ผู้เรียบเรียง
ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ ม.5

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

เล่ม 1

IMACEDUCATION

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์ ม.5

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

เล่ม 1

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1

จัดทำโดย

MACEDUCATION

ส่งธนาณัติสั่งจ่าย **ไปรษณีย์ลาดพร้าว**

ในนาม **บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด**

9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว

แขวงจันทรเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028

www.**MACeducation**.com

พิมพ์ที่ : บริษัท พี อาร์ คัลเลอร์พริ้นท์ จำกัด

คำนำ

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 1 ตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มุ่งพัฒนาการคิดวิเคราะห์ ความคิดสร้างสรรค์คิดอย่างมีเหตุผลเป็นระบบ มีแบบแผน แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างครบถ้วนตามทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จากการเรียนรู้สาระสำคัญ ความคิดรวบยอด ฝึกทักษะในกิจกรรมที่หลากหลายอย่างต่อเนื่อง บทสรุปมีเครื่องมือวัดผลและตรวจสอบความรู้ที่คงทนของผู้เรียน ผู้เรียนได้เรียนรู้ครบตามมาตรฐานและตัวชี้วัดได้ครบถ้วนและประเมินผู้เรียนได้สอดคล้องกับมาตรฐานและตัวชี้วัด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาทักษะการคิดของผู้เรียนได้เป็นอย่างดี

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

สารบัญ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ **1**

1. ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ 2
2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ 15
3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม 20
4. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 27
5. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม 33
6. ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ 43
7. เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ 54
8. กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ 63
9. การหาระยะทางและความสูง 71

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 81

หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 เมทริกซ์ **85**

1. เมทริกซ์ 86
2. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 110
3. เมทริกซ์ผกผัน 125
4. การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น 141

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 154

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 เวกเตอร์ **159**

1. เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์ 160
2. ระบบพิกัดฉากสามมิติ 174
3. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 179
4. ผลคูณเชิงสเกลาร์ 194
5. ผลคูณเชิงเวกเตอร์ 206

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ 217

บรรณานุกรม **221**

ภาคผนวก **222**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

สาระและผลการเรียนรู้

สาระจำนวนและพีชคณิต

1. เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน ลำดับและอนุกรม และนำไปใช้
2. ใช้นิพจน์ สมการ อสมการและเมทริกซ์ อธิบายความสัมพันธ์ หรือช่วยแก้ปัญหาที่กำหนดให้

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
2. แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
3. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา

ตรีโกณมิติเป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างมุมและด้านของรูปสามเหลี่ยม การหาระยะทาง พื้นที่ มุมและทิศทางที่ไม่สามารถหาได้โดยตรง

ฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถนิยามจากวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด ได้แก่ ฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ที่นิยามโดยอาศัยฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ คือ ฟังก์ชันแทนเจนต์ ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ฟังก์ชันซีแคนต์ และฟังก์ชันโคซีแคนต์

1. ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

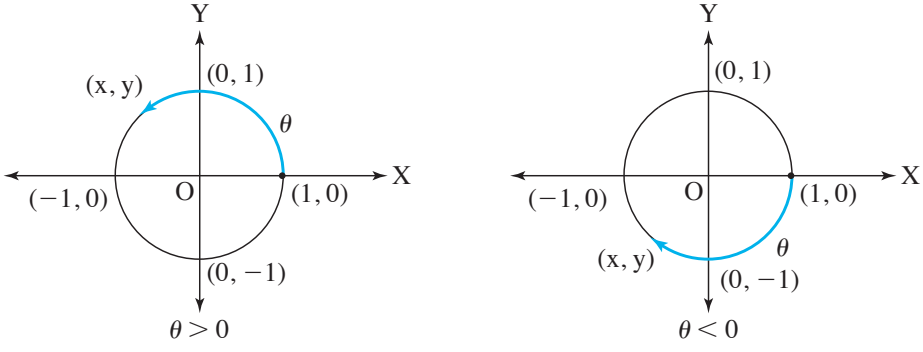
1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

วงกลมหนึ่งหน่วย (the unit circle) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมี 1 หน่วย ใช้กำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

วงกลมเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R | x^2 + y^2 = 1\}$

เมื่อวัดระยะจากจุด $(1, 0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว $|\theta|$ หน่วย เมื่อ θ แทนจำนวนจริงใดๆ ถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย

1. วัดไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา $\theta > 0$
2. วัดไปในทิศตามเข็มนาฬิกา $\theta < 0$



เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ จะสามารถหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางการวัดที่กำหนดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ถ้า $|\theta| > 2\pi$ การวัดส่วนโค้งจะเกิน 1 รอบ

กำหนดฟังก์ชัน $f : R \to R$ และ $g : R \to R$ โดยที่สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใดๆ $f(\theta) = x$ และ $g(\theta) = y$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ เรียกฟังก์ชัน g ว่า **ฟังก์ชันไซน์ (sine)** และเรียกฟังก์ชัน f ว่า **ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine)** เขียนแทน g ด้วย sin และเขียนแทน f ด้วย cos

จะได้

$y = \sin\theta$ (อ่านว่า วายเท่ากับไซน์ทีตา)

$x = \cos\theta$ (อ่านว่า เอกซ์เท่ากับคอสทีตา)

จากกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R | x^2+y^2 = 1\}$

จะเห็นว่า $-1 \leq y \leq 1$ และ $-1 \leq x \leq 1$

ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์คือเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองคือเซตของจำนวนจริง

จาก $x^2+y^2 = 1$

จะได้ $(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2 = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

หรือเขียน $\cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

หมายเหตุ

$\cos^2\theta$ หมายถึง $(\cos\theta)^2 = (\cos\theta)(\cos\theta)$

$\cos\theta^2$ หมายถึง cos ของจำนวนจริง θ^2

วงกลมหนึ่งหน่วยมีรัศมี 1 หน่วย เส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หรือ 2π หน่วย เมื่อ $r = 1$ หน่วย

1.1 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

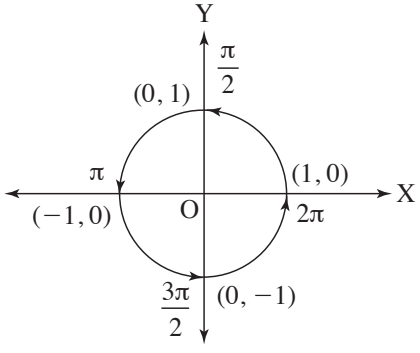
ความยาวส่วนโค้งวัดจากจุด $(1, 0)$ ทวนเข็มนาฬิกาถึงจุด $(0, 1)$ เท่ากับ $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ความยาวส่วนโค้งวัดจากจุด $(1, 0)$ ทวนเข็มนาฬิกาถึงจุด $(-1, 0)$ เท่ากับ π หน่วย

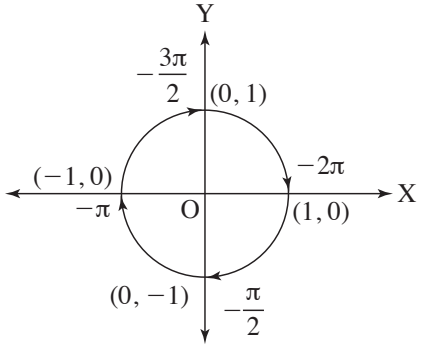
ความยาวส่วนโค้งวัดจากจุด $(1, 0)$ ทวนเข็มนาฬิกาถึงจุด $(0, -1)$ เท่ากับ $\frac{3\pi}{2}$ หน่วย

ความยาวส่วนโค้งวัดจากจุด $(1, 0)$ ทวนเข็มนาฬิกาถึงจุด $(1, 0)$ เท่ากับ 2π หน่วย

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$



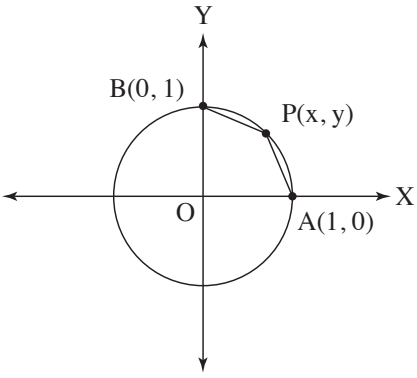
ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา



ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

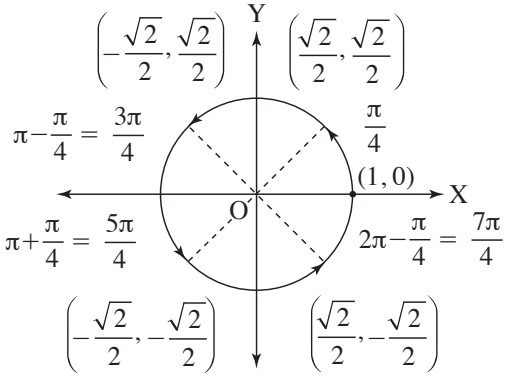
θ / ฟังก์ชัน	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
sin	0	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
cos	1	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

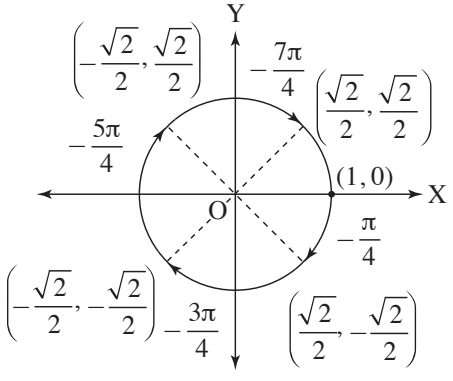


จากรูป P(x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย วัดจากจุด (1, 0) และเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB จะได้คอร์ด PA ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น พิกัดของจุด P(x, y) คือ $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ หรือ $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ส่วนพิกัดของจุดอื่นๆ หาได้จากภาพสะท้อนของจุด P



ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

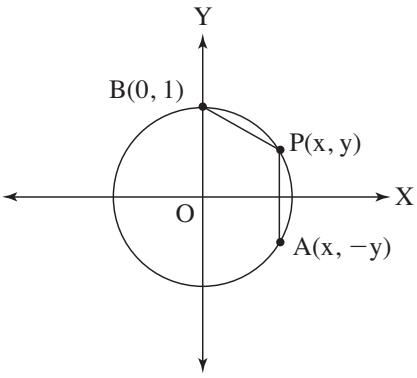


ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

θ / ฟังก์ชัน	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{4}$
sin	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
cos	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอยู่ในรูปของมุม $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \ldots, \frac{(2n+1)\pi}{4}$ และ $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \ldots, \frac{-(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

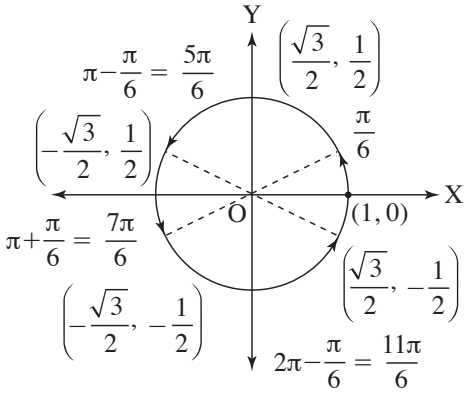
ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$



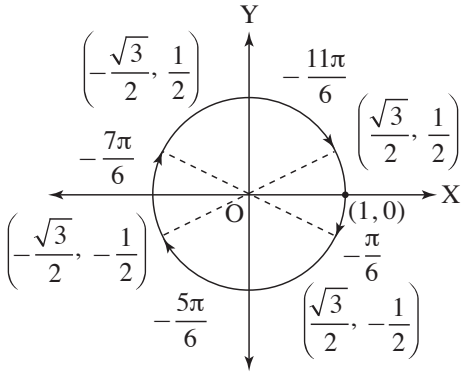
จากรูป P(x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย วัดจากจุด (1, 0) A เป็นภาพสะท้อนของจุด P ข้ามแกน X มีพิกัดเป็น (x, −y)

ส่วนโค้ง PA ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB ทำให้คอร์ด PA ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น พิกัดของจุด P คือ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ส่วนพิกัดของจุดอื่นๆ หาได้จากภาพสะท้อนของจุด P



ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

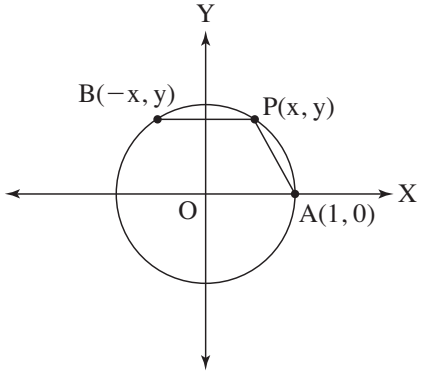


ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

θ / ฟังก์ชัน	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{11\pi}{6}$
sin	$\frac{1}{2}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอยู่ในรูปของมุม $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$, $2n\pi\pm\frac{5\pi}{6}$, $2n\pi\pm\frac{7\pi}{6}$ และ $2n\pi\pm\frac{11\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

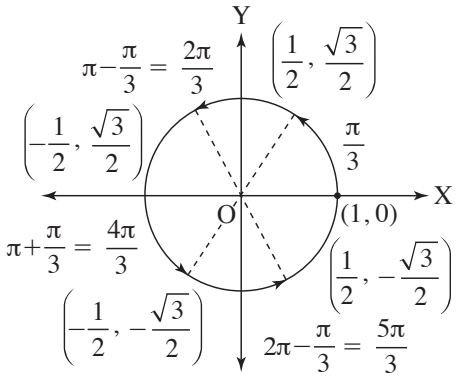
ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

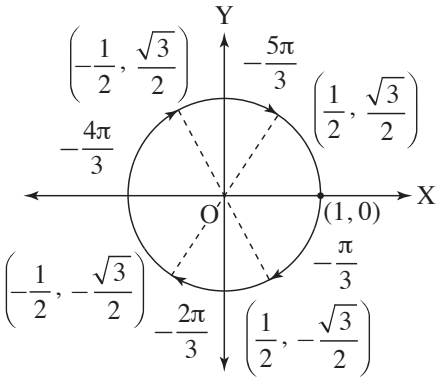


จากรูป P(x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย วัดจากจุด (1, 0) B เป็นภาพสะท้อนของจุด P ข้ามแกน Y มีพิกัดเป็น (−x, y)

ส่วนโค้ง PA ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB ทำให้คอร์ด PA ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น พิกัดของจุด P คือ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ส่วนพิกัดของจุดอื่นๆ หาได้จากภาพสะท้อนของจุด P





θ / ฟังก์ชัน	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$
sin	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....
cos	$\frac{1}{2}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอยู่ในรูปของมุม $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $2n\pi\pm\frac{4\pi}{3}$ และ $2n\pi\pm\frac{5\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

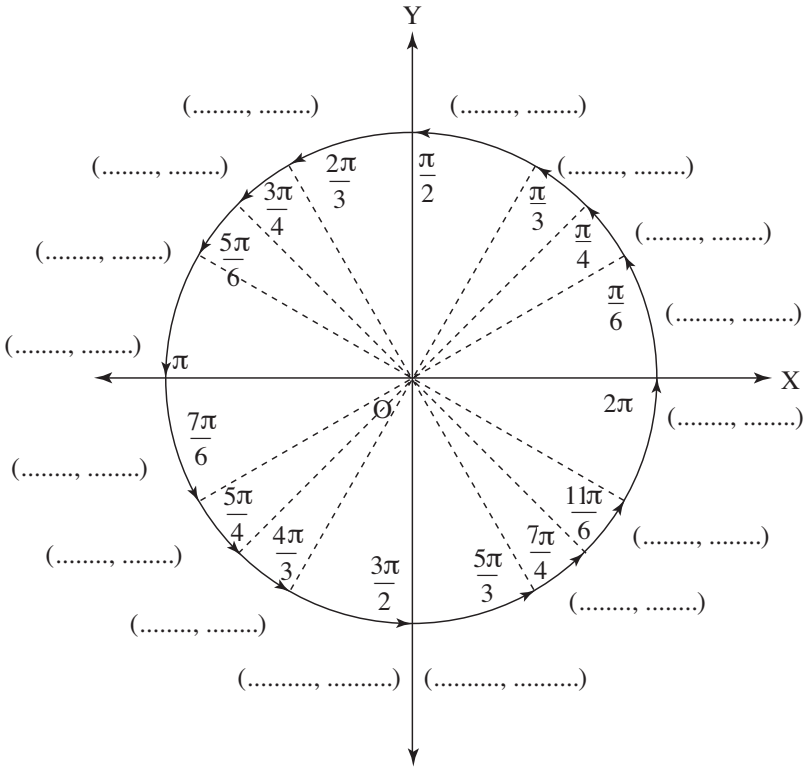
θ (องศา)	θ (เรเดียน)	sin θ	cos θ
0	0	.....	.....
30	$\frac{\pi}{6}$	.....	.....
45	$\frac{\pi}{4}$	.....	.....
60	$\frac{\pi}{3}$	.....	.....

θ (องศา)	θ (เรเดียน)	$\sin\theta$	$\cos\theta$
90	$\frac{\pi}{2}$	.....	.....
120	$\frac{2\pi}{3}$	.....	.....
135	$\frac{3\pi}{4}$	.....	.....
150	$\frac{5\pi}{6}$	.....	.....
180	π	.....	.....
210	$\frac{7\pi}{6}$	.....	.....
225	$\frac{5\pi}{4}$	.....	.....
240	$\frac{4\pi}{3}$	.....	.....
270	$\frac{3\pi}{2}$	.....	.....
300	$\frac{5\pi}{3}$	.....	.....
315	$\frac{7\pi}{4}$	.....	.....
330	$\frac{11\pi}{6}$	.....	.....
360	2π	.....	.....

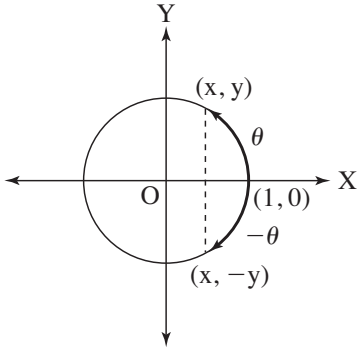
2. จงหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง โดยเขียนจำนวนจริง θ ในรูป $2n\pi\pm\alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

จำนวนจริง θ	แนวคิด	$\sin\theta$	$\cos\theta$
(1) 5π	$4\pi+\pi$	.....	.....
(2) -3π	$-(2\pi+\pi) = -2\pi-\pi$	.....	.....
(3) $\frac{9\pi}{2}$	$4\pi+\frac{\pi}{2}$	.....	.....
(4) $-\frac{7\pi}{2}$	$-3\pi-\frac{\pi}{2} = -2\pi-\frac{3\pi}{2}$	.....	.....
(5) 63π	$62\pi+\pi$	.....	.....
(6) -47π	$-46\pi-\pi$	.....	.....
(7) $\frac{27\pi}{2}$	$13\pi+\frac{\pi}{2} = 12\pi+\frac{3\pi}{2}$	.....	.....
(8) $-\frac{13\pi}{2}$	$-6\pi-\frac{\pi}{2}$	.....	.....
(9) 31π	$30\pi+\pi$	.....	.....
(10) -67π	$-66\pi-\pi$	.....	.....
(11) $\frac{9\pi}{4}$	$2\pi+\frac{\pi}{4}$	.....	.....
(12) $\frac{13\pi}{3}$	$4\pi+\frac{\pi}{3}$	.....	.....

3. กำหนดวงกลมหนึ่งหน่วย จงเติมพิกัดของจุดปลายของส่วนโค้งบนวงกลม



1.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ



จากจุด (x, y) และ $(x, -y)$ สรุปได้ว่า

$$x = \cos\theta \qquad y = \sin\theta$$

$$x = \cos(-\theta) \qquad -y = \sin(-\theta)$$

ดังนั้น
$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

ถ้า $\theta > 2\pi$ และหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n เหลือเศษ α (แอลฟา)

นั่นคือ $\theta = 2n\pi+\alpha$ เมื่อ $n \in I^+$ และ $0 \leqslant \alpha < 2\pi$

การวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด $(1, 0)$ ไปยาว θ หน่วย วัดไป α หน่วยก็เพียงพอ เนื่องจาก $2n\pi$ แสดงว่าวัดครบ n รอบ

สรุปได้ดังนี้

$$\sin\theta = \sin(2n\pi+\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos\theta = \cos(2n\pi+\alpha) = \cos\alpha$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sin\frac{25\pi}{3}$, $\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$, $\cos\frac{25\pi}{4}$ และ $\cos\left(-\frac{29\pi}{3}\right)$

วิธีทำ

$$\sin\frac{25\pi}{3} = \sin\left(8\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\times4\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ ตอบ

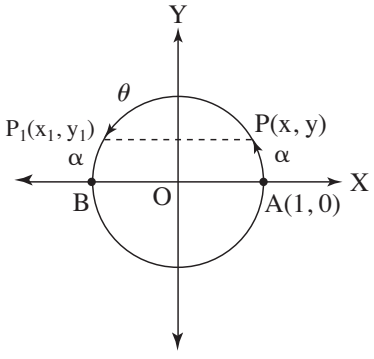
$$\sin\left(-\frac{25\pi}{6}\right) = -\sin\frac{25\pi}{6} = -\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(2\times2\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$ ตอบ

$$\cos\frac{25\pi}{4} = \cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\times3\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$ ตอบ

$$\cos\left(-\frac{29\pi}{3}\right) = \cos\frac{29\pi}{3} = \cos\left(8\pi+\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$$ ตอบ

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π

1. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 2 $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$



ให้ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ให้ $\alpha = \pi-\theta$ จะได้ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

และ $\theta = \pi-\alpha$

จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของ P_1 ข้ามแกน Y

จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin\alpha$ และ $x = \cos\alpha$

แต่ $y = y_1 = \sin\theta = \sin(\pi-\alpha)$

และ $-x = x_1 = \cos\theta = \cos(\pi-\alpha)$

$$\sin\theta = \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta = \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

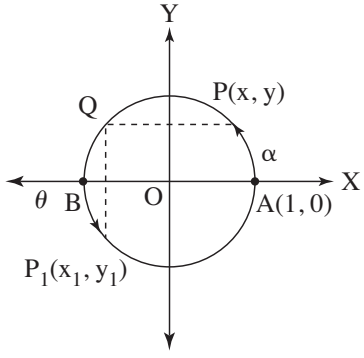
ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sin\frac{5\pi}{6}$ และ $\cos\frac{2\pi}{3}$

วิธีทำ

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$ **ตอบ**

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$ **ตอบ**

2. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 3 $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$



เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ เขียนในรูป $\theta = \pi+\alpha$ โดยที่ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จุด Q เป็นภาพสะท้อนของจุด P_1 ข้ามแกน X

จุด P(x, y) เป็นภาพสะท้อนของจุด Q ข้ามแกน Y

ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย $y_1 = -y, x_1 = -x$

จุด P(x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น

$$\sin\theta = \sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta = \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

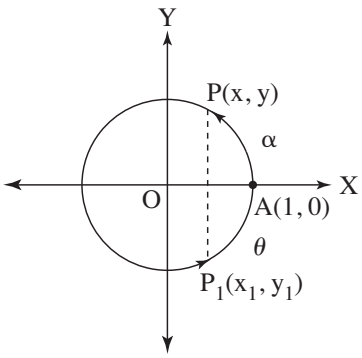
ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\sin\frac{5\pi}{4}$ และ $\cos\frac{7\pi}{6}$

วิธีทำ

$$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$ **ตอบ**

$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$ **ตอบ**

3. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 4 $\left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$



เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ เขียนในรูป $\theta = 2\pi - \alpha$ โดยที่ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด P_1 ข้ามแกน X

ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y_1 = -y, x_1 = x$

จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น

$\sin\theta = \sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta = \cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\sin\frac{5\pi}{3}$ และ $\cos\frac{7\pi}{4}$

วิธีทำ

$$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$
$$= -\sin\frac{\pi}{3}$$
$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ตอบ

$$\cos\frac{7\pi}{4} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ตอบ

แบบฝึกหัดที่ 2

1. กำหนดให้ $\pi = 3.1416$ $\quad 2\pi = 6.2832$

$\frac{\pi}{2} = 1.5708$ $\quad \frac{3\pi}{2} = 4.7124$

$\frac{\pi}{3} = 1.0472$ $\quad \frac{2\pi}{3} = 2.0944$

$\frac{\pi}{4} = 0.7854$ $\quad \frac{3\pi}{4} = 2.3562$

$\frac{\pi}{6} = 0.5236$ $\quad \frac{5\pi}{6} = 2.6180$

(1) กำหนดให้ $\sin\theta = 0.48$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจตุภาคที่ .....

(2) กำหนดให้ $\sin\theta = -0.52$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจตุภาคที่ .....

(3) กำหนดให้ $\cos\theta = 0.91$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจตุภาคที่ .....

(4) กำหนดให้ $\cos\theta = -0.85$ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจตุภาคที่ .....

2. จงเขียนค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$

จำนวนจริง θ	เขียนในรูป $\theta = \pi \pm \alpha$ $\theta = 2n\pi \pm \alpha$	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$\frac{7\pi}{6}$	$\pi+\frac{\pi}{6}$	$\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}$	$\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6}$
$\frac{3\pi}{5}$	.....	.....	.....
$\frac{5\pi}{3}$	.....	.....	.....
$\frac{9\pi}{10}$	.....	.....	.....
$\frac{17\pi}{9}$	.....	.....	.....
$\frac{15\pi}{7}$	.....	.....	.....
$-\frac{19\pi}{5}$	.....	.....	.....
$-\frac{7\pi}{3}$	.....	.....	.....

3. กำหนดให้ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = 0.42$ จงหาค่าของ

(1) $\cos\theta$

วิธีทำ จาก $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

เนื่องจาก $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= \sqrt{1-(0.42)^2}$

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

(2) $\sin(\pi-\theta)$

วิธีทำ $\sin(\pi-\theta)$

$= \sin\theta$

$=$ .....

(3) $\cos(\pi-\theta)$

วิธีทำ $\cos(\pi-\theta)$

$=$ .....

$=$ .....

(4) $\cos(\theta-2\pi)$

วิธีทำ $\cos(\theta-2\pi)$

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

(5) $\sin(2\pi-\theta)$

วิธีทำ $\sin(2\pi-\theta)$

$=$ .....

$=$ .....

(6) $\cos(\pi+\theta)$

วิธีทำ $\cos(\pi+\theta)$

$=$ .....

$=$ .....

4. กำหนดให้ $\cos\theta=\frac{3}{5}$ และ $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$

จาก $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta+\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$

$\sin^2\theta =$ .....

..... $=$ .....

..... $=$ .....

จงหาค่าของ

(1) $\cos(\theta-\pi)$

วิธีทำ $\cos(\theta-\pi)$

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

(2) $\cos(\theta-2\pi)$

วิธีทำ $\cos(\theta-2\pi)$

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

บทนิยาม

สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin\theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0$$

โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. โดเมนของฟังก์ชัน sin และ cos คือ R
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน sin และ cos คือ $\{x \in R | -1 \leq x \leq 1\}$
3. โดเมนของฟังก์ชัน tan และ sec คือ $R - \left\{x \in R | x = \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in I\right\}$
4. โดเมนของฟังก์ชัน cot และ cosec คือ $R - \{x \in R | x = n\pi, n \in I\}$
5. เรนจ์ของฟังก์ชัน tan และ cot คือ R
6. เรนจ์ของฟังก์ชัน sec และ cosec คือ $R - \{x \in R | -1 < x < 1\}$

ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \tan\theta \neq 0 \quad \text{หรือ} \quad \sin\theta \neq 0$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \quad \text{เมื่อ} \quad \sin\theta \neq 0$$

แบบฝึกหัดที่ 3

1. กำหนดให้ $\sin\theta = 0.52$ และ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของ θ

(1) $\cos\theta$

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$= .....$

$= .....$

$= .....$

$= .....$

(2) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= .....$

$= .....$

(3) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$= .....$

$= .....$

(4) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

$= .....$

$= .....$

(5) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= .....$

$= .....$

2. กำหนดให้ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{3}{5}$ จงหาค่าของ

(1) $\operatorname{cosec}\theta+\sec\theta$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta$

(3) $\sec^2\theta-\tan^2\theta$

(4) $\operatorname{cosec}^2\theta-\cot^2\theta$

วิธีทำ จาก $\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

เนื่องจาก $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$\cos\theta = ...$

$= .....$

$= .....$

$= .....$

จะได้ $\tan\theta = ...$ $\cot\theta = ...$

$\sec\theta = ...$ $\operatorname{cosec}\theta = ...$

(1) $\text{cosec}\,\theta+\sec\theta$

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta$

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

(3) $\sec^2\theta-\tan^2\theta$

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

(4) $\text{cosec}^2\theta-\cot^2\theta$

$=$ .....

$=$ .....

$=$ .....

3. จงเติมตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\text{cosec}\,\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	.....	.....	.....	ไม่นิยาม	.....	ไม่นิยาม
$\frac{\pi}{6}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\frac{\pi}{4}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\frac{\pi}{3}$	.....	.....	.....	.....	.....	.....
$\frac{\pi}{2}$	.....	.....	ไม่นิยาม	.....	ไม่นิยาม	.....

4. จงบอกว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคใด เมื่อกำหนด

(1) $\sin\theta>0$ และ $\cos\theta>0$ .....

(2) $\sin\theta>0$ และ $\cos\theta<0$ .....

(3) $\sin\theta<0$ และ $\cos\theta>0$ .....

(4) $\sin\theta<0$ และ $\cos\theta<0$ .....

(5) $\tan\theta>0$ และ $\cos\theta<0$ .....

(6) $\sin\theta>0$ และ $\tan\theta<0$ .....

(7) $\cos\theta<0$ และ $\tan\theta<0$ .....

(8) $\cos\theta>0$ และ $\tan\theta<0$ .....