



คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์

ตรงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชาของหลักสูตร
 ประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2556

2204-2004



 | MAC EDUCATION

คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์



หมวดวิชาทักษะวิชาชีพ

กลุ่มทักษะวิชาชีพเฉพาะ

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2556

พรชัย ทองอินทร์

บรรณาธิการ : ดร.ปณิดา วรธนพิรุณ

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

พรชัย ทองอินทร์.

คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์.--กรุงเทพฯ : แม็คเอ็ดดูเคชั่น, 2557.

244 หน้า.

1. คณิตศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง.

519.4

ISBN 978-616-274-449-5

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย

 **IMAC**EDUCATION

ผู้เขียน : พรชัย ทองอินทร์

การสั่งซื้อ : ส่งรณานัติสั่งจ่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว ในนาม บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด
เลขที่ 9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว แขวงจันทระเกษม
เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

☎ : 0-2938-2022-7 FAX : 0-2938-2028

www.MACeducation.com

ราคาจำหน่าย : 125 บาท

สงวนลิขสิทธิ์ : พฤษภาคม 2557

พิมพ์ที่ : บริษัท ดับเบิลบี เพรส จำกัด

(สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร)

คำนำ

ตามที่กระทรวงศึกษาธิการได้ประกาศใช้หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2556 ทั้งนี้เพื่อให้สอดคล้องกับแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 11 (พ.ศ. 2555-2559) แผนการศึกษาแห่งชาติ ฉบับปรับปรุง (พ.ศ. 2552-2559) และแผนปฏิบัติการการเตรียมความพร้อมเมืองเพื่อเข้าสู่ประชาคมอาเซียนในปี พ.ศ. 2558 ทั้งนี้หลักสูตรดังกล่าวมุ่งผลิตและพัฒนากำลังคนระดับฝีมือให้มีสมรรถนะ มีคุณธรรมจริยธรรม และจรรยาบรรณวิชาชีพ สามารถประกอบอาชีพอิสระเป็นผู้ประกอบการที่มีคุณภาพ หรือประกอบอาชีพอื่นๆ ได้ตรงตามความต้องการของสถานประกอบการทั้งในประเทศและในภูมิภาคอาเซียน

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด ผู้ผลิตและจำหน่ายหนังสือเรียน สื่อการเรียนรู้ และวารสารทางการศึกษา ทั้งในระดับการศึกษาขั้นพื้นฐาน ระดับอาชีวศึกษา ตระหนักถึงภารกิจสำคัญในการมีส่วนร่วมในการสนับสนุนส่งเสริมการศึกษาระดับอาชีวศึกษาให้บรรลุผลสัมฤทธิ์ตามแผนที่ตั้งไว้ จึงได้แต่งตั้งคณะทำงานซึ่งประกอบด้วยนักวิชาการ และผู้สอนทั้งในระดับอาชีวศึกษาและระดับอุดมศึกษาที่มีความเชี่ยวชาญด้านหลักสูตรและการจัดการเรียนรู้ ดำเนินการวิเคราะห์หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2556 ในแต่ละสาขาวิชาเพื่อจัดทำสื่อการเรียนรู้ อันประกอบด้วย

1. หนังสือเรียนที่จัดทำให้ตรงกับจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา และคำอธิบายรายวิชา ทั้งนี้โดยคำนึงถึงความสอดคล้องกับมาตรฐานการศึกษาวิชาชีพ ทั้ง 3 ด้าน คือ ด้านคุณลักษณะที่พึงประสงค์ ด้านสมรรถนะหลักและสมรรถนะทั่วไป และด้านสมรรถนะวิชาชีพ
2. แผนการจัดการเรียนรู้ที่มุ่งเน้นการพัฒนาสมรรถนะของผู้เรียนผ่านกิจกรรมเพื่อเป็นแนวทางให้ผู้สอนนำไปปรับให้เหมาะสมกับธรรมชาติของผู้เรียนและจุดเน้นของสถานศึกษา
3. คู่มือครูสำหรับผู้สอนใช้เป็นแนวทางในการวางแผนการจัดการเรียนรู้ และการฝึกประสบการณ์ให้แก่ผู้เรียนให้สอดคล้องกับหลักสูตร

จุดเด่นของหนังสือเรียนชุดใหม่ มีดังนี้

1. นำเสนอในรูปแบบหน่วยการเรียนรู้ ที่เนื้อหาง่ายต่อการเรียนรู้ แต่ยังคงไว้ซึ่งความเข้มข้นและทันสมัย ทั้งนี้เนื้อหาในหนังสือเรียนมุ่งเน้นให้สัมพันธ์กับจุดประสงค์การเรียนรู้ หลักการเรียนรู้ตามสภาพจริง (Authentic Learning) และการประเมินผลตามสภาพจริง (Authentic Assessment)
2. แทรกกิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ กิจกรรมการฝึกกระบวนการคิด (Thinking Skills) และกิจกรรมเตรียมความพร้อมสู่ประชาคมอาเซียนให้แก่ผู้เรียน

3. พัฒนาสมรรถนะหลักและสมรรถนะวิชาชีพผ่านกระบวนการปฏิบัติงานโดยใช้ใบช่วยสอน เป็นสื่อสำหรับการฝึกกระบวนการเรียนรู้ที่สำคัญ เช่น การเรียนรู้จากโครงการ (Project-Based Learning) การพัฒนาเทคโนโลยีให้เป็นเทคโนโลยีสะอาด (Green Technology) และการสร้างสรรค์นวัตกรรมหรือผลิตภัณฑ์ตามแนวคิดเศรษฐกิจเชิงสร้างสรรค์ (Creative Economy) เป็นต้น

4. มีแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยจัดทำแบบทดสอบให้สอดคล้องกับ จุดประสงค์การเรียนรู้ประจำหน่วยการเรียนนั้นๆ ทำหน่วยการเรียนรู้ทุกหน่วย

5. สนับสนุนการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศในการสืบค้นความรู้ โดยจัดทำเนื้อหาเพิ่มเติมนอกเหนือ จากหนังสือเรียนในรูปแบบของ MAC e-knowledge และ QR Code ที่ผู้สอนและผู้เรียนที่มีความสนใจ จะศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม สามารถหาข้อมูลได้ที่ www.MACeducation.com/e-knowledge หรือ เชื่อมต่อกับ Website ของบริษัท คือ www.MACeducation.com ซึ่งมีฐานข้อมูลที่สามารถ Download มาศึกษาได้

บริษัท แม็คเ็ดดูเคชั่น จำกัด ขอขอบพระคุณสถานศึกษา ผู้สอน ผู้เรียน และผู้ที่สนใจทุกท่านที่ให้ความไว้วางใจในสื่อการเรียนรู้ของบริษัท บริษัทหวังเป็นอย่างยิ่งว่าสื่อการเรียนรู้ชุดนี้คงมีส่วนช่วยให้การจัดการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพและประสิทธิผล เพื่อพัฒนาผู้เรียนให้มีคุณภาพทัดเทียมระดับสากลต่อไป

บริษัท แม็คเ็ดดูเคชั่น จำกัด

รหัส 2204-2004

วิชาคณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์

ทฤษฎี 1 ชั่วโมง ปฏิบัติ 2 ชั่วโมง 2 หน่วยกิต

จุดประสงค์รายวิชา

1. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับวิวัฒนาการของระบบจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์
2. เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับระบบจำนวน ระบบเลขฐาน พีชคณิตบูลีน พีชคณิตเชิงเส้น และทฤษฎีเมตริกซ์
3. เพื่อให้มีทักษะในการคำนวณทางคณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์
4. เพื่อให้มีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่ดี

สมรรถนะรายวิชา

1. แสดงความรู้เกี่ยวกับระบบจำนวน ระบบเลขฐาน พีชคณิตบูลีน พีชคณิตเชิงเส้น และทฤษฎีเมตริกซ์
2. แสดงความรู้เกี่ยวกับการคำนวณทางคณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาเกี่ยวกับวิวัฒนาการของระบบจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์ ระบบเลขฐาน พีชคณิตบูลีน คอมพิวเตอร์กับเลขฐาน หลักการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์ พีชคณิตเชิงเส้น และทฤษฎีเมตริกซ์

ตารางวิเคราะห์สมรรถนะประจำหน่วย

หน่วยการเรียนรู้ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สมรรถนะประจำหน่วย
1	วิวัฒนาการของระบบจำนวน	<ol style="list-style-type: none">1. แสดงความรู้เกี่ยวกับวิวัฒนาการของระบบจำนวน2. แสดงความรู้เกี่ยวกับระบบจำนวน3. แสดงตัวอย่างของระบบจำนวนของชนชาติต่างๆ แต่ละชนชาติ
2	ระบบจำนวน	<ol style="list-style-type: none">1. แสดงความรู้เกี่ยวกับโครงสร้างของระบบจำนวนจริง2. แสดงความรู้เกี่ยวกับจำนวนเต็มบวก3. แสดงความรู้เกี่ยวกับจำนวนเต็ม4. แสดงความรู้เกี่ยวกับจำนวนตรรกยะ5. แสดงความรู้เกี่ยวกับจำนวนอตรรกยะ6. แสดงความรู้เกี่ยวกับเส้นจำนวนจริง
3	พีชคณิตเชิงเส้น	<ol style="list-style-type: none">1. แสดงความหมายของสมการ2. แสดงความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการแก้สมการเชิงเส้น3. แสดงลักษณะของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว4. แสดงลักษณะของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร5. แสดงการเขียนกราฟของฟังก์ชันเชิงเส้น
4	เมทริกซ์	<ol style="list-style-type: none">1. แสดงความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายของเมทริกซ์2. แสดงความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับเมทริกซ์ชนิดต่างๆ3. แสดงความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับทรานสโพสของเมทริกซ์4. แสดงความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับการเท่ากันของเมทริกซ์5. แสดงวิธีการบวก การลบ และการคูณเมทริกซ์6. แสดงวิธีการหาดีเทอร์มิแนนต์7. แสดงวิธีการหาไมเนอร์ของสมาชิกของเมทริกซ์จัตุรัส
5	ระบบเลขฐาน	<ol style="list-style-type: none">1. แสดงความรู้เกี่ยวกับระบบเลขฐาน2. แสดงการคำนวณเลขฐาน3. แสดงการเปลี่ยนเลขฐาน

หน่วยการเรียนรู้ที่	ชื่อหน่วยการเรียนรู้	สมรรถนะประจำหน่วย
6	การแทนจำนวนมีเครื่องหมายและคอมพลิเมนต์	<ol style="list-style-type: none"> 1. แสดงความรู้เกี่ยวกับการแทนจำนวนมีเครื่องหมาย 2. แสดงความรู้เกี่ยวกับการบวกลบ Signed Magnitude 3. แสดงและอธิบายความสำคัญและความหมายของคอมพลิเมนต์ 4. แสดงการคอมพลิเมนต์ของเลขฐาน 2, 8, 10 และ 16 5. แสดงการลบเลขโดยใช้คอมพลิเมนต์ฐานของเลขฐาน 2, 8, 10 และ 16 6. แสดงการลบเลขโดยใช้คอมพลิเมนต์ฐานลบหนึ่งของเลขฐาน 2, 8, 10 และ 16
7	พีชคณิตบูลีน	<ol style="list-style-type: none"> 1. แสดงความรู้เกี่ยวกับความเป็นมาของพีชคณิตบูลีน 2. แสดงความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับกฎของพีชคณิตบูลีน 3. แสดงการลดรูปสมการโดยใช้กฎของพีชคณิตบูลีน 4. แสดงการพิสูจน์ความถูกต้องของสมการก่อนและหลังการลดรูปสมการ
8	ตรรกศาสตร์	<ol style="list-style-type: none"> 1. แสดงความรู้เกี่ยวกับความหมายและชนิดของประพจน์ 2. แสดงความรู้เกี่ยวกับการหาค่าความจริงของประพจน์ 3. แสดงความรู้เกี่ยวกับการสร้างตารางหาค่าความจริงของประพจน์ 4. แสดงความรู้เกี่ยวกับการตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์ และรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน 5. แสดงความรู้เกี่ยวกับประโยคเปิด
9	วิวัฒนาการและหลักการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์	<ol style="list-style-type: none"> 1. แสดงความรู้เกี่ยวกับวิวัฒนาการของเครื่องคำนวณ 2. แสดงความรู้เกี่ยวกับหลักการคำนวณของคอมพิวเตอร์ 3. คำนวณหาผลลัพธ์จากตัวดำเนินการ 4. แสดงลำดับความสำคัญของเครื่องหมายการคำนวณ
10	ความสัมพันธ์ระหว่างการคำนวณทางคณิตศาสตร์กับคอมพิวเตอร์	<ol style="list-style-type: none"> 1. แสดงความแตกต่างระหว่างคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวันกับคณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์ 2. แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระบบเลขฐานสองกับระบบดิจิทัล 3. แสดงหลักพื้นฐานในการประมวลผลของคอมพิวเตอร์ 4. แสดงความรู้เกี่ยวกับการทำงานของหน่วยประมวลผลทางคณิตศาสตร์และตรรกะ 5. แสดงการทำงานของลอจิกเกตแบบต่างๆ 6. แสดงการคำนวณของวงจรลบเลข 7. แสดงการคำนวณของวงจรบวกเลข

สารบัญ

หน้า

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 วิวัฒนาการของระบบจำนวน 1

1. ระบบรวมกลุ่มอย่างง่าย 3
 2. ระบบรวมกลุ่มแบบคูณ 5
 3. ระบบตัวเลขทศ 6
 4. ระบบตัวเลขเชิงหลัก 7
- แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้ 11

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ระบบจำนวน 13

1. จำนวนจริง 14
 2. จำนวนเต็มบวก 16
 3. จำนวนเต็ม 18
 4. จำนวนตรรกยะ 19
 5. จำนวนอตรรกยะ 20
 6. เส้นจำนวนจริง 20
- แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้ 23

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 พีชคณิตเชิงเส้น 25

1. ความหมายของสมการ 26
 2. สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 26
 3. ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 29
 4. กราฟของสมการเชิงเส้นสองตัวแปร 31
- แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้ 37

หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 เมทริกซ์ 42

1. ความหมายของเมทริกซ์ 43
2. สัญลักษณ์ของเมทริกซ์ 43
3. ชนิดของเมทริกซ์ 44
4. ทรานส์โพสของเมทริกซ์ 46
5. การเท่ากันของเมทริกซ์ 47

6. การบวกและการลบเมทริกซ์	48
7. การคูณเมทริกซ์	51
8. ดีเทอร์มิแนนต์	53
9. ไมเนอร์ของสมาชิกของเมทริกซ์จัตุรัส	54
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	60

หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 ระบบเลขฐาน 65

1. ระบบเลขฐานสิบ	66
2. ระบบเลขฐานสอง	67
3. ระบบเลขฐานแปด	76
4. ระบบเลขฐานสิบหก	82
5. การเปลี่ยนเลขฐาน	89
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	102

หน่วยการเรียนรู้ที่ 6 การแทนจำนวนมีเครื่องหมายและคอมพลิเมนต์ 105

1. การแทนจำนวนมีเครื่องหมาย	106
2. ความสำคัญและความหมายของคอมพลิเมนต์	111
3. การคอมพลิเมนต์ของเลขฐานสอง	112
4. การคอมพลิเมนต์ของเลขฐานแปด	113
5. การคอมพลิเมนต์ของเลขฐานสิบ	114
6. การคอมพลิเมนต์ของเลขฐานสิบหก	115
7. การลบเลขโดยใช้คอมพลิเมนต์ฐาน	115
8. การลบเลขโดยใช้คอมพลิเมนต์ฐานลบหนึ่ง	120
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	128

หน่วยการเรียนรู้ที่ 7 พีชคณิตบูลีน 131

1. ความเป็นมาของพีชคณิตบูลีน	132
2. กฎของพีชคณิตบูลีน	133
3. การใช้กฎของพีชคณิตบูลีนในการลดรูปสมการ	135
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	152

หน่วยการเรียนรู้ที่ 8 ตรรกศาสตร์ 155

1. ความหมายและชนิดของประพจน์	156
2. การหาค่าความจริงของประพจน์	157
3. การสร้างตารางค่าความจริง	161

4. ประพจน์ที่สมมูลกัน	164
5. ประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน	165
6. สัจนิรันดร์	166
7. ประพจน์ขัดแย้งกัน	166
8. ประโยคเปิด	167
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	170

หน่วยการเรียนรู้ที่ 9 วิวัฒนาการและหลักการคำนวณของเครื่องคอมพิวเตอร์ 173

1. วิวัฒนาการของเครื่องคำนวณ	174
2. หลักการคำนวณของคอมพิวเตอร์แบบแอนะล็อก แบบดิจิทัล และแบบลูกผสม	182
3. ตัวดำเนินการ (อ้างอิงจากภาษาซี)	184
4. ลำดับความสำคัญของเครื่องหมายการคำนวณ	190
5. ลำดับการคำนวณของคอมพิวเตอร์	191
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	195

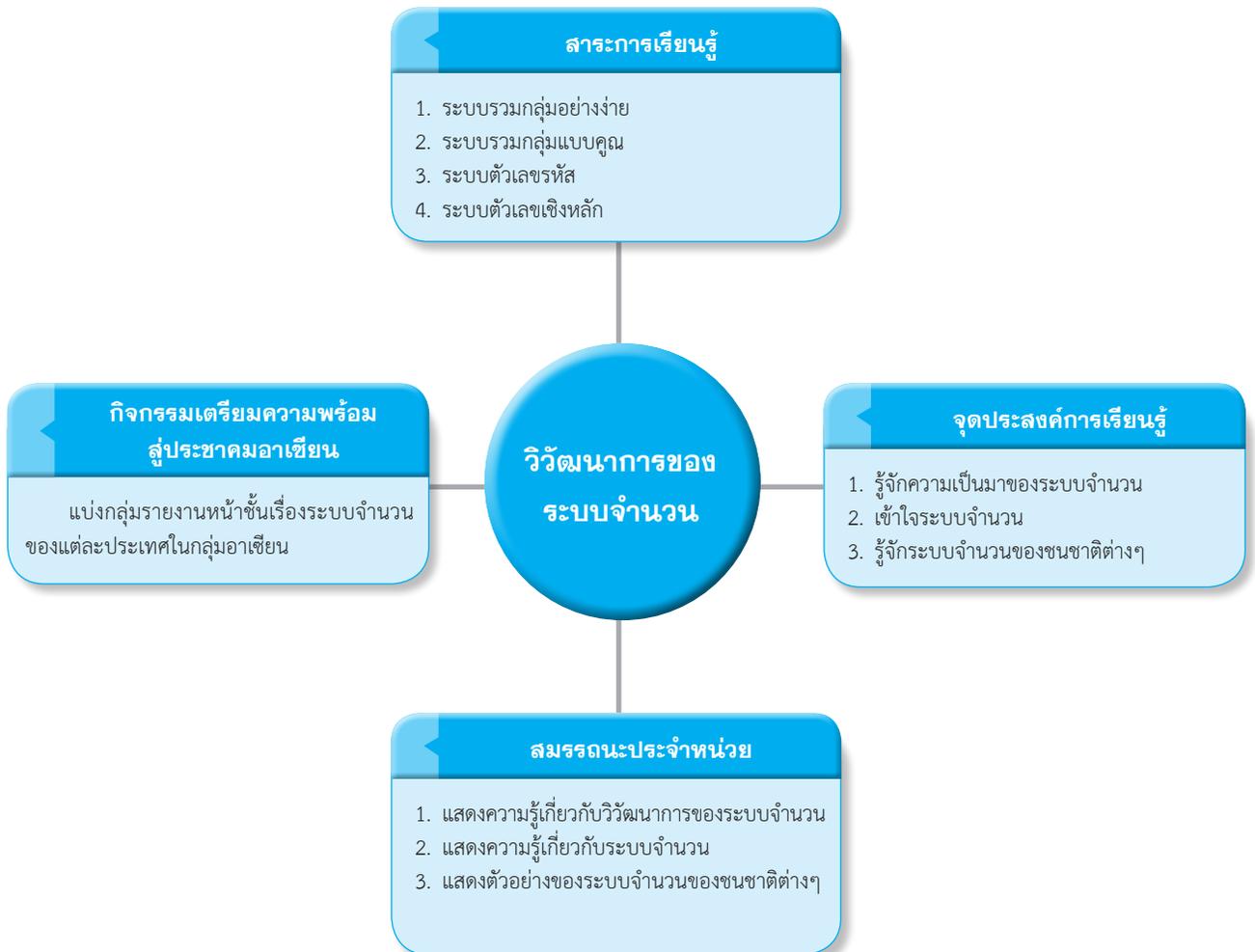
หน่วยการเรียนรู้ที่ 10 ความสัมพันธ์ระหว่างการคำนวณทางคณิตศาสตร์กับคอมพิวเตอร์ 198

1. คณิตศาสตร์กับคอมพิวเตอร์	199
2. ความสัมพันธ์ระหว่างระบบเลขฐานสองกับระบบดิจิทัล	200
3. หลักพื้นฐานในการประมวลผลของคอมพิวเตอร์	201
4. หน่วยคำนวณทางคณิตศาสตร์และตรรกะ	202
5. การทำงานของ ALU	203
6. การคำนวณของ ALU	205
7. วงจรตรรกะ	205
8. ลอจิกเกต	207
9. วงจรบวกเลข	216
10. วงจรลบเลข	220
แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้	228

บรรณานุกรม 232

ดัชนี 233

วิวัฒนาการของระบบจำนวน



วิวัฒนาการของระบบจำนวน

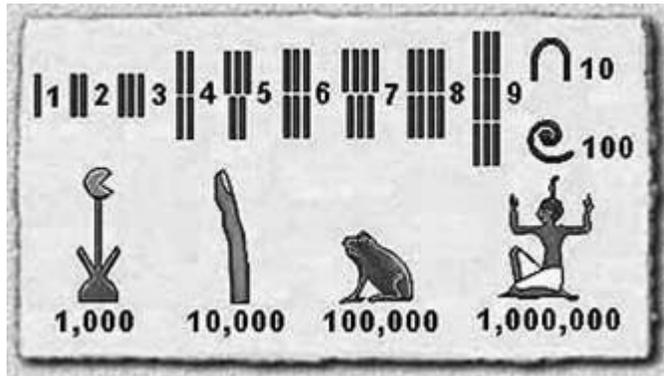
ความคิดเกี่ยวกับการนำจำนวนมาใช้นั้นมีมาตั้งแต่สมัยก่อนประวัติศาสตร์ ซึ่งไม่ได้มีการบันทึกเหตุการณ์ต่างๆ ไว้ จึงไม่มีใครทราบว่าเกิดขึ้นมาตั้งแต่เมื่อไร สิ่งที่ทำให้รู้ว่ามีมนุษย์มีความคิดเกี่ยวกับการนำจำนวนมาใช้ก็คือความเข้าใจในเรื่องการมีสิ่งของมากขึ้นหรือน้อยลง เช่น ถ้ามีสิ่งของอยู่กองหนึ่ง เมื่อนำสิ่งของนั้นมาเพิ่มสิ่งของก็จะมากขึ้น แต่ถ้านำสิ่งของนั้นออกไปสิ่งของนั้นก็จะน้อยลง ต่อมาสังคมมีการพัฒนามากขึ้น มนุษย์เริ่มรู้จักวิธีการนับอย่างง่ายๆ โดยการใช่วิธีการจับคู่ การแบ่งหนึ่งต่อหนึ่ง อุปกรณ์ที่ใช้ในการนับก็คือนิ้วมือ โดยใช้นิ้วมือ 1 นิ้ว แทนสิ่งของ 1 หน่วย และเมื่อมีสิ่งของมากขึ้นก็มีการพัฒนาวิธีในการนับแบบต่างๆ ตามมา เช่น การจับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่ง โดยใช้นิ้วมือ 1 นิ้ว หรือกิ่งไม้ 1 กิ่ง ต่อสัตว์ที่ล่ามาได้จำนวน 1 ตัว เป็นต้น หรือวิธีการใช้ก้อนหิน การผูกเชือกเป็นปม การขีดรอยบนก้อนแร่ ก้อนหิน หรือกระดูก ตัวอย่างเช่น มีฝูงแกะอยู่จำนวนหนึ่ง เวลาเช้าขณะที่ปล่อยแกะออกจากคอก เมื่อปล่อยแกะ 1 ตัวก็หยิบก้อนหินมาวางไว้ 1 ก้อน ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าแกะจะออกจากคอกจนหมด แล้วก็เก็บหินกองนั้นไว้ พอถึงตอนเย็นก็นำฝูงแกะเข้าคอก ขณะที่ฝูงแกะเดินเข้าคอกทีละตัวก็หยิบก้อนหินออกจากกองหินที่กองไว้เมื่อตอนเช้าทีละก้อน จนกว่าก้อนหินจะหมดซึ่งก็จะเท่ากับจำนวนแกะที่ออกไปแสดงว่าแกะยังอยู่ครบทุกตัว แต่ถ้ายังมีก้อนหินเหลืออยู่โดยที่แกะเข้าคอกหมดแล้ว แสดงว่ามีแกะหายไป หรือถ้าก้อนหินหมดแล้วแต่แกะยังเหลืออยู่ก็แสดงว่ามีแกะเกินมาซึ่งอาจจะเป็นแกะของคนอื่นปะปนเข้ามา การแทนจำนวนลักษณะนี้เป็นจุดเริ่มต้นของการนับ แต่นับได้จำนวนไม่มากนัก อาจนับได้จำนวน 1, 2, 3, 4, ซึ่งเป็นที่มาของจำนวนนับหรือจำนวนธรรมชาติ นักโบราณคดีได้สันนิษฐานโดยอาศัยข้อมูลจากการศึกษาของนักมานุษยวิทยาว่า ในสมัยต่อมามนุษย์มีการใช้เสียงในการนับสิ่งของจำนวนน้อยๆ เช่น ชนเผ่าปิกมีในทวีปแอฟริกา มีการนับจำนวนโดยใช้เลขฐาน 3 โดยออกเสียงนับดังนี้ 1 ใช้แทนเสียง “อา” , 2 ใช้แทนเสียง “ไอ” , 3 ใช้แทนเสียง “อุ” ส่วนชนเผ่าพื้นเมืองในกรีนแลนด์มีการนับจำนวนโดยใช้เลขฐาน 2 และในปัจจุบันยังพบว่าบางชนเผ่าในทวีปอเมริกาใต้ใช้เลขฐาน 5 ในการนับจำนวนสิ่งของ

หลังจากที่มนุษย์ใช้วิธีการเปล่งเสียงในการนับจำนวนสิ่งของที่มีจำนวนน้อยๆ แล้ว ก็เริ่มมีการพัฒนาในเรื่องของการเขียนแทนจำนวนโดยการคิดวิธีการเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนสิ่งของ การเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวนเริ่มต้นด้วยรอยขีด เช่น |, ||, ||| แทน 1, 2, 3 ตามลำดับ เป็นต้น สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวนเรียกว่า ตัวเลข ถ้าจะกล่าวถึงระบบการเขียนตัวเลขตั้งแต่สมัยโบราณจนถึงปัจจุบัน สามารถแบ่งเป็น 4 ระบบดังนี้

1. ระบบรวมกลุ่มอย่างง่าย

ระบบรวมกลุ่มอย่างง่าย เป็นระบบการเขียนตัวเลขในระยะแรกที่มีมนุษย์ได้คิดขึ้น ได้แก่

1.1 ตัวเลขของชาวอียิปต์ ซึ่งเรียกว่า **ตัวเลขไฮโรกลิฟิกส์ (Hieroglyphics)** ใช้ในช่วงประมาณ 3,400 ปี ก่อนคริสต์ศักราช



รูปที่ 1.1 ตัวเลขไฮโรกลิฟิกส์ (Hieroglyphics Numbers)



รูปที่ 1.2 ตัวอักษรไฮโรกลิฟิกส์ (Hieroglyphics Alphabets)

ในการเขียนตัวเลขไฮโรกลิฟิกส์แทนจำนวน ใช้วิธีเขียนตัวเลขเรียงกันซึ่งจะเขียนเรียงอย่างไรก็ได้ แล้วนำค่ามาบวกกัน โดยดูค่าจากรูปที่ 1.1 เช่น

||kkkk๑

มีค่าเท่ากับ 132

↓↓๑๑๑

มีค่าเท่ากับ 2,210

↓↓↓๑kkk||

มีค่าเท่ากับ 3,244

↓↓๑kkk|||

มีค่าเท่ากับ 21,237

↓↓↓↓๑๑๑kkkk|||

มีค่าเท่ากับ 4,568

1.2 ตัวเลขของชาวบาบิโลน เรียกว่า **คูนiform (Cuneiform)** ใช้ในช่วงประมาณ 3,000 ปี ก่อนคริสต์ศักราช ซึ่งชาวบาบิโลน ได้บันทึกสัญลักษณ์แทนจำนวนลงบนแผ่นดินเหนียว แล้วนำไปอบเก็บไว้เป็นหลักฐาน สัญลักษณ์ดังกล่าวมีลักษณะคล้ายรูปลิ้ม ชาวบาบิโลนได้สร้างระบบเลขฐาน 60 ซึ่งเรียกว่า **เซกซาเจซิมอล(Sexagesimal Number)** โดยจะมีตัวเลขตั้งแต่ 1-59 ใช้ในการนับเวลาและการกำหนดดวงศาดำแหน่งของดวงดาว แสดงดังรูปที่ 1.3 ปัจจุบันถูกเก็บไว้ที่พิพิธภัณฑ์ของมหาวิทยาลัยโคลัมเบีย ประเทศสหรัฐอเมริกา

1	▽	11	◁▽	21	◁◁▽	31	◁◁◁▽	41	◁◁◁◁▽	51	◁◁◁◁◁▽
2	▽▽	12	◁▽▽	22	◁◁▽▽	32	◁◁◁▽▽	42	◁◁◁◁▽▽	52	◁◁◁◁◁▽▽
3	▽▽▽	13	◁▽▽▽	23	◁◁▽▽▽	33	◁◁◁▽▽▽	43	◁◁◁◁▽▽▽	53	◁◁◁◁◁▽▽▽
4	▽▽▽▽	14	◁▽▽▽▽	24	◁◁▽▽▽▽	34	◁◁◁▽▽▽▽	44	◁◁◁◁▽▽▽▽	54	◁◁◁◁◁▽▽▽▽
5	▽▽▽▽▽	15	◁▽▽▽▽▽	25	◁◁▽▽▽▽▽	35	◁◁◁▽▽▽▽▽	45	◁◁◁◁▽▽▽▽▽	55	◁◁◁◁◁▽▽▽▽▽
6	▽▽▽▽▽▽	16	◁▽▽▽▽▽▽	26	◁◁▽▽▽▽▽▽	36	◁◁◁▽▽▽▽▽▽	46	◁◁◁◁▽▽▽▽▽▽	56	◁◁◁◁◁▽▽▽▽▽▽
7	▽▽▽▽▽▽▽	17	◁▽▽▽▽▽▽▽	27	◁◁▽▽▽▽▽▽▽	37	◁◁◁▽▽▽▽▽▽▽	47	◁◁◁◁▽▽▽▽▽▽▽	57	◁◁◁◁◁▽▽▽▽▽▽▽
8	▽▽▽▽▽▽▽▽	18	◁▽▽▽▽▽▽▽▽	28	◁◁▽▽▽▽▽▽▽▽	38	◁◁◁▽▽▽▽▽▽▽▽	48	◁◁◁◁▽▽▽▽▽▽▽▽	58	◁◁◁◁◁▽▽▽▽▽▽▽▽
9	▽▽▽▽▽▽▽▽▽	19	◁▽▽▽▽▽▽▽▽▽	29	◁◁▽▽▽▽▽▽▽▽▽	39	◁◁◁▽▽▽▽▽▽▽▽▽	49	◁◁◁◁▽▽▽▽▽▽▽▽▽	59	◁◁◁◁◁▽▽▽▽▽▽▽▽▽
10	◁	20	◁◁	30	◁◁◁	40	◁◁◁◁	50	◁◁◁◁◁		

รูปที่ 1.3 อักษรลิ้มหรือคูนiform (Cuneiform)

ถ้าต้องการคำนวณตัวเลข 1,45,29,36 ในรูปแบบของคูนiformเป็นตัวเลขฐานสิบที่ใช้กันทั่วไป สามารถคำนวณได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 1,45,29,36 &= (1 \times 60^3) + (45 \times 60^2) + (29 \times 60) + 36 \\
 &= (1 \times 216000) + (45 \times 3600) + (29 \times 60) + 36 \\
 &= 216000 + 162000 + 1740 + 36 \\
 &= 379776
 \end{aligned}$$

ถ้าต้องการเขียนตัวเลข 1,45,29,36 ในรูปแบบของคูนiform สามารถเขียนได้ดังนี้



สำหรับคูนiform นั้นจะไม่มี 0 แต่ถ้าตัวเลขที่เขียนมี 0 จะใช้ช่องว่างแทน 0 เช่น ตัวเลข 4,0,8 สามารถเขียนได้เป็น  

2. ระบบรวมกลุ่มแบบคูน

ระบบรวมกลุ่มแบบคูน พัฒนามาจากระบบรวมกลุ่มอย่างง่าย กลุ่มชนที่ใช้ตัวเลขแบบนี้คือชาวจีนและชาวญี่ปุ่น

ถ้าต้องการเขียนตัวเลข 123 เป็นภาษาจีนประยุกต์และจีนกลาง สามารถเขียนได้ดังนี้

Simple Chinese = 一百二十三
Complex Chinese = 壹佰貳拾叁

Numbers	Simple Chinese	Complex Chinese
0	〇	零
1	一	壹
2	二	貳
3	三	參
4	四	肆
5	五	伍
6	六	陸
7	七	柒
8	八	捌
9	九	玖
10	十	拾
100	百	佰
1000	千	仟
10000	万	萬

รูปที่ 1.4 ตัวเลขจีนประยุกต์ (Simple Chinese) และตัวเลขจีนกลาง (Complex Chinese)

3. ระบบตัวเลขรหัส

ระบบตัวเลขรหัส ส่วนใหญ่จะใช้ตัวอักษรในการแสดงจำนวน เช่น ระบบตัวเลขกรีก ซึ่งเป็นพื้นฐานของระบบตัวเลขโรมันและมีการใช้อยู่จนถึงทุกวันนี้

ถ้าต้องการเขียน 4,567 เป็นตัวเลขกรีก สามารถเขียนได้ดังนี้

$$4,000 + 500 + 60 + 7 = 4,567$$

เขียนเป็น Acrophonic Attic จะได้ XXXX Γ^ϞΓ^ϟΔΓΠ

เขียนเป็น Alphabetic Greek จะได้ 'δφξζ

Numbers	Acrophonic Greek	Alphabetic Greek
1	I	α
2	II	β
3	III	γ
4	IIII	δ
5	Γ	ε
6	ΓI	ς
7	ΓII	ζ
8	ΓIII	η
9	ΓIIII	θ
10	Δ	ι
20	ΔΔ	κ
30	ΔΔΔ	λ
40	ΔΔΔΔ	μ
50	Γ ^Ϟ	ν
60	Γ ^Ϟ Δ	ξ
70	Γ ^Ϟ ΔΔ	ο
80	Γ ^Ϟ ΔΔΔ	π
90	Γ ^Ϟ ΔΔΔΔ	ρ
100	H	σ
200	HH	λ
30	ΔΔΔ	υ
400	HHHH	φ
500	Γ ^Ϟ	χ
600	Γ ^Ϟ H	ψ
700	Γ ^Ϟ HH	ω
800	Γ ^Ϟ HHH	α
900	Γ ^Ϟ HHHH	

รูปที่ 1.5 รหัสแทนตัวเลขกรีก

1 I	21 XXI	41 XLI	61 LXI	81 LXXXI
2 II	22 XXII	42 XLII	62 LXXII	82 LXXXII
3 III	23 XXIII	43 XLIII	63 LXXIII	83 LXXXIII
4 IV	24 XXIV	44 XLIV	64 LXXIV	84 LXXXIV
5 V	25 XXV	45 XLV	65 LXXV	85 LXXXV
6 VI	26 XXVI	46 XLVI	66 LXXVI	86 LXXXVI
7 VII	27 XXVII	47 XLVII	67 LXXVII	87 LXXXVII
8 VIII	28 XXVIII	48 XLVIII	68 LXXVIII	88 LXXXVIII
9 IX	29 XXIX	49 XLIX	69 LXXIX	89 LXXXIX
10 X	30 XXX	50 L	70 LXX	90 XC
11 XI	31 XXXI	51 LI	71 LXXI	91 XCI
12 XII	32 XXXII	52 LII	72 LXXII	92 XCII
13 XIII	33 XXXIII	53 LIII	73 LXXIII	93 XCIII
14 XIV	34 XXXIV	54 LIV	74 LXXIV	94 XCIV
15 XV	35 XXXV	55 LV	75 LXXV	95 XCV
16 XVI	36 XXXVI	56 LVI	76 LXXVI	96 XCVI
17 XVII	37 XXXVII	57 LVII	77 LXXVII	97 XCVII
18 XVIII	38 XXXVIII	58 LVIII	78 LXXVIII	98 XCVIII
19 XIX	39 XXXIX	59 LIX	79 LXXIX	99 XCIX
20 XX	40 XL	60 LX	80 LXXX	100 C

200 CC 300 CCC 400 CD 500 D 600 DC 700 DCC 800 DCCC 900 CM 1000 M

รูปที่ 1.6 รหัสแทนตัวเลขโรมัน

ถ้าต้องการเขียน 1,999 เป็นตัวเลขโรมัน ซึ่งดูรหัสจากรูปที่ 1.6 สามารถเขียนได้ดังนี้

1,000 = M, 900 = CM, 90 = XC, 9 = IX นำมารวมกันจะได้ MCMXCIX

4. ระบบตัวเลขเชิงหลัก

ระบบตัวเลขเชิงหลัก เช่น ระบบตัวเลขไทย ระบบตัวเลขฮินดูอารบิก ระบบตัวเลขที่นิยมใช้ใน ปัจจุบันเป็นระบบตัวเลขฮินดูอารบิก ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อประมาณ 300 ปี ก่อนคริสต์ศักราช ที่ประเทศอินเดีย โดยเป็นระบบตัวเลขฐานสิบ มีสัญลักษณ์ทั้งหมด 10 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 มีการสันนิษฐานว่าระบบตัวเลขฮินดูอารบิกนี้ได้ถูกเผยแพร่ไปยังชาวอาหรับในช่วง ค.ศ. 700-800 โดยตำราคณิตศาสตร์ของชาวอินเดีย หลังจากนั้นก็ได้แพร่กระจายไปยังประเทศในแถบยุโรป โดยมีการแปลไปเป็นภาษาละตินในช่วง ค.ศ.1100-1200 และถูกแปลเป็นภาษาอังกฤษในช่วง ค.ศ. 1400-1500 โดยเข้ามาจนถึงปัจจุบัน

Value	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Western Arabic	•	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Eastern Arabic	•	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Devanagari	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Gujarati	૦	૧	૨	૩	૪	૫	૬	૭	૮	૯
Gurmukhi	੦	੧	੨	੩	੪	੫	੬	੭	੮	੯
Bengali	০	১	২	৩	৪	৫	৬	৭	৮	৯
Oriya	୦	୧	୨	୩	୪	୫	୬	୭	୮	୯
Telugu	౦	౧	౨	౩	౪	౫	౬	౭	౮	౯
Kannada	೦	೧	೨	೩	೪	೫	೬	೭	೮	೯
Malayalam	൦	൧	൨	൩	൪	൫	൬	൭	൮	൯
Tamil (Grantha)	௦	௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯
Tibetan	༠	༡	༢	༣	༤	༥	༦	༧	༨	༩
Thai	๐	๑	๒	๓	๔	๕	๖	๗	๘	๙
Khmer	០	១	២	៣	៤	៥	៦	៧	៨	៩
Lao	໐	໑	໒	໓	໔	໕	໖	໗	໘	໙

รูปที่ 1.7 ตัวเลขของชนชาติต่างๆ ที่ใช้ในระบบตัวเลขฮินดูอารบิก

หลังจากที่มนุษย์ได้พัฒนาในเรื่องของจำนวนและตัวเลขแล้ว ต่อมาก็ได้มีการพัฒนาเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการระหว่างจำนวน เช่น การบวก การลบ การคูณ การหาร ซึ่งทำให้เกิดความก้าวหน้าในวิชาคณิตศาสตร์ เช่น การหาพื้นที่ การหาปริมาตร ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นต้น

กิจกรรมตรวจสอบความเข้าใจ

จงตอบคำถามต่อไปนี้ให้ถูกต้อง

1. จงอธิบายวิวัฒนาการของระบบจำนวน

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงยกตัวอย่างและอธิบายระบบจำนวนแบบระบบรวมกลุ่มอย่างง่าย

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงยกตัวอย่างและอธิบายระบบจำนวนแบบระบบรวมกลุ่มแบบคุณ

.....

.....

.....

.....

.....

4. จงยกตัวอย่างและอธิบายระบบจำนวนแบบระบบตัวเลขรหัส

.....

.....

.....

.....

.....

5. จงยกตัวอย่างและอธิบายระบบจำนวนแบบระบบตัวเลขเชิงหลัก

.....

.....

.....

.....

.....

กิจกรรมเตรียมความพร้อมสู่ประชาคมอาเซียน

แบ่งกลุ่มออกเป็น 10 กลุ่ม โดยให้แต่ละกลุ่มไปค้นคว้าและทำรายงานเรื่อง ระบบจำนวนของประเทศในกลุ่มอาเซียนทั้งหมด 10 ประเทศ โดยเลือกกลุ่มละ 1 ประเทศ แล้วออกมารายงานหน้าชั้นเรียน

สรุป

ระบบจำนวนเริ่มมีมาตั้งแต่เมื่อไรนั้นยังไม่มีหลักฐานที่ชัดเจน เพียงแต่มีการสันนิษฐานไว้เท่านั้น ซึ่งทุกชนชาติต่างก็มีระบบจำนวนเป็นของตนเองแต่ผลลัพธ์ที่ได้จากการคำนวณจะมีค่าเท่ากัน วิธีในการคิดคำนวณก็จะแตกต่างกันไป ระบบจำนวนแสดงให้เห็นวิวัฒนาการต่างๆ ที่เกิดขึ้นเริ่มจากการนับจำนวนโดยใช้ก้อนหินหรือกิ่งไม้ ต่อมาก็พัฒนาเป็นสัญลักษณ์แทนจำนวนต่างๆ จนเป็นตัวเลข ซึ่งทำให้มีนวัตกรรมใหม่ๆ เกิดขึ้นจากการใช้ระบบจำนวนมาคำนวณหาค่าต่างๆ อย่างมากมาย แม้แต่คอมพิวเตอร์ก็ยังต้องใช้ระบบจำนวนมาช่วยในการคำนวณและประมวลผลโปรแกรมหรือข้อมูลต่างๆ ตามที่มนุษย์ได้จัดลำดับขั้นตอนให้ ระบบจำนวนแบ่งเป็น 4 ระบบ คือ ระบบรวมกลุ่มอย่างง่าย ระบบรวมกลุ่มแบบคุณ ระบบตัวเลขรหัส และระบบตัวเลขเชิงหลัก

แบบทดสอบเพื่อประเมินผลหลังการเรียนรู้

จงใส่ T หน้าข้อที่ถูก และใส่ F หน้าข้อที่ผิด

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ 1 รู้จักความเป็นมาของระบบจำนวน

- 1. ไม่มีใครทราบว่าระบบจำนวนเกิดขึ้นเมื่อไร
- 2. การมีจำนวนสิ่งของมากขึ้นหรือน้อยลงไม่ได้เกี่ยวข้องกับระบบจำนวน
- 3. ชาวกรีกโบราณเป็นผู้คิดค้นระบบจำนวน
- 4. การจับคู่ถือเป็นวิวัฒนาการของระบบจำนวน
- 5. ระบบจำนวนเกิดจากจินตนาการของมนุษย์
- 6. สามารถใช้เสียงแทนกลุ่มของจำนวนสิ่งของน้อยๆ ได้
- 7. หลังจากมนุษย์ใช้วิธีการเปล่งเสียงในการนับจำนวน ต่อมาก็พัฒนาเป็นเขียนสัญลักษณ์แทนจำนวน
- 8. ตัวเลขฐานต่างๆ ไม่ใช่ระบบจำนวน
- 9. ระบบจำนวนที่เป็นระบบรวมกลุ่มอย่างง่ายเป็นระบบจำนวนระยะแรกที่มีมนุษย์ได้คิดขึ้น

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ 2 เข้าใจระบบจำนวน

- 10. การนับนิ้วมือเป็นวิธีการนับไม่ใช่ระบบจำนวน
- 11. สัญลักษณ์ที่ใช้แทนจำนวน คือ ตัวเลข
- 12. ไม่สามารถใช้สัญลักษณ์แทนจำนวนได้
- 13. ตัวเลข 1, 2, 3 เป็นระบบจำนวน
- 14. สัญลักษณ์ |, ||, ||| แทนจำนวน 123
- 15. 1, 2, 3, 4, ... เป็นจำนวนนับหรือจำนวนธรรมชาติ

จุดประสงค์การเรียนรู้ที่ 3 รู้จักระบบจำนวนของชนชาติต่างๆ

- 16. ตัวเลขไฮโรกลิฟิกส์ (Hieroglyphics) เป็นตัวเลขของชาวอียิปต์
- 17. การเขียนตัวเลขอียิปต์แทนจำนวน จะใช้วิธีเขียนตัวเลขเรียงกันซึ่งจะเขียนเรียงอย่างไรก็ได้ แล้วนำค่ามาบวกกัน

- 18. ตัวเลขของชาวบาบิโลน เรียกว่า คูนิฟอร์ม
- 19. ชาวบาบิโลนได้สร้างระบบเลขฐาน 60 ซึ่งเรียกว่า เซกซาเจซิมอล(Sexagesimal number)
- 20. ตัวเลขของชาวอินเดียแดงจะใช้ในการนับเวลาและการกำหนดองศาตำแหน่งของดวงดาว
- 21. อักษรคูนิฟอร์มนั้นจะไม่มี 0 แต่ถ้าตัวเลขที่เขียนมี 0 จะใช้ช่องว่างแทน
- 22. ระบบรวมกลุ่มแบบคุณ พัฒนามาจากระบบรวมกลุ่มแบบง่าย
- 23. ชาวจีนและญี่ปุ่นใช้ระบบจำนวนแบบระบบรวมกลุ่มอย่างง่าย
- 24. ระบบจำนวนที่เป็นแบบระบบตัวเลขรหัส ส่วนใหญ่จะใช้ในระบบคอมพิวเตอร์
- 25. ระบบตัวเลขที่นิยมใช้ในปัจจุบันเป็นระบบตัวเลขฮินดูอารบิก
- 26. ระบบตัวเลขไทยเป็นระบบตัวเลขฮินดูอารบิก
- 27. ระบบตัวเลขไทยเป็นระบบตัวเลขเชิงหลัก
- 28. ระบบตัวเลขรหัส ส่วนใหญ่จะใช้รหัสในการแสดงจำนวน
- 29. ระบบตัวเลขโรมันเป็นระบบตัวเลขรหัส
- 30. การดำเนินการระหว่างจำนวน คือ การบวก การลบ การคูณ การหาร

