



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House

ระบบควบคุม

Control Systems

พิมพ์ครั้งที่ 2



มุกิตา สงฆ์จันทร์



ระบบควบคุม

Control Systems

พิมพ์ครั้งที่ 2

มุกิตา สงษ์จันทร์



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร
Naresuan University Publishing House
www.nupress.grad.nu.ac.th

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

National Library of Thailand Cataloging in Publication Data

มุติดา สงฆ์จันทร์.

ระบบควบคุม = Control Systems.-- พิษณุโลก : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร, 2563.

398 หน้า.

1. การควบคุมอัตโนมัติ. I. ชื่อเรื่อง.

629.8

ISBN 978-616-426-172-3

ISBN (e-book) 978-616-426-110-5

สพ. 51

ราคา 380 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 มิถุนายน พ.ศ. 2561

พิมพ์ครั้งที่ 2 มิถุนายน พ.ศ. 2563



สงวนลิขสิทธิ์ ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537 โดยสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร ห้ามการลอกเลียนไม่ว่าส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้
ไม่ว่าในรูปแบบใด ๆ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร เท่านั้น

ผู้จัดพิมพ์ สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

- มิวงานจำหน่ายที่**
- ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย** อาคารวิทยกิตติ์ ชั้น 14 ซอยจุฬาลงกรณ์ 64 ถนนพญาไท แขวงวังใหม่ เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
สาขา ศาลาพระเกี้ยว กรุงเทพฯ โทร. 0-2218-7000-3
สยามสแควร์ อาคารวิทยกิตติ์ กรุงเทพฯ โทร. 0-2218-9881, 0-2255-4433
มหาวิทยาลัยนเรศวร จังหวัดพิษณุโลก โทร. 0-5526-0162-5
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี จังหวัดนครราชสีมา โทร. 044-216131-2
มหาวิทยาลัยบูรพา จังหวัดชลบุรี โทร. 0-3839-4855-9
โรงเรียนนายร้อยพระจุลจอมเกล้า (ร.ร.จปร.) จังหวัดนครนายก โทร. 037-393-023, 037-393-036
จัดตั้งสามจรี กรุงเทพฯ โทร. 0-2160-5301
มหาวิทยาลัยพะเยา โทร. 0-5446-6799, 0-5446-6800
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี โทร. 044-922662-3
สาขาย่อยคณะครุศาสตร์จันทบุรี โทร. 0-2218-3979
สาขาหัวหมาก โทร. 02-374-1378
 - ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์** อาคารวิทยบริการ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 50 ถนนงามวงศ์วาน แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900 โทร. 0-2579-0113
 - ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์** อาคารอเนกประสงค์ ชั้น 1 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ถนนพระจันทร์ แขวงพระบรมมหาราชวัง เขตพระนคร กรุงเทพฯ 10200 โทร. 0-2613-3899, 0-2623-6493
สาขา ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ จังหวัดเชียงใหม่ โทร. 0-5394-4990-1
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยสงขลานครินทร์ จังหวัดสงขลา โทร. 0-7428-2980, 0-74282981
ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยราชภัฏยะลา จังหวัดยะลา โทร. 0-7329-9980
 - สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร** บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยนเรศวร 99 หมู่ 9 อาคารมหาธรรมราชา ชั้น 1 ตำบลท่าโพธิ์ อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก 65000 โทร. 0-5596-8833 ถึง 8836

กองบรรณาธิการ กองบรรณาธิการจัดทำเอกสารสิ่งพิมพ์ทางวิชาการของสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

ออกแบบปก สรญา แสงเย็นพันธ์

ออกแบบรูปเล่ม สัณญา จันทา

พิมพ์ที่ บริษัท กู๊ดเฮด พรินต์ติ้ง แอนด์ แพคเกจจิ้ง กรุ๊ป จำกัด

6/1 นิคมอุตสาหกรรมบางชัน ซอยเสรีไทย 58 แขวงมีนบุรี เขตมีนบุรี กรุงเทพฯ 10510 โทร. 02-136-7042



สำนักพิมพ์นี้เป็นสมาชิกสมาคมผู้จัดพิมพ์
และผู้จำหน่ายหนังสือแห่งประเทศไทย
<http://www.thaibooksociety.com>



พิมพ์บน
กระดาษคุณภาพ เพื่อลดผลกระทบต่อ
กระแสน้ำในมหาสมุทร

กรณีต้องการสั่งซื้อหนังสือปริมาณมาก หรือเข้าชั้นเรียนติดต่อได้ที่
ฝ่ายจัดจำหน่ายสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

✉ nuph@nu.ac.th

📍 สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยนเรศวร

☎ 0 5596 8833-8836

📧 nu_publishing



คำนำ

ตำราเล่มนี้จัดทำขึ้นเพื่อใช้ประกอบการเรียนการสอนในรายวิชา 303352 ระบบควบคุม (Control System) ซึ่งอยู่ในกลุ่มวิชาบังคับเฉพาะสาขา ตามหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขา วิศวกรรมไฟฟ้า ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้าและคอมพิวเตอร์ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร

เนื้อหาในตำราเล่มนี้จะกล่าวถึงแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบ ฟังก์ชันถ่ายโอน แผนผังบล็อก กราฟการไหลของสัญญาณ แบบจำลองของระบบในโดเมนเวลาและโดเมนความถี่ ผลตอบสนองของระบบพลวัต ผลตอบสนองของระบบอันดับหนึ่งและอันดับสอง การควบคุมวงเปิดและวงปิด การควบคุมแบบป้อนกลับและความไว หลักการและเงื่อนไขของระบบที่มีเสถียรภาพ วิธีทดสอบความมีเสถียรภาพทางเดินราก แผนภาพโบเด แผนภาพไนควิสต์ ซึ่งเนื้อหาในแต่ละบทได้ถูกจัดทำขึ้นเพื่อให้สอดคล้องกับแผนการสอนและรายละเอียดเนื้อหาการเรียนตามทฤษฎีที่กำหนด และในตอนท้ายของแต่ละบทจะมีคำถามท้ายบทเพื่อให้ผู้เรียนสามารถทดสอบความเข้าใจจากการนั่งฟังบรรยายในชั้นเรียน และยังเป็นการทบทวนบทเรียนที่ได้เรียนไปแล้วอีกด้วย อย่างไรก็ตามนักศึกษาจะต้องไปศึกษาหาความรู้เพิ่มเติมด้วยตนเองจากหนังสือที่เกี่ยวกับระบบควบคุมอื่นๆ เพื่อเพิ่มพูนความรู้และเพิ่มแนวทางในการออกแบบและแก้ปัญหาโจทย์ได้ดียิ่งขึ้น

สุดท้ายนี้ผู้เขียนขอขอบพระคุณคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยนเรศวร เป็นอย่างยิ่ง ที่ให้ความอนุเคราะห์ทุนสนับสนุนในการผลิตตำราเล่มนี้

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.มูทิตา สงฆ์จันทร์
ผู้เขียนและผู้เรียบเรียง

สารบัญ

บทที่
01

บทนำ	1
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับระบบควบคุม	1
องค์ประกอบของระบบควบคุม	3
ประเภทของระบบควบคุมแบบป้อนกลับ	7
ผลกระทบที่เกิดจากระบบควบคุมแบบป้อนกลับ	8
ตัวอย่างของระบบควบคุมแบบป้อนกลับ	13
โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ช่วยในการวิเคราะห์ระบบควบคุม	17
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1	19

บทที่
02

คณิตศาสตร์พื้นฐานสำหรับระบบควบคุมและฟังก์ชันถ่ายโอน	20
ตัวแปรเชิงซ้อนและฟังก์ชันเชิงซ้อน	20
การแปลงลาปลาซ	25
ทฤษฎีบทที่สำคัญของการแปลงลาปลาซ	27
การแปลงลาปลาซผกผันโดยใช้วิธีการกระจายเศษส่วนย่อยบางส่วน	31
การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซในการหาผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นทั่วไป	46
ฟังก์ชันถ่ายโอน	50
การวิเคราะห์โดยใช้โปรแกรมแมตแล็บ	63
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2	70

บทที่
03

แผนผังบล็อกและกราฟการไหลของสัญญาณ	73
แผนผังบล็อก	74
กราฟการไหลของสัญญาณ	83
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3	99

บทที่
04

แบบจำลองคณิตศาสตร์ในทางโดเมนเวลา: ปรีภูมิสถานะ:	113
รูปแบบทั่วไปของปรีภูมิสถานะ	119
การประยุกต์ใช้ปรีภูมิสถานะกับระบบทางกายภาพ	123
การเปลี่ยนรูปฟังก์ชันถ่ายโอนให้อยู่ในรูปปรีภูมิสถานะ	132
การเปลี่ยนรูปแบบปรีภูมิสถานะให้อยู่ในรูปแบบฟังก์ชันถ่ายโอน	142
การทำให้เป็นเชิงเส้น	144
การแปลงรูปแบบจำลองทางคณิตศาสตร์โดยใช้แมตแล็บ	148
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4	152

บทที่
05

การวิเคราะห์ผลตอบสนองของชั่วคราวและผลตอบสนองที่สภาวะคงตัว.....	157
ระบบอันดับหนึ่ง	160
ระบบอันดับสอง.....	166
การกำหนดนิยามต่างๆ สำหรับผลตอบสนองชั่วคราว	176
ผลตอบสนองต่อฟังก์ชันอิมพัลส์ของระบบอันดับสอง.....	189
ระบบอันดับสูงกว่า.....	192
การวิเคราะห์ผลตอบสนองชั่วคราวโดยใช้แมตแล็บ	196
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 5.....	200

บทที่
06

ค่าผิดพลาดที่สภาวะคงตัว.....	205
ค่าผิดพลาดที่สภาวะคงตัวสำหรับระบบป้อนกลับที่มีอัตราขยายการป้อนกลับเท่ากันหนึ่ง.....	209
ค่าคงที่ค่าผิดพลาดสถิตยและชนิดของระบบ	217
การระบุรายละเอียดสำหรับค่าผิดพลาดที่สภาวะคงตัว.....	223
ค่าผิดพลาดที่สภาวะคงตัวสำหรับระบบที่มีสัญญาณรบกวน.....	226
ค่าผิดพลาดที่สภาวะคงตัวสำหรับระบบป้อนกลับที่มีอัตราขยายการป้อนกลับไม่เท่ากันหนึ่ง.....	229
ค่าผิดพลาดที่สภาวะคงตัวของระบบในปริภูมิสถานะ	234
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 6.....	240

บทที่
07

เสถียรภาพของระบบ.....	251
เกณฑ์ของรูธ - เฮอร์วิทซ์.....	256
เกณฑ์ของรูธ - เฮอร์วิทซ์: กรณีพิเศษ	259
ตัวอย่างเพิ่มเติมสำหรับเกณฑ์ของรูธ - เฮอร์วิทซ์.....	266
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7	274

บทที่
08

แผนภาพทางเดินราก	287
นิยามทางเดินราก	292
คุณสมบัติของทางเดินราก	296
การวาดทางเดินราก.....	301
การวาดทางเดินรากให้ละเอียดยิ่งขึ้น.....	306
รูปร่างทั่วไปของทางเดินราก.....	324
การวาดทางเดินรากโดยใช้แมตแล็บ	326
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8.....	331

การวิเคราะห์ผลตอบแทนของเชิงความถี่	339
แผนภาพโบเต	348
การวาดแผนภาพโบเตโดยใช้แมตแล็บ	364
แผนภาพเชิงชั่ว	366
รูปร่างทั่วไปของแผนภาพเชิงชั่ว	376
การวาดแผนภาพเชิงชั่วโดยใช้แมตแล็บ	380
แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9	384
 บรรณานุกรม	 387
ดัชนี	388

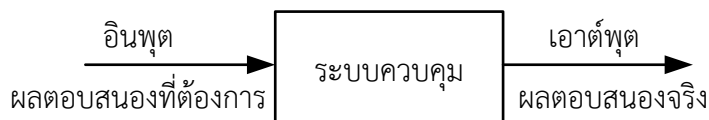
บทที่ 1

บทนำ

ในช่วงหลายปีที่ผ่านมา ระบบควบคุมได้เข้ามามีบทบาทสำคัญมากขึ้นเรื่อย ๆ ทั้งในเรื่องของการพัฒนา และการเจริญเติบโตของเทคโนโลยีในยุคสมัยใหม่ ซึ่งกิจกรรมของมนุษย์ในทุก ๆ ด้านล้วนแล้วแต่ใช้งานที่เกี่ยวกับ ระบบควบคุมแทบทั้งสิ้น โดยส่วนมากจะเห็นได้ในทุกส่วนของงานที่เกี่ยวกับอุตสาหกรรม ยกตัวอย่างเช่น ส่วนการควบคุม คุณภาพการผลิต ส่วนของสายงานการประกอบอัตโนมัติ การควบคุมเครื่องกลึงหรือตัดโลหะเป็นรูปต่าง ๆ และยังสามารถ เห็นได้ในงานที่เกี่ยวกับเทคโนโลยีทางด้านอวกาศและระบบชิปนาวูธ ระบบการขนส่งและลำเลียง ระบบหุ่นยนต์ เทคโนโลยีนาโน และอีกหลากหลายที่สามารถพบได้ทั่วไป ซึ่งระบบที่กล่าวถึงทั้งหมดนี้ได้มาจากทฤษฎีของการควบคุม อัตโนมัติทั้งสิ้น

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับระบบควบคุม

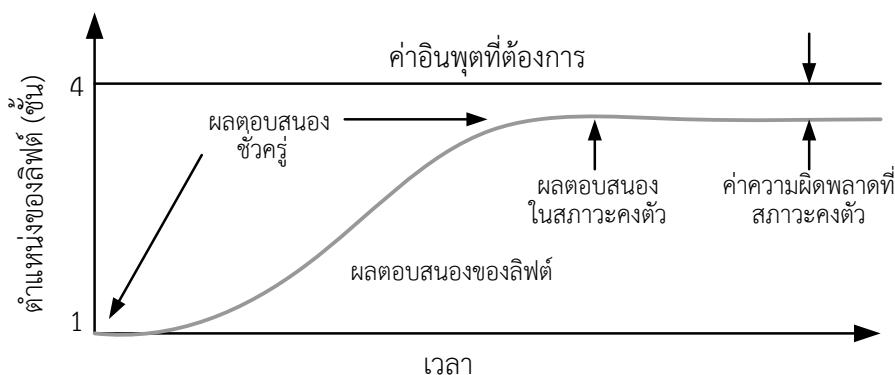
ระบบควบคุมโดยทั่วไปประกอบไปด้วยระบบรอง (Subsystem) และกระบวนการ (Process) ที่นำมาประกอบ เข้าด้วยกันเพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์หรือเอาต์พุตที่ต้องการเมื่อป้อนอินพุตเข้าไปค่าใดค่าหนึ่ง โดยในรูปที่ 1.1 แสดงให้ เห็นถึงระบบควบคุมที่มีรูปแบบที่ง่ายที่สุดซึ่งเมื่อทำการป้อนอินพุตเข้าไปในระบบ ระบบจะให้ค่าผลลัพธ์ที่ต้องการ ออกมา



รูปที่ 1.1 รูปแบบอย่างง่ายของระบบควบคุม



ยกตัวอย่างการทำงานของลิฟต์ เมื่อผู้โดยสารที่อยู่ในลิฟต์ในชั้นที่หนึ่งกดปุ่มควบคุมหมายเลข 4 ในลิฟต์ ลิฟต์จะเคลื่อนที่ขึ้นไปยังชั้นที่สี่ด้วยความเร็วและหยุดที่ตำแหน่งที่ถูกออกแบบไว้ ซึ่งในที่นี้การกดปุ่มควบคุม หมายเลข 4 จะเป็นอินพุตที่แสดงถึงค่าเอาต์พุตหรือผลลัพธ์ที่ต้องการ โดยกราฟของอินพุตจะแสดงในรูปแบบของฟังก์ชัน ขั้วบันไดและเอาต์พุตหรือผลการทำงานของลิฟต์แสดงโดยเส้นโค้งผลตอบสนองของลิฟต์ ดังในรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2 ผลตอบสนองของลิฟต์

การวัดผลตอบสนองของระบบควบคุมแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทหลัก ๆ คือผลตอบสนองชั่วครู่ และค่าผิดพลาดที่สภาวะคงตัว ยกตัวอย่างเช่นในกรณีการทำงานของลิฟต์ ความรู้สึกสบายและความอดทนของผู้โดยสารลิฟต์นั้นขึ้นอยู่กับผลตอบสนองชั่วครู่ถ้าผลตอบสนองชั่วครู่มีความเร็วเกินไป ความรู้สึกสบายของผู้โดยสารก็จะหายไป และถ้าผลตอบสนองชั่วครู่ช้าเกินไปก็จะทำให้ผู้โดยสารรู้สึกจะต้องอดทนในการเดินทางมากขึ้น สำหรับค่าผิดพลาดที่สภาวะคงตัวก็เป็นผลตอบสนองที่จะต้องคำนึงถึงเช่นกัน เพราะผู้โดยสารจะรู้สึกไม่ปลอดภัยและไม่ได้รับความสะดวกสบายถ้าลิฟต์โดยสารไม่สามารถไปถึงยังชั้นที่ต้องการได้อย่างแม่นยำและเหมาะสม

ก่อนที่จะอธิบายรายละเอียดในเชิงลึกต่อไปเกี่ยวกับระบบควบคุม มีคำศัพท์เกี่ยวกับระบบควบคุมที่ต้องทำความเข้าใจก่อน

1. ตัวแปรที่ถูกควบคุมและตัวแปรจัดการ (Controlled Variable and Manipulated Variable) ตัวแปรที่ถูกควบคุม คือ ปริมาณหรือเงื่อนไขที่ถูกวัดค่าหรือถูกควบคุม ส่วนตัวแปรจัดการคือปริมาณหรือเงื่อนไขที่ผันแปรโดยตัวควบคุมซึ่งจะมีผลต่อค่าของตัวแปรที่ถูกควบคุม โดยปกติแล้ว ตัวแปรที่ถูกควบคุมจะเปรียบเสมือนเป็นผลลัพธ์หรือเอาต์พุตของระบบ

2. การควบคุม (Control) การควบคุมหมายถึงการวัดค่าของตัวแปรที่ถูกควบคุมของระบบและการป้อนค่าของตัวแปรจัดการเข้าไปในระบบเพื่อปรับแก้หรือจำกัดการเบี่ยงเบนหรือความคลาดเคลื่อนขอค่าที่วัดได้จากค่าที่ต้องการ

3. เครื่องจักร (Plant) เครื่องจักรในระบบควบคุมอาจหมายถึง ชิ้นส่วนของเครื่องมือหรือกลุ่มของเครื่องจักรที่ทำงานร่วมกันโดยมีเป้าหมายที่จะก่อให้เกิดกระบวนการอย่างใดอย่างหนึ่งขึ้นมา วัตถุทางกายภาพที่ถูกควบคุมจะถูกรเรียกว่าเครื่องจักร ยกตัวอย่างเช่น อุปกรณ์จักรกล ตัวหลอม หรือยานอวกาศ

4. กระบวนการ (Processes) กระบวนการในระบบควบคุมคือการปฏิบัติการที่มีการกระทำอย่างต่อเนื่องและค่อย ๆ ก้าวหน้าขึ้นตามลำดับหรือการพัฒนาที่ค่อย ๆ มีการเปลี่ยนแปลงเป็นลำดับเพื่อนำไปสู่ผลลัพธ์และเป้าหมายที่เจาะจง การปฏิบัติการใด ๆ ที่ถูกควบคุมจะถูกรเรียกว่ากระบวนการ

5. ระบบ (Systems) ระบบคือการรวมกันของส่วนประกอบต่าง ๆ ที่มีพฤติกรรมหรือการกระทำร่วมกันและก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่มีเป้าหมายที่ชัดเจนแน่นอน แนวคิดของระบบสามารถนำไปใช้ได้กับสิ่งที่เป็นนามธรรมหรือปรากฏการณ์เกี่ยวกับพลังงานการเคลื่อนที่ ยกตัวอย่างเช่น แนวคิดทางด้านเศรษฐศาสตร์

6. สัญญาณรบกวน (Disturbance) สัญญาณรบกวน คือ สัญญาณที่มีแนวโน้มที่จะส่งผลกระทบต่อค่าของเอาต์พุตของระบบในทิศทางตรงกันข้ามกับที่ควรจะเป็น ถ้าสัญญาณรบกวนเกิดขึ้นภายในระบบจะถูกรเรียกว่าสัญญาณรบกวนภายใน (Internal Disturbance) ในขณะที่สัญญาณรบกวนจากภายนอก (External Disturbance) จะเกิดจากภายนอกระบบซึ่งก็คืออินพุตตัวหนึ่งนั่นเอง

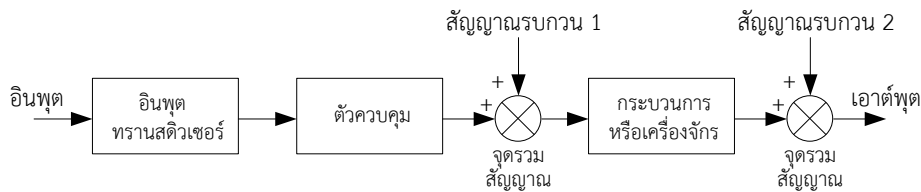
7. การควบคุมแบบป้อนกลับ (Feedback Control) การควบคุมแบบป้อนกลับเกี่ยวข้องกับการปฏิบัติการที่เมื่อมีสัญญาณรบกวนเข้ามาในระบบ ระบบมีแนวโน้มที่จะลดค่าความแตกต่างระหว่างเอาต์พุตของระบบกับค่าอินพุตอ้างอิง โดยที่ค่าความแตกต่างนี้จะเรียกว่าค่าผิดพลาดของระบบ (Error)

องค์ประกอบของระบบควบคุม

ระบบควบคุมสามารถแบ่งออกเป็น 2 องค์ประกอบหลักคือระบบควบคุมแบบวงเปิด และระบบควบคุมแบบวงปิด

ระบบควบคุมแบบวงเปิด (Open-Loop Systems)

ระบบควบคุมแบบวงเปิดโดยทั่วไปสามารถเขียนแสดงได้ดังแผนภาพในรูปที่ 1.3 โดยที่ระบบจะเริ่มต้นด้วยระบบรองที่เรียกว่าอินพุตทรานสดิวเซอร์ ซึ่งอินพุตทรานสดิวเซอร์นี้จะเปลี่ยนรูปแบบของสัญญาณอินพุตที่เข้ามาให้เป็นสัญญาณที่ตัวควบคุมสามารถนำไปใช้ได้ และตัวควบคุมจะใช้เป็นตัวขับเคลื่อนกระบวนการหรือเครื่องจักร ซึ่งอินพุตที่ป้อนให้กับระบบโดยทั่วไปมักจะถูกเรียกว่าอินพุตอ้างอิง และเอาต์พุตที่ออกจากระบบจะถูกรเรียกว่าตัวแปรที่ถูกควบคุม ส่วนสัญญาณอื่นที่เข้ามาในระบบเช่น สัญญาณรบกวน จะถูกป้อนเข้ามาผ่านทางจุดรวมสัญญาณ (Summing Junction) ซึ่งทุกสัญญาณที่เข้ามาทางจุดรวมสัญญาณนี้จะมีการรวมกันแบบพีชคณิต



รูปที่ 1.3 แผนภาพระบบควบคุมแบบวงเปิด

คุณลักษณะของระบบควบคุมแบบวงเปิดที่แตกต่างจากระบบอื่นคือเมื่อมีสัญญาณรบกวนเข้ามาในระบบ ระบบควบคุมแบบวงเปิดจะไม่สามารถชดเชยค่าของสัญญาณเอาต์พุตที่เปลี่ยนแปลงไปได้ ยกตัวอย่างเช่น จากแผนภาพระบบควบคุมแบบวงเปิดในรูปที่ 1.3 ถ้าตัวควบคุมในระบบคือตัวขยายสัญญาณอิเล็กทรอนิกส์ และสัญญาณรบกวนหมายเลข 1 คือ เสียงรบกวน ดังนั้นสัญญาณที่จะนำไปใช้ขับเคลื่อนกระบวนการหรือเครื่องจักรก็คือสัญญาณที่ออกมาจากตัวขยายสัญญาณรวมกับสัญญาณเสียงรบกวนที่จุดรวมสัญญาณที่ 1 ทำให้เอาต์พุตที่ออกมาจากกระบวนการหรือเครื่องจักรเกิดการลดทอนลงไปเนื่องจากผลกระทบของเสียงรบกวน และจากแผนภาพจะเห็นว่าเอาต์พุตที่ออกจากระบบระบบควบคุมแบบวงเปิดนี้ไม่ใช่ถูกลดทอนด้วยสัญญาณเสียงรบกวนหมายเลข 1 เท่านั้น แต่ยังถูกลดทอนลงไปอีกด้วยสัญญาณรบกวนหมายเลข 2 ด้วย และระบบควบคุมแบบวงเปิดนี้จะไม่สามารถปรับปรุงแก้ไขสัญญาณเอาต์พุตที่มีผลกระทบจากสัญญาณรบกวนได้เลย ดังนั้นจะเห็นว่าระบบควบคุมแบบวงเปิดนี้เป็นระบบที่มีการควบคุมอย่างง่าย ๆ คือ เอาต์พุตที่ออกมาเกิดมาจากการป้อนอินพุตเข้าป้อนนั่นเอง

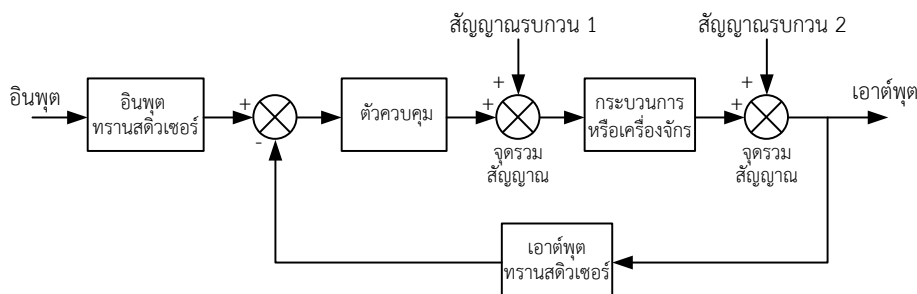
ตัวอย่างของระบบควบคุมแบบวงเปิดยังให้เห็นอีกมากมาย เช่น เครื่องปิ้งขนมปังก็ใช้วิธีการควบคุมแบบวงเปิด โดยคนที่ปิ้งขนมปังจะเป็นคนทดสอบเอาต์พุตที่ได้ เอาต์พุตที่ได้หรือตัวแปรที่ถูกควบคุมในที่นี้คือสีของแผ่นขนมปังปิ้ง โดยเครื่องปิ้งขนมปังถูกออกแบบมาด้วยสมมุติฐานที่ว่าสีของขนมปังปิ้งจะดำมากขึ้นเมื่อให้ความร้อนเป็นเวลานานขึ้น และที่สำคัญคือเครื่องปิ้งขนมปังไม่สามารถวัดค่าสีของแผ่นขนมปังปิ้งได้ ซึ่งสีของแผ่นขนมปังปิ้งที่ได้จะขึ้นอยู่กับเวลาที่ผู้ปิ้งขนมปังต้องการเท่านั้น แต่อย่างไรก็ดียังมีปัจจัยอื่น ๆ อีกที่มีผลต่อสีของขนมปังปิ้ง เช่น ชนิดของขนมปังว่าเป็นแบบขนมปังสีขาว หรือขนมปังเมล็ดข้าวไรย์ และความหนาของแผ่นขนมปัง

อีกตัวอย่างหนึ่งที่แสดงให้เห็นการทำงานของระบบควบคุมแบบวงเปิดได้อย่างชัดเจนคือการทำงานของเครื่องซักผ้า เอาต์พุตที่ได้จากเครื่องซักผ้าคือความสะอาดของผ้าซึ่งเครื่องซักผ้าไม่สามารถวัดค่าความสะอาดของผ้าได้ ดังนั้นระบบการทำงานของเครื่องซักผ้าตั้งแต่การแช่ผ้า การปั่นผ้า และการล้างเอาผงซักฟอกออกจะขึ้นอยู่กับระยะเวลาที่เครื่องซักผ้าถูกตั้งไว้ ซึ่งถ้าผ้าที่ซักออกมาไม่สะอาด เครื่องซักผ้าจะไม่สามารถตรวจสอบความสะอาดและไม่สามารถที่จะเริ่มต้นการซักใหม่ได้ ต้องให้คนซักผ้าเป็นผู้ตรวจสอบความสะอาดและกดปุ่มเริ่มต้นการทำงานของเครื่องซักผ้าเอง

จากตัวอย่างที่กล่าวมาสามารถสรุปการทำงานของระบบควบคุมแบบวงเปิดได้ คือ เมื่อป้อนอินพุตเข้าไปในระบบควบคุมแบบวงเปิดจะได้เอาต์พุตออกมา ซึ่งโดยส่วนมากจะใช้ระบบของฐานเวลาเป็นสำคัญ และสิ่งสำคัญที่สังเกตได้อีกประการหนึ่งของระบบควบคุมแบบวงเปิด คือ เอาต์พุตที่ได้จากระบบไม่ได้ส่งผลกระทบใด ๆ ต่อกระบวนการทำงานของระบบเลยหรืออาจกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งว่าค่าเอาต์พุตของระบบควบคุมแบบวงเปิดไม่ได้ถูกนำกลับมาเปรียบเทียบกับค่าอินพุตอีก ดังนั้นความแม่นยำหรือความถูกต้องของเอาต์พุตที่ได้จะขึ้นอยู่กับ การเปรียบเทียบของระบบในตอนเริ่มต้นเท่านั้น และในกรณีที่มิมีสัญญาณรบกวนเข้ามาในระบบ ระบบควบคุมแบบวงเปิดจะไม่สามารถให้ค่าเอาต์พุตที่ต้องการได้

ระบบควบคุมแบบวงปิดหรือระบบควบคุมแบบป้อนกลับ (Closed-Loop Systems or Feedback Control Systems)

จากที่กล่าวมาในหัวข้อที่แล้วจะเห็นว่าข้อเสียของระบบควบคุมแบบวงเปิด คือ เมื่อมีสัญญาณรบกวนเข้ามาในระบบจะส่งผลกระทบต่อเอาต์พุตในทันทีและระบบไม่สามารถที่จะปรับแก้ค่าเอาต์พุตให้ออกมาตรงตามความต้องการได้ ซึ่งระบบควบคุมแบบวงปิดสามารถแก้ปัญหาเหล่านี้ได้ แผนภาพการทำงานของระบบควบคุมแบบวงปิดโดยทั่วไปสามารถเขียนแสดงได้ในรูปที่ 1.4



รูปที่ 1.4 แผนภาพระบบควบคุมแบบลูปปิด

จากแผนภาพในรูปที่ 1.4 จะเห็นว่ามึระบบรองในการแปลงสัญญาณอยู่ 2 ระบบ คืออินพุตทรานสดิวเซอร์และเอาต์พุตทรานสดิวเซอร์หรืออาจเรียกว่าตัวรับรู้ อินพุตทรานสดิวเซอร์จะใช้ในการเปลี่ยนรูปแบบของสัญญาณอินพุตให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถนำไปใช้กับตัวควบคุมได้ ส่วนเอาต์พุตทรานสดิวเซอร์จะวัดค่าปริมาณเอาต์พุตและเปลี่ยนรูปแบบของสัญญาณเอาต์พุตให้อยู่ในรูปแบบที่สามารถนำไปใช้กับตัวควบคุมเช่นกัน ยกตัวอย่างเช่น ถ้าภายในตัวควบคุมใช้สัญญาณไฟฟ้าในการควบคุมการทำงานวาล์วของระบบควบคุมอุณหภูมิ ดังนั้นค่าตำแหน่งทางด้านอินพุตและค่าอุณหภูมิทางด้านเอาต์พุตจะต้องถูกเปลี่ยนให้เป็นสัญญาณทางไฟฟ้าก่อนที่จะเข้าไปในตัวควบคุม โดยที่ค่าตำแหน่งทางด้านอินพุตสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสัญญาณทางไฟฟ้าในรูปของแรงดันไฟฟ้าโดยใช้ตัวต้านทานปรับค่าได้ และค่าอุณหภูมิทางด้านเอาต์พุตก็สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของสัญญาณทางไฟฟ้าในรูปของแรงดันไฟฟ้าได้เช่นกันโดยใช้เทอร์มิสเตอร์



ซึ่งเทอร์มิสเตอร์ คือ อุปกรณ์ที่รับค่าอุณหภูมิเข้ามาแล้วเปลี่ยนให้เป็นค่าความต้านทานในทางไฟฟ้า

จตุรรมสัญญาณตัวที่ 1 จะรวมสัญญาณแบบพีซคณิตโดยจะรวมสัญญาณจากอินพุตและสัญญาณจากเอาต์พุต โดยสัญญาณจากเอาต์พุตนี้มาจากเส้นทางป้อนกลับซึ่งก็คือเส้นทางจากเอาต์พุตมายังจตุรรมสัญญาณ จากในรูปที่ 1.4 จะเห็นว่าที่จตุรรมสัญญาณ สัญญาณเอาต์พุตถูกนำมาลบออกจากสัญญาณอินพุต และผลลัพธ์ของสัญญาณที่ได้โดยทั่วไปจะถูกเรียกว่าสัญญาณกระตุ้น (actuating signal) แต่อย่างไรก็ดี ในบางระบบค่าอัตราขยายของอินพุตทรานสดิวเซอร์และเอาต์พุตทรานสดิวเซอร์มีค่าเท่ากับหนึ่ง ทำให้สัญญาณกระตุ้นมีค่าเท่ากับค่าความแตกต่างจริง ๆ ระหว่างค่าอินพุตกับค่าเอาต์พุต และภายใต้เงื่อนไขนี้สัญญาณกระตุ้นจะถูกเรียกว่าค่าผิดพลาด

ระบบควบคุมแบบป้อนกลับนี้สามารถชดเชยค่าเอาต์พุตได้ในกรณีที่สัญญาณรบกวนเข้ามาในระบบ โดยจะทำการวัดค่าปริมาณเอาต์พุตและนำค่าปริมาณเอาต์พุตที่วัดได้ป้อนกลับมาเปรียบเทียบกับอินพุตที่จตุรรมสัญญาณ ถ้าทั้งสองค่าที่นำมาเปรียบเทียบนี้มีค่าแตกต่างกัน ค่าที่แตกต่างกันนี้จะป้อนสัญญาณกระตุ้นไปขับเคลื่อนกระบวนการหรือเครื่องจักรเพื่อให้ได้ค่าเอาต์พุตที่มีการปรับปรุงแก้ไข แต่ถ้าทั้งสองค่าที่นำมาเปรียบเทียบมีค่าเท่ากันหรือผลรวมทางพีซคณิตเท่ากับศูนย์ระบบจะหยุดขับเคลื่อนกระบวนการหรือเครื่องจักรเนื่องจากเอาต์พุตที่ได้มีค่าเท่ากับค่าเอาต์พุตที่ต้องการแล้ว

จากที่กล่าวมาข้างต้น ข้อได้เปรียบที่เห็นได้อย่างชัดเจนของระบบควบคุมแบบป้อนกลับเมื่อเทียบกับระบบควบคุมแบบวงเปิดคือระบบควบคุมแบบป้อนกลับให้ค่าเอาต์พุตที่มีความถูกต้องและแม่นยำสูงกว่าระบบควบคุมแบบวงเปิด เมื่อมีสัญญาณรบกวนเข้ามาหรือแม้กระทั่งมีการเปลี่ยนแปลงของสิ่งแวดล้อมภายนอกกระบวนการสิ่งเหล่านี้จะไม่มีผลกระทบหรือมีผลกระทบน้อยมากต่อค่าเอาต์พุตของระบบควบคุมแบบป้อนกลับ และระบบควบคุมแบบป้อนกลับยังสามารถควบคุมค่าผลตอบแทนของชั่วคราวและค่าผิดพลาดที่สภาวะคงตัวได้อย่างง่ายดาย เพียงแค่ปรับค่าอัตราขยายในระบบหรือเพียงแค่ออกแบบตัวควบคุมให้เหมาะสม แต่ในทางตรงกันข้าม ระบบควบคุมแบบป้อนกลับนี้เป็นระบบที่มีความซับซ้อนและมีราคาที่สูงกว่าระบบควบคุมแบบวงเปิด ยกตัวอย่างเช่น เครื่องปั๊มลมปั๊มที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นนั้น ถ้าเป็นเครื่องปั๊มลมปั๊มมาตรฐานทั่วไปจะใช้ระบบควบคุมแบบวงเปิดซึ่งราคาไม่แพงและมีกระบวนการทำงานที่ง่ายไม่ซับซ้อน แต่ถ้าเป็นเตาอบขนมปังที่ใช้ระบบควบคุมแบบป้อนกลับจะมีความยุ่งยากซับซ้อนในการทำงานมากขึ้นและมีราคาที่สูงขึ้นด้วยเนื่องจากเตาอบขนมปังจะต้องมีการวัดค่าสีของแผ่นขนมปังผ่านทางกระบวนการการสะท้อนกลับของแสงและต้องวัดค่าความชื้นภายในเตาอบด้วย ดังนั้นวิศวกรควบคุมระบบจะพิจารณาและตัดสินใจว่าจะเลือกใช้ระบบแบบไหนให้เหมาะสมกับความต้องการระหว่างระบบควบคุมแบบวงเปิดที่มีกระบวนการทำงานที่ง่ายและราคาถูกกับระบบควบคุมแบบป้อนกลับที่มีความถูกต้องแม่นยำแต่ราคาสูงกว่า

กล่าวโดยสรุป คือ ระบบควบคุมแบบป้อนกลับคือระบบที่มีการวัดค่าปริมาณเอาต์พุตและนำค่าป้อนกลับมาใช้เพื่อปรับปรุงค่าเอาต์พุตให้ใกล้เคียงกับค่าอินพุตที่ต้องการ



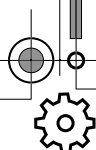
ประเภทของระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

ระบบควบคุมแบบป้อนกลับสามารถแบ่งออกเป็นประเภทต่าง ๆ ได้หลายรูปแบบขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ในการแบ่งแยกประเภทในแต่ละหมวดหมู่ ยกตัวอย่าง เช่น ถ้าพิจารณาถึงวิธีการวิเคราะห์และการออกแบบ ระบบควบคุมจะแบ่งประเภทออกเป็นแบบระบบเชิงเส้น (Linear System) หรือระบบแบบไม่เป็นเชิงเส้น (Nonlinear System) และเป็นระบบที่แปรผันตามเวลา (Time-Varying System) หรือระบบที่ไม่แปรผันตามเวลา (Time-Invariant System) แต่ถ้าพิจารณาถึงประเภทของสัญญาณที่อยู่ในระบบ จะสามารถแบ่งประเภทของระบบได้เป็นระบบข้อมูลต่อเนื่อง (Continuous-Data System) หรือระบบข้อมูลลัด (Discrete-Data System) และระบบกล้ำสัญญาณ (Modulated System) หรือระบบไม่กล้ำสัญญาณ (Unmodulated System) แต่โดยทั่วไปแล้ว ระบบควบคุมมักจะแบ่งประเภทของระบบตามวัตถุประสงค์หลักที่ใช้งาน ยกตัวอย่าง เช่น ระบบควบคุมตำแหน่ง (position-control system) ก็จะควบคุมตัวแปรเอาต์พุตที่เป็นตำแหน่ง ส่วนระบบควบคุมความเร็ว (velocity-control system) ก็จะใช้ควบคุมตัวแปรเอาต์พุตที่เป็นความเร็ว ซึ่งการทราบถึงประเภทของระบบควบคุมนั้นมีความสำคัญไม่น้อยเพราะจะช่วยให้การวิเคราะห์และการออกแบบระบบเป็นไปได้ง่ายขึ้น

ระบบควบคุมแบบเชิงเส้นและแบบไม่เป็นเชิงเส้น

จากที่กล่าวมาแล้วว่าการแบ่งประเภทของระบบควบคุมออกเป็นแบบเชิงเส้นและไม่เป็นเชิงเส้นนั้น จะพิจารณาจากวิธีการวิเคราะห์และการออกแบบ ซึ่งถ้าจะกล่าวกันจริงๆ ก็คือ ระบบแบบเชิงเส้นเป็นระบบที่ไม่มีอยู่จริงในทางปฏิบัติเนื่องจากระบบทางกายภาพทั้งหมดล้วนแล้วแต่เป็นระบบแบบไม่เป็นเชิงเส้นทั้งสิ้น ระบบควบคุมป้อนกลับแบบเชิงเส้นนั้นเป็นแบบจำลองในทางอุดมคติซึ่งคิดค้นขึ้นมาจากนักวิเคราะห์จริง ๆ เพื่อใช้สำหรับการวิเคราะห์และการออกแบบอย่างง่าย ๆ ซึ่งเมื่อขนาดของสัญญาณในระบบควบคุมถูกจำกัดไว้อยู่ที่ช่วงใดช่วงหนึ่งที่ซึ่งส่วนประกอบในระบบแสดงคุณลักษณะเป็นเชิงเส้นแล้วนั้น ระบบก็จะถูกพิจารณาเป็นระบบแบบเชิงเส้น แต่ถ้าขนาดของสัญญาณมีค่าเพิ่มขึ้นและอยู่นอกช่วงของการทำงานที่เป็นสภาวะเชิงเส้นแล้ว ระบบก็จะไม่ถูกพิจารณาเป็นระบบแบบเชิงเส้นอีกต่อไป โดยส่วนมากคุณลักษณะการไม่เป็นเชิงเส้นของระบบมักจะถูกเพิ่มเข้าไปในระบบควบคุมเพื่อช่วยปรับปรุงสมรรถนะของระบบให้มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ยกตัวอย่าง เช่น ระบบควบคุมที่จำเป็นต้องใช้เวลาในการควบคุมน้อยที่สุดนั้นจะเลือกใช้ตัวควบคุมแบบเปิด-ปิด (on-off) เช่นระบบควบคุมการปล่อยจรวดหรือปล่อยชิปนาอูท

แต่อย่างไรก็ตามการวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ของระบบควบคุมแบบไม่เป็นเชิงเส้นนั้นทำได้ยากและไม่สามารถใช้วิธีธรรมดาทั่ว ๆ ไปในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับระบบไม่เป็นเชิงเส้น ดังนั้นในทางปฏิบัติตัวควบคุมจะถูกออกแบบโดยยึดหลักโครงสร้างแบบเชิงเส้นก่อนโดยไม่คำนึงถึงระบบแบบไม่เป็นเชิงเส้นเลย จากนั้นจึงนำตัวควบคุมแบบเชิงเส้นที่ออกแบบแล้วไปใช้กับโครงสร้างของระบบแบบไม่เป็นเชิงเส้นเพื่อทำการประเมินผลและออกแบบระบบอีกครั้งโดยใช้การจำลองในคอมพิวเตอร์





ระบบควบคุมแบบไม่แปรผันตามเวลาและแบบแปรผันตามเวลา

เมื่อพารามิเตอร์ของระบบควบคุมมีค่าคงที่เมื่อเทียบกับเวลาในระหว่างที่ระบบกำลังปฏิบัติการอยู่นั้น จะเรียกระบบประเภทนี้ว่าระบบควบคุมแบบไม่แปรผันตามเวลา แต่ในทางปฏิบัติระบบทางกายภาพส่วนใหญ่มักมีส่วนประกอบที่แปรผันไปตามเวลา ยกตัวอย่าง เช่น ขดลวดตัวต้านทานของมอเตอร์ไฟฟ้าจะมีค่าความต้านทานที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อมอเตอร์ถูกกระตุ้นในครั้งแรกและเมื่ออุณหภูมิของขดลวดตัวต้านทานมีค่าสูงขึ้น อีกตัวอย่างหนึ่งที่เห็นได้ชัดของระบบควบคุมแบบแปรผันตามเวลา คือ ระบบควบคุมทิศทางการยิงขีปนาวุธ มวลของขีปนาวุธที่ถูกยิงขึ้นไปในอากาศจะลดลงเมื่อเชื้อเพลิงถูกใช้ไปเรื่อย ๆ ในระหว่างการบิน

ระบบควบคุมแบบข้อมูลต่อเนื่องและแบบข้อมูลวิฤต

ระบบควบคุมแบบข้อมูลต่อเนื่องนี้เป็นระบบควบคุมประเภทหนึ่งที่ซึ่งสัญญาณที่ปรากฏอยู่ในทุก ๆ ส่วนของระบบเป็นสัญญาณที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเวลาต่อเนื่อง t โดยที่สัญญาณในระบบควบคุมแบบข้อมูลต่อเนื่องสามารถแบ่งออกได้เป็นสัญญาณกระแสตรงและสัญญาณกระแสลับซึ่งไม่ใช่สัญญาณไฟฟ้ากระแสตรงและสัญญาณไฟฟ้ากระแสสลับที่นิยามในวิศวกรรมไฟฟ้า เมื่อกล่าวถึงระบบควบคุมกระแสสลับนั้นหมายถึงสัญญาณในระบบควบคุมจะถูกกล้ำสัญญาณ ในทางตรงกันข้ามเมื่อกล่าวถึงระบบควบคุมกระแสตรง สัญญาณในระบบจะไม่ถูกกล้ำสัญญาณ

สำหรับระบบควบคุมแบบข้อมูลวิฤตนั้นจะแตกต่างจากระบบควบคุมแบบข้อมูลต่อเนื่องตรงที่สัญญาณที่จุดใดจุดหนึ่งหรือหลาย ๆ จุดของระบบจะอยู่ในรูปแบบของขบวนสัญญาณพัลส์หรือในรูปแบบรหัสดิจิทัล ซึ่งโดยปกติทั่วไประบบควบคุมแบบข้อมูลวิฤตสามารถแบ่งออกได้เป็นระบบควบคุมแบบการสุ่มข้อมูลตัวอย่าง (Sampled-Data) และแบบดิจิทัล (Digital Control) ระบบควบคุมแบบการสุ่มข้อมูลตัวอย่างจะถูกพบได้มากในระบบควบคุมแบบข้อมูลวิฤตซึ่งสัญญาณภายในระบบจะอยู่ในรูปแบบของสัญญาณพัลส์ สำหรับระบบควบคุมแบบดิจิทัลจะใช้ดิจิทัลคอมพิวเตอร์เพื่อเข้ารหัสของสัญญาณให้อยู่ในรูปแบบรหัสฐานสอง เป็นต้น



ผลกระทบที่เกิดจากระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

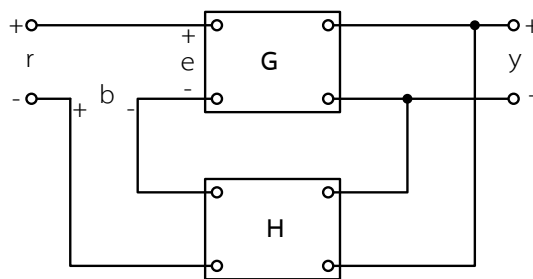
จากตัวอย่างในหัวข้อที่ผ่านมาจะเห็นว่าระบบควบคุมแบบป้อนกลับถูกนำมาใช้ในการลดค่าผิดพลาดของระบบ โดยค่าผิดพลาดนี้ คือ ค่าความแตกต่างระหว่างค่าอินพุตอ้างอิงและค่าเอาต์พุตของระบบ ซึ่งความสามารถในการลดค่าผิดพลาดของระบบถือว่าเป็นผลกระทบที่สำคัญที่การควบคุมแบบป้อนกลับมีต่อระบบ แต่อย่างไรก็ดีการควบคุมแบบป้อนกลับยังมีผลกระทบต่อด้านอื่น ๆ ของระบบอีก เช่น ความมีเสถียรภาพของระบบ อัตราขยายโดยรวมของระบบ ความไวต่อสิ่งรบกวนนอก ความกว้างแถบความถี่ และค่าอิมพีแดนซ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงผลกระทบของระบบควบคุมแบบป้อนกลับต่อระบบในด้านต่าง ๆ ซึ่งเราจะพิจารณาโครงสร้างของระบบควบคุมแบบป้อนกลับอย่างง่ายดังแสดงในรูปที่ 1.5 เมื่อ r คือ สัญญาณอินพุต y คือ สัญญาณเอาต์พุต e คือ ค่าผิดพลาด และ b คือ สัญญาณป้อนกลับ ค่าพารามิเตอร์ G และ H คือ ค่าอัตราขยายที่มีค่าคงที่จากการวิเคราะห์แผนภาพโครงสร้างของระบบควบคุมแบบป้อนกลับโดยใช้การดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างง่าย

จะได้ความสัมพันธ์ของอินพุตและเอาต์พุตของระบบดังนี้

$$M = \frac{y}{r} = \frac{G}{1+GH} \quad (1.1)$$

รูปแบบความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตของระบบในรูปแบบอย่างง่าย ๆ นี้จะถูกใช้ในการพิจารณาถึงผลกระทบที่สำคัญของตัวควบคุมแบบป้อนกลับของระบบต่อไป



รูปที่ 1.5 แผนภาพระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

ที่มา: เอกสารการอบรมเรื่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

ผลกระทบต่ออัตราขยายรวมของระบบ

จากความสัมพันธ์ของอินพุตและเอาต์พุตในสมการที่ (1.1) จะเห็นได้ว่าระบบควบคุมแบบป้อนกลับจะส่งผลกระทบต่อค่าอัตราขยาย G ของระบบควบคุมแบบวงเปิดด้วยค่าแฟกเตอร์ $(1+GH)$ ซึ่งระบบในแผนภาพจะถูกเรียกว่าระบบควบคุมป้อนกลับแบบเป็นลบ (negative feedback) เนื่องจากสัญญาณที่ป้อนกลับจากเอาต์พุตมาเปรียบเทียบกับอินพุตมีค่าเป็นลบ ปริมาณ GH จะมีค่าเป็นบวกหรือเป็นลบก็ได้ขึ้นอยู่กับเครื่องหมายที่ป้อนกลับมาจากสัญญาณเอาต์พุต ดังนั้นผลกระทบของระบบควบคุมแบบป้อนกลับต่อค่าอัตราขยายคือจะทำให้อัตราขยาย G มีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลง ซึ่งระบบควบคุมในทางปฏิบัติส่วนมากนั้น ค่าพารามิเตอร์ G และ H จะเป็นฟังก์ชันของความถี่ ดังนั้นขนาดของแฟกเตอร์ $(1+GH)$ อาจจะมีค่ามากกว่าหนึ่งหรือน้อยกว่าหนึ่งก็ได้ในค่าความถี่ที่แตกต่างกัน ดังนั้นสามารถกล่าวโดยสรุปได้ว่าการป้อนกลับสามารถเพิ่มค่าอัตราขยายของระบบในช่วงความถี่ค่าหนึ่งและลดค่าอัตราขยายในอีกช่วงความถี่หนึ่ง



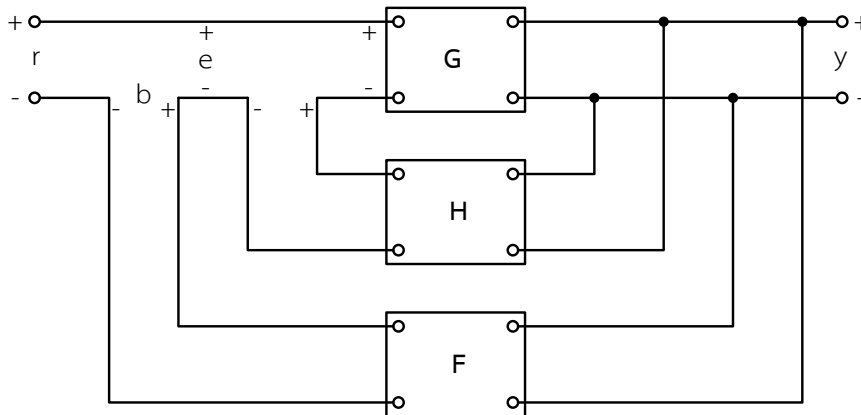
ผลกระทบต่อการมีเสถียรภาพของระบบ

เสถียรภาพคือแนวคิดที่อธิบายว่าระบบจะสามารถกระทำตามคำสั่งของอินพุตได้หรือไม่ หรืออาจกล่าวได้โดยดูจากลักษณะของเสถียรภาพว่า ระบบไม่มีความเป็นเสถียรภาพถ้าเอาต์พุตของระบบไม่สามารถถูกควบคุมได้อีกต่อไป เพื่อจะศึกษาผลกระทบของการป้อนกลับที่มีต่อเสถียรภาพของระบบจะเริ่มต้นพิจารณาจากสมการความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตในสมการที่ (1.1) จากสมการที่ (1.1) ถ้าค่าพารามิเตอร์ $GH = -1$ ค่าเอาต์พุตของระบบจะมีค่าเป็นอนันต์สำหรับค่าอินพุตที่มีค่าไม่เป็นอนันต์ใด ๆ และระบบนี้จะถูกพิจารณาเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพ ดังนั้นจึงอาจกล่าวได้ว่าการป้อนกลับสามารถทำให้ระบบที่มีความเป็นเสถียรภาพอยู่ก่อนแล้ว กลายเป็นระบบที่ไม่มีเสถียรภาพได้ ซึ่งจะเห็นว่าการใช้งานการป้อนกลับก็เหมือนดาบสองคมถ้าเลือกใช้งานการป้อนกลับอย่างไม่เหมาะสมกับงาน ซึ่งเงื่อนไขที่ค่าพารามิเตอร์ $GH = -1$ ไม่ใช่เงื่อนไขเดียวที่จะใช้พิจารณาว่าระบบไม่มีเสถียรภาพ

จากที่กล่าวมาจะเห็นว่าหนึ่งในประโยชน์ของการที่ไม่มีป้อนกลับในระบบควบคุมคือการทำให้ระบบที่ไม่มีเสถียรภาพมีเสถียรภาพมากขึ้น สมมติให้ระบบป้อนกลับในรูปที่ 1.5 ไม่มีเสถียรภาพเนื่องจากค่าพารามิเตอร์ $GH = -1$ ถ้าเพิ่มเส้นทางป้อนกลับที่มีค่าอัตราขยาย F เข้าไปที่แผนภาพในรูปที่ 1.5 โดยสัญญาณที่ป้อนกลับมีค่าเป็นลบ ดังแสดงในรูปที่ 1.6 ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างอินพุตและเอาต์พุตของระบบที่เกิดขึ้นใหม่นี้สามารถแสดงได้เป็น

$$\frac{y}{r} = \frac{G}{1 + GH + GF} \quad (1.2)$$

จากสมการ (1.2) พบว่า ถึงแม้ว่าคุณสมบัติของพารามิเตอร์ G และ H จะทำให้วงรอบการป้อนกลับขั้นในของระบบมีความไม่เสถียรเกิดขึ้นถ้า $GH = -1$ แต่เมื่อพิจารณาระบบโดยรวม ระบบสามารถมีเสถียรภาพได้ โดยการเลือกค่าอัตราขยาย F ของวงรอบการป้อนกลับขั้นนอกให้เหมาะสม ในทางปฏิบัติค่าพารามิเตอร์ GH จะเป็นฟังก์ชันของค่าความถี่ทำให้ได้เงื่อนไขของการมีเสถียรภาพของระบบแบบวงปิดจะขึ้นอยู่กับค่าขนาดและมุมเฟสของ GH ดังนั้นจึงอาจกล่าวโดยสรุปได้ว่าระบบควบคุมที่มีการป้อนกลับสามารถทำให้การมีเสถียรภาพของระบบดีขึ้นหรืออย่างน้อยขึ้นขึ้นอยู่กับการเลือกนการป้อนกลับไปใช้งานได้อย่างเหมาะสมหรือไม่นั่นเอง



รูปที่ 1.6 ระบบป้อนกลับที่มีวงรอบป้อนกลับ 2 วงรอบ

ที่มา: เอกสารการอบรมเรื่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

ผลกระทบต่อความไวต่อสิ่งรบกวนของระบบ

การพิจารณาความไวต่อสิ่งรบกวนของระบบเป็นอีกหนึ่งปัจจัยที่สำคัญในการออกแบบระบบควบคุม เนื่องจากส่วนประกอบทางกายภาพของระบบทุกตัวมีคุณสมบัติที่จะเปลี่ยนไปตามสภาวะแวดล้อมและอายุ ดังนั้นการพิจารณาว่าพารามิเตอร์ของระบบควบคุมจะมีค่าคงที่เสมอตลอดการทำงานของระบบย่อมไม่สามารถทำได้ โดยทั่วไประบบควบคุมที่ดีควรจะไม่ต้องไวต่อการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์แต่ควรจะต้องไวต่อค่าสิ่งของสัญญาณอินพุต ซึ่งการพิจารณาผลกระทบของการป้อนกลับต่อความไวของระบบจะเริ่มต้นพิจารณาจากแผนภาพระบบควบคุมในรูปที่ 1.5 โดยที่ค่าอัตราขยาย G อาจจะมีการเปลี่ยนแปลงค่าได้ ค่าความไวของอัตราขยายโดยรวมของระบบ M ต่อการเปลี่ยนแปลงของค่าอัตราขยาย G สามารถนิยามได้เป็น

$$S_G^M = \frac{\partial M}{\partial G} \frac{G}{M} = \frac{\text{percentage change in } M}{\text{percentage change in } G} \quad (1.3)$$

เมื่อ ∂M แสดงถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้นของค่า M อันเนื่องมาจากการเปลี่ยนแปลงที่เพิ่มขึ้นของค่า G หรือ ∂G จากนิยามในสมการ (1.3) และความสัมพันธ์ของอินพุตกับเอาต์พุตในสมการ (1.1) สามารถเขียนสมการของฟังก์ชันความไวต่อสิ่งรบกวนของระบบได้เป็น



$$S_G^M = \frac{\partial M}{\partial G} \frac{G}{M} = \frac{1}{1+GH} \quad (1.4)$$

ความสัมพันธ์ในสมการ (1.4) แสดงให้เห็นว่าเมื่อค่าพารามิเตอร์ GH เป็นค่าคงที่บวก ขนาดของค่าฟังก์ชันความไวต่อสิ่งรบกวนของระบบจะมีค่าน้อยลงเมื่อเพิ่มค่าพารามิเตอร์ GH ซึ่งทำให้กล่าวได้ว่าระบบจะยังคงความมีเสถียรภาพอยู่ ในทางปฏิบัติค่าพารามิเตอร์ GH เป็นฟังก์ชันของความถี่ซึ่งทำให้ขนาดของ $1+GH$ อาจจะมีค่าน้อยกว่าหนึ่งในช่วงใด ๆ ของความถี่ ดังนั้นการป้อนกลับจะมีผลต่อความไวต่อการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์ในกรณีนี้โดยทั่วไปแล้วค่าความไวต่อสิ่งรบกวนของอัตราขยายของระบบป้อนกลับต่อการเปลี่ยนแปลงของค่าพารามิเตอร์จะขึ้นอยู่กับว่าค่าพารามิเตอร์ที่ถูกพิจารณานั้นอยู่ที่ตำแหน่งไหน

ผลกระทบต่อสัญญาณรบกวนภายนอก

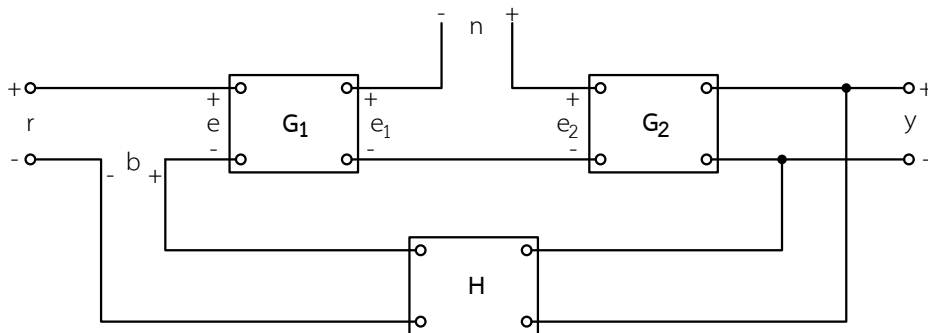
ผลกระทบของการป้อนกลับต่อสัญญาณรบกวนนี้ส่วนใหญ่จะขึ้นอยู่กับตำแหน่งที่สัญญาณรบกวนจากภายนอกเข้ามาในระบบ แต่ในสถานการณ์ส่วนใหญ่แล้วการป้อนกลับจะช่วยลดผลกระทบของสัญญาณรบกวนต่อสมรรถนะของระบบ พิจารณาระบบในรูปที่ 1.7 เมื่อ r แสดงค่าสัญญาณอินพุตและ n แสดงค่าสัญญาณรบกวน ถ้าไม่มีการป้อนกลับในระบบ $H = 0$, ค่าสัญญาณเอาต์พุต y ที่เกิดจากสัญญาณรบกวนจะมีค่าเท่ากับ

$$y = G_2 n \quad (1.5)$$

แต่ถ้ามีการป้อนกลับในระบบ ค่าสัญญาณเอาต์พุตของระบบต่อสัญญาณรบกวนจะมีค่าเท่ากับ

$$y = \frac{G_2}{1+G_1 G_2 H} n \quad (1.6)$$

เปรียบเทียบสมการที่ (1.5) กับ (1.6) จะเห็นว่าองค์ประกอบของสัญญาณรบกวนในสัญญาณเอาต์พุตในสมการที่ (1.6) สามารถลดลงได้ด้วยค่าแฟกเตอร์ $1+G_1 G_2 H$ ถ้าเทอมพารามิเตอร์ $G_1 G_2 H$ มีค่ามากกว่า 1 และจะทำให้ระบบมีเสถียรภาพด้วย



รูปที่ 1.7 ระบบควบคุมแบบป้อนกลับเมื่อมีสัญญาณรบกวน

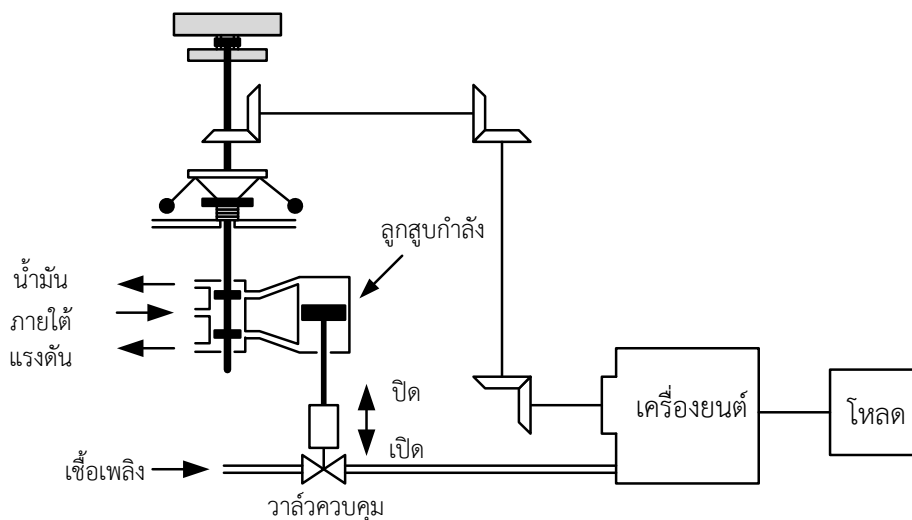
ที่มา: เอกสารการอบรมเรื่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

ตัวอย่างของระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

ในหัวข้อนี้จะยกตัวอย่างระบบควบคุมแบบป้อนกลับที่ถูกใช้งานจริงในด้านต่าง ๆ พร้อมทั้งแสดงแผนภาพประกอบด้วย

ระบบควบคุมความเร็ว

หลักการเบื้องต้นของเครื่องบังคับความเร็วของเครื่องจักรของวัตต์ (Watt) สำหรับเครื่องยนต์สามารถแสดงได้ดังแผนภาพในรูปที่ 1.8



รูปที่ 1.8 ระบบควบคุมความเร็วของเครื่องยนต์

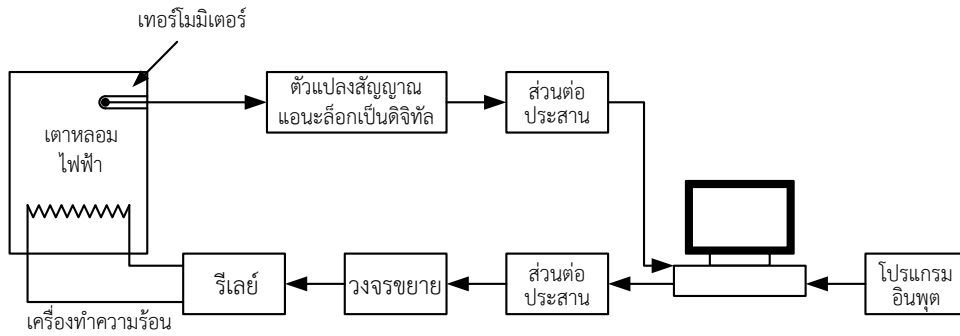
ที่มา: เอกสารการอบรมเรื่องระบบควบคุมแบบป้อนกลับ

จากรูปจะเห็นว่าปริมาณของเชื้อเพลิงที่ถูกปล่อยเข้าไปในเครื่องยนต์จะมีปริมาณที่เปลี่ยนแปลงไปขึ้นอยู่กับค่าความแตกต่างระหว่างค่าความเร็วของเครื่องยนต์ที่ต้องการกับค่าความเร็วของเครื่องยนต์จริง ๆ ในขณะนั้น ซึ่งกระบวนการทำงานจะเป็นดังนี้ การเปลี่ยนแปลงความเร็วของเครื่องยนต์จะมีความเร็วจะมีลักษณะดังนี้ ถ้าความเร็วของเครื่องยนต์มีค่าเท่ากับความเร็วที่ตั้งไว้จะทำให้ไม่มีน้ำมันไหลเข้าไปในกระบอกสูบ แต่ถ้าความเร็วของเครื่องยนต์ลดลงต่ำกว่าความเร็วที่ตั้งไว้จะเนื่องมาจากการรบกวนระบบเกิดขึ้น จะทำให้แรงหนีศูนย์กลางของเครื่องยนต์ความเร็วลดลงเป็นผลทำให้วาล์วควบคุมเคลื่อนที่ลดลงและทำให้การป้อนเชื้อเพลิงเพิ่มมากขึ้น และยังทำให้ค่าความเร็วของเครื่องยนต์เพิ่มขึ้นจนกระทั่งเข้าใกล้ค่าความเร็วที่ตั้งไว้ ในทางกลับกัน ถ้าความเร็วของเครื่องยนต์มีค่าเพิ่มขึ้นจนมากกว่าค่าความเร็วที่ตั้งไว้ จะทำให้แรงหนีศูนย์กลางของเครื่องยนต์ความเร็วเพิ่มขึ้นซึ่งเป็นเหตุให้วาล์วควบคุมเคลื่อนที่ขึ้น การที่วาล์วเคลื่อนที่ขึ้นเป็นผลทำให้การป้อนเชื้อเพลิงลดลงและทำให้ค่าความเร็วของเครื่องยนต์ลดลงจนกระทั่งเข้าใกล้ค่าความเร็วที่ตั้งไว้

สำหรับระบบควบคุมความเร็วที่กล่าวมานี้ เครื่องจักรหรือระบบที่ถูกควบคุม คือ เครื่องยนต์ และตัวแปรที่ถูกควบคุม คือ ความเร็วของเครื่องยนต์ ค่าความแตกต่างระหว่างค่าความเร็วที่ตั้งไว้กับค่าความเร็วของเครื่องยนต์จริง ๆ ขณะนั้น คือ ค่าผิดพลาด สัญญาณควบคุมหรือปริมาณของเชื้อเพลิงที่ถูกป้อนเข้าไปในเครื่องจักรคือสัญญาณกระตุ้น อินพุตจากภายนอกที่เข้ามารบกวนตัวแปรที่ถูกควบคุมคือสัญญาณรบกวน โดยในระบบนี้การเปลี่ยนแปลงของโหลด คือ สัญญาณรบกวนนั่นเอง

ระบบควบคุมอุณหภูมิ

ตัวอย่างของระบบควบคุมอุณหภูมิสามารถพิจารณาได้จากระบบควบคุมอุณหภูมิของเตาหลอมไฟฟ้า ดังแสดงในรูปที่ 1.9



รูปที่ 1.9 ระบบควบคุมอุณหภูมิของเตาหลอมไฟฟ้า

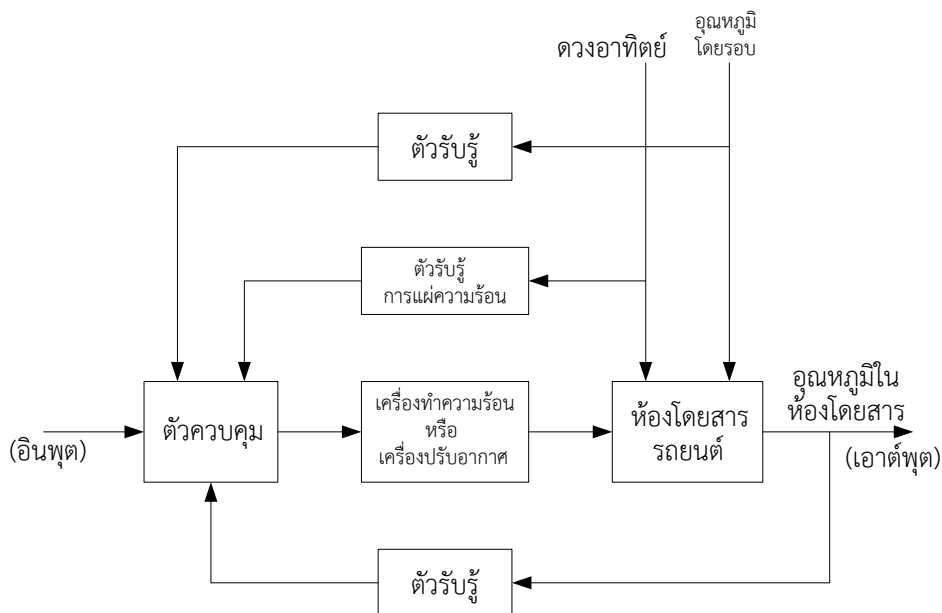
จากรูปที่ 1.9 จะเห็นว่าอุณหภูมิภายในเตาหลอมไฟฟ้าจะถูกวัดค่าจากเทอร์โมมิเตอร์ซึ่งเป็นอุปกรณ์แบบแอนะล็อก ค่าอุณหภูมิในรูปแบบแอนะล็อกจะถูกแปลงให้เป็นค่าอุณหภูมิในรูปแบบดิจิทัลโดยใช้อุปกรณ์ที่เรียกว่า ตัวแปลงสัญญาณแอนะล็อกเป็นสัญญาณดิจิทัล จากนั้นค่าอุณหภูมิในรูปแบบดิจิทัลจะถูกป้อนเข้าไปในตัวควบคุมผ่านทางส่วนต่อประสาน ค่าอุณหภูมิในรูปแบบดิจิทัลนี้จะนำไปเปรียบเทียบกับค่าอุณหภูมิอินพุตที่ถูกโปรแกรมเอาไว้ ถ้าค่าอุณหภูมิที่ถูกโปรแกรมไว้กับค่าอุณหภูมิที่รับเข้ามามีค่าต่างกันหรืออาจกล่าวได้ว่าเกิดค่าผิดพลาดขึ้น ตัวควบคุมจะส่งสัญญาณออกไปที่ตัวทำความร้อนผ่านทางส่วนต่อประสาน ตัวขยาย และรีเลย์ เพื่อให้อุณหภูมิภายในเตาหลอมเข้าใกล้ค่าอุณหภูมิที่ถูกต้อง

ในทำนองเดียวกัน พิจารณาการควบคุมอุณหภูมิของห้องโดยสารในรถยนต์ ค่าอุณหภูมิที่ต้องการ ซึ่งถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของแรงดันไฟฟ้าคืออินพุตของตัวควบคุม และอุณหภูมิที่เวลาปัจจุบันที่วัดได้ในห้องโดยสาร จะต้องถูกเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของแรงดันไฟฟ้าโดยใช้ตัวรับรู้และป้อนกลับไปยังตัวควบคุมเพื่อเปรียบเทียบกับค่าอินพุต

อีกหนึ่งตัวอย่างที่แสดงดังแผนภาพในรูปที่ 1.10 เป็นแผนภาพบล็อกของการควบคุมอุณหภูมิของห้องโดยสารในรถยนต์ สำหรับอากาศรอบ ๆ ห้องโดยสารรถยนต์และการแผ่รังสีความร้อนจากดวงอาทิตย์ซึ่งเป็นค่าที่เปลี่ยนแปลงตลอดเวลาเมื่อรถยนต์กำลังเคลื่อนที่ ปริมาณต่าง ๆ เหล่านี้จะถูกพิจารณาให้เป็นสิ่งรบกวนหรือสัญญาณรบกวนของระบบ อุณหภูมิของห้องโดยสารรถยนต์ที่แตกต่างกันนั้นขึ้นอยู่กับสถานที่ที่ทำการวัดอุณหภูมิ แต่แทนที่จะใช้ตัวรับรู้สำหรับวัดอุณหภูมิหลาย ๆ ตัวแล้วหาค่าเฉลี่ยนั้น วิธีการที่ประหยัดวิธีหนึ่งคือติดตั้งเครื่องเป่าลมตัวเล็ก ๆ ไว้ในที่ที่ผู้โดยสารสามารถรู้สึกถึงอุณหภูมิได้ ซึ่งอุณหภูมิของอากาศจากเครื่องเป่าลมจะเป็นสิ่งที่ชี้บอกถึง



ค่าอุณหภูมิของห้องโดยสารรถยนต์และถูกพิจารณาเป็นเอาต์พุตของระบบ



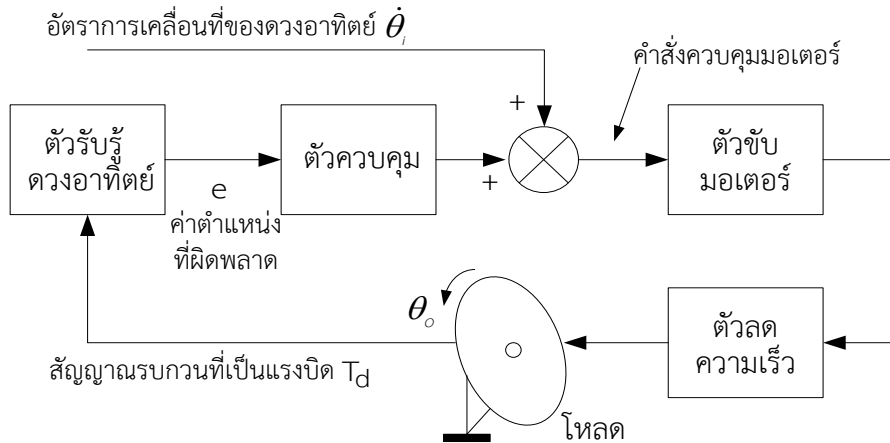
รูปที่ 1.10 การควบคุมอุณหภูมิในห้องโดยสารรถยนต์

ตัวควบคุมจะรับค่าสัญญาณอินพุต สัญญาณเอาต์พุต และสัญญาณจากแหล่งกำเนิดสัญญาณรบกวนต่าง ๆ ผ่านตัวรับรู้ นอกจากนี้ตัวควบคุมยังทำหน้าที่ส่งค่าสัญญาณควบคุมที่เหมาะสมที่สุดไปยังเครื่องปรับอากาศหรือเครื่องทำความร้อนเพื่อจะควบคุมปริมาณของอากาศเย็นและอากาศร้อนภายในห้องโดยสารเพื่อทำให้อุณหภูมิภายในห้องโดยสารมีค่าตามที่ต้องการ

การควบคุมการติดตามดวงอาทิตย์สำหรับตัวเก็บพลังงานแสงอาทิตย์

หนึ่งในลักษณะเฉพาะที่สำคัญที่สุดของตัวเก็บพลังงานแสงอาทิตย์คืองานของตัวเก็บพลังงานแสงอาทิตย์จะต้องติดตามตำแหน่งของดวงอาทิตย์ได้อย่างถูกต้องแม่นยำ ดังนั้นการเคลื่อนที่ของงานของตัวเก็บพลังงานแสงอาทิตย์จึงต้องถูกควบคุมโดยระบบควบคุมที่มีความซับซ้อนและมีประสิทธิภาพสูง แผนภาพบล็อกในรูปที่ 1.11 แสดงให้เห็นถึงระบบติดตามดวงอาทิตย์พร้อมด้วยส่วนประกอบที่สำคัญต่าง ๆ โดยหลักการพื้นฐานของระบบควบคุมคืออัตราการเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์ที่ถูกกำหนดค่าไว้ล่วงหน้าแล้วนั้นจะถูกปรับปรุงหรือปรับแต่งเพียงเล็กน้อยโดยใช้ค่าผิดพลาดของตำแหน่งจริง ๆ ที่วัดได้จากตัวรับรู้การเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์ โดยที่ตัวควบคุมจะต้องแน่ใจว่าตัวติดตามดวงอาทิตย์นั้นหันหน้าไปทางดวงอาทิตย์ในช่วงเวลาเช้าและส่งคำสั่งให้เริ่มติดตามออกไป ซึ่งตัวควบคุมยังคงคำนวณค่าอัตราการเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์เพื่อควบคุมการเคลื่อนที่ของงานในทั้ง 2 แกนอย่างต่อเนื่องตลอดทั้งวัน ซึ่งตัวควบคุม

จะใช้อัตราการเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์และตัวรับรู้การเคลื่อนที่ของดวงอาทิตย์เป็นอินพุตของระบบเพื่อส่งคำสั่งที่เหมาะสมไปยังมอเตอร์ให้มีการหมุนของตัวเก็บพลังงานแสงอาทิตย์ไปยังทิศทางที่เหมาะสมที่สุด



รูปที่ 1.11 ระบบควบคุมการติดตามดวงอาทิตย์

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ช่วยในการวิเคราะห์ระบบควบคุม

ต้องยอมรับว่าคอมพิวเตอร์ได้เข้ามามีบทบาทสำคัญในทุก ๆ สาขารวมถึงการออกแบบระบบควบคุมที่ทันสมัยด้วย ในอดีตที่ผ่านมาการออกแบบระบบควบคุมเป็นงานที่ต้องใช้ความอดทนและความพยายามอย่างสูง เครื่องมือหรือวิธีการที่ใช้ส่วนใหญ่คือการคำนวณด้วยมือหรืออย่างดีที่สุดก็จะเป็นการใช้การพิมพ์แบบพลาสติก ซึ่งทำให้กระบวนการในการออกแบบมีความล่าช้าและยังให้ผลลัพธ์ที่ไม่แม่นยำและถูกต้อง ดังนั้นคอมพิวเตอร์ที่มีเมนเฟรมขนาดใหญ่จึงถูกนำมาใช้ในการจำลองการออกแบบระบบ

โชคดีที่ทุกวันนี้มีคอมพิวเตอร์และซอฟต์แวร์ที่เข้ามาช่วยทำให้งานหนักและน่าเบื่อเหล่านั้นหายไปในคอมพิวเตอร์ในปัจจุบันสามารถวิเคราะห์ ออกแบบ และจำลองผลการออกแบบได้โดยใช้เพียงโปรแกรมเดียวเท่านั้น ซึ่งความสามารถในการจำลองผลการออกแบบได้อย่างรวดเร็วเช่นนี้เป็นผลทำให้การปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์และการทดสอบแบบจำลองนั้นง่ายและไวขึ้นและยังทำให้สามารถทดลองได้หลาย ๆ ครั้งและเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่ดีที่สุดในเวลาอันสั้น

แมตแล็บ (MATLAB)

แมตแล็บเป็นโปรแกรมที่ถูกนำเสนอขึ้นมาเพื่อเป็นตัวเลือกหนึ่งในการแก้ปัญหาการวิเคราะห์และการออกแบบระบบควบคุม โดยในโปรแกรมแมตแล็บจะมีกล่องเครื่องมือ (Toolbox) ให้เลือกใช้มากมายในทุกแขนงวิชา สำหรับระบบควบคุมก็จะมีกล่องเครื่องมือเฉพาะในแมตแล็บให้เลือกใช้งานเพื่อเรียกใช้งานคำสั่งได้เฉพาะเจาะจงสำหรับ



ระบบควบคุมเท่านั้น โดยในกล่องเครื่องมือของระบบควบคุมจะประกอบไปด้วย (1) ซิมูลิงก์ (Simulink) ซึ่งเป็นการใช้งานในลักษณะส่วนต่อประสานกราฟิกกับผู้ใช้ (GUI) (2) การใช้งานเกี่ยวกับระบบเชิงเส้นที่ไม่แปรผันตามเวลา (LTI Viewer) ซึ่งเป็นการวัดค่าสัญญาณโดยตรงจากผลตอบสนองในโดเมนของเวลาและโดเมนของความถี่ (3) เครื่องมือการออกแบบระบบแบบอินพุตเดียวเอาต์พุตเดียว (SISO Design Tool) เป็นเครื่องมือที่ช่วยเพิ่มความสะดวกสบายให้การออกแบบและการวิเคราะห์ระบบ และ (4) กล่องเครื่องมือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (Symbolic Math Toolbox) เป็นกล่องเครื่องมือที่ช่วยประหยัดเวลาในการคำนวณที่ต้องใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการวิเคราะห์และออกแบบ

แล็บวิว (LabVIEW)

แล็บวิวเป็นโปรแกรมที่ถูกรวบรวมเพื่อเป็นอีกทางเลือกหนึ่งนอกเหนือจากโปรแกรมแมตแล็บ ซึ่งแล็บวิวเป็นโปรแกรมที่ใช้การเขียนโปรแกรมในลักษณะของการใช้แผนภาพ โดยแผนภาพนี้จะถูกสร้างขึ้นบนแผงหน้า (front panel) ของเครื่องมือเสมือนในคอมพิวเตอร์ โดยแผนภาพนี้จะแสดงรูปภาพของส่วนอุปกรณ์ที่ใช้งานจริง เช่น เครื่องกำเนิดสัญญาณรูปคลื่น เครื่องออสซิลโลสโคป ซึ่งแผนภาพบนแผงหน้านี้นี้ก็คือแผนภาพบล็อกของระบบนั่นเอง ดังนั้นผู้ใช้งานโปรแกรมแล็บวิวจึงไม่จำเป็นต้องมีความรู้ในการเขียนรหัสคำสั่งก็ได้ และจากแผนภาพบนแผงหน้าของโปรแกรมยังแสดงให้เห็นถึงการทำงานของค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ในระบบอีกด้วย โปรแกรมแล็บวิวนี้ส่วนมากจะนำมาใช้ในด้านการวัดและเครื่องมือวัดในระบบควบคุมสำหรับงานทางวิศวกรรม ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ช่วยสร้างเครื่องมือวัดเสมือนจริงที่ใช้กันในห้องปฏิบัติการทางวิศวกรรม ทำให้การจัดการทางด้านการวัดและเครื่องมือวัดในระบบควบคุมมีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น ซึ่งข้อได้เปรียบสูงสุดของโปรแกรมแล็บวิวคือสามารถเปลี่ยนคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคลให้กลายเป็นเครื่องมือวัดในหลาย ๆ รูปแบบ ไม่ว่าจะเป็นออสซิลโลสโคป มัลติมิเตอร์ หรือเครื่องกำเนิดสัญญาณ อีกทั้งยังสามารถวิเคราะห์ ประมวลผล และแสดงผลข้อมูลได้อีกด้วย แต่ในตำราเล่มนี้จะไม่ได้กล่าวถึงการใช้โปรแกรมแล็บวิวในระบบควบคุม จะนำเสนอการใช้โปรแกรมแมตแล็บเท่านั้น

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

P1.1 จงบอกลักษณะการประยุกต์ใช้งานระบบควบคุมแบบป้อนกลับมาสอดตัวอย่าง

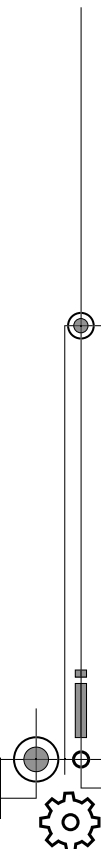
P1.2 จงบอกเหตุผลที่สำคัญสามประการในการใช้ระบบควบคุมแบบป้อนกลับและบอกเหตุผลหนึ่งประการที่จะไม่ใช้ระบบนี้

P1.3 จงยกตัวอย่างการทำงานที่ใช้ระบบวงเปิด

P1.4 ระบบควบคุมแบบวงเปิดมีการทำงานที่แตกต่างจากระบบวงปิดอย่างไร จงอธิบาย

P1.5 ผลตอบสนองของระบบแบ่งออกเป็นกี่ส่วน อะไรบ้าง

P1.6 จงบอกลักษณะทางกายภาพที่เกิดขึ้นถ้าระบบไม่มีเสถียรภาพ



บทที่ 2

คณิตศาสตร์พื้นฐาน สำหรับระบบควบคุมและฟังก์ชัน ถ่ายโอน

สิ่งหนึ่งที่สำคัญที่สุดในการวิเคราะห์และออกแบบระบบควบคุมคือแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบควบคุม งานของวิศวกรระบบควบคุมไม่ใช่เพียงแค่พิจารณาว่าจะอธิบายระบบอย่างไรให้ถูกต้องแม่นยำโดยใช้หลักการทางคณิตศาสตร์แต่ที่สำคัญกว่านั้นคือจะต้องพิจารณาด้วยว่าจะทำอะไรเพื่อให้ได้การประมาณค่าหรือสมมติฐานที่เหมาะสมเพื่อที่จะทำให้ระบบนั้นมีคุณลักษณะที่เหมือนจริงโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการศึกษาเกี่ยวกับระบบควบคุมนั้นต้องอาศัยคณิตศาสตร์ประยุกต์เป็นสำคัญ และหนึ่งในวัตถุประสงค์หลักของการศึกษาเกี่ยวกับระบบควบคุมคือเพื่อพัฒนาเครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์ระบบเพื่อให้ผู้ออกแบบสามารถออกแบบระบบได้อย่างน่าเชื่อถือและเป็นเหตุเป็นผลโดยไม่จำเป็นต้องทำการทดลองอย่างมากมายหรือไม่จำเป็นต้องใช้การจำลองทางคอมพิวเตอร์ที่ใหญ่โตมโหฬาร

ดังนั้นในบทนี้จะได้กล่าวถึงวิธีการแปลงลาปลาซตลอดจนทฤษฎีและการประยุกต์ใช้ ซึ่งการแปลงลาปลาซถือเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่เป็นประโยชน์และสามารถนำมาแก้ปัญหาในระบบควบคุมได้เป็นอย่างดี

ตัวแปรเชิงซ้อนและฟังก์ชันเชิงซ้อน

ก่อนที่จะกล่าวถึงการแปลงลาปลาซในหัวข้อถัดไปจำเป็นจะต้องทบทวนเรื่องของตัวแปรเชิงซ้อนและฟังก์ชันเชิงซ้อนเสียก่อน รวมไปถึงทฤษฎีบทของออยเลอร์ที่เป็นความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันไซน์ซายด์กับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential)



ตัวแปรเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนประกอบไปด้วยส่วนจริงและส่วนจินตภาพ โดยที่ทั้งสองเทอมนี้เป็นค่าคงที่ แต่ถ้าส่วนจริงหรือส่วนจินตภาพเป็นตัวแปร ปริมาณเชิงซ้อนนี้จะถูกเรียกว่าตัวแปรเชิงซ้อน ในวิธีการแปลงลาปลาซจะใช้สัญลักษณ์ s แทนตัวแปรเชิงซ้อน ซึ่งจะเขียนแสดงได้เป็น

$$s = \sigma + j\omega \quad (2.1)$$

โดยที่ σ แทนส่วนจริง และ ω แทนส่วนจินตภาพ

ฟังก์ชันเชิงซ้อน

ฟังก์ชันเชิงซ้อน $G(s)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร s

$$G(s) = G_x + jG_y \quad (2.2)$$

เมื่อ G_x และ G_y เป็นจำนวนจริง ขนาดของฟังก์ชันเชิงซ้อน $G(s)$ คือ $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ และค่ามุมเฟส θ ของฟังก์ชันเชิงซ้อน $G(s)$ คือ $\tan^{-1}(G_y/G_x)$ โดยที่ค่ามุมจะวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาจากแกนจริงทางด้านบวก และค่าสังยุคของฟังก์ชัน $G(s)$ คือ $\bar{G} = G_x - jG_y$

ฟังก์ชันเชิงซ้อน $G(s)$ อาจกล่าวได้ว่าเป็นฟังก์ชันที่สามารถวิเคราะห์ได้ภายในขอบเขตที่กำหนดถ้าค่า $G(s)$ และค่าอนุพันธ์ของมันมีจริงในขอบเขตนั้น ๆ โดยที่ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $G(s)$ หาได้จาก

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{G(s + \Delta s) - G(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta s} \quad (2.3)$$

เนื่องจากเทอม $\Delta s = \Delta\sigma + j\Delta\omega$ สามารถมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ในหลาย ๆ เส้นทางที่แตกต่างกัน ถ้าค่าอนุพันธ์ของ $G(s)$ ที่สามารถหาได้จากเส้นทางเฉพาะสองเส้นทางซึ่งคือ $\Delta s = \Delta\sigma$ และ $\Delta s = j\Delta\omega$ มีค่าเท่ากันดังนั้นจะทำให้ค่าอนุพันธ์ที่ได้มีค่าเฉพาะสำหรับเส้นทางใด ๆ และสามารถกล่าวได้ว่าค่าอนุพันธ์นั้นมีจริง

ถ้าให้ $\Delta s = \Delta \sigma$ ค่าอนุพันธ์ของ $G(s)$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta G_x}{\Delta \sigma} + j \frac{\Delta G_y}{\Delta \sigma} \right) = \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} \quad (2.4)$$

และถ้าให้ $\Delta s = j\Delta\omega$ ค่าอนุพันธ์ของ $G(s)$ จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{d}{ds} G(s) = \lim_{j\Delta\omega \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta G_x}{j\Delta\omega} + j \frac{\Delta G_y}{j\Delta\omega} \right) = -j \frac{\partial G_x}{\partial \omega} + \frac{\partial G_y}{\partial \omega} \quad (2.5)$$

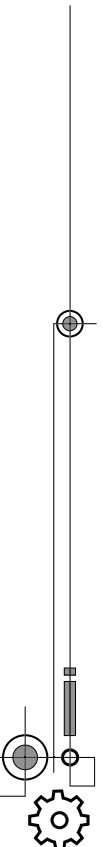
ถ้าค่าอนุพันธ์ในสมการที่ (2.4) กับ (2.5) มีค่าเท่ากัน จะได้ว่า

$$\frac{\partial G_x}{\partial \sigma} + j \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} = \frac{\partial G_y}{\partial \omega} - j \frac{\partial G_x}{\partial \omega} \quad (2.6)$$

จากสมการที่ (2.6) จะได้สมการเงื่อนไขสองสมการ คือ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_x}{\partial \sigma} &= \frac{\partial G_y}{\partial \omega} \\ \frac{\partial G_y}{\partial \sigma} &= -\frac{\partial G_x}{\partial \omega} \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

ถ้าเงื่อนไขในสมการที่ (2.7) เป็นจริง ดังนั้นค่าอนุพันธ์ $dG(s)/ds$ สามารถหาค่าได้ เงื่อนไขทั้งสองในสมการที่ (2.7) นี้ถูกเรียกว่าเงื่อนไขคอชี – รีมันน์ (Cauchy – Riemann) ซึ่งกล่าวไว้ว่า ถ้าเงื่อนไขทั้งสองนี้มีจริงดังนั้นฟังก์ชัน $G(s)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถวิเคราะห์ได้





ทฤษฎีบทของออยเลอร์ (Euler's Theorem)

การกระจายอนุกรมกำลังของ $\cos \theta$ และ $\sin \theta$ เขียนได้เป็น

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \\ \sin \theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

ดังนั้นจะได้

$$\cos \theta + j \sin \theta = 1 + (j\theta) + \frac{(j\theta)^2}{2!} + \frac{(j\theta)^3}{3!} + \frac{(j\theta)^4}{4!} + \dots \quad (2.9)$$

เนื่องจาก

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (2.10)$$

จากสมการที่ (2.9) และ (2.10) จะได้ความสัมพันธ์ที่ว่า

$$\cos \theta + j \sin \theta = e^{j\theta} \quad (2.11)$$

สมการที่ (2.11) เรียกว่า ทฤษฎีบทของออยเลอร์ จากทฤษฎีบทของออยเลอร์กล่าวว่าฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์สามารถแสดงได้ในรูปของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และ $e^{-j\theta}$ เป็นค่าสังยุคเชิงซ้อนของ $e^{j\theta}$ ซึ่งสามารถเขียนเป็นสมการได้เป็น

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (2.12)$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta \quad (2.13)$$

นำสมการ (2.12) และ (2.13) มาบวกและลบกันจะได้

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) \quad (2.14)$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta}) \quad (2.15)$$

การแปลงลาปลาซ (Laplace transform)

การแปลงลาปลาซเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่ใช้ในการแก้สมการอนุพันธ์เชิงเส้น เมื่อพิจารณาเปรียบเทียบกับวิธีการแก้สมการแบบดั้งเดิม วิธีการแปลงลาปลาซมีลักษณะเด่นอยู่ 2 ประการ คือ

1. สมการเอกพันธ์และอินทิกรัลเฉพาะของผลลัพธ์ของสมการอนุพันธ์สามารถหาค่าได้ในขั้นตอนเดียว
2. การแปลงลาปลาซจะเปลี่ยนสมการอนุพันธ์ให้เป็นสมการพีชคณิตที่อยู่ในเทอมของตัวแปร s จากนั้นจะดำเนินการแก้สมการพีชคณิตโดยใช้กฎพีชคณิตอย่างง่ายเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ในโดเมนของตัวแปร s และขั้นตอนสุดท้ายคือ ใช้การแปลงลาปลาซผกผันเพื่อให้ได้ผลลัพธ์สุดท้ายซึ่งเป็นผลลัพธ์ของสมการอนุพันธ์

นิยามของการแปลงลาปลาซ

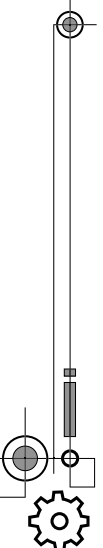
ก่อนจะกล่าวถึงนิยามของการแปลงลาปลาซ จะต้องรู้จักสัญลักษณ์ของตัวแปรต่าง ๆ ที่ใช้อธิบายในหัวข้อนี้ กำหนดให้

$f(t)$ คือ ฟังก์ชันของเวลา t ที่ซึ่ง $f(t) = 0$ สำหรับ $t < 0$

s คือ ตัวแปรเชิงซ้อน

$\mathcal{L}$ คือ สัญลักษณ์กระทำการที่ระบุว่าปริมาณใด ๆ ที่มีสัญลักษณ์นี้หน้าหน้าจะถูกแปลงโดยใช้อินทิกรัลลาปลาซ $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$

$F(s)$ คือ การแปลงลาปลาซของ $f(t)$





ดังนั้นการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ นิยามได้ว่า

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} [f(t)] e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (2.16)$$

นิยามในสมการ (2.16) เรียกว่าการแปลงลาปลาซแบบด้านเดียวเนื่องจากการหาปริพันธ์ถูกหาค่าในช่วง $t = 0$ ถึง $t = \infty$ ซึ่งหมายความว่าอย่างง่าย ๆ ก็คือ ข้อมูลใดที่อยู่ในฟังก์ชัน $f(t)$ ก่อนหน้าเวลา $t = 0$ จะไม่มีความหมายหรือถูกพิจารณาให้เท่ากับศูนย์ ข้อสันนิษฐานนี้ไม่ได้กำหนดข้อจำกัดใด ๆ สำหรับการประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซกับระบบเชิงเส้นเนื่องจากการศึกษาในโดเมนเวลาโดยปกติ เวลาอ้างอิงมักจะถูกเลือกให้เริ่มต้นที่ $t = 0$ ยิ่งไปกว่านั้นสำหรับระบบทางกายภาพทั่ว ๆ ไปเมื่ออินพุตถูกป้อนที่เวลา $t = 0$ ผลตอบสนองของระบบจะไม่เริ่มก่อนเวลา $t = 0$ นั้นหมายความว่า ผลตอบสนองของระบบจะไม่ถูกกระตุ้นให้แสดงผลออกมาก่อน ระบบที่ว่ามานี้จะถูกเรียกว่าคอสอล (Causal)

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนดให้ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันขั้นบันไดที่ถูกนิยามเป็น

$$f(t) = \begin{cases} u_s(t) = 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ หาได้จาก

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} u_s(t) e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \square$$

ตัวอย่างที่ 2.2 พิจารณาเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชัน Calibri (Body)

$$f(t) = e^{-at} \quad t \geq 0 \quad (2.18)$$

เมื่อค่า α เป็นจำนวนจริงคงที่ ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ เขียนได้เป็น

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = -\frac{e^{-(s+\alpha)t}}{s+\alpha} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+\alpha}$$

□

การแปลงลาปลาซผกผัน

กระบวนการย้อนกลับในการหาฟังก์ชันทางเวลา $f(t)$ จากฟังก์ชันการแปลงลาปลาซ $F(s)$ เรียกว่า การแปลงลาปลาซผกผัน (Inverse Laplace Transformation)

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad \text{for } t > 0 \quad (2.19)$$

เมื่อ c คือ จำนวนจริงคงที่และมักจะเลือกให้มีค่ามากกว่าค่าส่วนจริงของทุก ๆ จุดเอกฐานของฟังก์ชัน $F(s)$ การหาอินทิกรัลผกผันเป็นสิ่งที่ยุ่งยากและซับซ้อน ดังนั้นในทางปฏิบัติจะไม่นิยมใช้อินทิกรัลในการหาค่าฟังก์ชันทางเวลา $f(t)$ และสำหรับฟังก์ชันอย่างง่าย กระบวนการแปลงลาปลาซผกผันสามารถหาได้โดยง่ายโดยใช้ตารางการแปลงลาปลาซสำหรับฟังก์ชันที่ซับซ้อนมากขึ้น และการแปลงลาปลาซผกผันสามารถทำได้โดยใช้วิธีการกระจายเศษส่วนย่อยบางส่วน (Partial Fraction Expansion) ก่อน แล้วจากนั้นจึงใช้ตารางการแปลงลาปลาซ ซึ่งจะกล่าวถึงรายละเอียดในหัวข้อถัดไป

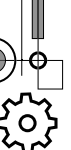
กฎปฏิบัติที่สำคัญของการแปลงลาปลาซ

การประยุกต์ใช้การแปลงลาปลาซสำหรับการแก้ปัญหาในหลาย ๆ กรณีนั้นจะถูกทำให้ง่ายและสะดวกรวดเร็วมากขึ้นโดยใช้คุณสมบัติของการแปลงลาปลาซ ซึ่งคุณสมบัติต่าง ๆ จะถูกอธิบายรายละเอียดอย่างคร่าว ๆ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

■ ทฤษฎีบทที่ 1 การคูณด้วยค่าคงที่

กำหนดให้ k เป็นค่าคงที่ใด ๆ และฟังก์ชัน $F(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\mathcal{L}[kf(t)] = kF(s) \quad (2.20)$$





■ ทฤษฎีบทที่ 2 ผลรวมและผลต่างของฟังก์ชัน

กำหนดให้ $F_1(s)$ และ $F_2(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f_1(t)$ และ $f_2(t)$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\mathcal{L} [f_1(t) \pm f_2(t)] = F_1(s) \pm F_2(s) \quad (2.21)$$

ถ้ากำหนดให้ m และ n เป็นค่าคงที่ใด ๆ และถ้านำทฤษฎีบทที่ 1 มาพิจารณาร่วมกับทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ผลการแปลงลาปลาซเป็น

$$\mathcal{L} [mf_1(t) \pm nf_2(t)] = mF_1(s) \pm nF_2(s) \quad (2.22)$$

■ ทฤษฎีบทที่ 3 การแปลงลาปลาซของค่าอนุพันธ์

กำหนดให้ $F(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ และ $f(0)$ เป็นค่าจำกัดของ $f(t)$ เมื่อ t เข้าใกล้ 0 ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์เวลาของฟังก์ชัน $f(t)$ คือ

$$\mathcal{L} \left[\frac{df(t)}{dt} \right] = sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = sF(s) - f(0) \quad (2.23)$$

สำหรับการหาอนุพันธ์อันดับสูงกว่าของฟังก์ชัน $f(t)$ ผลการแปลงลาปลาซในรูปแบบทั่วไปสามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{d^n f(t)}{dt^n} \right] &= s^n F(s) - \lim_{t \rightarrow 0} \left[s^{n-1} f(t) + s^{n-2} \frac{df(t)}{dt} + \dots + \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}} \right] \\ &= s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned} \quad (2.24)$$

เมื่อ $f^{(i)}(0)$ แทนค่าอนุพันธ์ลำดับที่ i เทียบกับ t เมื่อเวลา $t = 0$

■ ทฤษฎีบทที่ 4 การแปลงลาปลาซของค่าปริพันธ์

การแปลงลาปลาซของปริพันธ์อันดับที่หนึ่งของฟังก์ชัน $f(t)$ เมื่อเทียบกับเวลา t คือ ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ หารด้วยตัวแปร s นั่นคือ

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s} \quad (2.25)$$

สำหรับปริพันธ์อันดับที่สูงกว่า สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้เป็น

$$\mathcal{L} \left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_n} f(\tau) d\tau dt_1 dt_2 \cdots dt_{n-1} \right] = \frac{F(s)}{s^n} \quad (2.26)$$

■ ทฤษฎีบทที่ 5 การเลื่อนทางเวลา

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ ซึ่งถูกประวิงเวลาไปเป็นเวลา T จะเท่ากับผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ คูณด้วยเทอมของ e^{-Ts} นั่นคือ

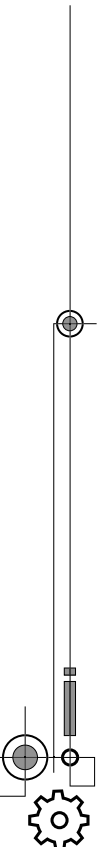
$$\mathcal{L} [f(t-T)u_s(t-T)] = e^{-Ts} F(s) \quad (2.27)$$

■ ทฤษฎีบทที่ 6 ทฤษฎีบทค่าเริ่มต้น

ถ้าผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ คือ $F(s)$ จะได้ว่า

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2.28)$$

ถ้าลิมิตมีอยู่จริง





■ ทฤษฎีบทที่ 7 ทฤษฎีบทค่าสุดท้าย

ถ้าผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ คือ $F(s)$ และถ้า $sF(s)$ เป็นฟังก์ชันที่สามารถวิเคราะห์ได้บนแกนจินตภาพและฝั่งขวามือของระนาบเชิงซ้อน s ดังนั้น

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (2.29)$$

ทฤษฎีบทค่าสุดท้ายมีประโยชน์ในการวิเคราะห์และการออกแบบระบบควบคุมเป็นอย่างมากเนื่องจากทฤษฎีบทนี้จะให้ค่าสุดท้ายของฟังก์ชันในทางเวลาโดยที่รู้ค่าผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่ $s = 0$ ทฤษฎีบทค่าสุดท้ายนี้จะมีผลใช้ได้ถ้า $sF(s)$ ประกอบไปด้วยโพลค่าใด ๆ ที่มีส่วนจริงเท่ากับศูนย์หรือมีค่าเป็นบวกซึ่งจะมีค่าเหมือนกับข้อกำหนดของฟังก์ชันที่สามารถวิเคราะห์ได้ของ $sF(s)$ ในฝั่งขวามือของระนาบเชิงซ้อน s ดังที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท

■ ทฤษฎีบทที่ 8 การเลื่อนในทางเชิงซ้อน

ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f(t)$ คูณกับเทอมของ $e^{\pm \alpha t}$ เมื่อ α คือ ค่าคงที่ จะเท่ากับผลการแปลงลาปลาซของ $F(s)$ โดยที่ตัวแปร s ถูกแทนที่ด้วยเทอมของ $s \pm \alpha$ ดังนั้นจะได้

$$\mathcal{L} [e^{\pm \alpha t} f(t)] = F(s \pm \alpha) \quad (2.30)$$

■ ทฤษฎีบทที่ 9 การคูณในทางเชิงซ้อนหรือสังวัตนาการทางจำนวนจริง (Real Convolution) กำหนดให้ $F_1(s)$

และ $F_2(s)$ เป็นผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $f_1(t)$ กับ $f_2(t)$ ตามลำดับ และ $f_1(t) = 0, f_2(t) = 0$ สำหรับค่า $t < 0$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L} [f_1(t) * f_2(t)] \quad (2.31)$$

เมื่อ $\mathcal{L}$ สัญลักษณ์กระทำการทางลาปลาซ และสัญลักษณ์ $*$ แสดงถึงสังวัตนาการ (Convolution) ในทางโดเมนเวลา

สมการ (2.31) แสดงให้เห็นถึงการคูณกันของฟังก์ชันการแปลงลาปลาซสองฟังก์ชันในทางโดเมนเชิงซ้อน s ซึ่งจะเท่ากับการสังวัตนาการของสองฟังก์ชันในทางโดเมนเวลาที่สมนัยกัน สิ่งสำคัญที่ควรจำไว้คือผลการแปลงลาปลาซผกผันของการคูณกันของสองฟังก์ชันในทางโดเมนเชิงซ้อนจะ**ไม่เท่า**กับการคูณกันของฟังก์ชันที่สมนัยกันในทางโดเมนเวลากล่าว คือ

$$\mathcal{L}^{-1} [F_1(s)F_2(s)] \neq f_1(t)f_2(t) \quad (2.32)$$

แต่ยังมีความสัมพันธ์ที่เป็นคู่กันกับทฤษฎีสังวัตนาการทางจำนวนจริงที่เรียกว่าสังวัตนาการทางเชิงซ้อนหรือการคูณในทางจำนวนจริง โดยที่ทฤษฎีบทนี้กล่าวว่าการคูณกันในทางโดเมนเวลาเทียบเท่ากับสังวัตนาการในทางโดเมนเชิงซ้อนซึ่งสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\mathcal{L} [f_1(t)f_2(t)] = F_1(s) * F_2(s) \quad (2.33)$$

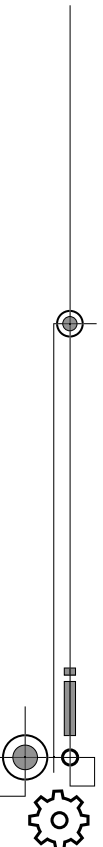


การแปลงลาปลาซผกผันโดยใช้วิธีการกระจายเศษส่วนย่อยบางส่วน

ปัญหาที่สำคัญสำหรับระบบควบคุมคือการหาค่าผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยใช้การหาปริพันธ์ดังในสมการ (2.19) นั้นในบางครั้งไม่สามารถเชื่อถือได้ แต่การดำเนินการแปลงลาปลาซแบบผกผันที่ซึ่งมักจะเกี่ยวพันกับฟังก์ชันตรรกะนั้นสามารถหาได้โดยใช้ตารางการแปลงลาปลาซและวิธีการกระจายเศษส่วนย่อยบางส่วน ซึ่งทั้งสองวิธีนี้สามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยได้

สำหรับการหาการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันที่ยุ่ยากและซับซ้อนมาก ๆ นั้นวิธีการที่ง่ายที่สุดคือจะต้องจัดเรียงฟังก์ชันใหม่ให้อยู่ในรูปของผลบวกของเทอมที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันอย่างง่ายที่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผันได้โดยใช้ตารางการแปลงลาปลาซ พิจารณาผลลัพธ์ของการแปลงลาปลาซของสมการอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันตรรกยะในเทอมของตัวแปร s ซึ่งแสดงได้ดังสมการ

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \quad (2.34)$$





ที่ซึ่ง $P(s)$ และ $Q(s)$ เป็นสมการพหุนามของตัวแปร s ถ้าอันดับของสมการพหุนาม $P(s)$ มีค่าสูงกว่าอันดับของสมการพหุนาม $Q(s)$ ดังนั้นจะสามารถใช้วิธีการขยายเศษส่วนย่อยบางส่วนได้ ซึ่งสมการพหุนาม $P(s)$ สามารถเขียนแสดงเป็นสมการได้เป็น

$$P(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (2.35)$$

ที่ซึ่ง $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ เป็นสัมประสิทธิ์ที่เป็นจำนวนจริง วิธีการกระจายเศษส่วนย่อยบางส่วนจะแบ่งออกได้เป็น 3 กรณี โดยพิจารณาจากลักษณะของโพลของ $G(s)$ ซึ่งก็คือคำตอบของสมการพหุนาม $P(s)$ นั้นเอง

จากที่กล่าวมาแล้วว่าการใช้วิธีการกระจายเศษส่วนย่อยบางส่วนนั้น อันดับของสมการพหุนามทางด้านเศษของ $G(s)$ จะต้องมีค่าน้อยกว่าหรือต่ำกว่าอันดับของสมการพหุนามทางด้านส่วน พิจารณาสมการที่ (2.34) ถ้าอันดับของสมการพหุนาม $Q(s)$ มีค่าสูงกว่าอันดับของสมการพหุนาม $P(s)$ จะต้องนำพหุนาม $Q(s)$ หารด้วยพหุนาม $P(s)$ ก่อนจนกระทั่งได้ผลลัพธ์สุดท้ายที่เหลือในเทอมของเศษส่วนที่มีอันดับทางด้านเศษน้อยกว่าทางด้านส่วน ยกตัวอย่างเช่น

$$F_1(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5} \quad (2.36)$$

จากสมการที่ (2.36) จะเห็นว่าพหุนามทางด้านเศษมีอันดับที่สูงกว่าพหุนามทางด้านส่วน เพราะฉะนั้นจะต้องนำพหุนามทางด้านเศษหารด้วยพหุนามทางด้านส่วนจนกระทั่งได้ผลลัพธ์ที่เหลือเป็นเศษส่วนที่มีอันดับทางด้านเศษน้อยกว่าทางด้านส่วน ดังนั้นจะได้ผลลัพธ์จากการหารเป็น

$$F_1(s) = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5} \quad (2.37)$$

ใช้การแปลงลาปลาซผกผันจะได้ฟังก์ชัน $f_1(t)$ เป็นฟังก์ชันทางโดเมนเวลาดังนี้

$$f_1(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) + L^{-1}\left[\frac{2}{s^2 + s + 5}\right] \quad (2.38)$$

ใช้วิธีการกระจายเศษส่วนย่อยบางส่วนกระจายฟังก์ชัน $F(s) = 2/(s^2+s+5)$ ซึ่งคือ เทอมสุดท้ายของสมการ (2.38) ให้อยู่ในรูปของผลบวกของเทอมย่อย ๆ และจากนั้นก็ใช้การแปลงลาปลาซผกผันกับทุก ๆ เทอม เพื่อให้ได้ฟังก์ชันในทางโดเมนเวลา ซึ่งในที่นี้จะแบ่งการพิจารณาออกเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1 คำตอบของสมการทางด้านส่วนของ $F(s)$ เป็นจำนวนจริงและมีค่าเฉพาะไม่ซ้ำกัน

ตัวอย่างของฟังก์ชัน $F(s)$ ที่มีคำตอบของสมการพหุนามทางด้านส่วนเป็นจำนวนจริงที่มีค่าเฉพาะไม่ซ้ำกันคือ

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} \quad (2.39)$$

จากสมการ (2.39) จะเห็นว่ารากของสมการพหุนามทางด้านส่วนเป็นจำนวนจริงที่มีค่าเฉพาะไม่ซ้ำกัน คือ -1 และ -2 ดังนั้นวิธีการกระจายเศษส่วนย่อยบางส่วน คือ เขียนสมการพหุนาม $F(s)$ ให้อยู่ในรูปของผลรวมของแต่ละเทอม โดยที่แต่ละตัวประกอบทางด้านส่วนของสมการต้นฉบับจะถูกนำมาเป็นพหุนามด้านส่วนของแต่ละเทอม และมีค่าคงที่อยู่ที่ด้านเศษของแต่ละเทอม ค่าคงที่นี้จะถูกเรียกว่าเรซิดิว (Residue) ดังนั้นฟังก์ชัน $F(s)$ ในสมการที่ (2.39) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปการกระจายเศษส่วนย่อยบางส่วนได้เป็น

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)} \quad (2.40)$$

ในการหาค่าเรซิดิว K_1 ทำได้โดยการคูณสมการ (2.40) ด้วยตัวประกอบ $(s+1)$ ตลอดทั้งสมการ ซึ่งจะทำให้ได้ค่าเรซิดิว K_1 แยกเป็นตัวแปรเดี่ยว ๆ ดังสมการต่อไปนี้

$$\frac{2}{(s+2)} = K_1 + \frac{K_2(s+1)}{(s+2)} \quad (2.41)$$

จากนั้นกำหนดให้ s เข้าใกล้ -1 ทำให้เทอมสุดท้ายของสมการที่ (2.41) หายไปและทำให้ได้ค่า $K_1 = 2$ และในทำนองเดียวกันการหาค่าเรซิดิว K_2 ก็ใช้วิธีการเดียวกันโดยทำการคูณสมการ (2.40) ด้วยตัวประกอบ $(s+2)$ และกำหนดให้ s เข้าใกล้ -2 จะได้ค่าเรซิดิว $K_2 = -2$

