สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELING WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

รัชฎา วิริยะพงศ์

10th ANNIVERSARY OF NARESUAN UNIVERSITY PUBLISHING HOUSE

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

INTRODUCTION TO MATHEMATICAL MODELING WITH DIFFERENTIAL EQUATIONS

รัชฎา วิริยะพงศ์

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House
www.nupress.grad.nu.ac.th

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

รัชฎา วิริยะพงศ์.
ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ด้วยสมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น = Introduction to Mathematical Modeling with Differential equations.--พิษณุโลก : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2564.
230 หน้า.
1. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์. 2. สมการเชิงอนุพันธ์. I. ชื่อเรื่อง.

511.8
ISBN 978-616-426-228-7
ISBN (e-book) 978-616-426-229-4
สพน. 95

ราคา **320** บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 กันยายน พ.ศ. 2564

ผู้จัดพิมพ์ สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

มีวางจำหน่ายที่ **1. ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**
สาขา ศาลาพระเกี้ยว กรุงเทพฯ โทร. 0 2218 7000-3
สยามสแควร์ อาคารวิทยกิตติ์ กรุงเทพฯ โทร. 0 2218 9881, 0 2255 4433
มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก โทร. 0 5526 0162-5
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา โทร. 0 4421 6131-2
มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี โทร. 0 3839 4855-9
โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า (รร.จปร.) จังหวัดนครนายก โทร. 0 3739 3023, 0 3739 3036
จัตุรัสจามจุรี กรุงเทพฯ โทร. 0 2160 5301
มหาวิทยาลัยพะเยา โทร. 0 5446 6799, 0 5446 6800
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน โทร. 0 4492 2662-3
สาขาย่อยคณะครุศาสตร์จุฬาฯ โทร. 0 2218 3979
สาขาหัวหมาก โทร. 0 2374 1378
2. ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ อาคารวิทยบริการ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 50 ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900 โทร. 0 2579 0113
3. ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ อาคารอเนกประสงค์ ชั้น 1 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ถนนพระจันทร์ แขวงพระบรมมหาราชวัง เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200 โทร. 0 2613 3899, 0 2623 6493
สาขา ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ โทร. 0 5394 4990-1
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ จังหวัดสงขลา โทร. 0 7428 2980, 0 7428 2981
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา จังหวัดยะลา โทร. 0 7329 9980
4. สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร อาคารมหาธรรมราชา จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0 5596 8833 ถึง 8836

กองบรรณาธิการ กองบรรณาธิการจัดทำเอกสารสิ่งพิมพ์ทางวิชาการของสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
ออกแบบปก สัญญา จันทา
จัดรูปเล่ม สัญญา จันทา
พิมพ์ที่ บริษัท กู๊ดเฮด พริ้นท์ติ้ง แอนด์ แพคเกจจิ้ง กรุ๊ป จำกัด 6/1 นิคมอุตสาหกรรมบางชัน ซอยเสรีไทย 58 แขวงมีนบุรี เขตมีนบุรี กรุงเทพฯ 10510

สำนักพิมพ์นี้เป็นสมาชิกสมาคมผู้จัดพิมพ์และผู้จำหน่ายหนังสือแห่งประเทศไทย
http://www.thaibooksociety.com

พิมพ์บน
กระดาษคุณภาพ เพื่อผลงานคุณภาพ
กระดาษถนอมสายตากรีนรีด

กรณีต้องการสั่งซื้อหนังสือปริมาณมาก หรือเข้าชั้นเรียนติดต่อได้ที่ ฝ่ายจัดจำหน่ายสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

nuph@nu.ac.th
สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
0 5596 8833-8836
nu_publishing

เรื่องเล่าจากปก

ภาพวาดหน้าปกเป็นรูปสะพานไม้ที่รู้จักกันในนาม “Mathematical bridge” เป็นสะพานที่สร้างสำหรับไว้ข้ามช่วงหนึ่งของแม่น้ำแคมบริเวณ Queens’ College มหาวิทยาลัยเคมบริดจ์ ณ สหราชอาณาจักร สะพานนี้ถูกสร้างขึ้นในปี ค.ศ. 1749 โดย James Essex the Younger ด้วยฝีมือการออกแบบโดยช่างไม้ที่มีชื่อเสียง William Etheridge ซึ่งได้สานต่องานออกแบบอีกทอดหนึ่งมาจาก James King ต่อมาสะพานนี้ได้รับการซ่อมแซมและสร้างใหม่อีก 2 ครั้งในปี ค.ศ. 1866 และ ค.ศ. 1905 โดยยังคงรักษาโครงสร้างการออกแบบเดิม

สะพานนี้สร้างโดยใช้ท่อนไม้มาเชื่อมต่อกัน จะสังเกตได้ว่าแม้ว่าสะพานจะดูเป็นลักษณะโค้งทว่าก็สร้างด้วยท่อนไม้ตรงมาต่อกันทั้งสิ้น ส่วนล่างของสะพานมีโครงสร้างโค้งซึ่งเป็นส่วนโค้งของวงกลม ในส่วนล่างของสะพานนี้ ท่อนไม้แต่ละท่อนวางในแนวเส้นสัมผัสเส้นโค้งของวงกลมโดยนำมาวางเรียงต่อกันในมุมที่ให้เกิดการดึงและการอัดแน่นเพียงพอที่จะทำให้สะพานมีความแข็งแรงมากพอ นอกจากนี้ จุดที่ท่อนไม้ตัวแทนเส้นสัมผัสวงกลมตัดกันก็จะเชื่อมต่อด้วยท่อนไม้ในแนวรัศมีของวงกลม นั่นคือ ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของวงกลม ซึ่งท่อนไม้เหล่านี้ก็จะไปเชื่อมด้วยราวไม้ด้านบนในรูปแบบโครงตาข่ายเพื่อให้โครงสร้างของสะพานแข็งแกร่งมากขึ้น และนี่ก็เป็นเรื่องราวที่นำมาสู่ชื่อสะพานคณิตศาสตร์ ซึ่งสะพานไม้แห่งนี้ยังคงเป็นเสน่ห์ของเมืองเคมบริดจ์ ให้ผู้คนได้มาท่องเที่ยวและเยี่ยมชม นับแต่นั้นเป็นต้นมาจวบจนปัจจุบัน

คำนำ

ในโลกแห่งความเป็นจริง มีปัญหามากมายที่จะต้องดำเนินการหาทางจัดการแก้ไข โดยปัญหามีตั้งแต่ระดับเล็กน้อยไปจนถึงระดับใหญ่ เสี่ยงน้อยไปจนถึงเสี่ยงมาก บางปัญหาอาจใช้เงินลงทุนสูงในการแก้ไขหรือทดลองเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบย่อยก่อนที่จะนำไปสู่คำตอบโดยรวม หรือบางปัญหาอาจจะส่งผลกระทบต่อชีวิตและทรัพย์สินของมนุษย์เป็นจำนวนมาก ดังนั้น แนวทางหนึ่งในการแก้ปัญหาบางประเภทเพื่อลดอัตราการเสี่ยงต่อชีวิตและทรัพย์สินและประหยัดเวลาก็คือการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหาเหล่านี้ ซึ่งก็คือ การนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มาช่วยในการตอบปัญหาจากสถานการณ์จริง

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ หรือ mathematical model คือตัวแทนสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ที่ต้องการหาคำตอบซึ่งเขียนในรูปแบบสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันหรือสมการทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจสถานการณ์หรือปัญหานั้น ๆ ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพมากขึ้น และเพื่อทำนายพฤติกรรมหรือกลไกทางพลศาสตร์ของสถานการณ์นั้น ๆ มากขึ้น โดยในหนังสือเล่มนี้จะเน้นที่ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์

ผู้เขียนได้เขียนและเรียบเรียงหนังสือเล่มนี้ขึ้นสำหรับผู้ที่เริ่มต้นศึกษาและสนใจในเรื่องการประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์และการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับตอบปัญหาในสถานการณ์จริงต่าง ๆ ซึ่งสามารถใช้ในการเรียนการสอนในระดับปริญญาตรี และ/หรือปริญญาโท เพื่อเป็นแนวทางในการทำวิจัยทางคณิตศาสตร์ประยุกต์ต่อไปได้ทั้งในมหาวิทยาลัยของรัฐและเอกชนที่เปิดสอนหลักสูตรที่มีเนื้อหาดังกล่าว รวมทั้งผู้ที่สนใจในด้านนี้สามารถนำไปใช้ประโยชน์ในการประกอบการเรียนการสอนเพิ่มเติมได้ โดยในหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนได้เขียนไว้ทั้งหมด 5 บท โดยมีกรอบความคิดของแต่ละบท ดังนี้

ผู้เขียนเริ่มบทที่ 1 ด้วยการให้ความหมายของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ วัตถุประสงค์ของการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ อธิบายกระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในแต่ละขั้นตอน เน้นย้ำความสำคัญของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ว่าทำไมเราจึงสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และอธิบายประเภทตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ว่ามีหลายประเภทขึ้นอยู่กับว่าเราจำแนกประเภทด้วยอะไร แม้กระนั้นการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ก็มีข้อจำกัด ผู้เขียนจึงเขียนปิดท้ายบทที่ 1 ด้วยเรื่องข้อจำกัดของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ในบทที่ 2 ผู้เขียนอธิบายการประยุกต์ใช้สมการเชิงอนุพันธ์ทั้งอันดับหนึ่งและอันดับสูงในการสร้างเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อย่างง่ายสำหรับอธิบายหรือแก้ปัญหาสถานการณ์ที่ไม่ซับซ้อนมาก โดยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีทั้งที่เป็นเชิงเส้น ไม่เชิงเส้น และที่ต้องใช้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์ ตัวอย่างโจทย์ปัญหาในบทนี้ก็รวมสถานการณ์ต่าง ๆ ของหลายศาสตร์ เช่น เคมี ชีววิทยา ฟิสิกส์ ประชากรศาสตร์ เป็นต้น

เมื่อมีตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แล้วโดยเฉพาะในกรณีที่ตัวแบบมีความซับซ้อนมากขึ้น และไม่ใช่สมการเดียวที่สามารถหาผลเฉลยได้โดยตรง การวิเคราะห์ตัวแบบเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบของปัญหาเริ่มต้นก็เป็นสิ่งสำคัญ ในบทที่ 3 นี้ผู้เขียนได้อธิบายถึงองค์ประกอบต่าง ๆ ที่จะต้องใช้ในการวิเคราะห์ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับตัวแบบที่ซับซ้อนขึ้นทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ ได้แก่ การหาจุดสมดุล การเขียนสนามทิศทางเพื่อวาดเส้นโค้งผลเฉลยโดยสังเขป และความเสถียรในรูปแบบต่าง ๆ ของจุดสมดุลของตัวแบบ

ในบทที่ 4 ผู้เขียนได้อธิบายและยกตัวอย่างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนขึ้นและเกี่ยวข้องกับสถานการณ์ในชีวิตประจำวันที่นักคณิตศาสตร์ได้สร้างเพื่อศึกษาและเพิ่มความเข้าใจในหลาย ๆ ศาสตร์ เช่น ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อธิบายความสัมพันธ์ของน้ำตาลกลูโคสและฮอร์โมนอินซูลิน ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่แบ่งร่างกายเป็นส่วน ๆ (compartmental model) ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อธิบายกลไกการดูดซึมสารอาหารของแบคทีเรีย นอกจากนี้ผู้เขียนก็ได้อธิบายตัวแบบที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์ประชากร เช่น ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ผู้ล่า-เหยื่อ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับโรคติดต่อ ซึ่งเนื้อหาใน 4 บทแรกนี้ผู้เขียนได้เพิ่มแบบฝึกหัดพร้อมเฉลยสำหรับผู้อ่านไว้ในแต่ละบท เพื่อให้ผู้อ่านได้เข้าใจเนื้อหาได้ดียิ่งขึ้นไป

สำหรับในบทที่ 5 ผู้เขียนได้เขียนรวบรวมตัวอย่างของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในงานวิจัยจริงของนักวิจัย ไม่ว่าจะเป็นตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โรคเบาหวาน ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ผู้ล่า-เหยื่อในกรณีของกลุ่มสัตว์ต่าง ๆ รวมไปถึงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์โรคติดต่อที่เกิดขึ้นทั้งในมนุษย์ สัตว์ พืช และระดับเซลล์ ทั้งนี้เพื่อให้ผู้อ่านได้เห็นถึงแนวทางการทำวิจัยสำหรับคณิตศาสตร์ประยุกต์ในด้านนี้

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์กับผู้อ่าน และเป็นแรงบันดาลใจในการทำวิจัยทางด้านตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นี้ ผู้เขียนยินดีรับฟังข้อเสนอแนะและหากมีข้อผิดพลาดใดในหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนยินดีน้อมรับเพื่อนำมาพิจารณาปรับปรุงต่อไป

ผู้เขียนขอขอบพระคุณอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ แนะนำข้อคิดดี ๆ และสร้างแรงบันดาลใจให้ผู้เขียนจนได้เขียนหนังสือเล่มนี้จนสำเร็จลุล่วง ขอขอบคุณทุกคนที่ช่วยเหลือในการจัดทำหนังสือเล่มนี้และเป็นส่วนสำคัญที่ทำให้หนังสือเล่มนี้เสร็จลุล่วงไปด้วยดี ขอบคุณ คุณกิ๊ฟ ยุคันต์ สันโดษ จากเพจ YUKAN สำหรับภาพวาดสะพานคณิตศาสตร์ (Mathematical Bridge) แห่งเมือง Cambridge ณ สหราชอาณาจักร ที่งดงามสำหรับปกหนังสือเล่มนี้ ท้ายนี้ ผู้เขียนขอขอบพระคุณบิดาและมารดาที่อบรมเลี้ยงดูและเป็นกำลังใจสำคัญในทุกก้าวของชีวิต ซึ่งเป็นพระคุณอันยิ่งใหญ่หาสิ่งอื่นใดเสมอมิได้ ขอบคุณน้องชายสำหรับความช่วยเหลือในหลาย ๆ ด้าน และขอขอบคุณสามีอันเป็นที่รักที่เป็นแรงใจอันดีเยี่ยมยามเหนื่อยล้า เป็นกำลังใจและแรงสนับสนุนที่ดียิ่งเสมอมา

รัชฎา วิริยะพงศ์

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำเกี่ยวกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

1.1 ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์คืออะไร

ในโลกแห่งความเป็นจริง เรามีปัญหามากมายที่จะต้องแก้ไขหรือดำเนินการหาทางจัดการแก้ไข ซึ่งปัญหาบางปัญหามีความเสี่ยงทั้งด้านการเงินที่จะต้องลงทุน ใช้เงินสูงในการแก้ปัญหา หรือบางปัญหาอาจจะส่งผลกระทบต่อชีวิตและทรัพย์สินของมนุษย์เป็นจำนวนมาก เช่น การทำนายผลการเลือกตั้ง การทำนายแนวโน้มราคาน้ำมัน การทำนายรูปแบบการเจริญเติบโตและการขยายตัวของป่า การทำนายการระบาดของโรคระบาดต่าง ๆ ดังนั้น จึงต้องอาศัยตัวแบบ (model) ซึ่งคือตัวแทนวัตถุ ระบบ โปรแกรมคอมพิวเตอร์ หรือตัวแทนองค์ประกอบต่าง ๆ ของระบบที่ถูกสร้างขึ้นเพื่อศึกษาการทำงานของระบบงานหรือปัญหาจริงตัวแบบข้างต้นสามารถนำไปทำงานได้หลายรูปแบบ เช่น เป็นเครื่องมือสำหรับทำนายหรือคาดคะเนผลต่าง ๆ ที่ต้องการศึกษา หรือเป็นเครื่องมือสำหรับช่วยทดสอบประสิทธิผลของเครื่องจักรหรืออุปกรณ์ใด ๆ เป็นต้น ซึ่งตัวแบบอาจช่วยหาค่าคำตอบที่แท้จริงได้หรืออาจจะหาได้แค่ค่าโดยประมาณ ตัวแบบมีหลายประเภทตามคุณลักษณะ เช่น ตัวแบบทางกายภาพ ตัวแบบแอนะล็อก ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ตัวแบบทางสถิติ และตัวแบบเชิงคอมพิวเตอร์ ซึ่งในหนังสือเล่มนี้จะอธิบายถึงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) เท่านั้น

ปัญหาหรือเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่กล่าวมาข้างต้นอาจเกี่ยวข้องหรือไม่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ แต่วิธีการแก้ปัญหาโดยอาศัยคณิตศาสตร์ก็สามารถมีบทบาทสำคัญในการได้มาซึ่งคำตอบเบื้องต้นที่อาจจะนำไปสู่คำตอบที่ตอบโจทย์โลกแห่งความเป็นจริงได้ สำหรับการแก้ปัญหาโดยใช้รูปแบบทางคณิตศาสตร์นั้น เรามักจะออกแบบและสร้างสิ่งที่เรียกว่า ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

บทนิยาม 1.1

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ หรือ **mathematical model** คือตัวแทนสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ที่ต้องการหาคำตอบซึ่งเขียนในรูปแบบสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันหรือสมการทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจสถานการณ์หรือปัญหานั้น ๆ ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพมากขึ้น และเพื่อทำนายพฤติกรรมหรือกลไกทางพลศาสตร์ของสถานการณ์นั้น ๆ มากขึ้น

หลังจากที่ได้ตัวแบบมาก็จะทำการศึกษาความสัมพันธ์ วิเคราะห์ และใช้กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์แก้ปัญหานั้น ๆ เพื่อใช้คำตอบที่ได้มาเป็นตัวแทนคำตอบในการตอบปัญหาสถานการณ์จริง ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับสาขาวิชาต่าง ๆ มากมาย เช่น สาขาทางวิทยาศาสตร์ทุกสาขา ทางวิศวกรรม ธุรกิจ เศรษฐศาสตร์ จิตวิทยา วิทยาการคอมพิวเตอร์ การแพทย์ เป็นต้น นอกจากนี้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีระดับความยาก-ง่ายที่ต่างกัน ซึ่งมีตั้งแต่ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีตัวแปรเดียว ฟังก์ชันเดียว ไปจนถึงตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีหลายตัวแปรและมีฟังก์ชันนับพัน โดยองค์ประกอบของตัวแบบจะประกอบไปด้วย

- ตัวแปร (variable) ซึ่งมีค่าเปลี่ยนแปลงตามตัวแปรอื่น ๆ
- ตัวแปรเสริม (parameter) หรือพารามิเตอร์ เป็นตัวแปรที่มีค่าไม่เปลี่ยนแปลง นั่นคือเป็นค่าคงที่
- รูปแบบฟังก์ชันต่าง ๆ (relational function) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรและตัวแปรเสริม
- ข้อจำกัด (constraint) คือ ข้อจำกัดของค่าตัวแปรต่าง ๆ

1.2 วัตถุประสงค์ของการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สามารถนำไปใช้ได้ในหลาย ๆ สถานการณ์และเหตุผล ได้แก่

1. ใช้สำหรับการตรวจสอบสมมติฐานในสถานการณ์หรือการทดลองต่าง ๆ ที่โดยปกติแล้วจะยากแก่การทดลองจริง หรือยากแก่การทดสอบสมมติฐานนั้น ๆ
2. ใช้สำหรับการหาความสัมพันธ์ของตัวแปรหรือปัจจัยต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับระบบหรือสถานการณ์นั้น ๆ และตรวจสอบผลกระทบของตัวแปรหรือปัจจัยดังกล่าวที่มีต่อระบบ
3. ใช้สำหรับการทำนายผลต่าง ๆ ในอนาคต
4. ใช้เป็นส่วนหนึ่งในการช่วยตัดสินใจ

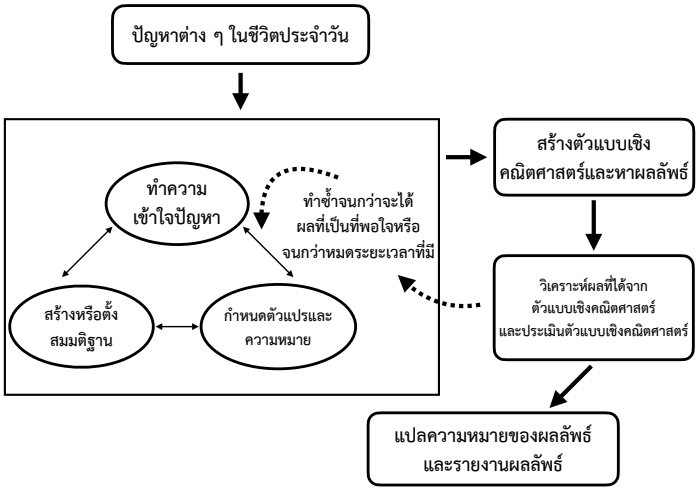
1.3 กระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

กระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 6 ขั้นตอนหลัก ดังนี้

- ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา (clarify the problem)
- ขั้นที่ 2 สร้างหรือตั้งสมมติฐาน (make assumptions)
- ขั้นที่ 3 กำหนดตัวแปรและความหมายของตัวแปร (define variables)
- ขั้นที่ 4 สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาผลลัพธ์ (formulate a mathematical model and solve for solutions)
- ขั้นที่ 5 วิเคราะห์ผลที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และประเมินตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (analyse the results and do model assessment)
- ขั้นที่ 6 รายงานผลลัพธ์ (report the results)

ขั้นตอนทั้งหกขั้นตอนเป็นแนวทางในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตาม การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แต่ละครั้งนั้น ไม่จำเป็นที่จะต้องทำตามทุกขั้นตอนอย่างเคร่งครัด ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ได้มาจากการทำขั้นตอนข้างต้นซ้ำ ๆ กันจนกว่าจะได้ตัวแบบที่เหมาะสมหรือมีผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจ โดยที่ขั้นตอนบางขั้นตอนที่สำคัญในบางครั้งอาจจะทำซ้ำมากครั้งกว่าขั้นตอนอื่น ๆ ก็เป็นได้ โดยกระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ข้างต้นได้แสดงให้เห็นภาพชัดเจนขึ้น

ดังภาพ 1.1



ภาพ 1.1 กระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ต่อไปจะเป็นการขยายความกระบวนการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ทั้งหกขั้นตอนข้างต้น

1.3.1 ทำความเข้าใจปัญหา (clarify the problem)

ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนแรกและสำคัญสำหรับการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ปัญหาหรือสถานการณ์ในโลกแห่งความเป็นจริงอาจจะกว้างหรือซับซ้อน ดังนั้น จึงจำเป็นต้องเกลากรอบแนวคิดของปัญหาพร้อมทั้งทำความเข้าใจเพื่อให้ปัญหาที่มีอยู่กระชับขึ้น โดยต้องพิจารณาและวิเคราะห์ให้ทราบว่าปัญหาคืออะไร มีปัจจัยใดเกี่ยวข้องกับปัญหาบ้าง ต้องการทราบอะไรจากปัญหา เป้าหมายที่อยากได้คืออะไร รวบรวมข้อมูลเพื่อหาผลกระทบต่อปัญหาทั้งทางตรงและทางอ้อม พิจารณาว่ามีประเด็นใดบ้างที่อาจจะต้องนำมาตั้งเป็นสมมติฐาน และพยายามวิเคราะห์ว่ารูปแบบคำตอบของปัญหาหรือสถานการณ์ที่อยากได้เป็นแบบใด

1.3.2 สร้างหรือตั้งสมมติฐาน (make assumptions)

ปัญหาส่วนใหญ่จะเป็นปัญหาที่ค่อนข้างซับซ้อน จึงมีความจำเป็นที่จะต้องตั้งสมมติฐานต่าง ๆ เพื่อที่จะทำให้ปัญหานั้น ๆ ง่ายขึ้นและตรงประเด็นมากขึ้น ในขั้นตอนนี้เราจะต้องลดจำนวนปัจจัยต่าง ๆ ที่ส่งผลกระทบต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่กำลังจะสร้าง นั่นคือ เป็นขั้นตอนที่จะต้องตัดสินใจว่า ปัจจัยใดบ้างที่เป็นปัจจัยที่สำคัญจริง ๆ

1.3.3 กำหนดตัวแปรและความหมายของตัวแปร (define variables)

ขั้นตอนนี้เป็นการหาปัจจัยพื้นฐานหรือปัจจัยหลักที่มีอิทธิพลต่อปัญหาหรือสถานการณ์ที่เราต้องศึกษาพร้อมทั้งกำหนดว่าตัวแปรแต่ละตัวหมายความว่าอะไร และพิจารณาว่าปัจจัยเหล่านี้สามารถนำมาเขียนในรูปตัวแปรปริมาณที่มีหน่วยของตัวแปรได้หรือไม่ ซึ่งเราอาจแบ่งออกเป็นตัวแปรและตัวแปรเสริม

1.3.4 สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาผลลัพธ์ (formulate a mathematical model and solve for solutions)

ขั้นตอนนี้เป็นการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จากสิ่งที่ได้มาในขั้นตอนที่ 1-3 โดยเริ่มสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนน้อยที่สุดก่อน แสดงตัวแปรแต่ละตัวด้วยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมพร้อมด้วยหน่วยของตัวแปรนั้น ๆ จากนั้นเขียนความสัมพันธ์ของปัญหาหรือสถานการณ์ในรูปของสมการตัวแปรในโจทย์โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์มาประกอบการเขียนสมการนี้ หลังจากนั้นก็หาผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ของตัวแบบโดยอาศัยความรู้และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ รวมไปถึงการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์และ/หรือใช้โปรแกรมทางคณิตศาสตร์สำเร็จรูปสำหรับการคำนวณเชิงตัวเลข การหาค่าคำตอบที่เหมาะสม โดยคำตอบอาจจะออกมาเป็นลักษณะของค่าตัวเลขหรือกราฟคำตอบ

1.3.5 วิเคราะห์ผลที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และประเมินตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (analyze the results and do model assessment)

ขั้นตอนนี้เป็นขั้นตอนในการตรวจสอบและวิเคราะห์ผลลัพธ์ที่หาค่าได้ว่าเหมาะสมตามความเป็นจริงหรือไม่ มาก-น้อยเพียงใด ค่าของตัวแปรต่าง ๆ ที่ได้มีความเป็นจริงมาก-น้อยเพียงใด ทั้งนี้เพื่อประเมินคุณภาพของตัวแบบ เราต้องพยายามหาข้อดีและข้อเสียของตัวแบบที่เราสร้างมา ตรวจสอบดูว่ามีสถานการณ์ใดบ้างหรือไม่ที่ตัวแบบที่เราสร้างมาไม่สามารถให้ผลลัพธ์ได้ ตัวแบบมีความไวต่อสิ่งกระตุ้นต่าง ๆ เช่น สมมติฐาน ค่าพารามิเตอร์ที่เปลี่ยนแปลงไปหรือไม่ และวิเคราะห์ว่ามีทางเป็นไปได้ทางใดบ้างที่จะทำให้ตัวแบบดีขึ้น หากต้องการพัฒนาตัวแบบให้ดีขึ้นก็กลับไปเริ่มที่ขั้นที่ 1 อีกครั้งได้ จนกว่าจะได้ตัวแบบที่มีความเหมาะสมที่สุด

1.3.6 รายงานผลลัพธ์ (report the results)

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มาอาจจะดีมาก แต่จะไม่มีใครทราบได้ถ้าเราไม่สามารถอธิบายได้ว่าจะใช้ตัวแบบนี้อย่างไร ใช้สำหรับสถานการณ์ใดบ้าง ดังนั้นเราควรเขียนรายงานเกี่ยวกับตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่เราสร้างมานี้ ซึ่งจะเขียนละเอียดมาก-น้อยเพียงไร หรือเพื่อใคร ก็ขึ้นอยู่กับศาสตร์ของผู้สร้างตัวแบบในแต่ละสาขา

1.4 ความสำคัญของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (ทำไมเราจึงสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์)

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีความสำคัญหรือประโยชน์ในหลายแง่มุม ดังต่อไปนี้

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นมีความสำคัญต่อการช่วยหาคำตอบหรือหาผลลัพธ์ของปัญหาในสถานการณ์จริงในชีวิตประจำวันและในหลาย ๆ ศาสตร์ได้เป็นอย่างดี เช่น การใช้ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในการพยากรณ์อากาศและเตือนภัยพิบัติต่าง ๆ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เพื่อทำนายผลกระทบทางเศรษฐกิจ เป็นต้น ซึ่งหากเรารับรู้และรับทราบถึงผลที่กำลังจะเกิดขึ้นจากการทำนาย

เราก็สามารถตั้งรับหรือเตรียมพร้อมล่วงหน้าที่จะรับมือกับผลที่จะเกิดขึ้นได้ เช่น การพยากรณ์ระยะเวลาที่จะเกิดโรคระบาด

2. ในกรณีที่ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีผลลัพธ์ไม่ตรงหรือสอดคล้องกับข้อมูลหรือสถานการณ์จริง ก็จะเป็นประโยชน์เช่นกัน นั่นคือ จะทำให้รู้ว่าปัจจัยบางปัจจัยในตัวแบบที่สร้างมาอาจไม่ถูกต้อง

3. ในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์บางตัวแบบที่ใช้การวิเคราะห์เชิงตัวเลขหรือโปรแกรมคอมพิวเตอร์มาร่วมวิเคราะห์ ก็จะทำให้มีประโยชน์ตรงที่เราสามารถปรับเปลี่ยนค่าของตัวแปรต่าง ๆ เพื่อดูการเปลี่ยนแปลงของผลลัพธ์ได้ ซึ่งทำให้เราทราบถึงปัจจัยหรือตัวแปรที่ส่งผลกระทบโดยรวมต่อปัญหาหรือระบบ การได้มาซึ่งผลลัพธ์บางครั้งก็จะได้ผลลัพธ์ที่รวดเร็วกว่าและประหยัดงบประมาณมากกว่าการทำการทดลองจริง

4. สามารถใช้เพิ่มความเข้าใจในปัญหาทางการแพทย์ได้โดยไม่ต้องลงทุนด้วยทรัพยากรมนุษย์หรือสัตว์ เช่น กรณีต้องการทดลองผลของยาตัวใหม่ซึ่งอาจใช้ระยะเวลาในการทดลองนานและเสี่ยงต่อการเกิดอันตราย

5. ทางด้านการแพทย์ ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สามารถใช้ในการหาค่าเหมาะสมเพื่อนำไปสู่ยุทธวิถีในการรักษาโรคต่าง ๆ หรือบางครั้งสามารถใช้ผลของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในการทำนายการระบาดของโรคระบาดต่าง ๆ ได้

6. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ช่วยหาคำตอบหรือผลลัพธ์ของปัญหาในกรณีที่หากทดลองหาคำตอบจริงโดยไม่ใช้ตัวแบบ จะต้องเสียค่าใช้จ่ายสูงและใช้เวลานานในการทดลอง

7. ในกรณีที่ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่สร้างมาเหมาะสม เราก็สามารถนำตัวแบบนี้ไปใช้หาคำตอบของปัญหาหรือสถานการณ์ต่าง ๆ ที่ใกล้เคียงได้หลายสถานการณ์

8. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สามารถทดลองซ้ำ ๆ กันหลายครั้งในหลาย ๆ กรณีได้

1.5 ประเภทของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ในการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ หากเราทราบประเภทของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อย่างกว้าง ๆ ก็จะช่วยให้เราเข้าใจวัตถุประสงค์ โครงสร้างหรือขอบเขตของปัญหานั้น ๆ มากขึ้น

ซึ่งประเภทของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สามารถจำแนกตามลักษณะต่าง ๆ ได้ ดังนี้

1.5.1 จำแนกตามกาลเวลา

จำแนกตามกาลเวลา ได้แก่ ตัวแบบสถิต (static model) กับตัวแบบพลวัต (dynamics model) โดยที่

• ตัวแบบสถิต เป็นตัวแบบที่พิจารณาระบบในภาวะสมดุล นั่นคือ ไม่เกี่ยวข้องกับเวลา และจะเขียนในรูปสมการเชิงผลต่าง (difference equations)

• ตัวแบบพลวัต เป็นตัวแบบที่เกี่ยวข้องกับเวลา คำตอบขึ้นอยู่กับเวลา และจะเขียนในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations)

1.5.2 จำแนกตามผลลัพธ์จากการทำนาย

จำแนกตามผลลัพธ์จากการทำนาย ได้แก่ ตัวแบบเชิงกำหนด (deterministic model) กับตัวแบบสโทแคสติก (stochastic model) โดยที่

• ตัวแบบเชิงกำหนด เป็นตัวแบบที่ผลลัพธ์ที่ได้ทั้งหมดจะขึ้นอยู่กับค่าเงื่อนไขเริ่มต้นและตัวแปรเสริมต่าง ๆ ที่กำหนด และจะไม่ใส่ใจในการแปรผันแบบสุ่ม (random variation) นั่นคือ หากมีข้อมูลรับเข้า (input) ที่เหมือนกัน ก็จะให้ผลลัพธ์ (output) ที่เหมือนเดิมทุกครั้ง ดังนั้นเป็นไปได้ที่จะทำนายหรือพยากรณ์ผลที่เจาะจงว่าอะไรจะเกิดขึ้น

• ตัวแบบสโทแคสติก ตัวแบบนี้จะเกี่ยวข้องกับการได้รับผลกระทบจากการสุ่มที่เกิดขึ้นโดยธรรมชาติ โดยที่แม้ว่าตัวแบบจะมีตัวแปรเสริมชุดเดียวกัน ค่าเริ่มต้นที่เท่ากัน ผลลัพธ์ที่ได้ก็จะได้ผลลัพธ์หลาย ๆ ผลลัพธ์ที่ต่างกันออกไป ดังนั้น ผลจากตัวแบบนี้จะไม่สามารถนำไปทำนายพฤติกรรมของระบบแบบเจาะจงได้ แต่จะสามารถอธิบายความน่าจะเป็นของคำตอบหรือผลลัพธ์นั้น ๆ โดยใช้หลักการคาดเดาหรือหลักการของทฤษฎีความน่าจะเป็นเข้ามาช่วยในการประมาณคำตอบ

1.5.3 จำแนกตามความต่อเนื่อง

จำแนกตามความต่อเนื่อง ได้แก่ ตัวแบบต่อเนื่อง (continuous model) กับตัวแบบวิยุต (discrete model) โดยที่

• ตัวแบบต่อเนื่อง เป็นตัวแบบที่ข้อมูลหรือตัวแปรเปลี่ยนแปลงต่อเนื่องตลอดเวลา เช่น การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิของวัตถุของแข็ง

• ตัวแบบวิยุต เป็นตัวแบบที่ข้อมูลหรือตัวแปรเปลี่ยนแปลงเป็นช่วงเวลาเป็นครั้ง ๆ ไป ซึ่งไม่ต่อเนื่อง เช่น จำนวนรถยนต์ที่เข้ามาจอดในห้างสรรพสินค้า ซึ่งจะเปลี่ยนแปลงเมื่อมีรถยนต์เข้าหรือออกจากห้างสรรพสินค้าเท่านั้น

1.5.4 จำแนกตามระดับความลึกของความเข้าใจที่ต้องการ

จำแนกตามระดับความลึกของความเข้าใจที่ต้องการ ได้แก่ ตัวแบบเชิงประจักษ์ (empirical model) กับตัวแบบเชิงกลศาสตร์ (mechanistic model) โดยที่

• ตัวแบบเชิงประจักษ์ เป็นตัวแบบที่มาจากหลักการของการใช้ข้อมูลที่มีอยู่จากการศึกษาเชิงประจักษ์มาสร้างตัวแบบโดยมีเป้าหมายในการค้นหาแบบรูปและความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูล ซึ่งไม่จำเป็นต้องมีความรู้ความเข้าใจเชิงลึกของทางศาสตร์นั้น ๆ มาก่อน

• ตัวแบบเชิงกลศาสตร์ เป็นตัวแบบที่ได้จากข้อสมมติฐาน โดยเริ่มจากการสนใจในปรากฏการณ์หรือเหตุการณ์เฉพาะพร้อมด้วยข้อมูลที่เก็บรวบรวมมา ซึ่งเป้าหมายคือความเข้าใจในกลศาสตร์ของปรากฏการณ์นั้น ๆ ที่สนใจ ตัวแบบนี้ต้องอาศัยความเข้าใจในระบบนั้น ๆ มาก่อนถึงจะสร้างตัวแบบได้ และข้อมูลที่ได้มาก็นำมาใช้เป็นตัวแปรต่าง ๆ ในตัวแบบ

การสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ในสถานการณ์ต่าง ๆ นั้นอาจสร้างจากการผสมผสานกันระหว่างตัวแบบในข้อ 1.5.1 - 1.5.4 เช่น ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการเจริญเติบโตของจำนวนประชากรช้างป่าในประเทศไทย จะเป็นทั้งตัวแบบต่อเนื่อง ตัวแบบพลวัต และตัวแบบเชิงกำหนด เป็นต้น

1.6 ข้อจำกัดของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์

ข้อจำกัดของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้นั้นได้มาภายใต้สมมติฐานต่าง ๆ ที่ตั้งไว้ในกระบวนการสร้างตัวแบบ ดังนั้นตัวแบบจะเสมือนสถานการณ์จริงมาก-น้อยเพียงใดก็ขึ้นอยู่กับสมมติฐานที่ตั้งขึ้นไว้

2. คำตอบหรือผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จะเป็นค่าประมาณ ไม่ใช่ค่าที่แท้จริง ดังนั้นความแม่นยำของค่าคำตอบอาจจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับตัวแบบที่สร้างมา

3. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์บางตัวแบบสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กับสถานการณ์เฉพาะบางสถานการณ์เท่านั้น

4. ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สร้างมาเป็นตัวแทนระบบงานหรือสถานการณ์จริง แต่การที่จะระบุว่าตัวแบบนั้นใช้งานได้จริงก็จะต้องพิจารณาเป็นกรณี ๆ ไป

5. ตัวแบบที่สร้างขึ้นจะต้องแลกมาระหว่างความแม่นยำ การครอบคลุมในวงกว้างหรือความเป็นจริง ขึ้นอยู่กับผู้ที่สร้างตัวแบบว่าต้องการจะเน้นวัตถุประสงค์ไปที่ใด

สรุปท้ายบท

ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ หรือ mathematical model คือตัวแทนสถานการณ์หรือโจทย์ปัญหาต่าง ๆ ที่ต้องการหาคำตอบซึ่งเขียนในรูปแบบสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันหรือสมการทางคณิตศาสตร์ ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความเข้าใจสถานการณ์หรือปัญหานั้น ๆ ทั้งเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพมากขึ้น และเพื่อทำนายพฤติกรรมหรือกลไกทางพลศาสตร์ของสถานการณ์นั้น ๆ สำหรับในการช่วยตัดสินใจ โดยกระบวนการในการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์นั้นมีด้วยกันทั้งหมด 6 ขั้นตอน ได้แก่ ทำความเข้าใจปัญหา สร้างหรือตั้งสมมติฐาน กำหนดตัวแปรและความหมายของตัวแปร สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาผลลัพธ์ วิเคราะห์ผลที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และประเมินตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และรายงานผลลัพธ์ ซึ่งตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์อาจได้มาจากการทำขั้นตอนข้างต้นซ้ำ ๆ กันจนกว่าจะได้ตัวแบบที่เหมาะสมหรือมีผลลัพธ์เป็นที่น่าพอใจ โดยที่ในบางครั้งขั้นตอนบางขั้นตอนที่สำคัญอาจจะทำซ้ำมากครั้งกว่าขั้นตอนอื่น ๆ ก็เป็นได้

ประเภทของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์มีหลายประเภทโดยสามารถจำแนกตามลักษณะต่าง ๆ นั่นคือ จำแนกตามกาลเวลา จำแนกตามผลลัพธ์จากการทำนาย จำแนกตามความต่อเนื่อง หรือจำแนกตามระดับความลึกของความเข้าใจที่ต้องการ อย่างไรก็ตามตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เองก็ยังมีข้อจำกัด และคำตอบหรือผลลัพธ์ที่ได้จากตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เองก็จะเป็นค่าประมาณ ไม่ใช่ค่าที่แท้จริง ดังนั้นความแม่นยำของค่าคำตอบอาจจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับตัวแบบที่สร้างมา ผู้สร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์จึงต้องคิดวิเคราะห์และพิจารณาปัจจัยต่าง ๆ สำหรับการสร้างตัวแบบเพื่อให้ได้มาซึ่งตัวแบบที่ให้ผลลัพธ์ออกมาใกล้เคียงกับสถานการณ์จริงมากที่สุด