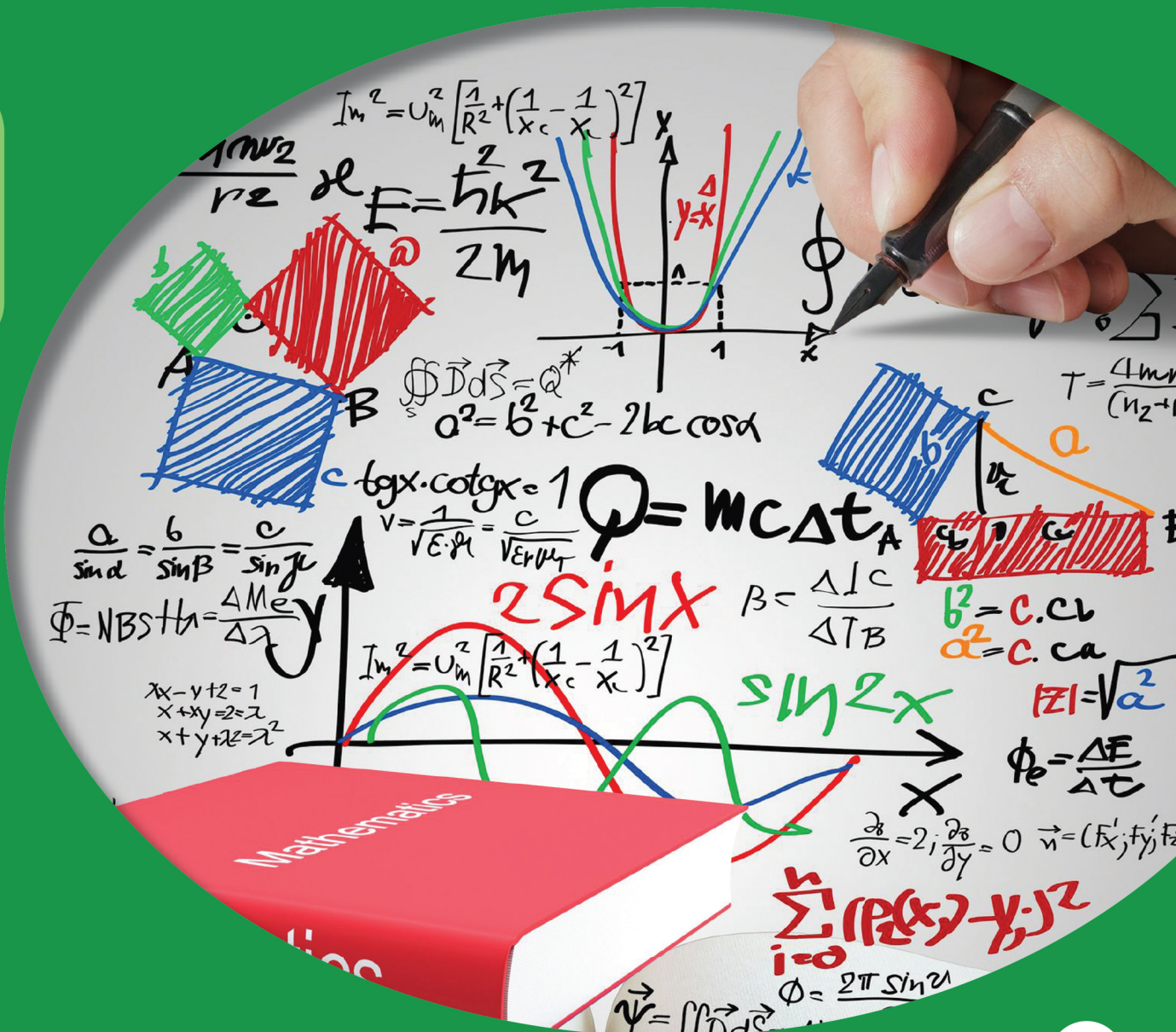


คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

ตรงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชาของ
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2557

3000-1403





**คณิตศาสตร์
อุตสาหกรรม
3000-1402**

หมวดวิชาทักษะชีวิต
กลุ่มทักษะการคิดและการแก้ปัญหา
กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง
พุทธศักราช 2557

วราภรณ์ วงศ์ไตรรัตน์

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

วรารณ วงศ์ไตรรัตน์.

คณิตศาสตร์อุตสาหกรรม.-- กรุงเทพฯ : แม็คเอดูเคชั่น, 2558.

216 หน้า.

1. คณิตศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง.

515

ISBN 978-616-274-632-1

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

MAC EDUCATION

ผู้เขียน : วรารณ วงศ์ไตรรัตน์
การสั่งซื้อ : ส่งธนาคติส่งจ่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว ในนาม บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด
เลขที่ 9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว แขวงจันทระเกษม
เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900
☎ : 0-2938-2022-7 FAX : 0-2938-2028
www.MACeducation.com
ราคาจำหน่าย : 125 บาท
สงวนลิขสิทธิ์ : กันยายน 2558
พิมพ์ที่ : บริษัท พี.เอ็น.เค. แอนด์ สกายพริ้นตังส์ จำกัด

(สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร)

คำนำ

ตามที่กระทรวงศึกษาธิการได้ประกาศใช้หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2557 เพื่อให้สอดคล้องกับแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ แผนการศึกษาแห่งชาติ และแผนปฏิบัติการการเตรียมความพร้อมพลเมืองเพื่อเข้าสู่ประชาคมอาเซียน ทั้งนี้หลักสูตรดังกล่าวมุ่งผลิตและพัฒนากำลังคนระดับเทคนิคให้มีทักษะและสมรรถนะในงานอาชีพตามมาตรฐานวิชาชีพ มีคุณธรรม จริยธรรม และจรรยาบรรณวิชาชีพ สามารถประกอบอาชีพอิสระ เป็นผู้ประกอบการที่มีคุณภาพ หรือประกอบอาชีพอื่นๆ ได้ตรงความต้องการของสถานประกอบการทั้งในประเทศและภูมิภาคอาเซียน

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด ผู้ผลิตและจำหน่ายหนังสือเรียน สื่อการเรียนรู้ วารสารทางการศึกษาทั้งในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐานและระดับอาชีวศึกษา ตระหนักถึงภารกิจสำคัญในการมีส่วนร่วมในการสนับสนุนส่งเสริมการศึกษาระดับอาชีวศึกษาให้บรรลุผลสัมฤทธิ์ตามเจตนารมณ์ที่ตั้งไว้ จึงได้แต่งตั้งคณะทำงานซึ่งประกอบด้วยนักวิชาการ และผู้สอนทั้งในระดับอาชีวศึกษาและระดับอุดมศึกษาที่มีความเชี่ยวชาญด้านหลักสูตรการจัดการเรียนรู้ รวมทั้งการวัดและประเมินผล ดำเนินการวิเคราะห์หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2557 ในแต่ละประเภทวิชาและสาขาวิชาเพื่อจัดทำสื่อการเรียนรู้ อันประกอบด้วยหนังสือเรียนที่จัดทำให้ตรงกับจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชา ทั้งนี้โดยคำนึงถึงความสอดคล้องกับมาตรฐานการศึกษาวิชาชีพทั้ง 3 ด้าน คือ ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ ด้านสมรรถนะหลักและสมรรถนะทั่วไป และด้านสมรรถนะวิชาชีพ รวมทั้งแผนการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นการพัฒนาสมรรถนะของผู้เรียนผ่านกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อเป็นแนวทางให้ผู้สอนนำไปปรับให้เหมาะสมกับธรรมชาติของผู้เรียนและจุดเน้นตามบริบทของสถานศึกษา

จุดเด่นของหนังสือเรียนชุดนี้ประกอบด้วย

1. การนำเสนอเป็นรูปแบบหน่วยการเรียนรู้ ที่มีเนื้อหาง่ายต่อการเรียนรู้แต่ยังคงไว้ซึ่งความเข้มข้นและทันสมัย ทั้งนี้เนื้อหาในหนังสือเรียนมุ่งเน้นให้สัมพันธ์กับจุดประสงค์การเรียนรู้ สมรรถนะ หลักการเรียนรู้ตามสภาพจริง (Authentic Learning) และการประเมินผลตามสภาพจริง (Authentic Assessment)
2. สอดแทรกกิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ กิจกรรมการฝึกกระบวนการคิด (Thinking Skills) และกิจกรรมเตรียมความพร้อมสู่ประชาคมอาเซียนให้แก่ผู้เรียน
3. พัฒนาสมรรถนะหลักและสมรรถนะวิชาชีพผ่านกระบวนการปฏิบัติงานโดยใช้ใบช่วยสอนเป็นสื่อสำหรับการฝึกกระบวนการเรียนรู้ที่สำคัญ เช่น การเรียนรู้จากโครงการ (Project-Based Learning) การพัฒนาเทคโนโลยีให้เป็นเทคโนโลยีสะอาด (Green Technology) และการสร้างสรรค์นวัตกรรมหรือผลิตภัณฑ์ตามแนวคิดเศรษฐกิจเชิงสร้างสรรค์ (Creative Economy) เป็นต้น

4. มีแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยจัดทำแบบทดสอบให้สอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยการเรียนนั้นๆ ท้ายหน่วยการเรียนรู้ทุกหน่วย

บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด ขอขอบพระคุณสถานศึกษา ผู้สอน ผู้เรียน และผู้ที่สนใจทุกท่านที่ให้ความไว้วางใจในสื่อการเรียนรู้นี้ บริษัทหวังเป็นอย่างยิ่งว่าสื่อการเรียนรู้ในชุดนี้จะมีส่วนช่วยให้การจัดการเรียนรู้มีประสิทธิภาพและประสิทธิผล เพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีคุณภาพทัดเทียมระดับสากลต่อไป

บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด

รหัส 3000-1402

วิชาคณิตศาสตร์อุตสาหกรรม

ทฤษฎี 3 ชั่วโมง ปฏิบัติ - ชั่วโมง 3 หน่วยกิต

จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

1. เกิดความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ เรขาคณิตวิเคราะห์ ภาคตัดกรวย ฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย
2. นำความรู้เรื่องเมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ เรขาคณิตวิเคราะห์ ภาคตัดกรวย ฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัยประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ
3. มีเจตคติที่ดีต่อการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

สมรรถนะรายวิชา

1. ดำเนินการเกี่ยวกับเมทริกซ์และอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์
2. ประยุกต์การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนต์ในงานอาชีพ
3. คำนวณหาระยะทาง จุดกึ่งกลาง และความชันของเส้นตรง
4. สร้างสมการเส้นตรงในรูปทั่วไปจากเงื่อนไขที่กำหนด
5. สร้างสมการและเขียนกราฟภาคตัดกรวยจากเงื่อนไขที่กำหนด
6. วิเคราะห์หาส่วนประกอบของภาคตัดกรวยจากสมการที่กำหนด
7. ประยุกต์เรขาคณิตวิเคราะห์และภาคตัดกรวยในงานอาชีพ
8. ดำเนินการเกี่ยวกับฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย
9. นำฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัยประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาเกี่ยวกับการฝึกทักษะ การคิดคำนวณ และการแก้ปัญหาเกี่ยวกับเมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ เรขาคณิตวิเคราะห์ ภาคตัดกรวย ฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย

ตารางวิเคราะห์สมรรถนะประจำหน่วย

หน่วยการเรียนรู้ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สมรรถนะประจำหน่วย
1	เมทริกซ์	คำนวณเมทริกซ์ด้วยการดำเนินการของเมทริกซ์
2	ดีเทอร์มิแนนต์	- คำนวณค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยใช้วิธีดำเนินการของเมทริกซ์ - ประยุกต์การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์ในงานอาชีพ
3	เรขาคณิตวิเคราะห์	- คำนวณหาระยะทาง จุดกึ่งกลาง และความชันของเส้นตรง - สร้างสมการเส้นตรงในรูปทั่วไปจากเงื่อนไขที่กำหนด
4	ภาคตัดกรวย	- สร้างสมการและเขียนกราฟภาคตัดกรวยจากเงื่อนไขที่กำหนด - วิเคราะห์หาส่วนประกอบของภาคตัดกรวยจากสมการที่กำหนด - ประยุกต์ภาคตัดกรวยในงานอาชีพ
5	ฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย	- ดำเนินการเกี่ยวกับฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย - นำฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัยประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

สารบัญ

หน้า

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เมทริกซ์	1
1. ความหมายของเมทริกซ์	2
2. ชนิดของเมทริกซ์	5
3. การเท่ากันของเมทริกซ์	7
4. การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง	11
5. การบวกและการลบเมทริกซ์	12
6. การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์	15
7. เมทริกซ์สลับเปลี่ยนหรือเมทริกซ์ทรานส์โพส	22
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	27
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ดีเทอร์มิแนนต์	 30
1. ดีเทอร์มิแนนต์	31
2. ไมเนอร์และโคแฟกเตอร์ของสมาชิกเมทริกซ์จัตุรัส	35
3. สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์	42
4. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์จัตุรัส	47
5. การแก้ระบบสมการเชิงเส้น	51
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	62
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เรขาคณิตวิเคราะห์	 65
1. ระบบแกนพิกัดฉาก	66
2. ระยะทางระหว่างจุดสองจุด	67
3. การหาจุดแบ่งส่วนของเส้นตรง	71
4. ความเอียงและความชันของเส้นตรง	74
5. เส้นขนานและเส้นตั้งฉาก	79
6. สมการเส้นตรง	82
7. ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง	88
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	91

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ภาคตัดกรวย	93
1. วงกลม	95
2. พาราโบลา	102
3. วงรี	112
4. ไฮเพอร์โบลา	122
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	135
หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 ฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัย	137
1. ฟังก์ชันพีชคณิต	138
2. ฟังก์ชันเลขยกกำลัง	150
3. ฟังก์ชันลอการิทึม	154
4. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	166
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	200
บรรณานุกรม	202
ภาคผนวก	203

เมทริกซ์

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของเมทริกซ์
2. ชนิดของเมทริกซ์
3. การเท่ากันของเมทริกซ์
4. การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง
5. การบวกและการลบเมทริกซ์
6. การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์
7. เมทริกซ์สลับเปลี่ยนหรือเมทริกซ์ทรานสโพส

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกความหมายของเมทริกซ์ได้
2. บอกชนิดของเมทริกซ์ได้
3. อธิบายการเท่ากันของเมทริกซ์ได้
4. คำนวณผลคูณของเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริงที่กำหนดให้ได้
5. คำนวณการบวกและลบเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้
6. คำนวณผลคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้
7. หาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนหรือเมทริกซ์ทรานสโพสของเมทริกซ์ที่กำหนดให้ได้
8. ประยุกต์ใช้เมทริกซ์ในการแก้ปัญหาต่างๆ ได้

เมทริกซ์

สมรรถนะประจำหน่วย

คำนวณเมทริกซ์ด้วยการดำเนินการของเมทริกซ์

เมทริกซ์

1. ความหมายของเมทริกซ์

ในการดำเนินชีวิต เรามักจะเกี่ยวข้องกับจำนวนข้อมูลต่างๆ เพื่อความสะดวกในการศึกษาข้อมูลนั้นๆ จึงมีการนำข้อมูลมาจัดเรียงเป็นแถว เป็นหลัก เช่น

กึ่งต้องการขายพืชผลทางการเกษตร 3 ชนิด มีแตงกวา 250 กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 23 บาท ถั่วฝักยาว 100 กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 40 บาท และ ชิง 135 กิโลกรัม ราคา กิโลกรัมละ 55 บาท นำข้อมูลดังกล่าวมาจัดเรียงในรูปตารางได้ดังนี้

รายการ	จำนวน (กิโลกรัม)	ราคา กิโลกรัมละ (บาท)	จำนวนเงิน (บาท)
แตงกวา	250	23	5,750
ถั่วฝักยาว	100	40	4,000
ชิง	135	55	7,425

จากข้อมูลในตารางข้างต้น พบว่าข้อมูลประกอบด้วย 3 แถว ในแต่ละแถวประกอบด้วยข้อมูล 3 ตัว ดังนั้น นำข้อมูลที่เป็นตัวเลขมาจัดเรียงภายใต้เครื่องหมายวงเล็บเล็ก () หรือวงเล็บใหญ่ [] ได้ดังนี้

$$\begin{pmatrix} 250 & 23 & 5,750 \\ 100 & 40 & 4,000 \\ 135 & 55 & 7,425 \end{pmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 250 & 23 & 5,750 \\ 100 & 40 & 4,000 \\ 135 & 55 & 7,425 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเรียกข้อมูลในรูปนี้ว่า “เมทริกซ์”

เมทริกซ์ (Matrix) หมายถึง กลุ่มของจำนวนใดๆ ที่นำมาเรียงเป็นแถวและหลักอย่างเป็นระเบียบในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งในแต่ละแถวหรือหลักประกอบด้วยจำนวนเท่าๆ กัน ภายใต้เครื่องหมายวงเล็บเล็ก () หรือเครื่องหมายวงเล็บใหญ่ []

● สัญลักษณ์ทั่วไปของเมทริกซ์

- 1) ชื่อของเมทริกซ์ ใช้ภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C, ..., Z เป็นต้น
- 2) สมาชิกของเมทริกซ์ (Element of Matrix) คือ จำนวนที่อยู่ภายในเมทริกซ์ A
- 3) เมทริกซ์ A ซึ่งประกอบด้วย m แถว และ n หลัก เรียกว่า $m \times n$ เมทริกซ์ หรือ เมทริกซ์ขนาด $m \times n$ หรือ เมทริกซ์มิติ $m \times n$
- 4) เมทริกซ์ A ซึ่งมีขนาด $m \times n$ จำนวนสมาชิกทั้งหมดของเมทริกซ์ A เท่ากับ mn จำนวน

หมายเหตุ โดยทั่วไป เมทริกซ์ A ขนาด $m \times n$ นิยมเขียนสัญลักษณ์เป็น $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

เมื่อ a_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ A ที่อยู่ในตำแหน่งแถวที่ i และหลักที่ j กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เขียนแบบแจกแจงสมาชิกดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{แถวที่ 1} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 2} \\ \leftarrow \text{แถวที่ 3} \\ \\ \leftarrow \text{แถวที่ m} \end{array}$$

$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{หลักที่ 1} & \text{หลักที่ 2} & \text{หลักที่ 3} & \text{หลักที่ n} \end{array}$

a_{11} หมายถึง สมาชิกของเมทริกซ์ A ซึ่งอยู่ในตำแหน่งแถวที่ 1 และหลักที่ 1

a_{12} หมายถึง สมาชิกของเมทริกซ์ A ซึ่งอยู่ในตำแหน่งแถวที่ 1 และหลักที่ 2

a_{23} หมายถึง สมาชิกของเมทริกซ์ A ซึ่งอยู่ในตำแหน่งแถวที่ 2 และหลักที่ 3

a_{mn} หมายถึง สมาชิกของเมทริกซ์ A ซึ่งอยู่ในตำแหน่งแถวที่ m และหลักที่ n

สมาชิกของเมทริกซ์ นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น a, b, c เป็นต้น และให้สอดคล้องกับชื่อของเมทริกซ์ เช่น

เมทริกซ์ A มีสมาชิก คือ a_{ij}

เมทริกซ์ B มีสมาชิก คือ b_{ij}

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 8 & 4 & 7 \\ 4 & -2 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & -6 & 9 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ จงหา

1. ขนาดของเมทริกซ์ A

2. a_{12} , a_{25}

3. $a_{14} + a_{35}$

วิธีทำ 1. ขนาดของเมทริกซ์ A เท่ากับ 3×5

ตอบ

2. $a_{12} = -4$, $a_{25} = 4$

ตอบ

3. $a_{14} + a_{35} = 4 + (-5) = -1$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนเมทริกซ์ B ที่มีขนาด 2×4 เมื่อกำหนดให้ $b_{ij} = 2i - 3j$

วิธีทำ กำหนดให้

$$B = [b_{ij}]_{2 \times 4}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$$

เมื่อ

$$b_{ij} = 2i - 3j$$

นั่นคือ b_{11} มี $i = 1$ และ $j = 1$ จะได้ $b_{11} = 2(1) - 3(1) = 2 - 3 = -1$

b_{12} มี $i = 1$ และ $j = 2$ จะได้ $b_{12} = 2(1) - 3(2) = 2 - 6 = -4$

b_{13} มี $i = 1$ และ $j = 3$ จะได้ $b_{13} = 2(1) - 3(3) = 2 - 9 = -7$

b_{14} มี $i = 1$ และ $j = 4$ จะได้ $b_{14} = 2(1) - 3(4) = 2 - 12 = -10$

b_{21} มี $i = 2$ และ $j = 1$ จะได้ $b_{21} = 2(2) - 3(1) = 4 - 3 = 1$

b_{22} มี $i = 2$ และ $j = 2$ จะได้ $b_{22} = 2(2) - 3(2) = 4 - 6 = -2$

b_{23} มี $i = 2$ และ $j = 3$ จะได้ $b_{23} = 2(2) - 3(3) = 4 - 9 = -5$

b_{24} มี $i = 2$ และ $j = 4$ จะได้ $b_{24} = 2(2) - 3(4) = 4 - 12 = -8$

ดังนั้น

$$B = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -7 & -10 \\ 1 & -2 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

ตอบ

กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจที่ 1.1

1. จงหาขนาดของเมทริกซ์ที่กำหนดให้

$$1) A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$$

$$2) B = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -5 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$3) C = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

$$4) D = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & -3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$5) E = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 5 \\ 8 & 3 & 4 & -1 \\ 7 & 6 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

2. จากเมทริกซ์ในข้อ 1 จงหา

$$1) a_{12}, a_{35}$$

$$2) b_{23}, b_{34}$$

$$3) c_{14}, c_{23}$$

3. กำหนดให้เมทริกซ์ $B = [b_{ij}]_{2 \times 3}$ เมื่อ $b_{ij} = (-1)^{2i+j}$ จงเขียนเมทริกซ์ B

4. กำหนดให้เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{3 \times 2}$ เมื่อ $a_{ij} = \begin{cases} -i & \text{เมื่อ } i \neq j \\ i & \text{เมื่อ } i = j \end{cases}$ จงเขียนเมทริกซ์ A

2. ชนิดของเมทริกซ์

โดยทั่วไปการเรียกชื่อเมทริกซ์ จะเรียกตามลักษณะของเมทริกซ์ ดังนี้

2.1 เมทริกซ์แถว (Row Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเพียงแถวเดียวเท่านั้น เช่น

$$A = [9], B = [4 \quad -1 \quad 2 \quad 5 \quad 6]$$

2.2 เมทริกซ์หลัก (Column Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกเพียงหลักเดียวเท่านั้น เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2.3 เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด จะมีขนาดเท่าใดก็ได้ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\underline{0}$ เช่น

$$\underline{0} = [0], \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.4 เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -4 & 6 \\ 3 & 2 & 0 & 8 \\ 9 & 7 & 4 & -2 \\ -4 & 1 & -6 & -8 \end{bmatrix}$$

เส้นทแยงมุมหลัก (Main Diagonal) คือ สมาชิกในตำแหน่ง $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ ของเมทริกซ์จัตุรัส ดังนั้น เส้นทแยงมุมหลักของ A คือ 9, 1 เส้นทแยงมุมหลักของ B คือ 6, 8, 5 และเส้นทแยงมุมหลักของ C คือ 9, 2, 4, -8

2.5 เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกที่อยู่เหนือและใต้เส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

2.6 เมทริกซ์เชิงสเกลาร์ (Scalar Matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกในตำแหน่ง เส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทุกตัว เช่น

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

2.7 เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในตำแหน่งเส้นทแยงมุมหลักเป็น 1 ทั้งหมด เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ I หรือ I_n เมื่อ n เป็นจำนวนแถวและจำนวนหลัก เช่น

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.8 เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในตำแหน่งเหนือเส้นทแยงมุมหลักหรือใต้เส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็น 0 ทั้งหมด เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจที่ 1.2

จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้เป็นเมทริกซ์ชนิดใด

1. $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $B = [2 \quad -4 \quad 5 \quad 7]$

3. $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

4. $D = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

5. $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

6. $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์เท่ากันก็ต่อเมื่อเมทริกซ์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากันทุกคู่

เมทริกซ์ A เท่ากับเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A = B$

ตัวอย่างที่ 3 จงพิจารณาเมทริกซ์แต่ละคู่ต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{4} \\ 0.2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0.2 & 3 \end{bmatrix}$

ตอบ $A = B$ เพราะว่า 1) เมทริกซ์ A และ B มีขนาดเท่ากัน คือ 2×2
2) มีสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกคู่

2. กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ และ $D = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

ตอบ $C \neq D$ เพราะว่า เมทริกซ์ C และเมทริกซ์ D มีสมาชิกในตำแหน่ง $c_{33} \neq d_{33}$ เนื่องจาก $c_{33} = 4$ และ $d_{33} = 7$

3. กำหนดให้ $E = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ และ $F = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

ตอบ $E \neq F$ เพราะว่าขนาดของเมทริกซ์ E เท่ากับ 2×3 แต่ขนาดของเมทริกซ์ F เท่ากับ 2×2 ซึ่งขนาดของเมทริกซ์ E ไม่เท่ากับขนาดของเมทริกซ์ F



ข้อสังเกต

เมทริกซ์ A เท่ากับเมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ

1. ขนาดของเมทริกซ์ A ต้องเท่ากับขนาดของเมทริกซ์ B
2. สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B ต้องเท่ากัน หรือ $a_{ij} = b_{ij}$ ทุกๆ i และ j

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ y & 0 \end{bmatrix}$ และ $A = B$ จงหาค่าของ x และ y

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $A = B$

แสดงว่าสมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของ A และ B มีค่าเท่ากัน
จะได้

$$x = 7$$

$$y = 4$$

ดังนั้น ถ้า $A = B$ แล้ว จะได้ $x = 7$ และ $y = 4$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & 10 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 2x-y & 4 \end{bmatrix}$ และ $A = B$

จงหาค่าของ x และ y

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $A = B$

แสดงว่า สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของ $C = D$ มีค่าเท่ากัน

$$\text{นั่นคือ} \quad x = 3 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$2x - y = 5 \quad \dots\dots\dots(2)$$

แทนค่า $x = 3$ ในสมการที่ (2)

$$\text{จะได้} \quad 2(3) - y = 5$$

$$6 - y = 5$$

$$y = 1$$

ดังนั้น ถ้า $A = B$ แล้ว จะได้ $x = 3$ และ $y = 1$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 9 & 2x+y \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ x-2y & 4 \end{bmatrix}$ และ $C = D$

จงหาค่าของ x และ y

วิธีทำ จากโจทย์ กำหนดให้ $C = D$

แสดงว่า สมาชิกในตำแหน่งเดียวกันของ $C = D$ มีค่าเท่ากัน

$$\text{นั่นคือ} \quad 2x + y = 6 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$x - 2y = -2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) \times 2, \quad 4x + 2y = 12 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$(2) + (3) \quad 5x = 10$$

$$x = 2$$

$$\text{แทน } x = 2 \text{ ใน (1)} \quad 2(2) + y = 6$$

$$4 + y = 6$$

$$y = 2$$

ดังนั้น ถ้า $C = D$ แล้ว จะได้ $x = 2$ และ $y = 2$

ตอบ

กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจที่ 1.3

1. จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่เท่ากัน เพราะเหตุใด

$$1) A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2) A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ และ } B = [2 \quad 2 \quad 2]$$

$$3) C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4) E = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \text{ และ } F = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2. \text{ จงหาค่า } x \text{ และ } y \text{ เมื่อ } \begin{bmatrix} 3x-y & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ x & 2 \end{bmatrix}$$

$$3. \text{ กำหนดให้ } A = \begin{bmatrix} 2y & 5 \\ x+2 & 3 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} y & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ x และ y เมื่อ $A = B$

$$4. \text{ กำหนดให้ } C = \begin{bmatrix} 3 & x & -7 \\ 2 & y & 4 \\ 0 & z & 6 \end{bmatrix} \text{ และ } D = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -7 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2x+y & 6 \end{bmatrix}$$

จงหาค่าของ x , y และ z เมื่อ $C = D$

4. การคูณเมทริกซ์ด้วยจำนวนจริง

ถ้า k เป็นจำนวนจริงใดๆ และเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว $kA = [ka_{ij}]_{m \times n} = k[a_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ $2A$ และ $-3A$

วิธีทำ 1. $2A = (2) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(1) & (2)(4) \\ (2)(2) & (2)(5) \\ (2)(-3) & (2)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

ตอบ

2. $-3A = (-3) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)(1) & (-3)(4) \\ (-3)(2) & (-3)(5) \\ (-3)(-3) & (-3)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -12 \\ -6 & -15 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$

ตอบ



ข้อสังเกต

การคูณจำนวนจริงกับเมทริกซ์ทำได้โดยนำค่าจำนวนจริงคูณกับสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์นั้น

กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจที่ 1.4

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

1) $-2A$

2) $1.5A$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

1) $3A$

2) $-0.4A$

5. การบวกและการลบเมทริกซ์

5.1 การบวกเมทริกซ์ ถ้า A และ B เป็นสองเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน ซึ่ง $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ผลบวกของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A+B$ แล้ว $A+B = [a_{ij}+b_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $A+B$

วิธีทำ A และ B มีขนาด 2×2 เท่ากัน

ดังนั้น

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+(-2) & 1+4 \\ (-4)+0 & 5+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตอบ

5.2 การลบเมทริกซ์ ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์สองเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน ผลลบของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A-B$ แล้ว $A-B = A+(-B)$

หมายเหตุ $-B = (-1)B$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $A-B$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} A-B &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+2 & 0+1 \\ 6+(-1) & 3+(-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตอบ