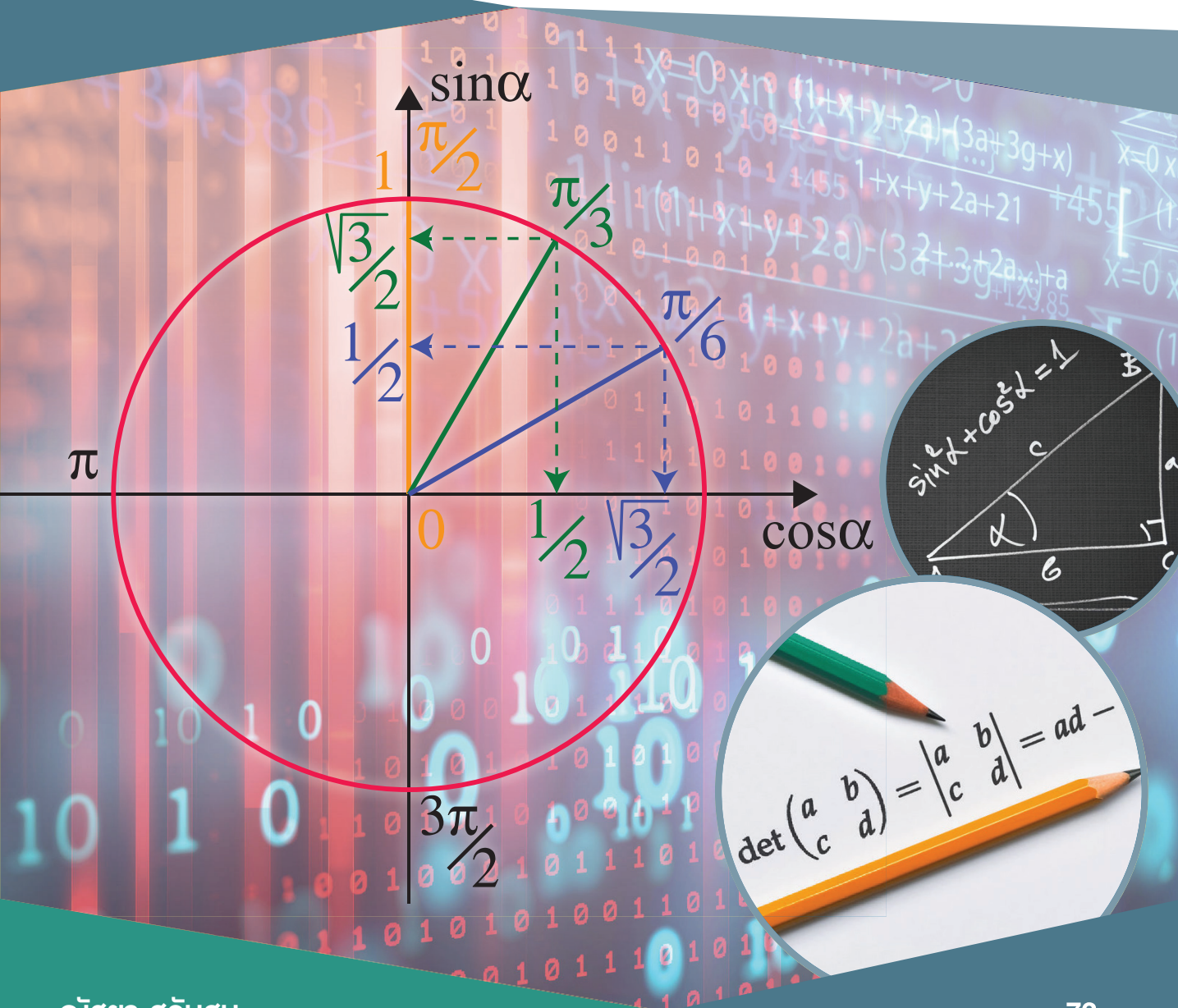


คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม (Mathematics for Industry)

หนังสือเล่มนี้เรียบเรียงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชา

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562

ของสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ



 **IMAC**EDUCATION

คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม 20000-1402

หมวดวิชาสมรรถนะแกนกลาง

กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562

ดร.ณัฐยา สลับสม

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
ณัฐยา สลับสม.

คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม (20000-1402).-- กรุงเทพฯ : แม็คเอดูเคชั่น, 2565.
264 หน้า.

1. คณิตศาสตร์ -- การศึกษาและการสอน. I. ชื่อเรื่อง.

516.24

ISBN 978-616-345-248-1

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

MAC EDUCATION

ผู้เขียน : ดร.ณัฐยา สลับสม

ผู้ทรงคุณวุฒิ : รศ. ดร.อุษาพร เสวกวิ

การสั่งซื้อ : ส่งธนาคติส่งจ่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว ในนาม บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด
เลขที่ 9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว แขวงจันทระเกษม
เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

☎ : 0-2938-2022-7 FAX : 0-2938-2028

www.MACeducation.com

พิมพ์ครั้งที่ : 1

จำนวนที่พิมพ์ : 5,000 เล่ม

ราคาจำหน่าย : 73 บาท

ปีที่พิมพ์ : 2565

พิมพ์ที่ : หจก. ซีแอนด์เอ็น บัค

(สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนั้นนอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร)

คำนำ

ตามที่กระทรวงศึกษาธิการได้ประกาศใช้หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562 เพื่อมุ่งผลิตและพัฒนากำลังคนระดับฝีมือให้มีสมรรถนะ มีคุณธรรมจริยธรรม และจรรยาบรรณวิชาชีพ สามารถประกอบอาชีพอิสระเป็นผู้ประกอบการที่มีคุณภาพ หรือประกอบอาชีพอื่น ๆ ได้ตรงตามความต้องการของสถานประกอบการทั้งในประเทศและภูมิภาคอาเซียน

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด ผู้ผลิตและจำหน่ายหนังสือเรียน สื่อการเรียนรู้ และวารสารทางการศึกษา ทั้งในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน ระดับอาชีวศึกษา ตระหนักถึงภารกิจสำคัญในการมีส่วนร่วมในการสนับสนุน ส่งเสริมการศึกษาระดับอาชีวศึกษาให้บรรลุผลสมดังเจตนารมณ์ที่ตั้งไว้ จึงได้แต่งตั้งคณะทำงาน ซึ่งประกอบด้วยนักวิชาการและผู้สอนทั้งในระดับอาชีวศึกษาและระดับอุดมศึกษาที่มีความเชี่ยวชาญ ด้านหลักสูตรและการจัดการเรียนรู้ ดำเนินการวิเคราะห์หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562 ในแต่ละสาขาวิชาเพื่อจัดทำสื่อการเรียนรู้ อันประกอบด้วย

1. หนังสือเรียนที่จัดทำให้ตรงกับจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชา ทั้งนี้โดยคำนึงถึงสอดคล้องกับมาตรฐานการศึกษาวิชาชีพทั้ง 3 ด้าน คือ ด้านคุณธรรม จริยธรรมและคุณลักษณะที่พึงประสงค์ ด้านสมรรถนะแกนกลาง และด้านสมรรถนะวิชาชีพ

2. แผนการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นการพัฒนาสมรรถนะของผู้เรียนผ่านกิจกรรมการเรียนรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อเป็นแนวทางให้ผู้สอนนำไปปรับให้เหมาะสมกับธรรมชาติของผู้เรียนและจุดเน้นของสถานศึกษา

จุดเด่นของหนังสือเรียนชุดใหม่ มีดังนี้

1. นำเสนอในรูปแบบหน่วยการเรียนรู้ ที่เนื้อหาเหมาะสมต่อการเรียนรู้ แต่ยังคงไว้ซึ่งความเข้มข้น และทันสมัย ทั้งนี้เนื้อหาในหนังสือเรียนมุ่งเน้นให้สัมพันธ์กับจุดประสงค์การเรียนรู้ หลักการเรียนรู้ตามสภาพจริง (Authentic Learning) และการประเมินผลตามสภาพจริง (Authentic Assessment)

2. แทรกกิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ กิจกรรมการฝึกกระบวนการคิด (Thinking Skills) และกิจกรรมบูรณาการให้แก่ผู้เรียน

3. พัฒนาสมรรถนะแกนกลางและสมรรถนะวิชาชีพผ่านกระบวนการปฏิบัติงานโดยใช้ใบช่วยสอน เป็นสื่อสำหรับการฝึกกระบวนการเรียนรู้ที่สำคัญ เช่น การเรียนรู้จากโครงการ (Project-based Learning)

4. มีแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยจัดทำแบบทดสอบให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยการเรียนนั้นๆ ท้ายหน่วยการเรียนรู้ทุกหน่วย

บริษัท แม็คเอดดูเคชั่น จำกัด ขอขอบคุณสถานศึกษา ครู คณาจารย์ ผู้สอน ผู้เรียน และผู้ที่สนใจทุกท่านที่ให้ความไว้วางใจในสื่อการเรียนรู้ของบริษัท บริษัทหวังเป็นอย่างยิ่งว่าสื่อการเรียนรู้ชุดนี้จะมีส่วนช่วยให้การจัดการเรียนรู้มีประสิทธิภาพและประสิทธิผล เพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีคุณภาพทัดเทียมระดับสากลต่อไป

บริษัท แม็คเอดดูเคชั่น จำกัด

รหัส 20000-1402

วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

ทฤษฎี 2 ชั่วโมง ปฏิบัติ - ชั่วโมง 2 หน่วยกิต

จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

1. รู้และเข้าใจเกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม
2. มีทักษะกระบวนการคิดและแก้ปัญหาเกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และนำไปประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ
3. มีเจตคติและกิจนิสัยที่ดีในการคิด วิเคราะห์ แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ อย่างเป็นระบบ และมีความละเอียดรอบคอบในการปฏิบัติงาน

สมรรถนะรายวิชา

1. คำนวณระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่กำหนด
2. แก้ปัญหาการวัดโดยใช้ความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ
3. ประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร
4. ประยุกต์ความรู้เกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสามไปใช้ในงานอาชีพ

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาและฝึกทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับมุมและการวัดมุม อัตราส่วนตรีโกณมิติ ตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย กฎของไซน์ กฎของโคไซน์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ไม่เกินอันดับสาม และประยุกต์ใช้ดีเทอร์มิแนนต์หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นไม่เกินสามตัวแปร และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพด้านอุตสาหกรรม

ตารางวิเคราะห์สมรรถนะประจำหน่วย

หน่วยการเรียนรู้ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สมรรถนะประจำหน่วย
1	อัตราส่วนตรีโกณมิติ	แสดงความรู้เกี่ยวกับการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติแก้ปัญหาโจทย์
2	ฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย	แสดงความรู้เกี่ยวกับการหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมโดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วย
3	การประยุกต์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ	แสดงความรู้เกี่ยวกับการคาดคะเนระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ กฎของไซน์และกฎของโคไซน์
4	เมทริกซ์	แสดงความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ในการแก้ปัญหา
5	ดีเทอร์มิแนนต์	แสดงความรู้เกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดไม่เกินอันดับสาม
6	การประยุกต์เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์แก้ระบบสมการเชิงเส้น	แสดงความรู้เกี่ยวกับการประยุกต์เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์หาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

สารบัญ

	หน้า
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 อัตราส่วนตรีโกณมิติ	1
1. การวัดมุมและหน่วยของมุม	2
2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส	11
3. อัตราส่วนตรีโกณมิติ	18
4. อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°	27
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	35
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของวงกลมหนึ่งหน่วย	38
1. วงกลมหนึ่งหน่วย	39
2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงและของมุม	40
3. ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°	49
4. ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมในจุดภาคต่าง ๆ	58
5. การหาค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยใช้ตาราง	73
6. การเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์	79
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	86
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 การประยุกต์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ	89
1. มุมเงยและมุมก้ม	90
2. การคาดคะเนระยะทางและความสูงโดยใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ	91
3. กฎของไซน์และกฎของโคไซน์	97
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	110
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เมทริกซ์	113
1. ความหมายและสัญลักษณ์ของเมทริกซ์	114
2. ชนิดของเมทริกซ์	118
3. การเท่ากันของเมทริกซ์	124

	หน้า
4. การบวกและการคูณเมทริกซ์	126
5. เมทริกซ์สลับเปลี่ยน	148
6. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์	153
7. การนำเมทริกซ์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันและในงานอาชีพ	162
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	172
หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 ดีเทอร์มิแนนต์	176
1. สัญลักษณ์ของดีเทอร์มิแนนต์	177
2. การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดไม่เกินอันดับสาม	177
3. ไมเนอร์และโคแฟกเตอร์	184
4. การหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์จัตุรัสโดยการกระจายโคแฟกเตอร์	188
5. สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์	194
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	206
หน่วยการเรียนรู้ที่ 6 การประยุกต์เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์แก้ระบบสมการเชิงเส้น	209
1. ระบบสมการเชิงเส้น	210
2. การแปลงระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปเมทริกซ์	212
3. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรโดยใช้อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์	213
4. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์	218
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	235
บรรณานุกรม	238
ภาคผนวก	239

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

สาระการเรียนรู้

1. การวัดมุมและหน่วยของมุม
2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส
3. อัตราส่วนตรีโกณมิติ
4. อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

อัตราส่วน ตรีโกณมิติ

สมรรถนะประจำหน่วย

แสดงความรู้เกี่ยวกับการใช้อัตราส่วนตรีโกณมิติ
แก้ปัญหาโจทย์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาค่ามุมในตำแหน่งมาตรฐานและเปลี่ยนหน่วยของการวัดมุมได้
2. หาความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้ โดยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้
3. หาค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กำหนดให้โดยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้
4. แก้ปัญหาโจทย์อัตราส่วนตรีโกณมิติโดยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้
5. แก้ปัญหาโจทย์อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° โดยใช้สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

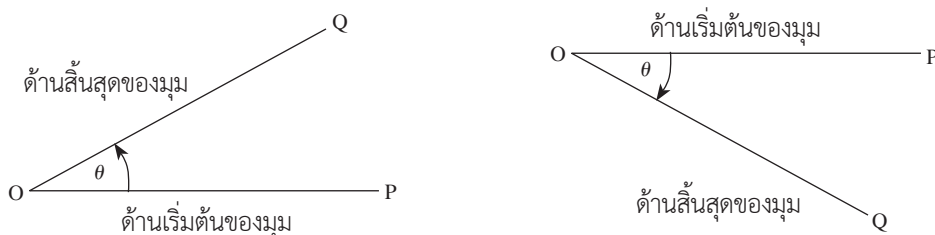
ตรีโกณมิติเป็นวิชาที่ก่อกำเนิดในยุคต้นศตวรรษที่สองก่อนคริสต์ศักราช ซึ่งยูโดซัส (Eudoxus) ได้ใช้อัตราส่วนและการวัดมุมในการหาขนาดของโลกและระยะทางสัมพัทธ์ระหว่างดวงอาทิตย์และดวงจันทร์ และเมื่อ 546-640 ปีก่อนคริสต์ศักราช ทาเลส (Thales) คำนวณหาความสูงของพีระมิดในประเทศอียิปต์โดยอาศัยเงา ซึ่งเขาได้คำนวณความสูงของพีระมิดจากความยาวของเงาของพีระมิด โดยวิเคราะห์จากเงาของเขาคือมีความยาวเท่ากับความสูงของเขาเอง และอีกวิธีหนึ่งที่ทาเลสใช้ในการคำนวณความสูงของพีระมิด คือ การเปรียบเทียบความยาวของเงาของพีระมิดกับความยาวของเงาของไม้ (ไม้ที่ทราบความยาว ถ้าสมมุติไม้คือไม้เมตรนั่นเอง) โดยอาศัยรูปสามเหลี่ยมคล้าย ซึ่งก็คือ อัตราส่วนตรีโกณมิติที่เรียกว่า แทนเจนต์ (Tangent) นั่นเอง

ตรีโกณมิติ (Trigonometry) คือ คณิตศาสตร์แขนงหนึ่งที่ว่าด้วยการวัดรูปสามเหลี่ยมต่าง ๆ โดยหาความสัมพันธ์ระหว่างด้าน มุม และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีความสำคัญต่อวิชาดาราศาสตร์ การเดินเรือ ใช้ในดาวเทียมนำทางไม่ว่าจะเป็นการนำทางในมหาสมุทร บนเครื่องบิน ในอวกาศ งานสำรวจใช้ในการคำนวณส่วนสูงของภูเขา และหาความกว้างของแม่น้ำ เป็นต้น

1. การวัดมุมและหน่วยของมุม

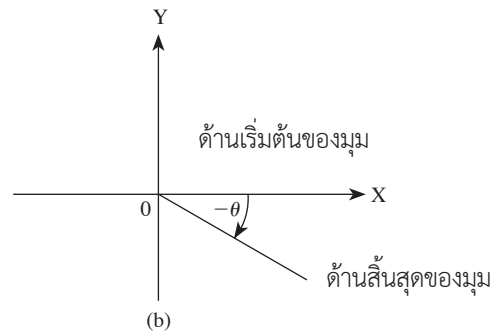
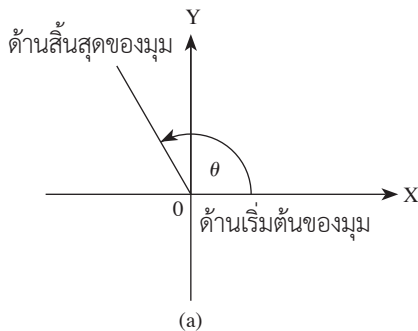
1.1 การวัดมุม

1.1.1 มุม (Angle)



กำหนดส่วนของเส้นตรง OP ดังรูป ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรง OP โดยให้จุด O เป็นจุดหมุน และหมุนไปอยู่ในแนวส่วนของเส้นตรง OQ จะเกิดมุมขึ้นที่จุด O และจะเรียกจุด O ว่า จุดยอดมุม (Vertex) เรียกส่วนของเส้นตรง OP ว่า ด้านเริ่มต้น (Initial Side) ของมุม และส่วนของเส้นตรง OQ ว่า ด้านสิ้นสุด (Terminal Side) ของมุม ดังนั้น มุมจึงเกิดจากส่วนของเส้นตรงสองเส้นพบกันที่จุดจุดหนึ่ง

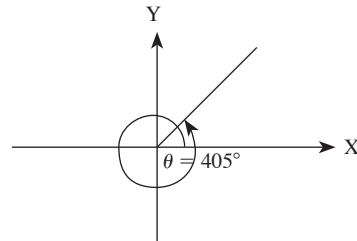
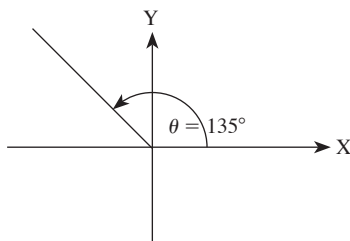
1.1.2 มุมในตำแหน่งมาตรฐาน



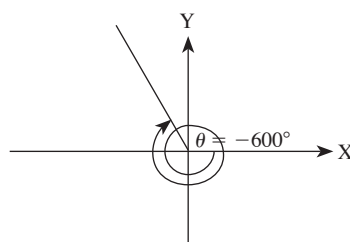
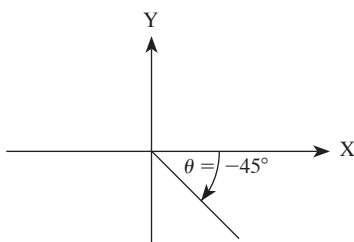
จากรูป ถ้าวางมุมลงบนระบบพิกัดฉาก XY ได้พอดี โดยให้จุดกำเนิดเป็นจุดยอดมุม และด้านเริ่มต้นของมุมซ้อนทับบนแกน X ทางด้านบวก จะเรียกมุมในระนาบ XY ว่า มุมในตำแหน่งมาตรฐาน (Standard Position)

มุมในตำแหน่งมาตรฐาน (Standard Position) คือ มุมที่ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งวางทาบไปตามแกน X ทางด้านบวก โดยจุดยอดมุมอยู่ที่จุดกำเนิด และจากรูป จะพบว่า การวัดมุมในตำแหน่งมาตรฐานซึ่งเป็นการวัดมุมจากด้านเริ่มต้นไปยังด้านสิ้นสุดของมุมเกิดขึ้นได้ 2 ลักษณะ คือ การวัดมุมที่เป็นบวกและการวัดมุมที่เป็นลบ

1) การวัดมุมในทิศทวนเข็มนาฬิกา คือ การวัดมุมจากด้านเริ่มต้นของมุมไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา จนถึงด้านสิ้นสุดของมุม ซึ่งการวัดมุมแบบนี้ ค่าของมุมจะมีค่าเป็นบวก (Positive Angles) ดังรูป

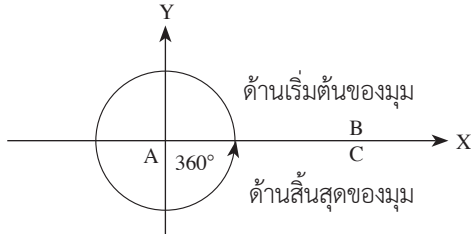


2) การวัดมุมในทิศตามเข็มนาฬิกา คือ การวัดมุมจากด้านเริ่มต้นของมุมไปในทิศตามเข็มนาฬิกา จนถึงด้านสิ้นสุดของมุม ซึ่งการวัดมุมแบบนี้ ค่าของมุมจะมีค่าเป็นลบ (Negative Angles) ดังรูป



1.2 หน่วยในการวัดมุม หน่วยที่นิยมใช้ในการวัดมุมมี 2 หน่วย คือ หน่วยองศาและหน่วยเรเดียน

1.2.1 การวัดมุมในหน่วยองศา องศา (Degree) หรือเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า รัศมีของส่วนโค้ง (Degree of Arc) คือ หน่วยในการวัดมุมชนิดหนึ่งบนระนาบสองมิติ ถ้าหมุนส่วนของเส้นตรงจากด้านเริ่มต้นของมุมไปจนครบหนึ่งรอบ มุมที่ได้จะมีขนาด 360 องศา (360°)



ถ้าแบ่งมุม 1 รอบ ออกเป็น 360 ส่วนย่อยเท่า ๆ กัน จะได้มุมย่อยที่มีขนาด 1°

ดังนั้น มุม 1° มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{360}$ เท่าของมุม 1 รอบ

มุม θ° มีค่าเท่ากับ $\frac{\theta}{360}$ เท่าของมุม 1 รอบ

ให้เติมคำตอบลงในช่องว่างต่อไปนี้ให้สมบูรณ์และถูกต้อง

ถ้ากำหนดให้มุม θ° มีค่าเท่ากับ $\frac{\theta}{360}$ เท่าของมุม 1 รอบ

ถ้ามุม 30° เท่ากับ $\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$ เท่าของมุม 1 รอบ

ถ้ามุม 45° เท่ากับ = เท่าของมุม 1 รอบ

ถ้ามุม 60° เท่ากับ = เท่าของมุม 1 รอบ

ถ้ามุม 90° เท่ากับ = เท่าของมุม 1 รอบ

ถ้ามุม 120° เท่ากับ = เท่าของมุม 1 รอบ

ถ้ามุม 180° เท่ากับ = เท่าของมุม 1 รอบ

ถ้ามุม 270° เท่ากับ = เท่าของมุม 1 รอบ

ถ้ามุม 360° เท่ากับ = เท่าของมุม 1 รอบ

จะเห็นว่า มุม 30° มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{12}$ เท่าของมุม 1 รอบ นั้นหมายความว่า เมื่อนำวงกลมมาแบ่งออกเป็น 12 ส่วนเท่า ๆ กัน จะได้วงกลม 1 ส่วน มีค่าเท่ากับ 30°

และจากมุม θ° มีค่าเท่ากับ $\frac{\theta}{360}$ เท่าของมุม 1 รอบ

ในทางกลับกัน ถ้าหมุน 1 รอบ จะได้มุมเท่ากับ 360°

ดังนั้น ถ้ามีการหมุน $\frac{1}{n}$ รอบ จะได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{n}$

ตัวอย่างของมุมที่ได้จากการหมุนรอบจุดศูนย์กลาง เช่น $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ และ $\frac{1}{6}$ รอบ จะได้มุมในหน่วยองศา ดังนี้

ถ้าหมุน $\frac{1}{2}$ รอบ จะได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$

ถ้าหมุน $\frac{1}{3}$ รอบ จะได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

ถ้าหมุน $\frac{1}{4}$ รอบ จะได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

ถ้าหมุน $\frac{1}{6}$ รอบ จะได้มุมเท่ากับ $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$

สำหรับในวิชาดาราศาสตร์หรือการระบุพิกัดเป็นละติจูดและลองจิจูดบนพื้นโลก ก็สามารถเขียนหน่วยองศาให้เป็นเลขทศนิยมได้ และการวัดมุมในหน่วยองศาที่เป็นเลขทศนิยมก็สามารถแบ่งเป็นหน่วยที่ย่อยเล็กลงไปได้อีก เช่น หน่วยลิปดา ใช้สัญลักษณ์เป็น “'” และหน่วยฟิลิปดา ใช้สัญลักษณ์เป็น “”” ดังนี้

นั่นคือ ถ้าแบ่งมุม 1 องศา ออกเป็นส่วนย่อยเท่า ๆ กัน 60 ส่วน จะเรียก 1 ส่วนว่า 1 ลิปดา และถ้าแบ่งมุม 1 ลิปดา ออกเป็นส่วนย่อยเท่า ๆ กัน 60 ส่วน จะเรียก 1 ส่วนว่า 1 ฟิลิปดา

1 องศา มีขนาดเท่ากับ 60 ลิปดา หรือ 1' มีขนาดเท่ากับ $\left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

1 ลิปดา มีขนาดเท่ากับ 60 ฟิลิปดา หรือ 1" มีขนาดเท่ากับ $\left(\frac{1}{60}\right)'$

1 ฟิลิปดา มีขนาดเท่ากับ $\frac{1}{3600}$ องศา หรือ 1" มีขนาดเท่ากับ 3600"

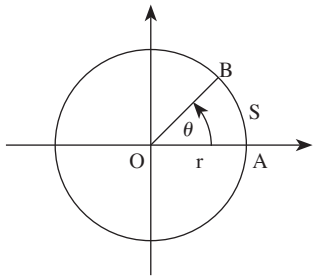
ตัวอย่างที่ 1 จงเปลี่ยน 50.2475° ให้มีหน่วยเป็นองศา ลิปดา และฟิลิปดา

วิธีทำ เนื่องจาก $50.2475^\circ = 50^\circ + 0.2475^\circ$
ถ้า $1^\circ = 60'$
แล้ว $0.2475^\circ = 0.2475 \times 60 = 14.85'$
และ $14.85' = 14' + 0.85'$
ซึ่ง $1' = 60''$
แล้ว $0.85' = 0.85 \times 60 = 51''$
ดังนั้น 50.2475° มีขนาดเท่ากับ $50^\circ 14' 51''$

ตัวอย่างที่ 2 จงเปลี่ยน $30^\circ 24' 72''$ ให้มีหน่วยเป็นทศนิยมขององศา

วิธีทำ เนื่องจาก $30^\circ 24' 72'' = 30^\circ + 24' + 72''$
ถ้า $1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$
แล้ว $24' = 24 \times \frac{1}{60} = 0.4^\circ$
และเนื่องจาก $3600'' = 1^\circ$
แล้ว $72'' = \frac{72 \times 1}{3600} = 0.02^\circ$
นั่นคือ $30^\circ 24' 72'' = 30 + 0.4 + 0.02$ องศา
 $= 30.42$ องศา
ดังนั้น $30^\circ 24' 72''$ มีขนาดเท่ากับ 30.42 องศา

1.2.2 การวัดมุมในหน่วยเรเดียน เรเดียน (Radian) คือ หน่วยในการวัดมุมชนิดหนึ่งบนระนาบสองมิติ ซึ่งขนาดของมุมในหน่วยเรเดียนมีค่าเท่ากับอัตราส่วนความยาวของส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นกับความยาวของรัศมีวงกลม ดังรูป



จากรูป ถ้ากำหนดให้ $\hat{AOB}$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม r แทนความยาวของรัศมีของวงกลม และ S แทนความยาวของส่วนโค้งที่รองรับ $\hat{AOB}$ แล้ว ขนาดของ $\hat{AOB}$ หรือ $\theta = \frac{\text{ความยาวของส่วนโค้ง}}{\text{ความยาวของรัศมี}}$ เรเดียน

$$\text{ดังนั้น } \theta = \frac{S}{r} \text{ เรเดียน}$$

จากรูป ถ้าหมุนรัศมีของวงกลมให้ครบหนึ่งรอบ มุมรอบจุดศูนย์กลางของวงกลมในหน่วยเรเดียน จะเท่ากับ $\frac{2\pi}{r} = 2\pi$ เรเดียน เนื่องจาก r มีค่าเท่ากับ 1 หน่วย

จะเห็นว่า การวัดมุมที่มีหน่วยเป็นองศาและหน่วยเป็นเรเดียนมีความสัมพันธ์กัน นั่นคือ ถ้ากำหนด θ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางที่เกิดจากการหมุนรัศมีให้ครบหนึ่งรอบ ก็จะกล่าวได้ว่า

$$\theta = 360 \text{ องศา หรือ } \theta = 2\pi \text{ เรเดียน } \left(\pi \approx \frac{22}{7} \approx 3.14285 \right)$$

แต่ถ้ามุมที่เกิดจากการหมุนเกินหนึ่งรอบ ก็สามารถวัดมุมในหน่วยเรเดียนได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 3 มุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{7}{6}$ รอบในทิศทวนเข็มนาฬิกา มีค่ากี่เรเดียน

วิธีทำ มุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{7}{6}$ รอบ จะเท่ากับมุมที่เกิดจากการหมุนจำนวน 1 รอบกับ $\frac{1}{6}$ รอบ

แสดงว่า มุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{7}{6}$ รอบ จะเท่ากับมุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{1}{6}$ รอบ

$$\text{ดังนั้น มุมดังกล่าวมีค่าเท่ากับ } \frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

ตัวอย่างที่ 4 มุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{11}{4}$ รอบในทิศทวนเข็มนาฬิกา มีค่ากี่เรเดียน

วิธีทำ มุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{11}{4}$ รอบ จะเท่ากับมุมที่เกิดจากการหมุนจำนวน 2 รอบกับ $\frac{3}{4}$ รอบ

แสดงว่า มุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{11}{4}$ รอบ จะเท่ากับมุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{3}{4}$ รอบ

$$\text{ดังนั้น มุมดังกล่าวมีค่าเท่ากับ } \frac{3}{4} \times 2\pi = \frac{3\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

ตัวอย่างที่ 5 มุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{7}{3}$ รอบในทิศตามเข็มนาฬิกา มีค่ากี่เรเดียน

วิธีทำ มุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{7}{3}$ รอบจะเท่ากับมุมที่เกิดจากการหมุนจำนวน 2 รอบกับ $\frac{1}{3}$ รอบ

แสดงว่า มุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{7}{3}$ รอบ จะเท่ากับมุมที่เกิดจากการหมุน $\frac{1}{3}$ รอบ

$$\text{ดังนั้น มุมดังกล่าวมีค่าเท่ากับ } -\frac{1}{3} \times 2\pi = -\frac{2\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

เนื่องจากมุมหนึ่งรอบมีขนาดเท่ากับ 360 องศา หรือ 2π เรเดียน หน่วยองศาและเรเดียนจึงมีความสัมพันธ์กัน ดังนี้

$$360 \text{ องศา} = 2\pi \text{ เรเดียน}$$

$$\text{หรือ} \quad 180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน}$$

หมายเหตุ : 1. ถ้าไม่ได้ใส่หน่วยของมุมจะถือว่าหน่วยของมุมเป็นเรเดียน
2. การเปลี่ยนหน่วยทั้งสองนี้จะใช้ความสัมพันธ์ $180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน}$

ตัวอย่างที่ 6 จงเปลี่ยนมุม 150 องศา ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 180 \text{ องศา} &= \pi \text{ เรเดียน} \\ 150 \text{ องศา} &= 150 \times \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \\ &= \frac{5\pi}{6} \text{ เรเดียน} \end{aligned}$$

ดังนั้น 150 องศา มีขนาดเท่ากับ $\frac{5\pi}{6}$ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 7 จงเปลี่ยนมุม 300 องศา ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 180 \text{ องศา} &= \pi \text{ เรเดียน} \\ 300 \text{ องศา} &= 300 \times \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \\ &= \frac{5\pi}{3} \text{ เรเดียน} \end{aligned}$$

ดังนั้น 300 องศา มีขนาดเท่ากับ $\frac{5\pi}{3}$ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 8 จงเปลี่ยนมุม 540 องศา ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 180 \text{ องศา} &= \pi \text{ เรเดียน} \\ 540 \text{ องศา} &= 540 \times \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \\ &= 3\pi \text{ เรเดียน} \end{aligned}$$

ดังนั้น 540 องศา มีขนาดเท่ากับ 3π เรเดียน

ตัวอย่างที่ 9 จงเปลี่ยนมุม -630 องศา ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียน

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} 180 \text{ องศา} &= \pi \text{ เรเดียน} \\ -630 \text{ องศา} &= -630 \times \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \\ &= -\frac{7\pi}{2} \text{ เรเดียน} \end{aligned}$$

ดังนั้น -630 องศา มีขนาดเท่ากับ $-\frac{7\pi}{2}$ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 10 จงเปลี่ยนมุม $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศา

วิธีทำ เนื่องจาก π เรเดียน = 180 องศา

$$\frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน} = \frac{\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} \quad \text{องศา}$$

$$= 45 \quad \text{องศา}$$

ดังนั้น $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน มีขนาดเท่ากับ 45 องศา

ตัวอย่างที่ 11 จงเปลี่ยนมุม $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศา

วิธีทำ เนื่องจาก π เรเดียน = 180 องศา

$$\frac{7\pi}{6} \text{ เรเดียน} = \frac{7\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} \quad \text{องศา}$$

$$= 210 \quad \text{องศา}$$

ดังนั้น $\frac{7\pi}{6}$ เรเดียน มีขนาดเท่ากับ 210 องศา

ตัวอย่างที่ 12 จงเปลี่ยนมุม $-\frac{11\pi}{4}$ เรเดียน ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศา

วิธีทำ เนื่องจาก π เรเดียน = 180 องศา

$$-\frac{11\pi}{4} \text{ เรเดียน} = -\frac{11\pi}{4} \times \frac{180}{\pi} \quad \text{องศา}$$

$$= -495 \quad \text{องศา}$$

ดังนั้น $-\frac{11\pi}{4}$ เรเดียน มีขนาดเท่ากับ -495 องศา

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ θ มีค่าเท่ากับ 4 เรเดียน จงเปลี่ยน θ ให้เป็นมุมที่มีหน่วยเป็นองศา ลิปดา และฟิลิปดา

วิธีทำ เนื่องจาก π เรเดียน = 180 องศา

แล้ว 4 เรเดียน = $4 \times \frac{180}{\pi}$ องศา

$$= 4 \times \frac{180}{\frac{22}{7}}$$

$$= 4 \times 180 \times \frac{7}{22} \quad \text{องศา}$$

$$= 229.09 \quad \text{องศา}$$

ดังนั้น 4 เรเดียน มีขนาดเท่ากับ 229.09 องศา

เนื่องจาก 1 องศา = 60 ลิปดา

$$0.09 \text{ องศา} = 0.09 \times 60 \quad \text{ลิปดา}$$

$$= 5.4 \quad \text{ลิปดา}$$

และเนื่องจาก 1 ลิปดา = 60 ฟิลิปดา

$$0.4 \text{ ลิปดา} = 0.4 \times 60 \quad \text{ฟิลิปดา}$$

$$= 24 \quad \text{ฟิลิปดา}$$

ดังนั้น θ จะมีขนาดเท่ากับ $229^\circ 5' 24''$

กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจที่ 1.1

1. จงเปลี่ยนหน่วยของมุมตามที่กำหนดลงในช่องว่างให้ถูกต้อง พร้อมแสดงวิธีการคำนวณ

องศา	เรเดียน	วิธีการคำนวณ
120°	$\frac{2\pi}{3}$	ตัวอย่าง $120 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$
300°		
324°		
450°		
750°		
	$\frac{7\pi}{9}$	
	$\frac{11\pi}{15}$	
	$\frac{13\pi}{6}$	

2. จงเปลี่ยนมุม θ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ให้มีหน่วยเป็นองศา

1) $\theta = \frac{5\pi}{4}$

.....

.....

.....

2) $\theta = \frac{3\pi}{5}$

.....

.....

.....

3) $\theta = -\frac{8\pi}{3}$

.....

.....

.....

3. จงเปลี่ยนมุม θ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน

1) $\theta = 315^\circ$

.....

.....

.....

2) $\theta = -210^\circ$

.....

.....

.....

3) $\theta = -840^\circ$

.....

.....

.....

4. กำหนดให้ $\theta = 7$ เรเดียน จงเปลี่ยน θ ให้มีหน่วยเป็นองศา ลิปดา และฟิลิปดา

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5. จงเปลี่ยนมุม $227^\circ 53' 18''$ ให้มีหน่วยเป็นทศนิยมขององศา

.....

.....

.....

.....

.....

6. จงเปลี่ยนมุม 45.4693° ให้มีหน่วยเป็นองศา ลิปดา และฟิลิปดา

.....

.....

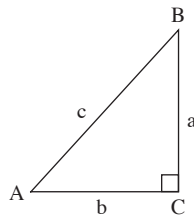
.....

.....

.....

2. สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2.1 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



จากรูป เมื่อกำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ถ้า c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉากแล้ว ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC เป็นดังนี้

$$c^2 = a^2 + b^2$$

เมื่อ a แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม A

b แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุม B

c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

และถ้าพิจารณาภายในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก จะพบว่า

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \text{ และ } \hat{C} = 90^\circ$$

ดังนั้น $\hat{A} + \hat{B} = 90^\circ$ โดยมี $\hat{A} < 90^\circ$ และ $\hat{B} < 90^\circ$

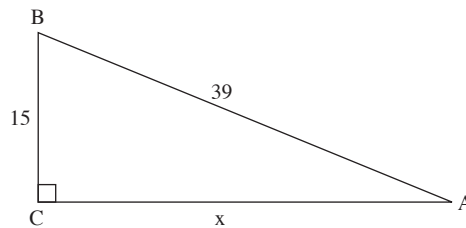
แสดงว่าทั้ง $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ จะเป็นมุมแหลมเสมอ

ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก เป็นไปตามสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กล่าวว่า

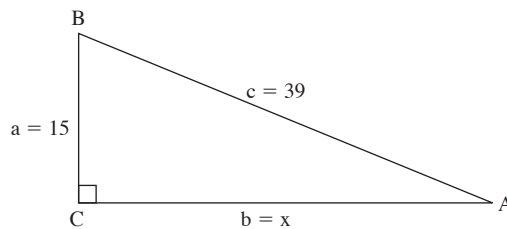
“สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก”

จากความสัมพันธ์ระหว่างความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ สามารถหาความยาวด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ต้องการทราบได้เสมอ เมื่อทราบความยาวของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 14 จงหาความยาวของ x จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



วิธีทำ จากความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก จะหาความยาวของ x ได้ดังนี้



$$\text{จาก} \quad c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{จะได้} \quad b^2 = c^2 - a^2$$

$$x^2 = (39)^2 - (15)^2$$

$$= 1,521 - 225$$

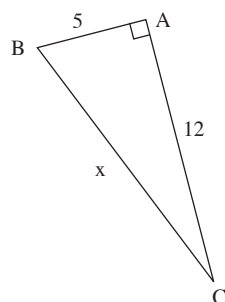
$$= 1,296$$

$$\text{แสดงว่า} \quad x = \sqrt{1,296}$$

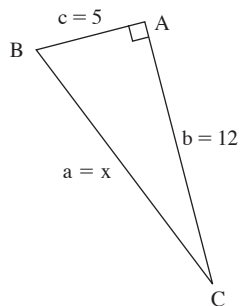
$$= 36$$

ดังนั้น x มีความยาวเท่ากับ 36 หน่วย

ตัวอย่างที่ 15 จงหาความยาวของ x จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



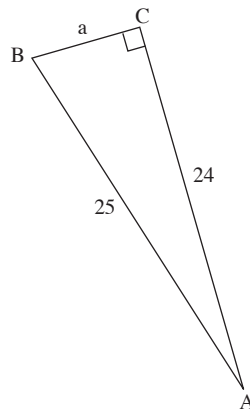
วิธีทำ จากความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม A เป็นมุมฉาก จะหาความยาวของ x ได้ดังนี้



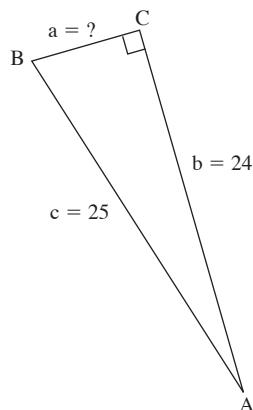
$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad & a^2 = b^2 + c^2 \\
 \text{จะได้} \quad & x^2 = (12)^2 + (5)^2 \\
 & = 144 + 25 \\
 & = 169 \\
 \text{แสดงว่า} \quad & x = \sqrt{169} \\
 & = 13
 \end{aligned}$$

ดังนั้น x มีความยาวเท่ากับ 13 หน่วย

ตัวอย่างที่ 16 จงหาความยาวของ a จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



วิธีทำ จากความสัมพันธ์ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก จะหาความยาวของ a ได้ดังนี้



$$\begin{aligned}
 \text{จาก} \quad & c^2 = a^2 + b^2 \\
 \text{จะได้} \quad & a^2 = c^2 - b^2 \\
 & = (25)^2 - (24)^2 \\
 & = 625 - 576 \\
 & = 49 \\
 \text{แสดงว่า} \quad & a = \sqrt{49} \\
 & = 7
 \end{aligned}$$

ดังนั้น a มีความยาวเท่ากับ 7 หน่วย

2.2 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

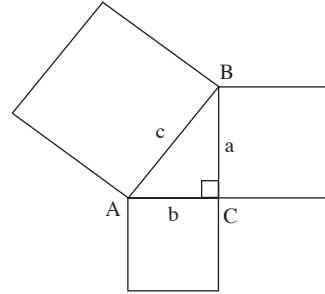
ทฤษฎีบทพีทาโกรัส (Pythagorean Theorem) เป็นการกล่าวถึงผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากทั้งสองจะเท่ากับพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก

นั่นคือ ถ้า a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก ดังรูป

$$\text{จะได้ว่า } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{หรือ } (AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$$

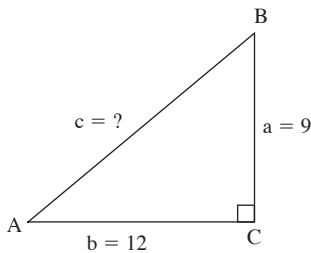


ถ้ากำหนดความยาวด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก แล้วจะสามารถหาความยาวของด้านที่เหลือได้เสมอ โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้

ทราบความยาว	หาความยาว	ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
ด้านประกอบมุมฉาก a และ b	ด้านตรงข้ามมุมฉาก c	$c^2 = a^2 + b^2$
ด้านประกอบมุมฉาก a และด้านตรงข้ามมุมฉาก c	ด้านประกอบมุมฉาก b	$b^2 = c^2 - a^2$
ด้านประกอบมุมฉาก b และด้านตรงข้ามมุมฉาก c	ด้านประกอบมุมฉาก a	$a^2 = c^2 - b^2$

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดด้านประกอบมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่งเท่ากับ 12 และ 9 หน่วย จงหาความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

วิธีทำ จากโจทย์กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ดังรูป และจากรูปหาความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก c โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ได้ดังนี้



$$\text{จาก } c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{จะได้ } a^2 = (9)^2 + (12)^2$$

$$= 81 + 144$$

$$= 225$$

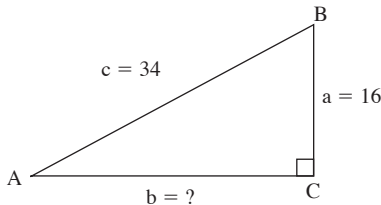
$$\text{แสดงว่า } c = \sqrt{225}$$

$$= 15$$

ดังนั้น ความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก c เท่ากับ 15 หน่วย

ตัวอย่างที่ 18 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก เมื่อ a, b และ c เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้า $a = 16$ และ $c = 34$ จงหาค่า b

วิธีทำ จากโจทย์เขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ได้ดังรูป และจากรูปหาความยาวของ b โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ได้ดังนี้



$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad & b^2 = c^2 - a^2 \\ \text{จะได้} \quad & b^2 = (34)^2 - (16)^2 \\ & = 1,156 - 256 \\ & = 900 \\ \text{แสดงว่า} \quad & b = \sqrt{900} \\ & = 30 \end{aligned}$$

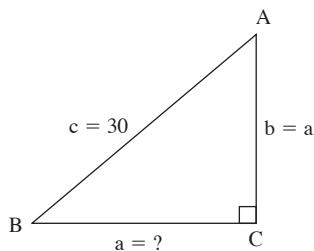
ดังนั้น b มีความยาวเท่ากับ 30 หน่วย

ตัวอย่างที่ 19 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และมีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก จงหาความยาวด้านประกอบมุมฉาก เมื่อกำหนดให้ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 30 หน่วย

วิธีทำ กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีมุม C เป็นมุมฉาก

จากสมบัติของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะพบว่า ความยาวด้านประกอบมุมฉากมีความยาวเท่ากันเสมอ นั่นแสดงว่า $a = b$ ดังรูป

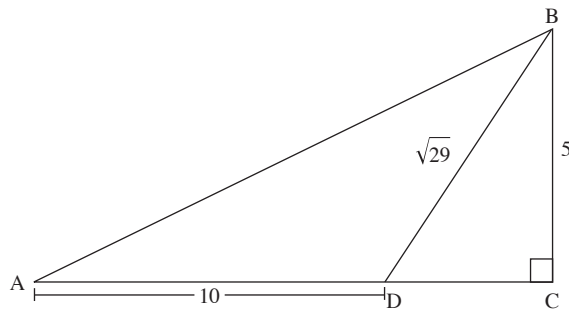
และจากรูปหาความยาวด้านประกอบมุมฉาก a โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ได้ดังนี้



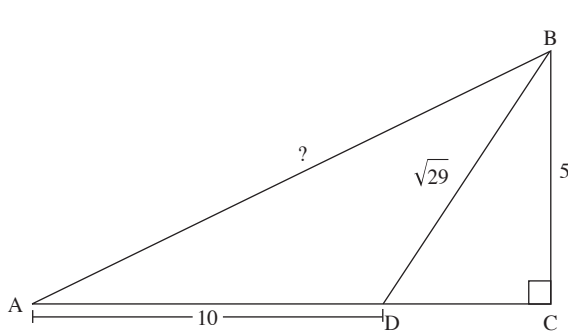
$$\begin{aligned} \text{จาก} \quad & c^2 = a^2 + b^2 \\ \text{นั่นคือ} \quad & c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ \text{จะได้} \quad & 2a^2 = c^2 \\ & a^2 = \frac{c^2}{2} \\ & = \frac{(30)^2}{2} \\ & = \frac{900}{2} \\ & = 450 \\ \text{แสดงว่า} \quad & a = \sqrt{450} \\ & = \sqrt{15 \times 15 \times 2} \\ & = 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC มีความยาวด้านประกอบมุมฉากเท่ากับ $15\sqrt{2}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 20 จงหาความยาว AB จากรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม BDC ที่กำหนดให้ดังรูป



วิธีทำ จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BCD ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก จะหาความยาวด้าน DC ได้ดังนี้



$$\text{จาก } (DC)^2 = (DB)^2 - (BC)^2$$

$$\text{จะได้ } (DC)^2 = (\sqrt{29})^2 - (5)^2$$

$$= 29 - 25$$

$$= 4$$

$$\text{แสดงว่า } DC = \sqrt{4} = 2$$

และจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก จะหาความยาวด้าน AB ได้ดังนี้
จะต้องหาความยาวของด้าน AC ก่อน ซึ่งหาได้จาก

$$AC = AD + DC$$

$$\text{ดังนั้น } AC = 10 + 2 = 12$$

$$\text{และเนื่องจาก } (AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$\text{จะได้ } (AB)^2 = (12)^2 + (5)^2$$

$$= 144 + 25$$

$$= 169$$

$$\text{แสดงว่า } AB = \sqrt{169}$$

$$= 13$$

ดังนั้น ความยาวของด้าน AB เท่ากับ 13 หน่วย