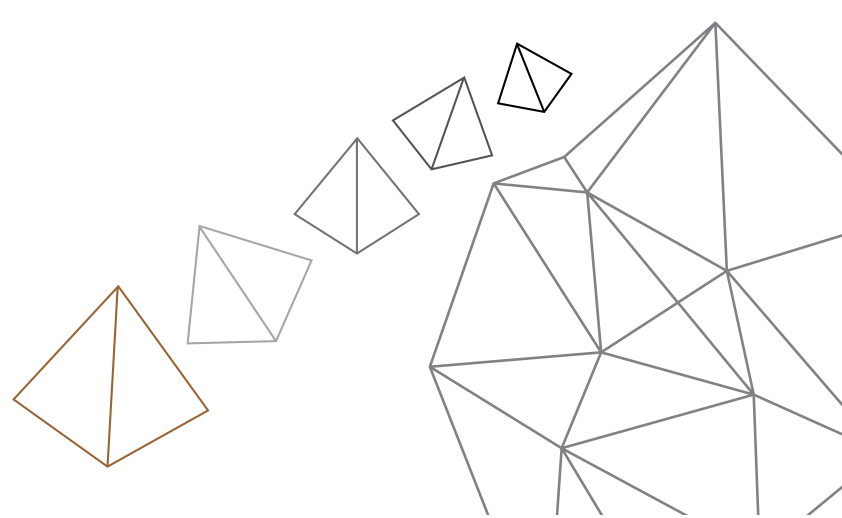


MATHEMATICS THE SERIES NO.1
FACTORING POLYNOMIALS

BY TERAPORN THONGSIRI





TUTOR

สวัสดีครับ ผมหนึ่งในทีมงานของ TBTUTOR
ต้องขอขอบคุณในการสนับสนุนหนังสือ
ของ TBTUTOR เป็นอย่างมากครับ
ผมหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์กับคุณมากนะครับ
สามารถดูหนังสือเล่มอื่นหรือข้อมูลต่าง ๆ ของเราได้ตามนี้เลยนะ
ครับ



TBTUTOR

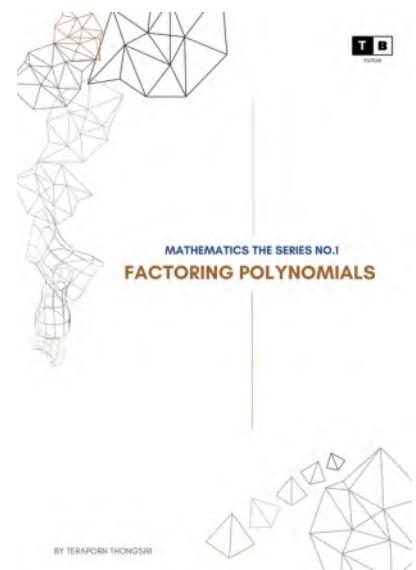
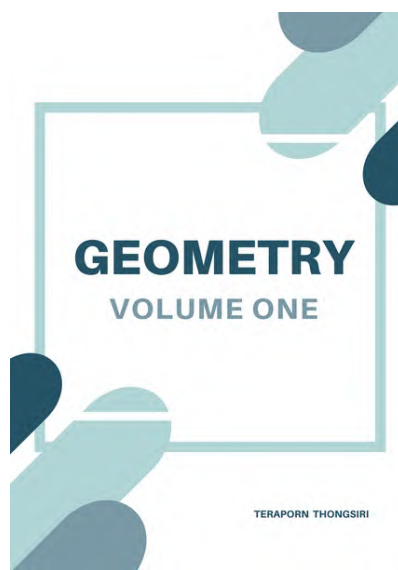


TBTUTOR



sites.google.com/view/tbtutor

หนังสือในเครือของ TBTUTOR



Contents

1	การใช้สมบัติการแจกแจง	5
1.1	การดึงตัวร่วมพื้นฐาน	5
1.2	การจัดกลุ่ม	7
2	การแยกตัวประกอบพหุนาม $ax^2 + bx + c$	13
2.1	กรณีสัมประสิทธิ์นำเท่ากับหนึ่ง	13
2.2	กรณีสัมประสิทธิ์นำไม่เท่ากับหนึ่ง	18
2.3	การประยุกต์ใช้การแยกตัวประกอบพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าหนึ่ง	20
3	การใช้เอกลักษณ์พหุนามพื้นฐาน	25
3.1	ผลต่างกำลังสอง	25
3.2	กำลังสองสมบูรณ์	31
3.3	การประยุกต์ใช้กำลังสองสมบูรณ์และผลต่างกำลังสอง	36
3.4	ผลต่างกำลังสามและผลบวกกำลังสาม	40
3.5	กำลังสามสมบูรณ์	48
3.6	กำลังสองสมบูรณ์ของพหุนามสามพจน์	52
3.7	การประยุกต์การแยกตัวประกอบ	56
3.8	สัมประสิทธิ์ทวินาม	65
4	การแยกตัวประกอบพหุนาม	
	ดีกรีมากกว่าสอง	69
4.1	ขั้นตอนวิธีการหารสำหรับพหุนาม	69
4.2	ทฤษฎีเศษเหลือ	78
4.3	ตัวประกอบของพหุนาม	90
4.4	ทฤษฎีการมีรากตรรกยะ	94
5	แบบฝึกหัดท้ายบทและโจทย์ปัญหา	109

Chapter 1

การใช้สมบัติการแจกแจง

1.1 การดึงตัวร่วมพื้นฐาน

ทฤษฎีบท 1.1: สมบัติการแจกแจง

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

ตัวอย่างที่ 1.1

จงแยกตัวประกอบของ $4x^2 + 8x$

วิธีทำ. ตัวหารร่วมมากของ $4x^2$ และ $8x$ เท่ากับ $4x$ ดังนั้น

$$4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$$

ตัวอย่างที่ 1.2

จงแยกตัวประกอบของ $5a^2b - 10ab^2 + 15ab$

วิธีทำ. ตัวหารร่วมมากของ $5a^2b, 10ab^2$ และ $15ab$ เท่ากับ $5ab$ ดังนั้น

$$5a^2b - 10ab^2 + 15ab = 5ab(a - 2b + 3)$$

ตัวอย่างที่ 1.3

จงแยกตัวประกอบของ $a(x - 5) - b(x - 5)$

วิธีทำ. ตัวหารร่วมมากของ $a(x - 5)$ และ $b(x - 5)$ เท่ากับ $x - 5$ ดังนั้น

$$a(x - 5) - b(x - 5) = (a - b)(x - 5)$$

ตัวอย่างที่ 1.4

จงแยกตัวประกอบของ $a(a+b+c) + b(a+b+c) - c(a+b+c)$

วิธีทำ. ตัวหารร่วมมากของ $a(a+b+c)$, $b(a+b+c)$ และ $c(a+b+c)$ เท่ากับ $a+b+c$ ดังนั้น

$$a(a+b+c) + b(a+b+c) - c(a+b+c) = (a+b-c)(a+b+c)$$

ข้อที่ 1.1. จงใช้สมบัติการแจกแจงในการแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $x^2 + 2x$

6. $5x^6 + 10x^4 - 35x^3$

2. $2x + 4$

7. $8ac^2 + 4ac + 6c$

3. $a^2b - ab^2$

8. $a^2b^2 + a^2b + ab^2$

4. $33x^2 - 44x$

9. $3a^3b^5 + 6a^2b^8 - 9a^4b^5$

5. $4ax + 4ab + 8ac$

10. $81a^4b^2 - 72a^3b^3 + 90a^2b^4$

11. $2(a+b) - 3c(a+b)$

12. $3a(a+b) - 2b(a+b)$

13. $2x(x+3) + 4(x+3)$

14. $3a^2(b+1) + (b+1)$

15. $6x^2(y^2 - z) + 4w^2(z - y^2)$

16. $x(b-c) + y(c-b)$

17. $a(x-1) + b(x-1) - c(x-1)$

$$18. 2x^2(x^2 + 1) - x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)$$

$$19. 3x^2(ax^2 + bx + c) - 5x(ax^2 + bx + c) + 9(ax^2 + bx + c)$$

$$20. (2a - 4b) - 3c(2b - a) + 2c^2(a - 2b)$$

1.2 การจัดกลุ่ม

ตัวอย่างที่ 1.5

จงแยกตัวประกอบของ $xy + 2xz + 2y + 4z$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ. } xy + 2xz + 2y + 4z &= (xy + 2xz) + (2y + 4z) \\ &= x(y + 2z) + 2(y + 2z) \\ &= (x + 2)(y + 2z) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.6

จงแยกตัวประกอบของ $a^2 - 3a + 2ab - 6b$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ. } a^2 - 3a + 2ab - 6b &= (a^2 - 3a) + (2ab - 6b) \\ &= a(a - 3) + 2b(a - 3) \\ &= (a + 2b)(a - 3) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.7

จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 5x^2 - 3x + 15$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ. } x^3 - 5x^2 - 3x + 15 &= (x^3 - 5x^2) + (-3x + 15) \\ &= x^2(x - 5) - 3(x - 5) \\ &= (x^2 - 3)(x - 5) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.8

จงแยกตัวประกอบของ $x^3 - 10x^2 + 2x - 20$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ. } x^3 - 10x^2 + 2x - 20 &= (x^3 - 10x^2) + (2x - 20) \\ &= x^2(x - 10) + 2(x - 10) \\ &= (x^2 + 2)(x - 10)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.9

จงแยกตัวประกอบของ $a^2 + 2ab + 2ac + ax + 2bx + 2cx$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ. } a^2 + 2ab + 2ac + ax + 2bx + 2cx &= (a^2 + 2ab + 2ac) + (ax + 2bx + 2cx) \\ &= a(a + 2b + 2c) + x(a + 2b + 2c) \\ &= (a + x)(a + 2b + 2c)\end{aligned}$$

ข้อที่ 1.2. จงใช้สมบัติการแจกแจงในการแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $ab + a + b + 1$

2. $ab - a + b - 1$

3. $a^2 + ab + ac + bc$

4. $a^2 + 3ab + 2a + 6b$

5. $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$

6. $x^3 + 2x^2 + x + 2$

7. $x^3 + 4x^2 + 2x + 8$

8. $6x^3 + 15x^2 + 2x + 5$

9. $x^3 - 3x^2 + 6x - 18$

10. $x^3 - 4x^2 - 7x + 28$

11. $15x^3 - 10x^2 - 6x + 4$

12. $ax + bx + cx + ay + by + cy$

13. $ax + bx + cx - 2a - 2b - 2c$

14. $ax + by + acx + bcy + ac^2x + bc^2y$

15. $ax + ay - a^2x - a^2y + 2x + 2y$

16. $(a + b)^2 - ac - bc$

17. $a^2 + ax - ab - bx + ac + cx$

18. $a^2x^2 + a^2 + b^2x^2 + b^2 + x^2 + 1$

19. $ax + by + cz + ay + bz + cx + az + bx + cy$

20. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

ตัวอย่างที่ 1.10

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + (m + n)x + mn$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ. } x^2 + (m + n)x + mn &= x^2 + mx + nx + mn \\ &= (x^2 + mx) + (nx + mn) \\ &= x(x + m) + n(x + m) \\ &= (x + m)(x + n)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.11

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 6x + 8$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ. } x^2 + 6x + 8 &= x^2 + 2x + 4x + 8 \\ &= (x^2 + 2x) + (4x + 8) \\ &= x(x + 2) + 4(x + 2) \\ &= (x + 4)(x + 2)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.12

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 10x + 21$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ. } x^2 - 10x + 21 &= x^2 - 3x - 7x + 21 \\ &= (x^2 - 3x) + (-7x + 21) \\ &= x(x - 3) - 7(x - 3) \\ &= (x - 7)(x - 3)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.13

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 4x - 77$

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ. } x^2 + 4x - 77 &= x^2 + 11x - 7x - 77 \\ &= (x^2 + 11x) + (-7x - 77) \\ &= x(x + 11) - 7(x + 11) \\ &= (x - 7)(x + 11)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.14

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - 2x - 15$

วิธีทำ. $x^2 - 2x - 15 = x^2 - 5x + 3x - 15$
 $= (x^2 - 5x) + (3x - 15)$
 $= x(x - 5) + 3(x - 5)$
 $= (x + 3)(x - 5)$

ข้อที่ 1.3. จงใช้สมบัติการแจกแจงในการแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $x^2 + 3x + 2$

6. $x^2 - x - 2$

2. $x^2 + 5x + 6$

7. $x^2 - 15x - 496$

3. $x^2 - 4x + 4$

8. $x^2 + 6x - 27$

4. $x^2 - 7x + 12$

9. $x^2 + 5x - 14$

5. $x^2 - 49x + 600$

10. $x^2 + 18x - 1075$

Chapter 2

การแยกตัวประกอบพหุนาม $ax^2 + bx + c$

2.1 กรณีสัมประสิทธิ์นำเท่ากับหนึ่ง

จากสมการ $x^2 + bx + c$ สามารถแยกตัวประกอบได้เป็น $(x + m)(x + n)$ ทำให้เราได้ว่า

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) = x^2 + (m + n)x + mn$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของพหุนาม เราจะได้ $b = m + n$ และ $c = mn$

ดังนั้น เราจำเป็นต้องหาค่า m และ n ที่สอดคล้องกับสมการ $b = m + n$ และ $c = mn$

ตัวอย่างที่ 2.1

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 + 11x + 30$

วิธีทำ. ข้อนี้ เราจะได้ว่า $b = 11$ และ $c = 30$

เราจะหา m และ n ที่สอดคล้องกับสมการ $b = m + n$ และ $c = mn$

จาก $11 = 5 + 6$ และ $30 = 5 \times 6$

เราจะได้ว่า $m = 5$ และ $n = 6$

ดังนั้น $x^2 + 11x + 30 = (x + 5)(x + 6)$

ตัวอย่างที่ 2.2

จงแยกตัวประกอบของ $x^2 - x - 12$

วิธีทำ. ข้อนี้ เราจะได้ว่า $b = -1$ และ $c = -12$

เราจะหา m และ n ที่สอดคล้องกับสมการ $b = m + n$ และ $c = mn$

จาก $-1 = (-4) + 3$ และ $-12 = (-4) \times 3$

เราจะได้ว่า $m = -4$ และ $n = 3$

ดังนั้น $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$

ข้อที่ 2.1. จงหาค่า m และ n ที่สอดคล้องกับสมการ $b = m + n$ และ $c = mn$

ข้อที่	$b = m + n$	$c = mn$	m	n
1	3	2		
2	7	12		
3	15	50		
4	13	42		
5	49	600		
6	-5	6		
7	-9	18		
8	-20	99		
9	-23	42		
10	-36	275		
11	3	-4		
12	6	-16		
13	15	-100		
14	23	-210		
15	67	-360		
16	-9	-22		
17	-5	-36		
18	-12	-288		
19	-17	-84		
20	-36	-700		
21	133	1000		
22	-105	2744		
23	23	-1058		
24	-17	-1260		
25	204	10403		

ข้อที่ 2.2. จากข้อที่ผ่านมาจงเขียนพหุนามในรูปของ $x^2 + bx + c$ และ $(x + m)(x + n)$

ข้อที่	$x^2 + bx + c$	$(x + m)(x + n)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		

ข้อที่ 2.3. จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $x^2 + 9x + 14$

2. $x^2 + 14x + 33$

3. $x^2 + 18x + 32$

4. $x^2 + 21x + 54$

5. $x^2 + 90x + 2000$

6. $x^2 + 49x + 490$

7. $x^2 - 7x + 10$

8. $x^2 - 15x + 36$

9. $x^2 - 26x + 48$

10. $x^2 - 58x + 57$

11. $x^2 - 121x + 2100$

12. $x^2 - 80x + 1575$

13. $x^2 - 8x - 20$

14. $x^2 - 5x - 50$

15. $x^2 - 6x - 27$

16. $x^2 - 11x - 60$

17. $x^2 - 18x - 40$

18. $x^2 - 25x - 150$

19. $x^2 + 8x - 105$

20. $x^2 + 9x - 22$

21. $x^2 + 14x - 120$

22. $x^2 + 13x - 30$

23. $x^2 + 25x - 600$

24. $x^2 + 40x - 1625$

25. $x^2 + 74x + 1248$

26. $x^2 - 149x + 5440$

27. $x^2 + 114x + 2093$

28. $x^2 + 10x - 3456$

29. $x^2 - 11x - 4800$

30. $x^2 - 17x - 5184$

31. $x^2 + 100x + 2499$

32. $x^2 + 100x + 2331$

33. $x^2 - 60x + 899$

34. $x^2 - 80x + 1591$

35. $x^2 + 2x - 1935$

36. $x^2 - 2x - 2915$

37. $x^2 + 5x - 644$

38. $x^2 - 70x + 1224$

39. $x^2 + 111x + 3074$

40. $x^2 - 46x - 767$

41. $x^2 - 99x + 1458$

42. $x^2 + 45x - 1944$

43. $x^2 - 27x + 2268$

44. $x^2 + x - 8372$

45. $x^2 + 110x + 2701$

2.2 กรณีสัมประสิทธิ์นำไม่เท่ากับหนึ่ง

ในกรณีนี้ สมมติว่าพหุนาม $ax^2 + bx + c$ เราสามารถแยกตัวประกอบได้เป็น $(px + m)(qx + n)$ ทำให้เราได้ว่า

$$ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n) = (pq)x^2 + (pn + qm)x + mn$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของพหุนาม เราจะได้ $a = pq$, $b = pn + qm$ และ $c = mn$ แต่เมื่อพิจารณาว่า $ac = (pq)(mn) = (pn)(qm)$ เราเพียงหาตัวเลขสองตัวที่มีผลคูณเท่ากับ ac และผลบวกเท่ากับ b

ตัวอย่างที่ 2.3

จงแยกตัวประกอบของ $3x^2 + 8x + 4$

วิธีทำ. ในข้อนี้ เราจะได้ว่า $a = 3$, $b = 8$ และ $c = 4$

จำนวนสองจำนวนที่ทำให้ผลคูณเท่ากับ $ac = 12$ และผลบวกเท่ากับ $b = 8$ นั่นคือ 6 และ 2 ทำให้เราได้ว่า

$$\begin{aligned} 3x^2 + 8x + 4 &= 3x^2 + 6x + 2x + 4 \\ &= (3x^2 + 6x) + (2x + 4) \\ &= 3x(x + 2) + 2(x + 2) \\ &= (3x + 2)(x + 2) \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.4

จงแยกตัวประกอบของ $5x^2 - 21x - 20$

วิธีทำ. ในข้อนี้ เราจะได้ว่า $a = 5$, $b = -21$ และ $c = -20$

จำนวนสองจำนวนที่ทำให้ผลคูณเท่ากับ $ac = -100$ และผลบวกเท่ากับ $b = -21$ นั่นคือ -25 และ 4 ทำให้เราได้ว่า

$$\begin{aligned} 5x^2 - 21x - 20 &= 5x^2 - 25x + 4x - 20 \\ &= (5x^2 - 25x) + (4x - 20) \\ &= 5x(x - 5) + 4(x - 5) \\ &= (5x + 4)(x - 5) \end{aligned}$$

ข้อที่ 2.4. จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

1. $2x^2 + 3x + 1$

2. $4x^2 + 5x + 1$
3. $2x^2 + 5x + 3$
4. $6x^2 + 13x + 6$
5. $25x^2 + 20x + 4$
6. $6x^2 + 17x + 7$
7. $4x^2 - 7x + 2$
8. $6x^2 - 7x + 2$
9. $12x^2 - 7x + 1$
10. $24x^2 - 26x + 5$
11. $5x^2 - 31x + 30$
12. $18x^2 - 83x + 9$
13. $6x^2 + x - 1$
14. $12x^2 + x - 1$
15. $2x^2 + x - 3$
16. $4x^2 + 5x - 9$
17. $7x^2 + 47x - 14$
18. $15x^2 + 11x - 14$
19. $9x^2 - 7x - 2$
20. $14x^2 - x - 3$
21. $10x^2 - 7x - 45$
22. $8x^2 - 9x - 45$
23. $11x^2 - 19x - 6$
24. $51x^2 - 8x - 3$

2.3 การประยุกต์ใช้การแยกตัวประกอบพหุนามที่มีดีกรีมากกว่าหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 2.5

จงแยกตัวประกอบของ $(x + 4)^2 - 3(x + 4) - 4$

วิธีทำ. ให้ $A = x + 4$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(x + 4)^2 - 3(x + 4) - 4 &= A^2 - 3A - 4 \\&= (A - 4)(A + 1) \\&= [(x + 4) - 4][(x + 4) + 1] \\&= x(x + 5)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2.6

จงแยกตัวประกอบของ $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$

วิธีทำ. ให้ $A = x^2 + 2x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 &= A^2 - 2A - 3 \\&= (A - 3)(A + 1) \\&= [(x^2 + 2x) - 3][(x^2 + 2x) + 1] \\&= [x^2 + 2x - 3][x^2 + 2x + 1] \\&= (x + 3)(x - 1)(x + 1)(x + 1) \\&= (x + 3)(x - 1)(x + 1)^2\end{aligned}$$

ข้อที่ 2.5. จงแยกตัวประกอบต่อไปนี้

$$1. (x + 2)^2 + 3(x + 2) + 2$$

2. $(2x - 1)^2 - 3(2x - 1) - 18$

3. $3(2x - 3)^2 + 7(2x - 3) - 20$

4. $4(x - 3)^2 - 20(x - 3) + 25$

5. $x^4 + 5x^2 - 150$

6. $x^6 - 45x^3 + 450$

7. $a^2 - 17ab + 60b^2$

8. $5a^2 - 7ab + 6b^2$

9. $a^2b^2 - 12ab - 64$

10. $x^4y^4 - 2x^2y^2 + 1$

11. $m^4 - 14m^2n^3 + 49n^6$

12. $3x^4 - 5x^2 - 2$

13. $9a^8 + 17a^4 - 2$

14. $a^4 - 5a^2b^2 + 4b^2$

15. $4 - 4a^2 + a^4$

16. $6a^6 - 23a^3b - 4b^2$

17. $(2a - 3)^2 + 4a - 6$

18. $x^4 - 64$

19. $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$

20. $(6x^2 - 5x)^2 - 1$