



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

คณิตศาสตร์ 1

Mathematical Statistics I

ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 3



$$\begin{aligned}
 M_1(t) &= E[e^{tX}] \\
 &= E[e^{tX^{(1)}}] \\
 &= E[e^{tX^{(2)}}] \\
 &= E[e^{tX^{(3)}}] \\
 &= e^t E[e^{tX^{(1)}}] \\
 &= e^t M_1(-t) \\
 M_1(t) &= (1-p+pe^t)' \\
 M_1(t) &= e^t(1-p+pe^{-t})' \\
 &= (e^t(1-p)+e^tpe^{-t})' \\
 &= (e^t(1-p)+e^tpe^{-t})' \\
 &= (p+1-p)e^t, \quad -\infty < t < \infty
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \frac{A^k}{(2A)^k} \\
 &= e^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(2A)^k} \\
 &= e^{-A} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = e^{-A} \cdot 2 = 2e^{-A} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^k}{(k!)^2} = 1 - \frac{A^1}{2!} + \frac{A^2}{3!} - \frac{A^3}{4!} + \dots \\
 &= e^{-A} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{(k!)^2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2! \cdot k!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2! \cdot k!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2! \cdot k!} \\
 &= e^{-A} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2! \cdot k!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2! \cdot k!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{2! \cdot k!} \\
 &P(Y=1) = e^{-A} \left(\frac{e^A - e^{-A}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 - e^{-2A}) \\
 &P(Y=-1) = e^{-A} \left(\frac{e^A + e^{-A}}{2} \right) = \frac{1}{2} (1 + e^{-2A})
 \end{aligned}$$

ดร.กมล บุชบา

คณิตสถิติศาสตร์ 1

Mathematical Statistics I



ถ่ายเอกสารแทนการใช้หนังสือ
คือการทำลายภูมิปัญญาสร้างสรรค์

คณิตสถิติศาสตร์ 1
Mathematical Statistics I
ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 3

รองศาสตราจารย์ ดร.กมล บุษบา
สาขาวิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

2566

หนังสือที่ได้รับทุนสนับสนุนการเขียนตำราจากมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ พ.ศ. 2563

กมล นุชบา.

คณิตสถิติศาสตร์ 1 = *Mathematical Statistics I*

1. คณิตศาสตร์สถิติ. 2. ตัวแปรสุ่ม.

QA276

ISBN 978-616-602-046-5

ISBN (E-BOOK) 978-616-602-055-7

ลิขสิทธิ์ของรองศาสตราจารย์ ดร.กมล นุชบา

สงวนลิขสิทธิ์

ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 3 เดือนกันยายน 2566

จำนวน 80 เล่ม

ฉบับอิเล็กทรอนิกส์ (e-book) เดือนกันยายน 2566

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดยสำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ทำพระจันทร์: อาคารธรรมศาสตร์ 60 ปี ชั้น U1 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ถนนพระจันทร์ กรุงเทพฯ 10200 โทร. 0-2223-9232

ศูนย์รังสิต: อาคารโดมบริหาร ชั้น 3 ห้อง 317 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ตำบลคลองหนึ่ง อำเภอคลองหลวง จังหวัดปทุมธานี 12120

โทร. 0-2564-2859-60 โทรสาร 0-2564-2860

<http://thammasatpress.tu.ac.th>, e-mail: unipress@tu.ac.th

พิมพ์ที่โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

พิมพ์ครั้งที่ 1 เดือนสิงหาคม	2564	จำนวน 100 เล่ม
------------------------------	------	----------------

พิมพ์ครั้งที่ 2 เดือนกรกฎาคม	2565	จำนวน 100 เล่ม
------------------------------	------	----------------

พิมพ์ครั้งที่ 3 เดือนกันยายน	2566	จำนวน 80 เล่ม
------------------------------	------	---------------

ราคาเล่มละ 480.- บาท

สารบัญ

คำนำ	(9)
บทที่ 1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์	1
1.1 กล่าวนำ	1
1.2 นิยามของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์	1
1.3 สมบัติของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์	7
1.4 สรุป	21
แบบฝึกหัดบทที่ 1	22
บรรณานุกรม	28
บทที่ 2 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม	29
2.1 กล่าวนำ	29
2.2 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง	30
2.2.1 วิธีการแปลง	30
2.2.2 วิธีการใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์	43
2.3 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง	47
2.3.1 วิธีฟังก์ชันการแจกแจง	47
2.3.2 วิธีการแปลงกรณีตัวแปรสุ่มตัวเดียว	61
2.3.3 วิธีการแปลงกรณีตัวแปรสุ่มหลายตัว	75
2.3.4 วิธีการใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์	98
2.4 สรุป	104
แบบฝึกหัดบทที่ 2	105
ภาคผนวก	110
บรรณานุกรม	111
บทที่ 3 ตัวสถิติอันดับและการแจกแจงค่าตัวอย่าง	113
3.1 กล่าวนำ	113
3.2 นิยามและการแจกแจงของตัวสถิติอันดับ	114
3.2.1 การแจกแจงของตัวสถิติต่ำสุดและตัวสถิติสูงสุด	115
3.2.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม	117

3.2.3	ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวสถิติอันดับที่ k	119
3.2.4	ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของตัวสถิติอันดับที่ j และ k	122
3.3	การแจกแจงของฟังก์ชันของตัวสถิติอันดับ	124
3.4	การแจกแจงค่าตัวอย่าง	132
3.4.1	การแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่าง	132
3.4.2	การแจกแจงของผลบวกกำลังสอง	136
3.5	การแจกแจงที่	138
3.6	การแจกแจงเอฟ	141
3.7	สรุป	142
	แบบฝึกหัดบทที่ 3	143
	บรรณานุกรม	146
บทที่ 4	ทฤษฎีบทปิดจำกัดและการลู่เข้าของลำดับของตัวแปรสุ่ม	147
4.1	กล่าวนำ	147
4.2	อสมการของเชบีเชฟ	147
4.3	การลู่เข้าเชิงความน่าจะเป็น	150
4.4	การลู่เข้าเชิงการแจกแจง	157
4.5	สรุป	174
	แบบฝึกหัดบทที่ 4	175
	บรรณานุกรม	179
บทที่ 5	สมบัติของตัวประมาณแบบจุด	181
5.1	กล่าวนำ	181
5.2	แนวคิดในการประมาณค่า	181
5.3	ความไม่เอนเอียง	184
5.4	ความคงเส้นคงวา	193
5.5	ความมีประสิทธิภาพ	201
5.6	ความพอเพียง	217
5.7	ตัวประมาณไม่เอนเอียงแปรปรวนต่ำสุด	228
5.8	สรุป	234
	แบบฝึกหัดบทที่ 5	235
	บรรณานุกรม	240

บทที่ 6 การหาตัวประมาณ	241
6.1 กล่าวนำ	241
6.2 วิธีโมเมนต์	241
6.3 วิธีภาวน่าจะเป็นสูงสุด	251
6.4 ตัวประมาณที่สร้างจากตัวสถิติพอเพียง	263
6.5 ตัวประมาณของเบส์	279
6.6 สรุป	286
แบบฝึกหัดบทที่ 6	287
บรรณานุกรม	290
 บทที่ 7 การบูรณาการในงานวิจัย	 291
7.1 กล่าวนำ	291
7.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงแบบเกาส์ผกผันที่ถูกสร้างพารามิเตอร์ใหม่	291
7.2.1 การสร้างพารามิเตอร์ใหม่	292
7.2.2 การสร้างการแจกแจงใหม่	293
7.2.2.1 การคูณด้วยค่าคงตัว	293
7.2.2.2 การใช้ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง	294
7.2.2.3 การยกกำลัง	295
7.2.3 การหาตัวประมาณโดยวิธีโมเมนต์	298
7.2.4 การหาตัวประมาณโดยวิธีภาวน่าจะเป็นสูงสุด	298
7.2.5 การเปรียบเทียบตัวประมาณด้วยการจำลอง	301
7.3 การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงรอยร้าวสามพารามิเตอร์	303
7.3.1 การแจกแจงเวลาช่วงชีวิต	304
7.3.2 การแจกแจงผสม	304
7.3.3 การแจกแจงรอยร้าวสามพารามิเตอร์	308
7.3.4 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่มรอยร้าวสามพารามิเตอร์	308
7.3.5 ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะและฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์	309
7.3.6 การหาตัวประมาณ	313
7.4 การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงแบบเกาส์ผกผันความยาวเอนเอียงสองด้าน	317
7.4.1 การแจกแจงแบบเกาส์ผกผันความยาวเอนเอียง	317
7.4.2 สมบัติเชิงส่วนกลับ	320

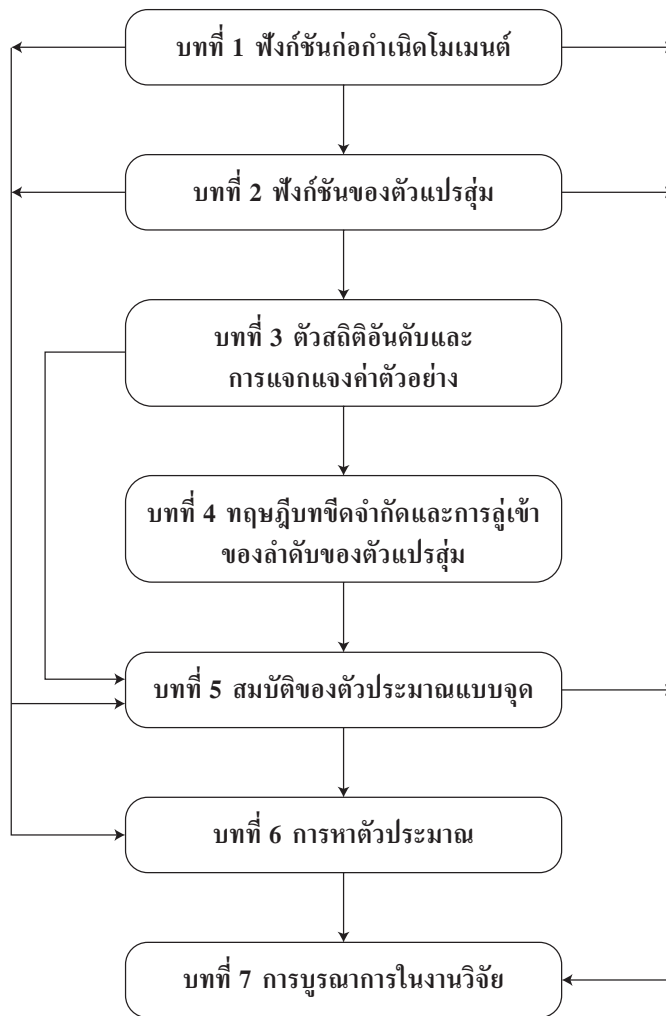
7.4.3	โมเมนต์สี่อันดับแรก	321
7.4.3.1	คิวมูแลนต์	321
7.4.3.2	ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะและโมเมนต์	328
7.4.4	การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีโมเมนต์	330
7.4.5	การศึกษาสมบัติของตัวประมาณด้วยการจำลอง	331
7.4.6	ตัวอย่างการคำนวณจากข้อมูลจริง	333
7.5	สรุป	335
	บรรณานุกรม	336
ภาคผนวก		
A1	พื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์	338
A2	การแจกแจงความน่าจะเป็น ค่าเฉลี่ย ความแปรปรวนและฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์	341
	ตารางความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐาน	344
	เฉลยแบบฝึกหัด	345
	ดัชนี	405

คำนำ

ตำราเล่มนี้เรียบเรียงขึ้นเพื่อใช้ประกอบการสอนสำหรับวิชา “คณิตสถิติศาสตร์ 1” ซึ่งเป็นวิชาบังคับในระดับปริญญาตรีสำหรับนักศึกษาหลักสูตรสถิติ และนักศึกษาหลักสูตรอื่นที่ต้องการศึกษาสถิติเป็นวิชาโท นอกจากนี้ยังใช้ประกอบการสอนวิชา “คณิตสถิติศาสตร์” สำหรับนักศึกษาหลักสูตรวิทยาการประกันภัย เนื่องจากต้องการให้ตำราเล่มนี้สามารถใช้ในการศึกษาด้วยตนเองได้ ดังนั้นจึงแสดงวิธีการหาคำตอบหรือพิสูจน์ในตัวอย่างหรือในทฤษฎีบทอย่างละเอียด โดยมีหัวข้อต่างๆ ตามคำอธิบายของรายวิชานี้ แต่ละหัวข้อหรือแต่ละบทจะมีแบบฝึกหัดให้นักศึกษาฝึกฝนและมีบรรณานุกรมเฉพาะเพื่อใช้ในการอ้างอิงรวมทั้งการค้นคว้าเพิ่มเติม

บทที่ 1 กล่าวถึงฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ ซึ่งเป็นค่าคาดหวังหนึ่งของตัวแปรสุ่มที่มีความสำคัญในการศึกษาทฤษฎีทางสถิติศาสตร์รวมถึงการประยุกต์ใช้ในทฤษฎีความเสี่ยง ตัวแบบความสูญเสียในงานด้านวิทยาการประกันภัย บทที่ 2 และ 3 กล่าวถึงฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในลักษณะที่แตกต่างกัน กล่าวคือในบทที่ 2 เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มที่อยู่ในรูปของการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ แต่บทที่ 3 เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มที่อยู่ในรูปของการจัดอันดับขนาดตัวแปรสุ่มในตัวอย่างสุ่มซึ่งทั้งสองบทมีประโยชน์ในการการอนุมานเชิงสถิติทั้งแบบที่ใช้และเหมือนไม่ใช้พารามิเตอร์ นอกจากนี้ในบทที่ 3 ยังกล่าวถึงการแจกแจงของค่าที่ได้จากตัวอย่าง เช่น ค่าเฉลี่ย ผลบวกกำลังสอง การแจกแจงที การแจกแจงเอฟ ซึ่งเชื่อมโยงให้เห็นแนวคิดเชิงทฤษฎีและการนำตัวสถิติไปใช้ทดสอบสมมุติฐาน บทที่ 4 กล่าวถึงทฤษฎีบทขีดจำกัดและการเข้าสู่ของตัวแปรสุ่มซึ่งเป็นผลลัพธ์เชิงทฤษฎีที่สำคัญที่นำไปสู่ “กฎจำนวนมาก (Laws of Large Numbers)” และ “ทฤษฎีบทขีดจำกัดส่วนกลาง (Central Limit Theorems)” บทที่ 5 และบทที่ 6 เป็นส่วนหนึ่งที่สำคัญของทฤษฎีอนุมานเชิงสถิติ โดยบทที่ 5 กล่าวถึงสมบัติที่ควรมีของตัวประมาณแบบจุด ส่วนบทที่ 6 กล่าวถึงวิธีการหาตัวประมาณแบบจุดทั้งในแนวทางเชิงแบบฉบับ (classical approach) และแนวทางเชิงเบย์ส์ (Bayesian approach) บทที่ 7 เป็นการบูรณาการองค์ความรู้ในบทที่ 1-6 เพื่อใช้ในงานวิจัยเชิงทฤษฎีโดยจะเน้นในเรื่องของการประมาณค่าแบบจุด และสมบัติของตัวประมาณ พร้อมเพิ่มเติมองค์ความรู้ใหม่ๆ ที่ใช้ในงานวิจัยแต่ละเรื่องรวมทั้งยกตัวอย่างประกอบ แต่ละบทของบทที่ 1-6 มีแบบฝึกหัดให้ฝึกฝนจำนวนมากพอโดยผู้อ่านสามารถดูเฉลยแบบฝึกหัดของแต่ละข้ออย่างละเอียดในส่วนท้ายของหนังสือซึ่งใช้เป็นตัวอย่างเพิ่มเติมให้ผู้เรียนมีทักษะเชิงคำนวณและเชิงการให้เหตุผลได้เป็นอย่างดี

ผังความสัมพันธ์ระหว่างบทต่างๆ แสดงดังนี้



ขอขอบคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์เบญจมาศ ตูลยนิติกุล ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์จัดทำตารางความน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงปกติมาตรฐานประกอบตำรานี้ รวมทั้ง ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธีระวัฒน์ สิมมาจันทร์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วิกานดา ผาพันธุ์ อาจารย์ ดร.กิตติศักดิ์ จังพานิช และนักศึกษาอีกหลายๆ คนที่มีส่วนช่วยทำให้ตำราเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

กมล บุษบา

กรกฎาคม 2566

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์

1.1 กล่าวนำ

ตามที่ทราบมาแล้วว่าพารามิเตอร์ μ และ σ ใช้สำหรับวัดตำแหน่งที่แสดงศูนย์กลางและการกระจายของการแจกแจงของตัวแปรสุ่มตามลำดับ อย่างไรก็ตามพารามิเตอร์ทั้งสองไม่สามารถระบุได้อย่างชัดเจนว่าการแจกแจงของตัวแปรสุ่มนี้มีลักษณะเฉพาะอย่างไร กล่าวคือยังคงมีการแจกแจงต่างๆ ที่มีรูปร่างแตกต่างกันแต่มีทั้งค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน ในบทนี้จึงจะกล่าวถึงเซตของค่าวัดเชิงตัวเลขที่สามารถบอกลักษณะการแจกแจงของตัวแปรสุ่มได้อย่างแน่นอนและระบุได้ชัดเจน ค่าวัดดังกล่าวนิยามในรูปของค่าคาดหวัง (expectation) ของตัวแปรสุ่มเรียกว่า “ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ (moment generating function)”

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์นี้สามารถนิยามได้กับทุกตัวแปรสุ่มทุกประเภท และยังมีสมบัติที่มีประโยชน์ในหัวข้อต่อไป เราจะกล่าวถึงนิยามและตัวอย่างของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ พร้อมทั้งศึกษาสมบัติต่างๆ ของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์

1.2 นิยามของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์

นิยาม 1.2.1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ $M_X(t)$ ของตัวแปรสุ่ม X กำหนดโดย

$$M_X(t) = E[e^{tX}]$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ตามนิยามข้างต้นสามารถหาค่าได้หรือมีจริง (exist) ถ้าค่าคาดหวัง $E[e^{tX}]$ มีค่าจำกัด กล่าวคือ $E[e^{tX}] < \infty$ สำหรับจำนวนจริง t ใดๆ ที่ $-b < t < b$ โดยที่ b เป็นค่าคงตัวที่มากกว่าศูนย์ ถ้า $E[e^{tX}]$ ไม่มีค่าจำกัด จะกล่าวว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มนั้นไม่มีจริง (does not exist)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น $p_X(x) = P(X = x)$ สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ได้ดังนี้

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} p_X(x)$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f_X(x)$ สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ได้ดังนี้

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx$$

ให้สังเกตว่าสำหรับตัวแปรสุ่ม X ทุกตัวที่หาค่าคาดหวังได้ เช่นกรณีของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง $M_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(0)x} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (1) f_X(x) dx = 1$ นอกจากนี้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ $M_X(t)$ ถ้ามีจริงย่อมมีค่ามากกว่าศูนย์เสมอเพราะเป็นค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม $Y = e^{tX}$ ที่มีค่ามากกว่าศูนย์

เหตุที่เรียก $M_X(t) = E[e^{tX}]$ ว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์เพราะสามารถใช้ฟังก์ชันนี้ในการหาโมเมนต์รอบจุดกำเนิดทุกโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X ได้ หรือหา $\mu'_k = E[X^k]$ โดยที่ $k = 1, 2, 3, \dots$ ซึ่งจะกล่าวถึงในรายละเอียดต่อไป

ตัวอย่าง 1.2.1 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่มีพารามิเตอร์ p สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X ได้ดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \sum_{x=0}^1 e^{tx} p_X(x) \\ &= e^{t(0)} P(X=0) + e^{t(1)} P(X=1) \\ &= (1)(1-p) + e^t p \\ &= (1-p) + pe^t, \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2.2 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X ได้ดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] \\ &= \sum_{x=0}^n e^{tx} p_X(x) \\ &= \sum_{x=0}^n e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

$$\text{จากทฤษฎีบททวินาม} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k} = (u+v)^n$$

$$\text{ดังนั้น} \quad M_X(t) = [pe^t + (1-p)]^n, \quad -\infty < t < \infty$$

ตัวอย่าง 1.2.3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มปัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X ได้ดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E[e^{tX}] \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} p_X(x) \\
 &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^x}{x!} \\
 &= e^{-\lambda} \left[\frac{(\lambda e^t)^0}{0!} + \frac{(\lambda e^t)^1}{1!} + \frac{(\lambda e^t)^2}{2!} + \frac{(\lambda e^t)^3}{3!} + \dots \right] \\
 &= e^{-\lambda} \left[1 + \lambda e^t + \frac{(\lambda e^t)^2}{2!} + \frac{(\lambda e^t)^3}{3!} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

จากอนุกรมแมคลอรินของ $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

ดังนั้น $M_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad -\infty < t < \infty$ ■

ตัวอย่าง 1.2.4 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเลขชี้กำลังที่มีพารามิเตอร์ β สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X ได้ดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E[e^{tX}] \\
 &= \int_0^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\
 &= \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x} dx \\
 &= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{\beta} - t\right)} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x} d\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x \\
 &= \frac{1}{\beta\left(\frac{1}{\beta} - t\right)} \int_0^{\infty} e^{-u} du \quad \text{เมื่อ } u = \left(\frac{1}{\beta} - t\right)x
 \end{aligned}$$

เพราะ $f_U(u) = e^{-u}$ คือการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังที่มีพารามิเตอร์ $\beta=1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \frac{1}{1 - \beta t} (1) \\
 &= \frac{1}{1 - \beta t}, \quad t < \frac{1}{\beta}
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 1.2.5 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแกมมาที่มีพารามิเตอร์ α และ $\beta (\alpha, \beta > 0)$ สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X ได้ดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{tx - \frac{x}{\beta}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x} dx \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} du$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x} d\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^\alpha} \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x\right]^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x} d\left(\frac{1}{\beta} - t\right)x \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^\alpha} \cdot \Gamma(\alpha) \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\beta^\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)^\alpha} \\ &= \frac{1}{(1 - \beta t)^\alpha}, \quad t < \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2.6 ให้ Z เป็นตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ Z ได้ดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tZ}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} f_Z(z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2} + tz} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{z^2}{2} - tz\right)} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{z^2 - 2tz}{2}\right)} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{z^2 - 2tz + t^2}{2}\right) + \frac{t^2}{2}} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-t)^2}{2} + \frac{t^2}{2}} dz \\
&= \frac{e^{\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} dz
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย

เท่ากับ t และความแปรปรวนเท่ากับ 1 ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= e^{\frac{t^2}{2}} (1) \\
&= e^{\frac{t^2}{2}}, \quad -\infty < t < \infty
\end{aligned}$$

ให้สังเกตว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มแบบเลขชี้กำลังและฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มแกมมามีความสัมพันธ์กัน และนอกจากนี้เมื่อเราทราบฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของการแจกแจงแกมมาแล้วก็จะทำให้เราสามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของการแจกแจงไคกำลังสองได้ด้วย เนื่องจากการแจกแจงไคกำลังสองเป็นกรณีเฉพาะของการแจกแจงแกมมา

ตัวอย่าง 1.2.7 (ปรับปรุงจาก กฤษณะ เนียมมณี, 2542, น. 8.3-8.4) ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มโคชีมาตรฐาน สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X ได้ดังนี้

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} dx
\end{aligned}$$

ในกรณีที่ $t = 0$ นั้น จะได้ว่า $M_X(0) = 1$

ในกรณีที่ $t \neq 0$ ให้พิจารณา

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} dx \geq \int_0^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} dx$$

เนื่องจาก $e^{tx} = 1 + (tx) + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \dots$ นั่นคือ $e^{tx} > tx$ เสมอ ซึ่งอาจพิจารณากราฟของ

ฟังก์ชัน $y = e^{tx}$ และ $y = tx$ ในภาพที่ 1.2.1 ประกอบ ทำให้ได้ว่า

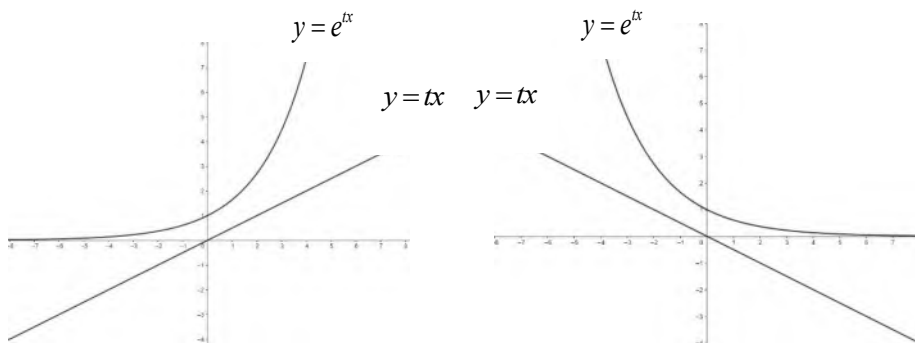
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} dx &\geq \int_0^{\infty} \frac{tx}{\pi(1+x^2)} dx \\ &= t \int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx \end{aligned}$$

เพราะว่า $\int_0^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)} d(1+x^2) = \frac{1}{2\pi} [\ln(1+x^2)] \Big|_0^{\infty} = \infty$ ดังนั้นจะได้ว่า

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} dx = \infty$ กรณีที่ $t > 0$ หรือ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{tx}}{\pi(1+x^2)} dx = -\infty$ กรณีที่ $t < 0$ นั่นคือฟังก์ชันก่อกำเนิด

โมเมนต์ของตัวแปรสุ่มโคซิมมาตรฐานไม่มีจริง

■



ภาพที่ 1.2.1 กราฟของ $y = e^{tx}$ และ $y = tx$ เมื่อ $t > 0$ (ซ้าย) และ $t < 0$ (ขวา)

1.3 สมบัติของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์

พิจารณาการกระจายอนุกรมแมคลอรินของ e^{tx} ดังนี้

$$e^{tx} = 1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \dots$$

ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์มีจริง และโมเมนต์รอบจุดกำเนิดทุกโมเมนต์มีจริง

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_x e^{tx} p_X(x) \\ &= \sum_x \left[1 + tx + \frac{(tx)^2}{2!} + \frac{(tx)^3}{3!} + \dots \right] p_X(x) \\ &= \sum_x 1 p_X(x) + t \sum_x x p_X(x) + \frac{t^2}{2!} \sum_x x^2 p_X(x) + \frac{t^3}{3!} \sum_x x^3 p_X(x) + \dots \\ &= 1 + tE[X] + \frac{t^2}{2!} E[X^2] + \frac{t^3}{3!} E[X^3] + \dots \\ &= 1 + t\mu'_1 + \frac{t^2}{2!} \mu'_2 + \frac{t^3}{3!} \mu'_3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k \mu'_k}{k!} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องใดๆ สามารถเขียนได้ในรูปของฟังก์ชันของโมเมนต์รอบจุดกำเนิด $\mu'_k = E[X^k]$ โดยที่ $k = 1, 2, 3, \dots$ ซึ่งยังคงเป็นจริงสำหรับกรณีของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์มีจริง หรืออาจกล่าวได้ว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มใดๆ สามารถกระจายในรูปของอนุกรมที่มีสัมประสิทธิ์ของ $\frac{t^k}{k!}$ คือ $\mu'_k = E[X^k]$

สมบัติหนึ่งที่สำคัญของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ก็คือ ถ้าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มมีจริง เราก็จะสามารถหาโมเมนต์ใดๆ ของตัวแปรสุ่มนั้นได้ สมบัติที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นสมบัติของการสลับที่ระหว่างการหาผลบวกของอนุกรมกับการหาอนุพันธ์และการสลับที่ระหว่างการหาปริพันธ์และการหาอนุพันธ์ซึ่งจะนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ใช้สำหรับการหาโมเมนต์รอบจุดกำเนิดของตัวแปรสุ่มโดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์มีจริง จะได้ว่า

(1) ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องแล้ว

$$M_X^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} \sum_x e^{tx} p_X(x) = \sum_x \frac{d^k}{dt^k} e^{tx} p_X(x)$$

(2) ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องแล้ว

$$M_X^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k}{dt^k} [e^{tx} f_X(x)] dx$$

ทฤษฎีบท 1.3.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X มีจริง สำหรับจำนวนเต็มบวก k ใดๆ สามารถหาโมเมนต์รอบจุดกำเนิดอันดับ k ของ X ได้ดังนี้

$$\mu'_k = E[(X-0)^k] = E[X^k] = M_X^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k}{dt^k} M_X(t) \right|_{t=0}$$

พิสูจน์ 1. กรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } M_X(t) &= \sum_x e^{tx} p_X(x) \\ M_X^{(k)}(t) &= \frac{d^k}{dt^k} \sum_x e^{tx} p_X(x) \\ &= \sum_x \frac{d^k}{dt^k} e^{tx} p_X(x) \\ &= \sum_x x^k e^{tx} p_X(x) \\ \text{นั่นคือ } M_X^{(k)}(0) &= \sum_x x^k p_X(x) \\ &= E[X^k] \end{aligned}$$

2. กรณีที่ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \\ M_X^{(k)}(t) &= \frac{d^k}{dt^k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^k}{dt^k} [e^{tx} f_X(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{tx} f_X(x) dx \\ \text{นั่นคือ } M_X^{(k)}(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x) dx \\ &= E[X^k] \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 1.3.1 ให้หาค่าคาดหวังและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X โดยการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ในกรณีที่

- (1) X เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์ n และ p
- (2) X เป็นตัวแปรสุ่มปัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ
- (3) X เป็นตัวแปรสุ่มแบบเลขชี้กำลังที่มีพารามิเตอร์ β

วิธีทำ กรณี (1) ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X คือ

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= [pe^t + (1-p)]^n, \quad -\infty < t < \infty \\
 M_X^{(1)}(t) &= n[pe^t + (1-p)]^{n-1} pe^t \\
 \text{ดังนั้น} \quad E[X] &= M_X^{(1)}(0) \\
 &= n[p + (1-p)]^{n-1} p = np \\
 \text{เนื่องจาก} \quad M_X^{(2)}(t) &= n(n-1)[pe^t + (1-p)]^{n-2} (pe^t)^2 + n[pe^t + (1-p)]^{n-1} pe^t \\
 \text{ดังนั้น} \quad E[X^2] &= M_X^{(2)}(0) \\
 &= n(n-1)[p + (1-p)]^{n-2} (p)^2 + n[p + (1-p)]^{n-1} p \\
 &= n(n-1)p^2 + np \\
 \text{ทำให้ได้ว่า} \quad V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\
 &= n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\
 &= n^2 p^2 - np^2 + np - (np)^2 \\
 &= np - np^2 = np(1-p)
 \end{aligned}$$

กรณี (2) ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X คือ

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= e^{\lambda(e^t - 1)}, \quad -\infty < t < \infty \\
 M_X^{(1)}(t) &= e^{\lambda(e^t - 1)} \lambda e^t \\
 \text{ดังนั้น} \quad E[X] &= M_X^{(1)}(0) \\
 &= e^{\lambda(1-1)} \lambda = \lambda \\
 \text{เนื่องจาก} \quad M_X^{(2)}(t) &= e^{\lambda(e^t - 1)} \lambda e^t + (\lambda e^t)^2 e^{\lambda(e^t - 1)} \\
 \text{ดังนั้น} \quad E[X^2] &= M_X^{(2)}(0) \\
 &= e^{\lambda(1-1)} \lambda + \lambda^2 e^{\lambda(1-1)} = \lambda + \lambda^2 \\
 \text{ทำให้ได้ว่า} \quad V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\
 &= \lambda + \lambda^2 - (\lambda)^2 = \lambda
 \end{aligned}$$

กรณี (3) ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X คือ

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= \frac{1}{1 - \beta t}, \quad t < \frac{1}{\beta} \\
 M_X^{(1)}(t) &= \frac{\beta}{(1 - \beta t)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น} \quad E[X] &= M_X^{(1)}(0) \\
 &= \beta \\
 \text{เนื่องจาก} \quad M_X^{(2)}(t) &= \frac{2\beta^2}{(1-\beta t)^3} \\
 \text{ดังนั้น} \quad E[X^2] &= M_X^{(2)}(0) \\
 &= 2\beta^2 \\
 \text{ทำให้ได้ว่า} \quad V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\
 &= 2\beta^2 - (\beta)^2 = \beta^2
 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 1.3.2 ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงแบบเรขาคณิตที่มีพารามิเตอร์คือ p จากนั้นหาความแปรปรวนของ X โดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์

ให้ $q = 1 - p$ เมื่อ p คือความน่าจะเป็นที่จะประสบความสำเร็จโดยที่ $p + q = 1$

$$\begin{aligned}
 \text{วิธีทำ} \quad \text{เนื่องจาก} \quad M_X(t) &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} p(x) \\
 &= \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} q^{x-1} p \\
 &= \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} (qe^t)^x \\
 &= \frac{p}{q} [qe^t + (qe^t)^2 + (qe^t)^3 + \dots] \\
 &= \frac{p}{q} [qe^t [1 + qe^t + (qe^t)^2 + \dots]] \\
 &= \frac{p}{q} \left[qe^t \left[\frac{1}{1 - qe^t} \right] \right] \\
 &= \frac{pe^t}{1 - qe^t}, \quad 0 < qe^t < 1 \quad \text{หรือ} \quad t < \ln\left(\frac{1}{q}\right) = -\ln(1 - p)
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad M_X^{(1)}(t) = \frac{(1 - qe^t)pe^t - pe^t(-qe^t)}{(1 - qe^t)^2}$$

$$= \frac{pe^t}{(1 - qe^t)^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{และ} \quad M_X^{(2)}(t) &= \frac{(1 - qe^t)^2 pe^t - pe^t 2(1 - qe^t)(-qe^t)}{(1 - qe^t)^4} \\
 &= \frac{(1 - qe^t)^2 pe^t + 2pqe^{2t}(1 - qe^t)}{(1 - qe^t)^4} \\
 &= \frac{(1 - qe^t)[(1 - qe^t)pe^t + 2pqe^{2t}]}{(1 - qe^t)^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{pe'(1-qe'+2qe')}{(1-qe')^3} \\
 &= \frac{pe'(1+qe')}{(1-qe')^3} \\
 \text{ดังนั้น} \quad E[X] &= M_X^{(1)}(0) \\
 &= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p} \\
 \text{และ} \quad E[X^2] &= M_X^{(2)}(0) \\
 &= \frac{p(1+q)}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{p^2} \\
 \text{ทำให้ได้ว่า} \quad V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\
 &= \frac{1+q}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{q}{p^2}
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.3.3 ให้หาโมเมนต์รอบจุดกำเนิดอันดับ k เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกของตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน (ปรับปรุงจาก กฤษณะ เนียมมณี, 2542, น. 8.6-8.7)

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐานจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad -\infty < t < \infty \\
 \text{ดังนั้น} \quad M_X^{(k)}(t) &= \frac{d^k}{dt^k} e^{\frac{1}{2}t^2} \\
 &= \frac{d^k}{dt^k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{2}t^2 \right)^n \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} \frac{d^k}{dt^k} t^{2n}
 \end{aligned}$$

ถ้า $k=1$

$$\begin{aligned}
 M_X^{(1)}(t) &= \frac{1}{0!} \frac{1}{2^0} \frac{d}{dt} t^{2(0)} + \frac{1}{1!} \frac{1}{2^1} \frac{d}{dt} t^{2(1)} + \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} \frac{d}{dt} t^{2(2)} + \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} \frac{d}{dt} t^{2(3)} + \frac{1}{4!} \frac{1}{2^4} \frac{d}{dt} t^{2(4)} + \frac{1}{5!} \frac{1}{2^5} \frac{d}{dt} t^{2(5)} + \dots \\
 &= 0 + \frac{1}{1!} \frac{1}{2^1} 2t + \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} 4t^3 + \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} 6t^5 + \frac{1}{4!} \frac{1}{2^4} 8t^7 + \frac{1}{5!} \frac{1}{2^5} 10t^9 + \dots \\
 M_X^{(1)}(0) &= 0
 \end{aligned}$$

ถ้า $k=2$

$$M_X^{(2)}(t) = \frac{1}{1!} \frac{1}{2^1} 2 + \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} 4(3)t^2 + \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} 6(5)t^4 + \frac{1}{4!} \frac{1}{2^4} 8(7)t^6 + \frac{1}{5!} \frac{1}{2^5} 10(9)t^8 + \dots$$

$$M_X^{(2)}(0) = \frac{1}{1!} \frac{1}{2^1} 2(1) = \frac{1}{\left(\frac{2}{2}\right)!} \frac{1}{2^{\frac{2}{2}}} 2!$$

ถ้า $k=3$

$$M_X^{(3)}(t) = \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} 4(3)(2)t + \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} 6(5)(4)t^3 + \frac{1}{4!} \frac{1}{2^4} 8(7)(6)t^5 + \frac{1}{5!} \frac{1}{2^5} 10(9)(8)t^7 + \dots$$

$$M_X^{(3)}(0) = 0$$

ถ้า $k=4$

$$M_X^{(4)}(t) = \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} 4(3)(2) + \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} 6(5)(4)(3)t^2 + \frac{1}{4!} \frac{1}{2^4} 8(7)(6)(5)t^4 + \frac{1}{5!} \frac{1}{2^5} 10(9)(8)(7)t^6 + \dots$$

$$M_X^{(4)}(0) = \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} 4(3)(2)(1) = \frac{1}{\left(\frac{4}{2}\right)!} \frac{1}{2^{\frac{4}{2}}} 4!$$

ถ้า $k=5$

$$M_X^{(5)}(t) = \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} 6(5)(4)(3)2t + \frac{1}{4!} \frac{1}{2^4} 8(7)(6)(5)(4)t^3 + \frac{1}{5!} \frac{1}{2^5} 10(9)(8)(7)(6)t^5 + \dots$$

$$M_X^{(5)}(0) = 0$$

ถ้า $k=6$

$$M_X^{(6)}(t) = \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} 6(5)(4)(3)2 + \frac{1}{4!} \frac{1}{2^4} 8(7)(6)(5)(4)(3)t^2 + \frac{1}{5!} \frac{1}{2^5} 10(9)(8)(7)(6)(5)t^4 + \dots$$

$$M_X^{(6)}(0) = \frac{1}{3!} \frac{1}{2^3} 6(5)(4)(3)(2)(1) = \frac{1}{\left(\frac{6}{2}\right)!} \frac{1}{2^{\frac{6}{2}}} 6!$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

ในกรณีที่ k เป็นเลขคี่

$$\mu'_k = 0$$

ในกรณีที่ k เป็นเลขคู่

$$\mu'_k = \frac{k!}{2^{\frac{k}{2}} \left(\frac{k}{2}\right)!}$$

■

ทฤษฎีบท 1.3.2 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์มีจริง ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Y = aX + b$ สามารถหาได้จาก

$$M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$M_Y(t) = E[e^{tY}]$$

$$= E[e^{t(aX+b)}]$$

$$\begin{aligned}
 &= E[e^{atX} e^{bt}] \\
 &= E[e^{atX}] E[e^{bt}] \\
 &= e^{bt} E[e^{(at)X}] \\
 &= e^{bt} M_X(at)
 \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 1.3.4 ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย μ และความแปรปรวน σ^2 โดยอาศัยฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน จากนั้นหา $E[X^3]$

วิธีทำ จากความสัมพันธ์
$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

จะได้ว่า
$$X = \mu + \sigma Z$$

จากทฤษฎีบท 1.3.2 สามารถหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X ได้ดังนี้

$$M_X(t) = e^{t\mu} M_Z\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

และเนื่องจาก

$$M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= e^{t\mu} e^{\frac{(t/\sigma)^2}{2}} \\
 &= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}, \quad -\infty < t < \infty
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$E[X^3] = M_X^{(3)}(0)$$

$$M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

ดังนั้น

$$M_X^{(1)}(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} (\mu + \sigma^2 t)$$

และ

$$\begin{aligned}
 M_X^{(2)}(t) &= (\mu + \sigma^2 t) e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} (\mu + \sigma^2 t) + e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} (\sigma^2) \\
 &= (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} + \sigma^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_X^{(3)}(t) &= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} [2(\mu + \sigma^2 t)\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} (\mu + \sigma^2 t) \\
 &\quad + (\sigma^2) e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} (\mu + \sigma^2 t)]
 \end{aligned}$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} [2\sigma^2(\mu + \sigma^2 t) + (\mu + \sigma^2 t)^3 + \sigma^2(\mu + \sigma^2 t)]$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} [3\sigma^2(\mu + \sigma^2 t) + (\mu + \sigma^2 t)^3]$$

$$\begin{aligned}
 E[X^3] &= e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} [3\sigma^2(\mu + \sigma^2 t) + (\mu + \sigma^2 t)^3] \Big|_{t=0} \\
 &= 3\mu\sigma^2 + \mu^3
 \end{aligned}$$

■

ทฤษฎีบท 1.3.3 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของแต่ละตัวแปรสุ่มมีจริง ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$ สามารถหาได้จาก

$$M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tZ}] \\ &= E[e^{t(X+Y)}] \\ &= E[e^{tX+tY}] \\ &= E[e^{tX} \cdot e^{tY}] \end{aligned}$$

เนื่องจากตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มทั้งสองก็จะเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันด้วย (ดูการพิสูจน์ในภาคผนวกของบทที่ 2) ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= E[e^{tX}]E[e^{tY}] \\ &= M_X(t)M_Y(t) \end{aligned}$$

□

เพิ่มเติมจากทฤษฎีบท 1.3.3 ในกรณีที่ $Z = X - Y$ จะได้ $M_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{t(X-Y)}] = E[e^{tX-tY}] = E[e^{tX} \cdot e^{-tY}] = E[e^{tX}]E[e^{-tY}] = M_X(t)M_Y(-t)$

จากทฤษฎีบท 1.3.3 ที่กล่าวว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของผลบวกของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันสองตัวมีค่าเท่ากับผลคูณของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มทั้งสอง สามารถขยายไปสู่การหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของผลบวกของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกัน n ตัวตามบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก 1.3.1 ให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันและฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของแต่ละตัวแปรสุ่มมีจริง ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ สามารถหาได้จาก

$$M_Y(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

บทแทรก 1.3.2 ให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน แต่ละตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงเหมือนกันและฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของแต่ละตัวแปรสุ่มมีจริง ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n$ สามารถหาได้จาก

$$M_Y(t) = [M_X(t)]^n$$

ตัวอย่าง 1.3.5 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่เป็นอิสระกันโดยมีพารามิเตอร์คือ (n, p) และ (m, p) ตามลำดับ ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม Z สามารถหาได้โดย

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\ &= [pe^t + (1-p)]^n [pe^t + (1-p)]^m \\ &= [pe^t + (1-p)]^{n+m}, \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

ให้สังเกตว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$ มีลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์คือ $n + m$ และ p ■

ตัวอย่าง 1.3.6 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มปัวซองที่เป็นอิสระกันโดยมีพารามิเตอร์คือ λ_1 และ λ_2 ตามลำดับ ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม Z สามารถหาได้โดย

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\ &= [e^{\lambda_1(e^t-1)}][e^{\lambda_2(e^t-1)}] \\ &= e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}, \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

ให้สังเกตว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$ มีลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มปัวซองที่มีพารามิเตอร์คือ $\lambda_1 + \lambda_2$ ■

ตัวอย่าง 1.3.7 ให้ Y เป็นตัวแปรสุ่มทวินาม ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มนี้โดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี

วิธีทำ เนื่องจากตัวแปรสุ่มทวินามคือผลบวกของตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่เป็นอิสระกันและมีการแจกแจงเหมือนกันจำนวน n ตัว นั่นคือ $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ โดยที่ X_i มีการแจกแจงแบร์นูลลีที่มีพารามิเตอร์คือ p และ $i = 1, 2, \dots, n$ โดยบทแทรก 1.3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= [M_X(t)]^n \\ &= [pe^t + (1-p)]^n, \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.3.8 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มปกติที่เป็นอิสระกันโดยมีพารามิเตอร์คือ (μ_1, σ_1^2) และ (μ_2, σ_2^2) ตามลำดับ ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม Z สามารถหาได้โดย

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= M_X(t)M_Y(t) \\ &= [e^{\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2}][e^{\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2}] \\ &= e^{(\mu_1 + \mu_2)t + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}, \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

ให้สังเกตว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$ มีลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มปกติที่มีพารามิเตอร์คือ $\mu_1 + \mu_2$ และ $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ ■

ตัวอย่าง 1.3.9 ให้ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มไคกำลังสองที่เป็นอิสระกันและแต่ละตัวมีพารามิเตอร์หรือองศาเสรีคือ 1 ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$

วิธีทำ โดยบทแทรก 1.3.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= [M_X(t)]^n \\ &= \left[\left(\frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^n \\ &= \left(\frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{n}{2}}, \quad t < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ให้สังเกตว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ มีลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มไคกำลังสองที่มีพารามิเตอร์หรือองศาเสรีคือ n ■

ตัวอย่าง 1.3.10 ให้ $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มปกติที่เป็นอิสระกันและแต่ละตัวมีพารามิเตอร์เหมือนกันคือ (μ, σ^2) ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E[e^{tY}] \\ &= E\left[e^{t\left(\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n)\right)}\right] \\ &= E\left[e^{\frac{t}{n}X_1 + \frac{t}{n}X_2 + \frac{t}{n}X_3 + \dots + \frac{t}{n}X_n}\right] \\ &= E\left[e^{\frac{t}{n}X_1} e^{\frac{t}{n}X_2} e^{\frac{t}{n}X_3} \dots e^{\frac{t}{n}X_n}\right] \\ &= E\left[e^{\frac{t}{n}X_1}\right] E\left[e^{\frac{t}{n}X_2}\right] E\left[e^{\frac{t}{n}X_3}\right] \dots E\left[e^{\frac{t}{n}X_n}\right] \\ &= M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) M_{X_2}\left(\frac{t}{n}\right) M_{X_3}\left(\frac{t}{n}\right) \dots M_{X_n}\left(\frac{t}{n}\right) \\ &= \left[M_{X_1}\left(\frac{t}{n}\right) \right]^n \\ &= \left[e^{\frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)^2} \right]^n \\ &= e^{\mu t + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2}, \quad -\infty < t < \infty \end{aligned}$$

ให้สังเกตว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ หรือค่าเฉลี่ยตัวอย่างมีลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มปกติที่มีพารามิเตอร์คือ μ และ $\frac{\sigma^2}{n}$ ■

จากตัวอย่าง 1.3.5 ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่เป็นอิสระกันโดยมีพารามิเตอร์คือ (n, p) และ (m, p) ตามลำดับ และเราได้ข้อสรุปว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$ มีลักษณะเช่นเดียวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์คือ $n + m$ และ p ผลลัพธ์เช่นนี้เกิดขึ้นโดยบังเอิญหรือไม่ เราสามารถจะสรุปได้ใหม่ว่า ตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$ เป็นตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์เป็น $n + m$ และ p เราสามารถสรุปได้ในทำนองเดียวกันกับตัวอย่างอื่นๆ (ตัวอย่าง 1.3.6-1.3.10) หรือไม่ ทฤษฎีต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์มีสมบัติที่เรียกว่า “ความเป็นได้อย่างเดียว (uniqueness)” กล่าวคือฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์รูปแบบหนึ่งๆ นั้นจะเป็นสิ่งที่กำหนดลักษณะการแจกแจงของตัวแปรสุ่มได้เพียงลักษณะเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 1.3.4 ทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียว (Uniqueness Theorem) (Khazanic, 1976, p.445)

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์มีจริง ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มสองตัวเท่ากันก็ต่อเมื่อตัวแปรสุ่มทั้งสองมีการแจกแจงแบบเดียวกัน

กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มสองตัว ถ้า $M_X(t) = M_Y(t)$ สำหรับทุกค่าของ t ที่อยู่ในช่วง $(-h, h)$ ก็ต่อเมื่อ $F_X(u) = F_Y(u)$ เมื่อ u เป็นจำนวนจริงใดๆ

ทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียวใช้ในการพิสูจน์ว่า ถ้าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์มีจริงสำหรับการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มหนึ่งๆ แล้ว แบบรูปของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์สามารถกำหนดได้เพียงแบบเดียว และถ้าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มสองตัวเหมือนกันแล้ว ตัวแปรสุ่มสองตัวนั้นจะต้องมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเดียวกัน

ตัวอย่าง 1.3.11 ให้ใช้ทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียวในการหาการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มอื่นๆ ในตัวอย่าง 1.3.5-1.3.10

วิธีทำ โดยการให้ทฤษฎีบท 1.3.4 สามารถสรุปได้ว่า

- (1) ตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$ ในตัวอย่าง 1.3.5 คือตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์คือ $n + m$ และ p
- (2) ตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$ ในตัวอย่าง 1.3.6 คือตัวแปรสุ่มปัวซองที่มีพารามิเตอร์คือ $\lambda_1 + \lambda_2$
- (3) ตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ในตัวอย่าง 1.3.7 คือตัวแปรสุ่มทวินามที่มีพารามิเตอร์คือ n และ p
- (4) ตัวแปรสุ่ม $Z = X + Y$ ในตัวอย่าง 1.3.8 คือตัวแปรสุ่มปกติที่มีพารามิเตอร์คือ $\mu_1 + \mu_2$ และ $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$
- (5) ตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ในตัวอย่าง 1.3.9 คือตัวแปรสุ่มไคกำลังสองที่มีองศาเสรีคือ n
- (6) ตัวแปรสุ่ม $Y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ หรือค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ในตัวอย่าง 1.3.10 คือตัวแปรสุ่มปกติที่มีพารามิเตอร์คือ μ และ $\frac{\sigma^2}{n}$

ตัวอย่าง 1.3.12 ถ้าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X คือ $M_X(t) = e^{2.5(e^t - 1)}$ จงหา $P(X = 0)$

วิธีทำ เนื่องจากแบบรูปของฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มปัวซองที่มีพารามิเตอร์ λ คือ $e^{\lambda(e^t - 1)}$ จากทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียว ทำให้สามารถสรุปได้ว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปัวซองที่มีพารามิเตอร์เท่ากับ 2.5 ดังนั้น

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= e^{-2.5} \\ &= 0.0821 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 1.3.13 (ดัดแปลงจาก Khazanic, 1976, p.445) ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกัน แต่ละตัวมีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad P(X = x) &= \frac{x}{6}, \quad x = 1, 2, 3 \\ P(Y = y) &= \frac{y+2}{10}, \quad y = -1, 2, 3 \end{aligned}$$

ให้ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ในการหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของ $Z_1 = X + Y$ และ $Z_2 = X - Y$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก} \quad M_X(t) &= e^{1t} \frac{1}{6} + e^{2t} \frac{2}{6} + e^{3t} \frac{3}{6} \\ M_Y(t) &= e^{-1t} \frac{1}{10} + e^{2t} \frac{4}{10} + e^{3t} \frac{5}{10} \end{aligned}$$

เพราะว่า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกัน ดังนั้น

$$M_{Z_1}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

$$\text{และ} \quad M_{Z_2}(t) = M_X(t)M_Y(-t)$$

$$\begin{aligned} M_{Z_1}(t) &= \left(e^{1t} \frac{1}{6} + e^{2t} \frac{2}{6} + e^{3t} \frac{3}{6} \right) \left(e^{-1t} \frac{1}{10} + e^{2t} \frac{4}{10} + e^{3t} \frac{5}{10} \right) \\ &= e^{0t} \frac{1}{60} + e^{1t} \frac{2}{60} + e^{2t} \frac{3}{60} + e^{3t} \frac{4}{60} + e^{4t} \frac{13}{60} + e^{5t} \frac{22}{60} + e^{6t} \frac{15}{60} \\ M_{Z_2}(t) &= \left(e^{1t} \frac{1}{6} + e^{2t} \frac{2}{6} + e^{3t} \frac{3}{6} \right) \left(e^{1t} \frac{1}{10} + e^{-2t} \frac{4}{10} + e^{-3t} \frac{5}{10} \right) \\ &= e^{-2t} \frac{5}{60} + e^{-1t} \frac{14}{60} + e^{0t} \frac{23}{60} + e^{1t} \frac{12}{60} + e^{2t} \frac{1}{60} + e^{3t} \frac{2}{60} + e^{4t} \frac{3}{60} \end{aligned}$$

นั่นคือการแจกแจงความน่าจะเป็นของ $Z_1 = X + Y$ และ $Z_2 = X - Y$ แสดงได้ดังนี้

z_1	0	1	2	3	4	5	6
$P(Z_1 = z_1)$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{13}{60}$	$\frac{22}{60}$	$\frac{15}{60}$

z_2	-2	-1	0	1	2	3	4
$P(Z_2 = z_2)$	$\frac{5}{60}$	$\frac{14}{60}$	$\frac{23}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{1}{60}$	$\frac{2}{60}$	$\frac{3}{60}$

■

ตัวอย่าง 1.3.14 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงปรกติมาตรฐาน ให้ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ในการหาการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม $Y = X^2$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
 M_Y(t) &= E[e^{tY}] \\
 &= E[e^{tX^2}] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1-2t)x^2} dx \\
 &= \sqrt{(1-2t)^{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-2t)^{-1}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-0)^2}{(1-2t)^{-1}}} dx
 \end{aligned}$$

เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-2t)^{-1}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-0)^2}{(1-2t)^{-1}}}$ คือฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจง

ปรกติที่มีค่าเฉลี่ยคือ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ $(1-2t)^{-1}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 M_Y(t) &= (1-2t)^{-\frac{1}{2}} (1) \\
 &= (1-2t)^{-\frac{1}{2}}, \quad t < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

ข้อสังเกต เนื่องจากความแปรปรวนของการแจกแจงปรกติคือ $(1-2t)^{-1}$ แสดงว่า $1-2t > 0$ หรืออาจพิจารณาว่า $M_Y(t)$ จะต้องมิต่ำมากกว่าศูนย์เสมอ นั่นหมายความว่า $1-2t > 0$ หรือ $t < \frac{1}{2}$ นั่นเอง

ดังนั้นจากทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียว สามารถสรุปได้ว่า ตัวแปรสุ่ม $Y = X^2$ มีการแจกแจงไคกำลังสองที่มีองศาเสรีเท่ากับ 1 หรือคือการแจกแจงแกมมาที่มีพารามิเตอร์ $\alpha = 1/2$ และ $\beta = 2$

■

ตัวอย่าง 1.3.15 (ปรับปรุงจาก Khazanik, 1976, p. 447) ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องใดๆ ที่มีฟังก์ชันการแจกแจงคือ $F_X(x)$ และมีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f_X(x)$ ให้ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์การ แสดงว่าตัวแปรสุ่ม $Y = F_X(X)$ มีการแจกแจงเอกรูปในช่วง $[0, 1]$

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Y = F_X(X)$ คือ

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E[e^{tY}] \\ &= E[e^{tF_X(X)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tF_X(x)} f_X(x) dx \end{aligned}$$

เพราะว่า $dF_X(x) = f_X(x)dx$ และถ้า $t \neq 0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tF_X(x)} dt F_X(x) \\ &= \frac{1}{t} e^{tF_X(x)} \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{e^{tF_X(\infty)} - e^{tF_X(-\infty)}}{t} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ และ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ ทำให้ได้ว่า

$$M_Y(t) = \frac{e^t - 1}{t}, \quad t \neq 0$$

พึงระลึกว่า ในกรณีที่ $t = 0$ จะได้ $M_Y(0) = 1$ และโดยทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียว ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ $Y = F_X(X)$ มีแบบรูปเหมือนกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเอกรูปในช่วง $[0, 1]$ ดังนั้นจึงสรุปได้ว่าตัวแปรสุ่ม $Y = F_X(X)$ มีการแจกแจงเอกรูปในช่วง $[0, 1]$ สมบัตินี้มีประโยชน์อย่างยิ่งในการสร้างตัวเลขสุ่มที่มีการแจกแจงตามแบบต่างๆ ตามที่ต้องการโดยอาศัยเลขสุ่มจากการแจกแจงเอกรูปในช่วง $[0, 1]$

■

1.4 สรุป

ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มมีข้อดีคือ เราสามารถนิยามฟังก์ชันนี้ให้กับตัวแปรสุ่มได้ทุกประเภท นอกจากนั้นฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ยังมีประโยชน์อย่างยิ่งในการหาโมเมนต์รอบจุดกำเนิดค่าคาดหวัง ความแปรปรวน หรือแม้กระทั่งใช้หาการแจกแจงของตัวแปรสุ่มหรือฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มได้ อย่างไรก็ตาม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์นั้นส่วนใหญ่จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ที่พิจารณานั้นนิยามบนช่วง $(-b, b)$ สำหรับบาง b ที่มากกว่าศูนย์ ซึ่งเป็นข้อจำกัดอย่างหนึ่ง เพราะว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มบางตัวอาจไม่มีจริงก็ได้ เช่น ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มโคชี ดังนั้นจึงมีวิธีแก้ไขปัญหาดังกล่าวโดยการนิยามฟังก์ชันอีกลักษณะหนึ่งที่เราเรียกว่าฟังก์ชันลักษณะ (characteristic function) ซึ่งอยู่นอกขอบเขตของเนื้อหาในระดับนี้

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น 1, 2, 3 และ 4 ด้วยความน่าจะเป็น 0.1, 0.2, 0.3 และ 0.4 ตามลำดับ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X
2. สมมุติให้ $P(X=n) = q^{n-3}p$ สำหรับ $n \geq 3$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ X
3. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นคือ

$$f_X(x) = \begin{cases} x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & , 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & , \text{ที่อื่น ๆ} \end{cases}$$

4. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นคือ

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2e^{-x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{ที่อื่น ๆ} \end{cases}$$

5. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเอกรูปในช่วง (θ_1, θ_2)
6. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงลาปลาซ (Laplace) ดังนี้

$$f_X(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}, \quad a > 0, -\infty < x < \infty$$

7. ให้แสดงว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ตัวแปรสุ่มไคกำลังสองที่มีพารามิเตอร์คือ ν คือ

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{1-2t} \right)^{\frac{\nu}{2}}, \quad t < \frac{1}{2}$$

8. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงบีตาโดยมีพารามิเตอร์คือ α และ β

8.1 ให้หาค่า $E[X^a(1-X)^b]$ สำหรับจำนวนจริง a และ b

8.2 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของ $Y = \ln(X)$

9. กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์คือ $M_X(t) = \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{2t}$ ให้หา

$$P(|X| \leq 1)$$

10. ถ้าทราบว่าตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์คือ $M_X(t) = \frac{e^t}{2 - e^t}$, $t < \ln(2)$ ให้หา

$$P(X = 2) \text{ และ } P(X > 2)$$

11. สมมติให้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X คือ $M_X(t) = \left(\frac{1+2e^t}{3}\right)\left(\frac{1+3e^t}{4}\right)$ ให้หา

$$P(X = 1), P(X = 2), \text{ และ } P(X = 3)$$

12. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นหรือฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น $f_X(x)$ ดังต่อไปนี้

$$12.1 \quad f_X(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \text{ที่อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$12.2 \quad f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad , -\infty < x < \infty$$

$$12.3 \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} & , x = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & , \text{ที่อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$12.4 \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2}2^x}{x!} & , x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & , \text{ที่อื่น ๆ} \end{cases}$$

$$12.5 \quad f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

$$12.6 \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & , x = 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 & , \text{ที่อื่น ๆ} \end{cases}$$

13. สมมติว่าในการดึงไฟ 3 ใบโดยสุ่มจากสำหรับชุดหนึ่ง ผู้เล่นจะได้เงินเท่ากับจำนวนไฟสีแดงที่สุ่มได้จากไฟ 3 ใบนั้น ถ้ามีผู้เล่นจำนวน 10 คน แต่ละคนสุ่มไฟ 3 ใบ ทำเช่นนี้ทีละคน คนละ 1 รอบ อย่างเป็นอิสระกัน ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนเงินรวมทั้งหมดของคน 10 คนนี้ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X
14. ให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเอกรูปในช่วง $(-0.5, 0.5)$ จงหา $M_X(t)$ และ $E[X]$
15. สมมติให้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม X คือ $M_X(t) = \frac{e^t}{3-2e^t}$ จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X
16. จงหาความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X ที่มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์คือ $M_X(t) = e^{3(e^t-1)}$
17. กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปัวซองที่มีค่าเฉลี่ยคือ λ จงหา $E[X^2]$ โดยใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์
18. จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X ถ้าทราบว่า $M_X(t) = \left(\frac{1+3e^t}{4}\right)^{10}$
19. ให้ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ในการหาโมเมนต์ที่ 1 และ 2 รอบจุดกำเนิดของตัวแปรสุ่มเอกรูปในช่วง (θ_1, θ_2)
20. ให้ตัวแปรสุ่ม X มีฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นดังนี้

$$f_X(x) = \begin{cases} cxe^{-2x} & , x \geq 0 \\ 0 & , \text{ที่อื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าของ c จากนั้นหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ ค่าคาดหวังและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มนี้

21. กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน จงหา $E[X^4]$ และ $E[X^6]$
22. ถ้าให้ $M_X(t) = \frac{1}{6}e^{-5t} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{2}e^{7t}$ จงหาสูตรทั่วไปสำหรับ $E[X^n]$
23. สมมติให้ $M_X(t) = \frac{9}{(3-t)^2}$ จงหาสูตรทั่วไปสำหรับ $E[X^n]$
24. ถ้าฟังก์ชันก่อกำเนิดคิวมุลแลนต์ (cumulant generating function) ของตัวแปรสุ่ม X นิยามโดย $\psi_X(t) = \ln M_X(t)$ ให้แสดงว่า $V(X) = \psi''(0)$

25. ให้ตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็นอิสระต่อกันและต่างก็มีการแจกแจงเอกรูปในช่วง $(0,1)$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $X+Y$
26. ให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์คือ n และ p ถ้าตัวแปรสุ่ม $Y=2X+5$ ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม Y
27. กำหนดให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน โดยที่ X_i แต่ละตัวต่างก็มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังที่มีพารามิเตอร์คือ β จงหาการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$
28. ถ้าตัวแปรสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์คือ $M_X(t)$ และ $M_Y(t)$ ตามลำดับ สมมติว่า $M_X(t) = \frac{1}{3}(2e^{3t} + 1)M_Y(t)$ ถ้า $E[Y]=10$ และ $V(Y)=12$ จงหา $E[X]$ และ $V(X)$
29. ถ้าบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งรับประกันภัยบ้านในจังหวัด 3 จังหวัด ถ้าความเสียหายที่เกิดขึ้นแก่บ้านในแต่ละจังหวัดในปีหนึ่ง ๆ คือ X_1, X_2, X_3 ซึ่งเป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกันโดยมีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์สำหรับการแจกแจงความเสียหายในแต่ละจังหวัดคือ

$$M_{X_1}(t) = (1-2t)^{-3}$$

$$M_{X_2}(t) = (1-2t)^{-2.5}$$

$$M_{X_3}(t) = (1-2t)^{-4.5}$$

ให้ตัวแปรสุ่ม Y แทนความเสียหายรวมที่เกิดขึ้นในปีหนึ่ง กล่าวคือ $Y = X_1 + X_2 + X_3$ ให้หาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของความเสียหายรวมต่อปี

30. ถ้าความเสียหายที่เกิดขึ้นกับบริษัทแห่งหนึ่งมีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์คือ

$$M_X(t) = \frac{0.16}{0.16-t}, \quad t < 0.16$$

สมมติว่ากรมธรรม์ประกันภัยจ่ายค่าสินไหมทดแทนเพียงแค่ 70% ของความเสียหายที่เกิดขึ้น ให้หาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของค่าสินไหมทดแทน

31. สมมติให้ $M_X(t)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มตัวหนึ่ง จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้สมมติเป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม จงอธิบาย

(i) $M_X(t)M_Y(5t)$

(ii) $2M_X(t)$

(iii) $e^{-t}M_X(t)$

32. ให้ตัวแปรสุ่ม U มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์คือ $M_U(t) = \frac{1}{(1-t)}$ และตัวแปรสุ่ม V มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์คือ $M_V(t) = \frac{1}{(1-t)^4}$ โดยที่ U และ V เป็นอิสระกัน ถ้าตัวแปรสุ่ม $W = U + V$ ให้หาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม W
33. ให้ตัวแปรสุ่ม X_i แทนจำนวนรถโดยสารขาเข้า ณ สถานีรถโดยสารแห่งหนึ่งในช่วงเวลา $i-1$ นาทีถึง i นาที มีการแจกแจงปัวซองที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 2 ถ้าตัวแปรสุ่ม $Y_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ แทนจำนวนรถโดยสารที่มาถึงสถานีใน n นาทีแรก ถ้า $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระและมีการแจกแจงเหมือนกัน ให้หาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม Y_n
34. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกัน ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Z = aX + bY + c$ ถ้า X และ Y มีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์เป็น $M_X(t)$ และ $M_Y(t)$ ตามลำดับ
35. ถ้า X_i เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงทวินามที่มีพารามิเตอร์ n_i และ p_i โดยที่ X_i แต่ละตัวเป็นอิสระกัน
- (i) ถ้า $p_i = p$ ให้แสดงว่าตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ มีการแจกแจงทวินามพร้อมระบุพารามิเตอร์
- (ii) ถ้า p_i มีค่าไม่เท่ากัน ตัวแปรสุ่ม $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ ยังคงมีการแจกแจงทวินามหรือไม่
36. ให้ X_1, X_2 และ X_3 เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลีที่มีพารามิเตอร์ $p = 0.6$ ให้หาฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่ม $Y = X_1 X_2 X_3$ จากนั้นหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มนี้
37. ให้ใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ในการแสดงว่า ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังแล้ว ตัวแปรสุ่ม $Y = cX$ ($c > 0$) จะมีการแจกแจงแบบเลขชี้กำลังด้วย
38. ให้ Z เป็นตัวแปรสุ่มปรกติมาตรฐาน ถ้าให้ตัวแปรสุ่มคะแนนที่ (T score) นิยามโดย $T = 50 + 10Z$ ให้หาการแจกแจงของคะแนนที่พร้อมระบุพารามิเตอร์ของการแจกแจง

39. จากฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ต่อไปนี้ ให้ระบุการแจกแจงของตัวแปรสุ่มแต่ละตัว

$$(i) M_U(t) = \left(0.3 + 0.7 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right)^{20}$$

$$(ii) M_V(t) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} [1 + (-2)^k] \frac{t^k}{k!}$$

$$(iii) M_W(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!}$$

40. ให้ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ยคือ 10 และความแปรปรวนเท่ากับ 4 ถ้าทำการบันทึก $X_1, X_2, \dots, X_8$ อย่างเป็นอิสระกัน ให้หาค่าความน่าจะเป็นที่ผลบวกกำลังสองของความแตกต่างระหว่างค่าสังเกตแต่ละค่ากับ 10 จะอยู่ระหว่าง 4 และ 28 หรือหา $P(4 < \sum_{i=1}^8 (X_i - 10)^2 < 28)$ โดยหาคำตอบในรูปของปริพันธ์และไม่ต้องคำนวณค่าความน่าจะเป็น

บรรณานุกรม

กฤษณะ เนียมมณี. (2542). *ทฤษฎีความน่าจะเป็น*. พัทธการพิมพ์, กรุงเทพฯ.

Casella, G. and Berger, R.L. (1990). *Statistical Inference*. Duxbury Press, Belmont, CA.

Khazanie, R. (1976). *Basic Probability Theory and Applications*. Goodyear Publishing Company, Pacific Palisades, CA.

Ross, S. (2010). *A First Course in Probability*. 8th ed., Pearson Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.

Wackerly D.D., Mendenhall III, W., and Scheaffer R.L. (2008). *Mathematical Statistics with Applications*. 7th ed., Brooks/Cole, Belmont, CA.

ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม

2.1 กล่าวนำ

การประยุกต์ใช้เกี่ยวกับฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มนั้นอาจพิจารณาได้ว่าเป็นเรื่องเกี่ยวกับการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่มสองตัว เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วกับระยะทาง หรือความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนดิบ (X) กับคะแนนมาตรฐาน (Z) กล่าวคือ $Z = (X - \mu)/\sigma$ หรือการแปลงคะแนนมาตรฐานให้อยู่ในรูปของคะแนนที่ (t-score) โดยใช้ความสัมพันธ์ $T = 50 + 10Z$ ซึ่งในที่นี้เราต้องการทราบการแจกแจงตัวแปรสุ่มตัวหนึ่ง (Z) ถ้ากำหนดหรือทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่มอีกตัวหนึ่ง (X) ในสมการความสัมพันธ์ $Z = (X - \mu)/\sigma$ หรือต้องการทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม T เมื่อกำหนดหรือทราบการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม Z ในสมการความสัมพันธ์ $T = 50 + 10Z$

นอกจากนั้นตามที่ทราบมาแล้วว่าวัตถุประสงค์ของสถิติศาสตร์ก็คือการใช้สารสนเทศจากตัวอย่างเพื่ออ้างอิงเกี่ยวกับประชากรที่ตัวอย่างนั้นถูกสุ่มมาศึกษา เช่น ใช้ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\bar{X}$ เพื่อประมาณค่าเฉลี่ยประชากร μ การประมาณค่าจะมีความน่าเชื่อถือเพียงใดนั้นขึ้นกับตัวอย่างสุ่มขนาด n (ตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$) หรือการแจกแจงของ $\bar{X}$ นั้นเอง โดยเราจะใช้การแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่างนี้ในการวัดความคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า

จะเห็นได้ว่า ค่าเฉลี่ยตัวอย่างนั้นเป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มจำนวน n ตัว กล่าวคือ $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

การหาฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มจึงเป็นเรื่องที่น่าสนใจศึกษา อย่างไรก็ตามฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มจำนวนหลายตัว

นั้นค่อนข้างหาการแจกแจงได้ยากหากไม่อาศัยสมบัติอื่น ๆ เพิ่มขึ้นเช่นให้ตัวแปรสุ่มเหล่านั้นเป็นอิสระต่อกันและต่างก็มีการแจกแจงเดียวกัน นอกจากนี้สถิติทดสอบที่คุ้นเคยเช่น สถิติไคกำลังสอง สถิติที หรือเอฟต่างก็เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มทั้งสิ้น การศึกษาฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในบทนี้จึงมีความสำคัญ โดยจะเริ่มจากฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องจำนวนตัวเดียว และหลายตัว จากนั้นจึงกล่าวถึงฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องตัวเดียวและหลายตัวตามลำดับ ส่วนฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มผสมที่มีทั้งตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องและตัวแปรสุ่มต่อเนื่องจะยังไม่กล่าวถึงในระดับนี้

2.2 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

เมื่อกำหนดตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องตัวหนึ่งหรือหลายตัวและสนใจศึกษาฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มเหล่านี้ เช่น ถ้า X_1 และ X_2 เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่ทราบฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของ X_1 และทราบฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นร่วมของ X_1 และ X_2 โดยต้องการศึกษา $Y_1 = g_1(X_1) = X_1^2$ หรือ $Y_2 = g_2(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ การหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม Y_1 หรือ Y_2 ในที่นี้จะกล่าวถึงสองวิธีด้วยกัน ดังนี้

1. วิธีการแปลง (method of transformations) หรือเทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร (change of variable technique) อาจเรียกว่าเป็นวิธีที่ใช้หลักการหาความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มโดยตรงเนื่องจากฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องก็คือฟังก์ชันที่ใช้คำนวณความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มนั่นเอง

2. วิธีการใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์โดยอาศัยทฤษฎีบทความเป็นได้อย่างเดียว (uniqueness theorem) ที่กล่าวว่าถ้าตัวแปรสุ่มสองตัวมีฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์เหมือนกัน ตัวแปรสุ่มทั้งสองตัวนั้นย่อมมีการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบเดียวกัน วิธีนี้ใช้เมื่อฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์ของตัวแปรสุ่มนั้นๆ มีจริง

2.2.1 วิธีการแปลง

วิธีการแปลงสำหรับฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องเป็นวิธีการที่อาศัยหลักการคำนวณความน่าจะเป็นโดยตรง โดยถ้าทราบการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ในรูปของตารางแสดงค่าที่เป็นไปได้ต่างๆ พร้อมค่าความน่าจะเป็นที่สอดคล้องกับค่าต่างๆ ของ X ก็ให้พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรสุ่ม Y กับ X กล่าวคือพิจารณาว่าตัวแปรสุ่ม Y มีค่าที่เป็นไปได้อะไรบ้าง แต่ละค่านั้นเกิดขึ้นเมื่อตัวแปรสุ่ม X มีค่าเป็นเท่าไร แต่ถ้าทราบการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ในรูปของฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น ให้หาฟังก์ชันผกผัน เช่น $x = g^{-1}(y) = \sqrt{y}$ และแทนค่า $\sqrt{y}$ ในฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของ X ถ้าฟังก์ชัน $g(\cdot)$ เป็นการแปลงชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง แต่ถ้าฟังก์ชัน $g(\cdot)$ ไม่ใช่การแปลงชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง ให้แบ่งโดเมนของฟังก์ชันออกเป็นช่วงๆ ที่ไม่เกิดร่วมกันที่ทำให้ฟังก์ชันในแต่ละช่วงเป็นการแปลงหนึ่งต่อหนึ่ง จากนั้นหาฟังก์ชันผกผัน $x = g_i^{-1}(y), i = 1, 2, 3, \dots, k$ ช่วง และแทนลงในฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นของ X ทุกช่วงที่แบ่งจากนั้นจึงนำมารวมกัน

การหาการแจกแจงความน่าจะเป็นของฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องเป็นวิธีที่ไม่ยากนัก โดยจะแสดงตัวอย่างกรณีของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งในตัวอย่าง 2.2.1 และแสดงตัวอย่างกรณีของฟังก์ชันไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่งในตัวอย่าง 2.2.2