของ a และ b นั้นเอง

แบบทดสอบ

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ข้อใด **ไม่ถูกต้อง**

1. 13 เป็นตัวประกอบของ 91

2. 3 เป็นตัวประกอบของ 81

3. 16 เป็นพหุคูณของ 8

4. 8 เป็นพหุคูณของ 16

2. จำนวนในข้อใดที่มี 3 เป็นตัวประกอบ

1. 111,111

2. 2,531

3. 3,811

4. 21,311

3. จำนวนในข้อใดเป็นพหุคูณของ 16 ทุกจำนวน
 1. 1, 2, 8, 16
 2. 1, 2, 4, 8, 16
 3. 16, 32, 48, 64
 4. 8, 16, 32, 64
4. ตัวประกอบทั้งหมดของ 160 มีกี่จำนวน
 1. 10 จำนวน
 2. 11 จำนวน
 3. 12 จำนวน
 4. 14 จำนวน
5. ตัวประกอบทั้งหมดของ 80 คือข้อใด
 1. 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, 80
 2. 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80
 3. 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, 80
 4. 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80
6. จำนวนนับที่มากที่สุดที่มีสามหลักและเป็นพหุคูณของ 6 คือจำนวนในข้อใด
 1. 999
 2. 998
 3. 996
 4. 666
7. ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนเฉพาะ
 1. 1
 2. 2
 3. 57
 4. 91
8. ตัวประกอบเฉพาะของ 112 คือจำนวนในข้อใด
 1. 2, 7
 2. 1, 2, 7
 3. 2, 3, 7
 4. 2, 4, 7
9. กำหนด a และ b เป็นจำนวนนับ ถ้า a เป็นตัวประกอบของ b แล้วข้อใดถูกต้อง
 1. a หารด้วย b ลงตัว
 2. b หารด้วย a ลงตัว
 3. a และ b เป็นตัวประกอบซึ่งกันและกัน
 4. a และ b เป็นจำนวนเฉพาะทั้งคู่
10. ตั้งแต่ 10 ถึง 40 มีจำนวนเฉพาะทั้งหมดกี่จำนวน
 1. 7 จำนวน
 2. 8 จำนวน
 3. 9 จำนวน
 4. 10 จำนวน
11. จำนวนเฉพาะที่มากที่สุดแต่น้อยกว่า 60 กับจำนวนเฉพาะที่น้อยที่สุดแต่มากกว่า 50 ต่างกันเท่าไร
 1. 4
 2. 5
 3. 6
 4. 7
12. จำนวนในข้อใดไม่ใช่จำนวนเฉพาะ
 1. 103
 2. 127
 3. 131
 4. 133

จงพิจารณาจำนวน $2^2 \times 3^2 \times 7$ แล้วตอบคำถามข้อ 13–14

13. จำนวนที่โจทย์กำหนดให้มีตัวประกอบทั้งหมดกี่จำนวน
 1. 15 จำนวน
 2. 16 จำนวน
 3. 17 จำนวน
 4. 18 จำนวน
14. จำนวนที่โจทย์กำหนดให้มีตัวประกอบเฉพาะกี่จำนวน
 1. 3 จำนวน
 2. 4 จำนวน
 3. 5 จำนวน
 4. 6 จำนวน
15. ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนเต็มบวกที่เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $a^3 \times b^2 \times c^4$ มีตัวประกอบทั้งหมดกี่จำนวน
 1. 58 จำนวน
 2. 59 จำนวน
 3. 60 จำนวน
 4. 65 จำนวน
16. ข้อใดแยกตัวประกอบไม่ถูกต้อง
 1. $80 = 1 \times 2^4 \times 5$
 2. $112 = 2^4 \times 7$
 3. $249 = 3 \times 83$
 4. $198 = 2 \times 3^2 \times 11$
17. ข้อใดเป็นการแยกตัวประกอบของ 620
 1. $2 \times 5^2 \times 31$
 2. $2^2 \times 5 \times 31$
 3. $2 \times 5 \times 31$
 4. $2^2 \times 5^2 \times 31$
18. ตัวประกอบร่วมทั้งหมดของ 30 และ 60 มีทั้งหมดกี่จำนวน
 1. 6 จำนวน
 2. 7 จำนวน
 3. 8 จำนวน
 4. 9 จำนวน
19. ตัวหารร่วมมากและตัวคูณร่วมน้อยของ 30 และ 60 มีค่าแตกต่างกันเท่าไร
 1. 20
 2. 30
 3. 60
 4. 120
20. ห.ร.ม. ของ 289, 323 และ 493 คือจำนวนในข้อใด
 1. 17
 2. 19
 3. 29
 4. 34
21. ห.ร.ม. ของ $2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 7^4$, $2^4 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$ และ $2^5 \times 3^3 \times 5 \times 13$ ตรงกับข้อใด
 1. 1,080
 2. 2,160
 3. 3,240
 4. 5,400
22. ค.ร.น. ของจำนวน 3 จำนวนในข้อ 21 ตรงกับข้อใด
 1. $2^4 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2 \times 13$
 2. $2^5 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^4$
 3. $2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7^2 \times 13$
 4. $2^5 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^4 \times 13$

23. ถ้า ห.ร.ม. ของจำนวนนับ a และ b คือ 35 แล้วตัวหารร่วมทั้งหมดของ a และ b คือจำนวนในข้อใด
1. 5, 7
 2. 5, 7, 35
 3. 1, 5, 7, 35
 4. 5, 7, 15, 35
24. จำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 92, 83 และ 47 แล้วเหลือเศษ 2 เท่ากัน เมื่อนำจำนวนนับนั้นไปหาร 12 แล้วจะเหลือเศษเท่าไร
1. 1
 2. 2
 3. 3
 4. 4
25. จำนวนนับที่มากที่สุดที่หาร 51, 66 และ 75 แล้วเหลือเศษ 2, 3 และ 5 ตามลำดับ คือจำนวนที่สอดคล้องกับข้อใด
1. เป็นจำนวนที่อยู่ระหว่าง 6 กับ 10
 2. เป็นจำนวนที่มากกว่า 11 แต่น้อยกว่า 15
 3. เป็นจำนวนที่น้อยกว่า 6
 4. เป็นจำนวนที่มากกว่า 15
26. จำนวนนับสองจำนวนคือ a และ b มี ห.ร.ม. เป็น 3 และมี ค.ร.น. เป็น 30 ถ้าผลต่างของ a และ b เท่ากับ 9 ค่าของ $a+b$ ตรงกับข้อใด
1. 9
 2. 10
 3. 19
 4. 21
27. ถ้า ห.ร.ม. ของจำนวนนับ a , b และ c คือ k แล้ว ห.ร.ม. ของ $16a$, $4b$ และ $8c$ เท่ากับข้อใด
1. $16k$
 2. $12k$
 3. $8k$
 4. $4k$
28. นิด ส้ม และต๋อยพบกันครั้งแรกที่ห้องอ่านหนังสือของห้องสมุดแห่งหนึ่ง เมื่อวันพุธที่ 3 สิงหาคม และทั้งสามคนได้สนทนากันจึงทราบว่าแต่ละคนมาอ่านหนังสือทั้งวันที่ห้องนี้ นิดจะมาทุก 3 วัน ส้มจะมาทุก 5 วัน และต๋อยจะมาทุก 6 วัน จงหาว่าครั้งต่อไปทั้งสามคนจะมาพบกันอีกเมื่อใด
1. วันอาทิตย์ที่ 4 กันยายน
 2. วันเสาร์ที่ 3 กันยายน
 3. วันศุกร์ที่ 2 กันยายน
 4. วันพฤหัสบดีที่ 1 กันยายน
29. ที่ดินแปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และมีถนนพื้นปูนล้อมรอบทำให้มีที่ดินเหลือกว้าง 75 เมตร ยาว 120 เมตร ถ้าต้องการปลูกต้นส้มโอให้มีระยะห่างเท่าๆ กัน และห่างจากขอบถนนเท่ากับระยะห่างจากต้นส้มโอต้นอื่นๆ จะปลูกต้นส้มโอตามเงื่อนไขดังกล่าวได้อย่างน้อยที่สุดกี่ต้น
1. 27 ต้น
 2. 28 ต้น
 3. 29 ต้น
 4. 30 ต้น
30. จำนวนนับสองจำนวนคือ a และ b ซึ่งมี ห.ร.ม. เท่ากับ 8 และผลคูณของจำนวนนับทั้งสองคือ 960 จำนวนนับ a และ b ในข้อใดที่ไม่เป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าวข้างต้น
1. $a = 16$, $b = 60$
 2. $a = 120$, $b = 8$
 3. $a = 24$, $b = 40$
 4. $a = 2^3$, $b = 2^3 \times 3 \times 5$

31. ค.ร.น. ของ $2^a \times 3^5$ และ $2^{a+1} \times 3^3$ เมื่อ a เป็นจำนวนนับใดๆ ตรงกับข้อใด
1. $2^a \times 3^5$
 2. $2^{a+1} \times 3^3$
 3. $2^a \times 3^8$
 4. $2^{a+1} \times 3^5$
32. จำนวนนับที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 30, 20 และ 25 แล้วเหลือเศษ 27, 17 และ 22 ตามลำดับ คือจำนวนใด
1. 297
 2. 300
 3. 303
 4. 310
33. มีลูกอมอยู่ 1 ถุง ถ้านำลูกอมมาจัดแบ่งเป็นกอง ไม่ว่าจะจัดกองละ 30, 35 หรือ 40 เม็ด ก็ตามจะเหลือลูกอมอยู่ในถุง 3 เม็ดเสมอ จำนวนลูกอมในถุงที่เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดและเป็นไปตามเงื่อนไขดังกล่าวตรงกับข้อใด
1. 823
 2. 837
 3. 840
 4. 843
34. นิยามต้องการใช้เชือก 3 เส้น ที่มีความยาวเท่ากันและต้องเป็นเชือกที่สั้นที่สุดด้วย นำเชือกทั้งสามเส้นมาตัดแบ่งเป็นเส้นสั้นๆ โดยไม่เหลือเศษ เส้นที่หนึ่งตัดแบ่งเป็นเส้นยาวเท่าๆ กัน ยาวเส้นละ 55 เซนติเมตร เส้นที่สองตัดแบ่งเป็นเส้นยาวเท่าๆ กัน ยาวเส้นละ 45 เซนติเมตร เส้นที่สามตัดแบ่งเป็นเส้นยาวเท่าๆ กัน ยาวเส้นละ 30 เซนติเมตร เชือกทั้งสามเส้นที่นำมาตัดเป็นเส้นสั้นๆ ดังกล่าว จะต้องยาวเส้นละกี่เมตร
1. 9.5 เมตร
 2. 9.7 เมตร
 3. 9.9 เมตร
 4. 10.2 เมตร
35. มีที่ดินแปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ยาว 102 เมตร กว้าง 78 เมตร ต้องการปักเสาเพื่อขึงลวดหนามโดยรอบให้เสาแต่ละต้นห่างกันเป็นระยะเท่าๆ กัน และใช้เสาเป็นจำนวนน้อยที่สุด จะต้องใช้เสากี่ต้น
1. 55 ต้น
 2. 60 ต้น
 3. 61 ต้น
 4. 65 ต้น