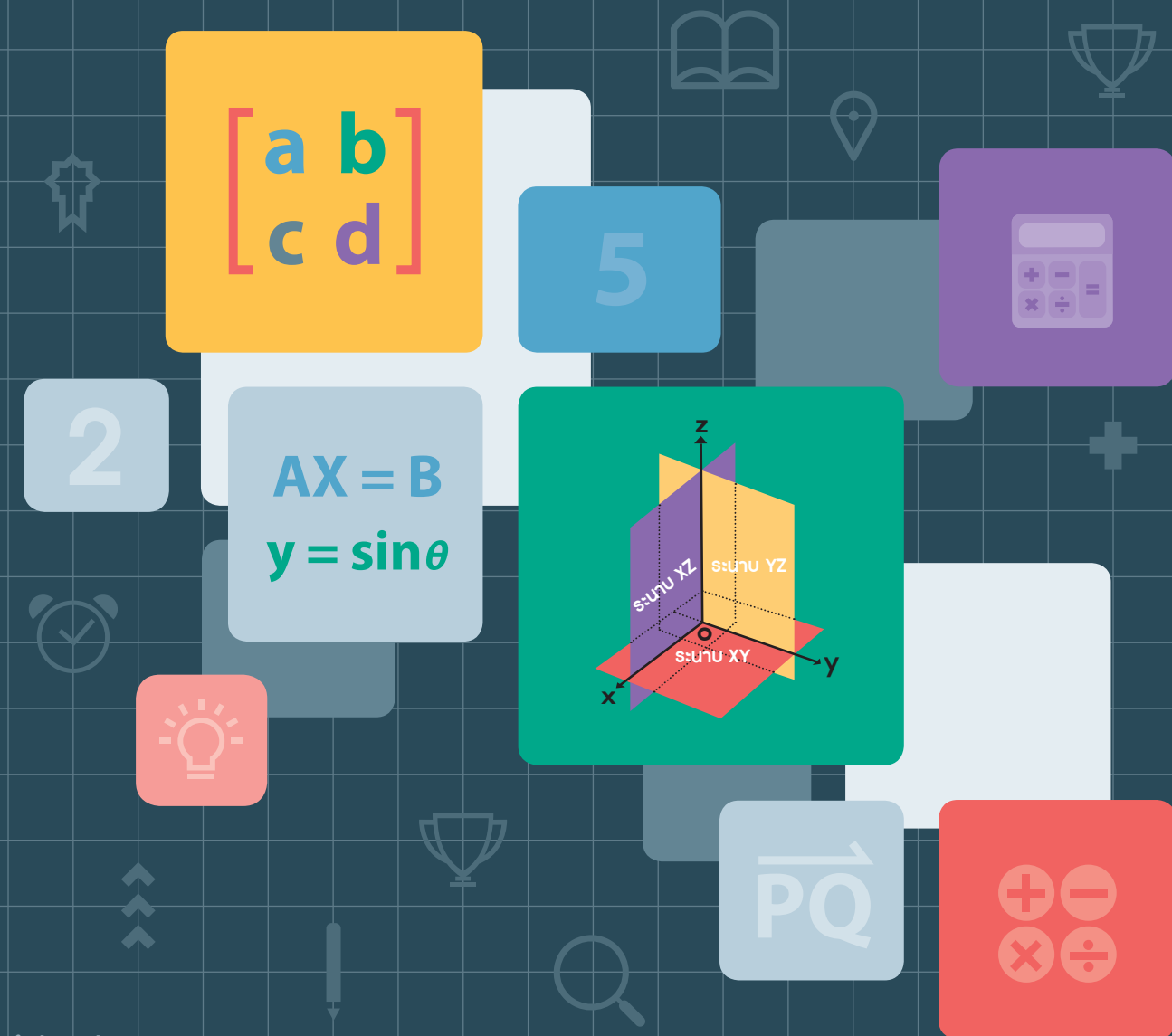




ผู้เรียบเรียง
ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ม.5

เล่ม 2



แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ม. 5

เล่ม 2



แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2

จัดทำโดย

MACIMACEDUCATION

ส่งเสริมนิสัยรักการเรียนรู้ ไปด้วยกัน

ในนาม บริษัท แม็คเอดดูเคชั่น จำกัด

9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว

แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028

www.MACeducation.com

พิมพ์ที่ : บริษัท แพลนพรินท์ติ้ง จำกัด



คำนำ

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษา ขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มุ่งพัฒนาการคิดวิเคราะห์ ความคิดสร้างสรรค์คิดอย่างมีเหตุผลเป็น ระบบ มีแบบแผน แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างครบถ้วนตามทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จากการเรียนรู้สาระสำคัญ ความคิดรวบยอด ฝึกทักษะในกิจกรรมที่หลากหลายอย่างต่อเนื่อง บทสรุปมีเครื่องมือวัดผลและตรวจสอบความรู้ที่คงทนของผู้เรียน ผู้เรียนได้เรียนรู้ครบตามมาตรฐานและ ตัวชี้วัดได้ครบถ้วนและประเมินผู้เรียนได้สอดคล้องกับมาตรฐานและตัวชี้วัด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาทักษะการคิดของผู้เรียนได้เป็นอย่างดี

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

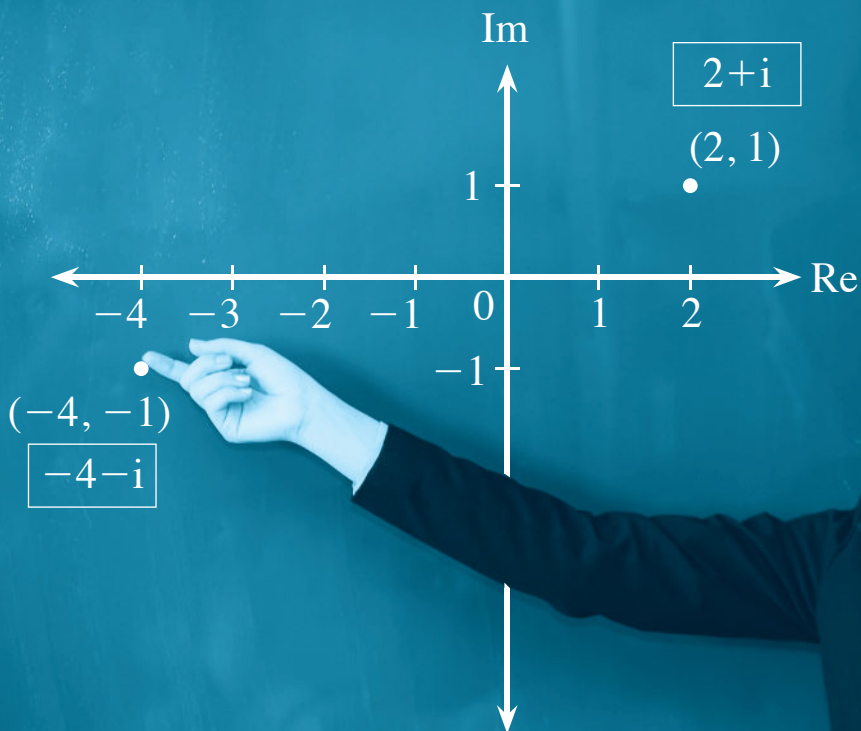


สารบัญ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 จำนวนเชิงซ้อน	1
1. จำนวนเชิงซ้อน	2
2. สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน	11
3. รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน	31
4. กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน	38
5. รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน	58
6. รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน	78
7. สมการพหุนามตัวแปรเดียว	88
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	104
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น	 107
1. หลักการบวกและหลักการคูณ	108
2. การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด	123
3. การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด	135
4. การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด	142
5. การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด	148
6. ทฤษฎีบททวินาม	166
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	174
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น	 177
1. การทดลองสุ่มและเหตุการณ์	178
2. ความน่าจะเป็น	183
3. กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น	195
4. การหาความน่าจะเป็นโดยใช้แผนภาพต้นไม้	203
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	218
 บรรณานุกรม	 222



จำนวนเชิงซ้อน



สาระและผลการเรียนรู้

สาระจำนวนและพีชคณิต

1. เข้าใจความหลากหลายของการแสดงจำนวน ระบบจำนวน การดำเนินการของจำนวน ผลที่เกิดขึ้นจากการดำเนินการ สมบัติของการดำเนินการ และนำไปใช้
2. ใช้นิพจน์ สมการ อสมการและเมทริกซ์ อธิบายความสัมพันธ์ หรือช่วยแก้ปัญหาที่กำหนด

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
2. ทราบว่า n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
3. แก่สมการพหุนามตัวแปรเดียวที่แก้ไม่ได้ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

ในระบบจำนวนจริงมีสมการบางสมการ เช่น $x^2 + 2 = 0$ ที่ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ เนื่องจากกำลังสองของจำนวนจริงใดๆ จะมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ ด้วยเหตุนี้จึงต้องสร้างระบบจำนวนชนิดใหม่เพื่อให้สามารถหาคำตอบของสมการประเภทนี้ได้ และเรียกจำนวนในระบบที่สร้างขึ้นใหม่นี้ว่า จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนในรูป $a+bi$ หรือ (a, b) โดยเรียก a ว่าส่วนจริง และเรียก b ว่าส่วนจินตภาพ

1. จำนวนเชิงซ้อน

จุดประสงค์

1. นักเรียนสามารถบอกความหมายของจำนวนเชิงซ้อนได้
2. นักเรียนสามารถใช้สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อนได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

บทนิยาม

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Numbers) คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง การเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อนเป็นดังนี้
สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

1. การเท่ากัน

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

2. การบวก

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

3. การคูณ

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac-bd, ad+bc)$$

เซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดแทนด้วยสัญลักษณ์ C

$$(a, b) \cdot (c, d) \text{ อาจเขียน } (a, b)(c, d)$$



เช่น

$$1. \quad (5x, -2) = (-10, 4y)$$

$$\text{จะได้} \quad 5x = -10 \text{ และ } 4y = -2$$

$$x = -2 \text{ และ } y = -\frac{1}{2}$$

$$2. \quad (3, -1) + (4, 5) = (3+4, -1+5)$$

$$= (7, 4)$$

$$3. \quad (3, -1)(4, 5) = (3 \cdot 4 - (-1)5, 3 \cdot 5 + (-1)4)$$

$$= (12+5, 15-4)$$

$$= (17, 11)$$



สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วจะได้ว่า

$$(1) \quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad (\text{สมบัติการสลับที่})$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

$$(2) \quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad (\text{สมบัติการเปลี่ยนหมู่})$$

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$

$$(3) \quad z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad (\text{สมบัติการแจกแจง})$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\sqrt{-1} = i$ จงหา $\sqrt{-36}$, $\sqrt{-18}$, $\sqrt{-32}$ และ $\sqrt{-54} + \sqrt{-216}$

วิธีทำ $\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = 6\sqrt{-1} = 6i$

$$\sqrt{-18} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot (-1)} = 3\sqrt{2}\sqrt{-1} = 3\sqrt{2}i$$

$$\sqrt{-32} = \sqrt{16 \cdot 2 \cdot (-1)} = 4\sqrt{2}\sqrt{-1} = 4\sqrt{2}i$$

$$\sqrt{-54} + \sqrt{-216} = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot (-1)} + \sqrt{36 \cdot 6 \cdot (-1)}$$

$$= 3\sqrt{6}i + 6\sqrt{6}i$$

$$= 9\sqrt{6}i$$

ตอบ

☑ ข้อสังเกต

รูปสำเร็จของเลขชี้กำลังของ i เป็นดังนี้

สำหรับ $m \in \mathbb{I}^+ \cup \{0\}$

$$i^{4m} = 1$$

$$i^{4m+1} = i$$

$$i^{4m+2} = -1$$

$$i^{4m+3} = -i$$

และ $i^0 = 1$

บทนิยาม

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ หรือ $z = a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง เรียก a ว่า **ส่วนจริง (real part)** ของ z และแทนด้วย $\text{Re}(z)$ เรียก b ว่า **ส่วนจินตภาพ (imaginary part)** ของ z และแทนด้วย $\text{Im}(z)$

จำนวนจริงก็คือจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์ แต่ส่วนจินตภาพไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้ (purely imaginary number)** เช่น จำนวนเชิงซ้อน $(-1, 0)$ คือ จำนวนจริง -1
จำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ คือ i ซึ่ง $(0, 1)$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้



แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงบอก $\text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(z)$ ของจำนวนเชิงซ้อน z ต่อไปนี้

z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$	z	$\text{Re}(z)$	$\text{Im}(z)$
(1) $5-12i$			(2) $2+i$		
(3) $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i$			(4) $-8i$		
(5) 0			(6) $2\sqrt{2}-\sqrt{2}i$		
(7) $i(2-i)$			(8) $i^3(3-4i)$		
$= 1+2i$			$= -4-3i$		
(9) $(3+2i)+(1-i)$			(10) $4(2-3i)-(2-8i)$		
$=$			$=$		
(11) $(2-3i)-(4-i)$			(12) $\sqrt{2}i(i-\sqrt{2})$		
$=$			$=$		

2. จงเขียนให้อยู่ในรูปอย่างง่าย (กำหนดให้ $\sqrt{-1} = i$)

$$(1) \sqrt{-16} + \sqrt{-49}$$

$$= \sqrt{16}i + \sqrt{49}i$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$(2) 3\sqrt{-48} - \frac{1}{3}\sqrt{-27}$$

$$= 3\sqrt{48}i - \frac{1}{3}\sqrt{27}i$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



(3) $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-2}$

=

=

=

=

=

(4) $\frac{15}{\sqrt{-5}}$

=

=

=

=

=

(5) $\sqrt{-25} + \sqrt{-20}$

=

=

=

=

(6) $\sqrt{-\frac{2}{3}} - \sqrt{-\frac{3}{2}}$

=

=

=

=

(7) $\sqrt{-8} \sqrt{-125}$

=

=

=

=

(8) $4\sqrt{-12} - 5\sqrt{-3}$

=

=

=

=

(9) $\sqrt{-x^2} + \sqrt{-4x^2} - \sqrt{-9x^2}$

=

=

=

=

(10) $\sqrt{-x^2} - \sqrt{-\frac{x^2}{4}} - \sqrt{-\frac{x^2}{9}}$

=

=

=

=

3. กำหนดให้ $i = \sqrt{-1}$ จะได้

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$$

ดังนั้น

$$i^{4n+k} = i^k$$

เมื่อ $n \in I^+ \cup \{0\}$ และ $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1) $i^{21} = \dots\dots\dots$ (2) $i^{42} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$

(3) $i^{56} = \dots\dots\dots$ (4) $i^{123} = \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$ $= \dots\dots\dots$

4. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

(1) $(3+2i)+(5-6i)$

$= 3+2i+5-6i$

$= (3+5)+(2-6)i$

$= \dots\dots\dots$

(2) $(3+2i)-(5-6i)$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

(3) $(2-3i)+(2+3i)$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

(4) $(2-3i)-(2+3i)$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

(5) $(5+3i)+(5-3i)$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

(6) $(-\sqrt{3}+\sqrt{2}i)-(-\sqrt{3}-\sqrt{2}i)$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

(7) $(6+\sqrt{-9})+(3-\sqrt{-25})$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

(8) $(6+\sqrt{-9})-(3-\sqrt{-25})$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$

$= \dots\dots\dots$



5. กำหนด z_1 และ z_2 จงเติม z_1+z_2 และ z_1-z_2 ในตาราง

ข้อ	z_1	z_2	z_1+z_2	z_1-z_2
(1)	$5+3i$	$2i$		
(2)	$7+10i$	$-4i$		
(3)	$-8i$	$2+i$		
(4)	i	$6-i$		
(5)	$2+7i$	$5+4i$		
(6)	$-3+4i$	$2-7i$		
(7)	$3-\sqrt{-16}$	$\sqrt{-9}+1$		
(8)	$-2\sqrt{-49}+4$	$5-\sqrt{-25}$		
(9)	$5-3i$	$10-6i$		
(10)	$-i-1$	$-2-2i$		
(11)	$-2i+3$	$6-4i$		
(12)	$5-\sqrt{-25}$	$-3+\sqrt{-36}$		

ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$(a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$$



6. จงหาผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

(1) $(4-i)(4+i)$

$$= 4^2 - i^2$$

$$= 16+1$$

$$= \dots\dots\dots$$

(2) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(3) $(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(4) $(\sqrt{5}-\sqrt{2}i)(\sqrt{5}+\sqrt{2}i)$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(5) $(1+6i)(5-7i)$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(6) $(-3+5i)(7-i)$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(7) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(8) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}i\right)$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(9) $(3+5i)(\sqrt{3}-\sqrt{5}i)$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(10) $(3+4i)^2$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(11) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

(12) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^2$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

[illegible]

[illegible]

This image shows a full page of primary-ruled paper. It contains ten identical horizontal rows. Each row is defined by three lines: a solid top line, a dashed midline, and a solid bottom line. The entire page is white, and there are no margins or other markings.

[illegible]



2. สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

ในระบบจำนวนจริง ตัวผกผันการบวกของจำนวนใดก็ตาม คือจำนวนที่นำมาบวกกับจำนวนนั้นแล้วได้เอกลักษณ์การบวก

เอกลักษณ์และตัวผกผันการบวก

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา} \quad (a, b) + (0, 0) &= (a+0, b+0) = (a, b) \\ (0, 0) + (a, b) &= (0+a, 0+b) = (a, b)\end{aligned}$$

เรากล่าวว่า $(0, 0)$ เป็นเอกลักษณ์การบวกในระบบจำนวนเชิงซ้อน

$$\begin{aligned}\text{พิจารณา} \quad (a, b) + (-a, -b) &= (a-a, b-b) = (0, 0) \\ (-a, -b) + (a, b) &= (-a+a, -b+b) = (0, 0)\end{aligned}$$

เรากล่าวว่า $(-a, -b)$ เป็นตัวผกผันการบวกของ (a, b)
หรือ $-a-bi$ เป็นตัวผกผันการบวกของ $a+bi$
 $-z$ เป็นตัวผกผันการบวกของ z

การลบจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \text{ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน } z_1, z_2 \text{ ใดๆ}$$

- เช่น ตัวผกผันการบวกของ $(0, 3)$ คือ $(0, -3)$
ตัวผกผันการบวกของ $(3, -2)$ คือ $(-3, 2)$
ตัวผกผันการบวกของ $(-1, -2)$ คือ $(1, 2)$
ตัวผกผันการบวกของ $4+5i$ คือ $-4-5i$
ตัวผกผันการบวกของ $-\sqrt{3}i$ คือ $\sqrt{3}i$
ตัวผกผันการบวกของ $3-i$ คือ $-3+i$
ตัวผกผันการบวกของ $(3-5i)-(2+3i)$ คือ $-1+8i$ [เนื่องจาก $(3-5i)-(2+3i) = 1-8i$]

เอกลักษณ์และตัวผกผันการคูณ

$$\text{พิจารณา } (a, b)(1, 0) = (a, b)$$

$$(1, 0)(a, b) = (a, b)$$

เรากล่าวว่า $(1, 0)$ เป็นเอกลักษณ์การคูณในระบบจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า (a, b) เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เท่ากับ $(0, 0)$

ให้ (x, y) เป็นตัวผกผันการคูณของ (a, b)

$$\text{จะได้ } (a, b)(x, y) = (1, 0)$$

$$\text{ตัวผกผันการคูณของ } (a, b) \text{ คือ } \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$$

$$\text{ตัวผกผันการคูณของ } (a+bi) \text{ คือ } \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

การหารจำนวนเชิงซ้อน

บทนิยาม

$$z_1 \div z_2 = z_1 z_2^{-1} \text{ สำหรับจำนวนเชิงซ้อน } z_1, z_2 \text{ ใดๆ}$$

$$\text{ซึ่ง } z_2 \neq (0, 0) \text{ เขียนแทน } z_1 \div z_2 \text{ ด้วย } \frac{z_1}{z_2}$$

$$\text{เช่น ตัวผกผันการคูณของ } (3, 4) \text{ คือ } \left(\frac{3}{3^2+4^2}, \frac{-4}{3^2+4^2} \right) = \left(\frac{3}{25}, -\frac{4}{25} \right)$$

$$\text{ตัวผกผันการคูณของ } 5-12i \text{ คือ } \frac{5}{5^2+(-12)^2} - \frac{-12}{5^2+(-12)^2}i = \frac{5}{169} + \frac{12}{169}i$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวผกผันการคูณของ } 3+4i \text{ คือ } \frac{1}{3+4i} &= \frac{3}{3^2+4^2} - \frac{4}{3^2+4^2}i \\ &= \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} &= \frac{3-4i}{9+16} \\ &= \frac{3-4i}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ตัวผกผันการคูณของ } \frac{3+4i}{3-4i} \text{ คือ } \frac{3-4i}{3+4i} &= (3-4i) \left(\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \right) \\ &= \frac{9}{25} - \frac{12}{25}i - \frac{12}{25}i + \frac{16}{25}i^2 \\ &= -\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{3-4i}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} &= \frac{9-24i+16i^2}{9+16} \\ &= \frac{-7-24i}{25} \end{aligned}$$



บทนิยาม

ให้ $z = a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค (conjugate) ของ z คือ $a-bi$

สังยุคของ z เขียนแทนด้วย $\bar{z}$ หรือ $\overline{a+bi} = a-bi$

กำหนดให้ $z = a+bi$
 จะได้ $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi)$
 $= a^2 - b^2i^2$
 $= a^2 + b^2$



เช่น $(4-3i)(4+3i) = 4^2 + 3^2$
 $= 16+9$
 $= 25$
 $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) = 1^2 + (\sqrt{2})^2$
 $= 1+2$
 $= 3$

สมบัติของสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ z , z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนจะได้ว่า

- $\text{Re}(\bar{z}) = \text{Re}(z)$ และ $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$
- $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ และ $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$
- $z \cdot \bar{z} = (\text{Re}(z))^2 + (\text{Im}(z))^2$ นั่นคือ $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ เมื่อ $z = a+bi$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\overline{(-z)} = -\bar{z}$
- ถ้า $z \neq 0$ และ $\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{z}\right)$ นั่นคือ $(\bar{z})^{-1} = \overline{(z^{-1})}$
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\left[\frac{z_1}{z_2}\right]} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$



11. จากข้อ 7 $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_n}$

12. จากข้อ 9 $\overline{z_1 z_2 z_3 \dots z_n} = \overline{z_1} \overline{z_2} \overline{z_3} \dots \overline{z_n}$

13. $z = \overline{z}$ เมื่อส่วนจินตภาพเป็นศูนย์

14. $z = -\overline{z}$ เมื่อส่วนจริงเป็นศูนย์

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $z = a+bi$ จงหา

(1) $\overline{\overline{z}}$

(2) $(-\overline{z})$

วิธีทำ (1) จาก

$$z = a+bi$$

$$\overline{z} = a-bi$$

$$\overline{\overline{z}} = a+bi$$

ตอบ

(2) จาก

$$z = a+bi$$

$$-z = -a-bi$$

$$(-\overline{z}) = -a+bi$$

$$= -(a-bi)$$

$$= -\overline{z}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $z = 3-2i$ จงหา $(\overline{z})^2$ และ $\overline{(z^2)}$

วิธีทำ จาก

$$z = 3-2i$$

จะได้

$$\overline{z} = 3+2i$$

$$(\overline{z})^2 = (3+2i)^2$$

$$= 9+12i+4i^2$$

$$= 9+12i-4$$

$$= 5+12i$$

ตอบ

และ

$$z^2 = (3-2i)^2$$

$$= 9-12i+4i^2$$

$$= 9-12i-4$$

$$= 5-12i$$

$$\overline{(z^2)} = 5+12i$$

ตอบ

จากตัวอย่างที่ 2 จะได้

$$(\overline{z})^2 = \overline{(z^2)}$$





แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงเติมคำตอบในช่องว่าง

- (1) ตัวผกผันการบวกของ $(-1, 0)$ คือ
- (2) ตัวผกผันการบวกของ $(3, -1)$ คือ
- (3) ตัวผกผันการบวกของ $-3i$ คือ
- (4) ตัวผกผันการบวกของ $2+5i$ คือ
- (5) ตัวผกผันการบวกของ $-4-8i$ คือ
- (6) ตัวผกผันการบวกของ $\frac{3}{2}-2i$ คือ
- (7) ตัวผกผันการบวกของ $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ คือ
- (8) ตัวผกผันการบวกของ $-2+4\sqrt{2}i$ คือ
- (9) ตัวผกผันการบวกของ $(6+2i)+(4-5i)$ คือ
- (10) ตัวผกผันการบวกของ $(40i-1)+(-1-4i)$ คือ
- (11) ตัวผกผันการบวกของ $(13-i)-(-2+3i)$ คือ
- (12) ตัวผกผันการบวกของ $(18i+7)-20i$ คือ

2. จงเติมคำตอบในช่องว่าง

- | | |
|--|---|
| <p>(1) ตัวผกผันการคูณของ $(3, -4)$ คือ</p> $= \left(\frac{3}{3^2+(-4)^2}, \frac{-(-4)}{3^2+(-4)^2} \right)$ <p>=</p> | <p>(2) ตัวผกผันการคูณของ $(-5, -12)$ คือ</p> <p>=</p> <p>=</p> |
| <p>(3) ตัวผกผันการคูณของ $(1, 0)$ คือ</p> <p>=</p> <p>=</p> | <p>(4) ตัวผกผันการคูณของ $(0, 1)$ คือ</p> <p>=</p> <p>=</p> |
| <p>(5) ตัวผกผันการคูณของ $1+i$ คือ</p> <p>=</p> <p>=</p> | <p>(6) ตัวผกผันการคูณของ $2-i$ คือ</p> <p>=</p> <p>=</p> |

(7) ตัวผกผันการคูณของ $1-3i$ คือ

=

=

(8) ตัวผกผันการคูณของ $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ คือ

=

=

3. จงเติมคำตอบในช่องว่าง

(1) สัมภาคของ 6 คือ

(2) สัมภาคของ i คือ

(3) สัมภาคของ -1 คือ

(4) สัมภาคของ $-3i$ คือ

(5) สัมภาคของ $6+i$ คือ

(6) สัมภาคของ $12-5i$ คือ

(7) สัมภาคของ $-3+4i$ คือ

(8) สัมภาคของ $-\sqrt{3}-i$ คือ

(9) สัมภาคของ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ คือ

(10) สัมภาคของ $-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ คือ

4. จงหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

(1) $1+i$

(2) $\sqrt{3}+i$

วิธีทำ ตัวผกผันการคูณของ $1+i$ คือ

วิธีทำ ตัวผกผันการคูณของ $\sqrt{3}+i$ คือ

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+i} = \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$



(3) $\frac{3-4i}{3+4i}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

(4) $\frac{2+i}{2-i}$

วิธีทำ

.....

.....

.....

.....

.....

5. จงหาค่าของ x และ y ในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $(x+yi)(3+i) = 11-3i$

วิธีทำ $(x+yi)(3+i) = 11-3i$

$$x+yi = \frac{11-3i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(2) $(2x+yi)(1+i) = -2+6i$

วิธีทำ $(2x+yi)(1+i) = -2+6i$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....