



คณิตศาสตร์

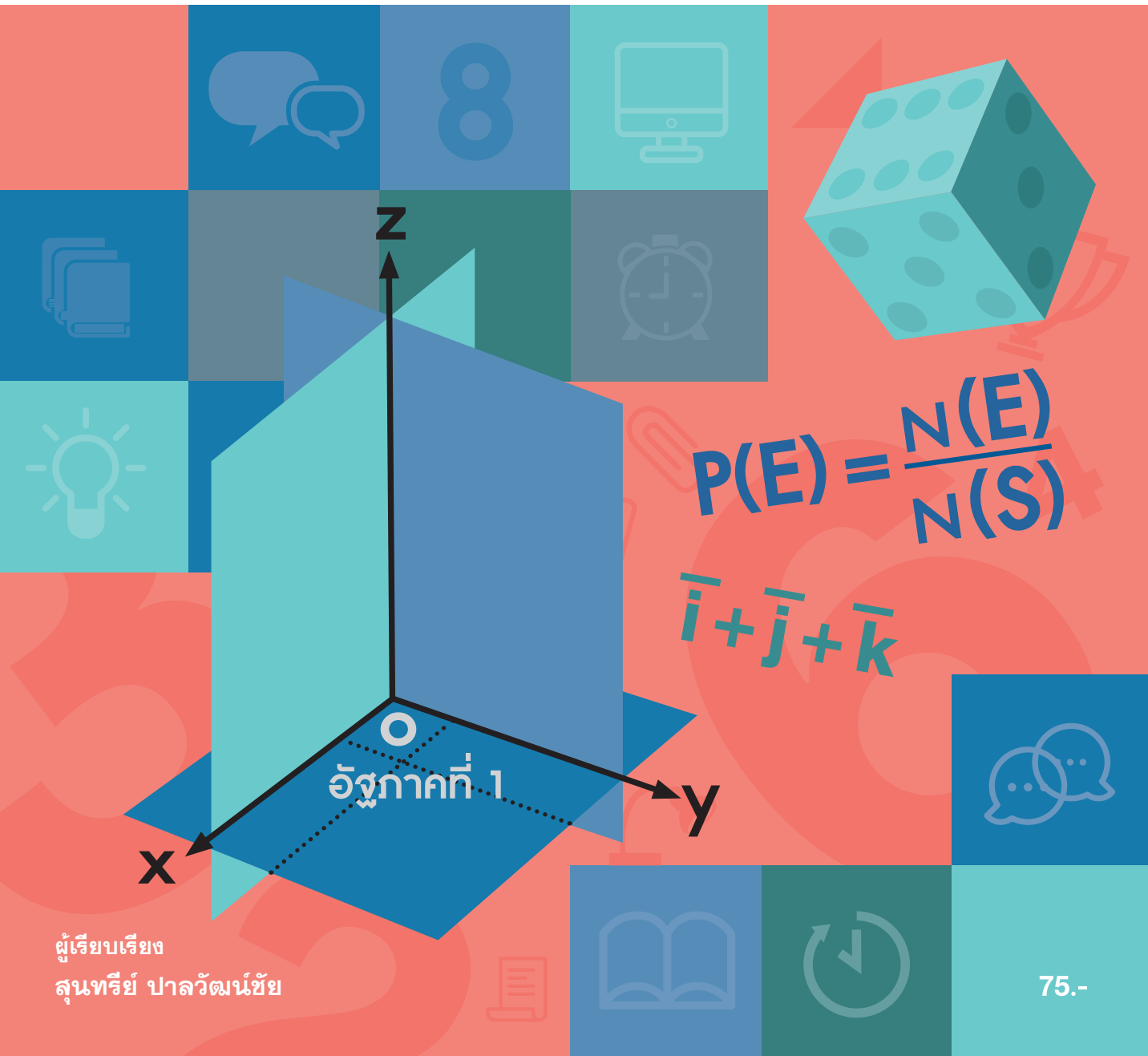
ม.5

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

เล่ม 2



ผู้เรียบเรียง

สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

75.-

คำอธิบายรายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เวลา 100 ชั่วโมง จำนวน 2.5 หน่วยกิต

ศึกษาเวกเตอร์และนิเสธของเวกเตอร์ การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ หลักการบวกและหลักการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน การจัดหมู่ ทฤษฎีบททวินาม การทดลองสุ่มและเหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

โดยจัดการเรียนการสอนให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหา ให้เหตุผล สื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ มีความคิดสร้างสรรค์ นำความรู้ที่ได้ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน ควบคู่ไปกับคุณธรรม และจริยธรรม และมีคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ได้แก่ การทำงานอย่างมีระบบ มีระเบียบ มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

ผลการเรียนรู้

1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์
2. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา
3. เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ในการแก้ปัญหา
4. หาความน่าจะเป็นและนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้

รวมทั้งหมด 4 ผลการเรียนรู้

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

ผู้ตรวจ

รศ.นงนุช สุขวารี

ผศ. ดร.สุชัย ตันยอชฌาวัฒน์

ยุพดี มงคลจินดาวงศ์

บรรณาธิการ

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2

ตามผลการเรียนรู้

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ผู้เรียบเรียง

ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

ผู้ตรวจ

รศ.นงนุช สุขวารี

ผศ. ดร.สุชัย ตันยอชฌาคุณ

ยุพดี มงคลจินดาวงศ์

บรรณาธิการ

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย.

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 5 เล่ม 2.—กรุงเทพฯ : แม็คเอ็ดดูเคชั่น, 2562.

200 หน้า.

1. คณิตศาสตร์—การศึกษาและการสอน (มัธยมศึกษา). I.
ชื่อเรื่อง.

510.7

ISBN 978-616-274-975-9

พิมพ์ครั้งที่ : 1

จำนวนเล่ม : 22,000 เล่ม

สงวนลิขสิทธิ์ : มกราคม 2562

สงวนลิขสิทธิ์ตามกฎหมาย ห้ามลอกเลียน ไม่ว่าจะเป็นส่วนหนึ่งส่วนใด
ของหนังสือเล่มนี้ นอกจากจะได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษร

จัดทำโดย

MACE | MACE EDUCATION

ส่งชานาณัติสั่งจ่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว

ในนาม บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด

9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว

แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028

www.MACEducation.com

พิมพ์ที่ : บริษัท เพ็ญทรัพย์ การพิมพ์

คำชี้แจง

ตามที่กระทรวงศึกษาธิการโดยสำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐานได้ดำเนินการทบทวนหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 โดยในระยะแรกให้ปรับปรุงมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และสาระภูมิศาสตร์ในกลุ่มสาระการเรียนรู้สังคมศึกษา ศาสนา และวัฒนธรรม สำหรับใช้ในปีการศึกษา 2561 ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1 และ 4 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 4 ปีการศึกษา 2562 ให้ใช้ในชั้นประถมศึกษาปีที่ 1, 2, 4 และ 5 และชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1, 2, 4 และ 5 และตั้งแต่ปีการศึกษา 2563 เป็นต้นไปให้ใช้ในทุกชั้นเรียน ซึ่งการปรับหลักสูตรครั้งนี้มีเป้าหมายสำคัญเพื่อให้โรงเรียนสามารถจัดการกระบวนการเรียนรู้ที่จะช่วยให้ผู้เรียนมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างรอบคอบสามารถใช้เทคโนโลยีที่เหมาะสมในการบูรณาการกับความรู้ทางด้านวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์เพื่อแก้ปัญหาหรือพัฒนากระบวนการออกแบบเชิงวิศวกรรมที่นำไปสู่การคิดค้นสิ่งประดิษฐ์หรือสร้างสรรค์นวัตกรรม นอกจากนี้ยังให้เกิดการเรียนรู้เรื่องภูมิศาสตร์ (Geo-literacy) ทั้งด้านความสามารถทางภูมิศาสตร์ กระบวนการทางภูมิศาสตร์ และทักษะทางภูมิศาสตร์ เพื่อให้มีความรู้ความเข้าใจได้อย่างถูกต้องและนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการดำเนินชีวิต

ด้วยตระหนักถึงความสำคัญของการปรับเปลี่ยนข้างต้น บริษัท แม็คเอดูเคชั่น จำกัด จึงได้มอบหมายให้ผู้เชี่ยวชาญด้านหลักสูตร ด้านการพัฒนาสื่อการเรียนรู้ และด้านการวัดและประเมินผลได้ปรับปรุงพัฒนาหนังสือเรียนให้สอดคล้องกับมาตรฐานการเรียนรู้ ตัวชี้วัดของหลักสูตรในกลุ่มสาระการเรียนรู้ที่มีการเปลี่ยนแปลง และให้สอดคล้องกับการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์ที่กำหนดไว้ในแผนพัฒนาเศรษฐกิจและสังคมแห่งชาติ ฉบับที่ 12 แผนการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2560–2579 และยุทธศาสตร์ชาติ 20 ปี

โดยหนังสือเรียนแต่ละหน่วยการเรียนรู้จะให้ผู้ใช้หนังสือเรียนได้ทราบเป้าหมายการเรียนรู้ในตอนต้นหน่วยการเรียนรู้ จากสาระการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ และทุกหัวข้อหลักจะนำเสนอแนวคิดสำคัญเพื่อให้ทราบถึงสิ่งที่เป็นความรู้ ความคิดที่เป็นแก่นสำคัญที่ต้องเรียนรู้ให้ลึกซึ้ง และการเรียนรู้ที่ดี ผู้เรียนควรได้ตรวจสอบความรู้ความเข้าใจเป็นระยะๆ ก่อนเรียนเรื่องใหม่ ดังนั้น ในหนังสือเรียนจะมีการสอดแทรกกิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่สัมพันธ์กับเรื่องที่ได้เรียนผ่านมา เพื่อให้ผู้เรียนได้ตรวจสอบ

ตนเอง หรือบางหัวข้ออาจเป็นการฝึกทักษะให้ชำนาญก่อน สิ่งเพิ่มเติมในหนังสือเรียนเล่มนี้ คือ กิจกรรมบูรณาการวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ และคณิตศาสตร์ (STEM) ตามเป้าหมาย สำคัญของการปฏิรูปหลักสูตรครั้งนี้ ซึ่งผู้เรียนและครูสามารถนำไปประยุกต์หรือดัดแปลงให้เหมาะสม กับบริบทของโรงเรียนและผู้เรียน การศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติมโดยใช้เทคโนโลยีการสื่อสารและสารสนเทศ (ICT) เป็นสิ่งจำเป็นที่ต้องค้นคว้าเพิ่มเติม ดังนั้นในหนังสือเรียนเล่มนี้จึงได้มีการเสริมเนื้อหาเพิ่มเติมที่ได้

ผ่านการคัดกรองมาแล้วว่าเหมาะสมกับการเรียนรู้แทรกไว้ในเนื้อหาบางหน่วย โดยใช้สัญลักษณ์   ผู้เรียนสามารถใช้สมาร์ทโฟนสแกน QR Code หรือเปิดเว็บไซต์ MACeducation.com เพื่อเข้าเมนู การศึกษาขั้นพื้นฐาน >>> MAC iLink และเลือกเปิดดูส่วนเสริมของบทเรียนในหนังสือแต่ละเล่มได้ ท้ายหน่วยการเรียนรู้ทุกหน่วยจะมีการสรุปบทเรียนสำหรับผู้เรียนได้ใช้เป็นข้อมูลสำคัญในการตรวจสอบ องค์ความรู้ที่ควรได้รับการพัฒนาหลังจากเสร็จสิ้นการเรียนรู้ หรือเป็นสาระสำคัญที่ควรจดจำและ ทำความเข้าใจให้ถ่องแท้ ซึ่งนับว่าเป็นส่วนสำคัญอีกส่วนหนึ่งในการปรับปรุงหนังสือเรียนครั้งนี้ ที่ได้พัฒนาให้ชัดเจนยิ่งขึ้น

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด หวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะมีคุณค่า มีประโยชน์ และช่วยส่งเสริมการปฏิรูปการศึกษา เพื่อเป็นรากฐานสำคัญที่จะช่วยทำให้ประเทศไทยก้าวสู่ประเทศที่มี การพัฒนาอย่างยั่งยืน ด้วยการมีพลเมืองที่มีคุณภาพ มีความคิดสร้างสรรค์ ตามเจตนารมณ์ของ การปฏิรูปหลักสูตรครั้งนี้และนโยบายประเทศไทย 4.0

บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด

คำนำ

หนังสือเรียน รายวิชาเพิ่มเติม คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เล่ม 2 ได้เรียบเรียงขึ้นใหม่ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กิจกรรมการเรียนการสอนในหนังสือเล่มนี้ได้บูรณาการสาระต่างๆ เข้าด้วยกันไว้ในหน่วยการเรียนรู้ซึ่งสอดคล้องกับผลการเรียนรู้ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

วัตถุประสงค์ของการเขียนหนังสือเล่มนี้ เพื่อให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามผลการเรียนรู้ เน้นการเชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการทักษะการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 ฝึกทักษะตามสาระเพื่อวัดผลประเมินผลตนเอง มีกิจกรรมส่งเสริมให้เกิดทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ ให้เกิดความคิดริเริ่มสร้างสรรค์และมีความเชื่อมั่นในตนเอง และมีส่วนร่วมในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตลอดจนการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียน

หนังสือเรียนเล่มนี้ประกอบด้วย 3 หน่วยการเรียนรู้ แต่ละหน่วยการเรียนรู้ได้ระบุผลการเรียนรู้ มีภาพและคำถามเข้าสู่บทเรียน แนวคิดสำคัญของแต่ละเรื่อง กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ กิจกรรมเสริมศึกษา/กิจกรรมบูรณาการ บทสรุปเนื้อหาและแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์เพื่อเป็นการวัดและประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียน

ผู้เรียบเรียงขอขอบคุณเป็นอย่างสูงที่ท่านได้เลือกใช้หนังสือเรียนเล่มนี้เป็นสื่อการเรียนรู้ ผู้เรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือเรียนเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อครู นักเรียน และผู้สนใจโดยส่งผลต่อการพัฒนาทั้งด้านความรู้ ทักษะ ค่านิยมและคุณลักษณะอันพึงประสงค์ ตามเจตนารมณ์ที่กำหนดไว้ในหลักสูตร

ดร.สุนทรีย์ ปาลวัฒน์ชัย

สารบัญ

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เวกเตอร์ในสามมิติ	1
1. เวกเตอร์และนิเสธของเวกเตอร์	3
1.1 เวกเตอร์	3
1.2 นิเสธของเวกเตอร์	6
2. การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	11
2.1 การบวกเวกเตอร์	11
2.2 การลบเวกเตอร์	14
2.3 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	16
3. ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์	23
3.1 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก	23
3.2 ผลคูณเชิงสเกลาร์	44
3.3 ผลคูณเชิงเวกเตอร์	53
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	67
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 หลักการนับเบื้องต้น	 68
1. หลักการบวกและหลักการคูณ	70
1.1 หลักการบวก	71
1.2 หลักการคูณ	73
1.3 การใช้กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับภายใต้เงื่อนไข	76
2. การเรียงสับเปลี่ยน	89
2.1 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด	92
2.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของซึ่งมีบางสิ่งซ้ำกัน	100
2.3 วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม	108

3. การจัดหมู่	114
วิธีจัดหมู่กรณีสิ่งของแตกต่างกันทั้งหมด	114
4. ทฤษฎีบททวินาม	127
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	140

หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 ความน่าจะเป็น 141

1. การทดลองสุ่มและเหตุการณ์	144
1.1 การทดลองสุ่ม	144
1.2 แซมเปิลสเปซ	144
1.3 เหตุการณ์	145
1.4 การกระทำระหว่างเหตุการณ์	151
2. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์	159
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	188

บรรณานุกรม 189

อภิธานศัพท์ 190



หน่วยการเรียนรู้ที่

1



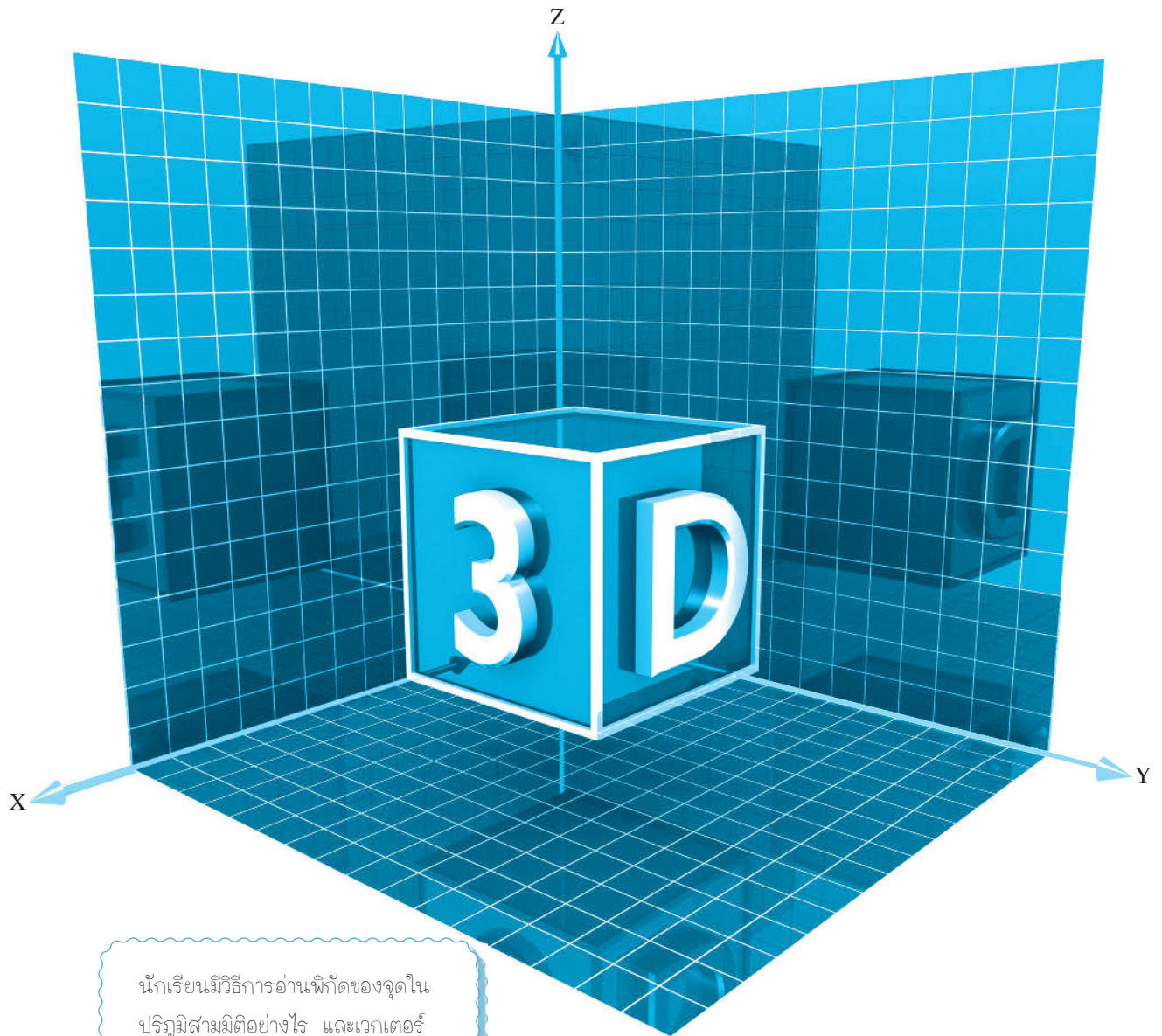
เวกเตอร์ในสามมิติ

สาระการเรียนรู้

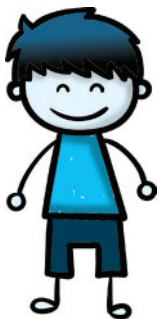
- 1 เวกเตอร์และนิเสธของเวกเตอร์
- 2 การบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
- 3 ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ผลการเรียนรู้

1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์
2. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา



นักเรียนมีวิธีการอ่านพิกัดของจุดใน
ปริภูมิสามมิติอย่างไร และเวกเตอร์
ในสามมิติมีลักษณะสำคัญอะไรบ้าง



1. เวกเตอร์และนิเสธของเวกเตอร์



แนวคิดสำคัญ

เวกเตอร์ คือ ปริมาณซึ่งมีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว และความเร่ง เวกเตอร์ u กับ เวกเตอร์ v เป็นนิเสธกันเมื่อขนาดของเวกเตอร์ u และ เวกเตอร์ v เท่ากัน แต่มีทิศทางตรงกันข้าม



1.1 เวกเตอร์

ปริมาณมีสองประเภท คือ ปริมาณสเกลาร์ ใช้บอกแต่ขนาด เช่น ปริมาตร น้ำหนัก อุณหภูมิ พื้นที่ และปริมาณอีกประเภทหนึ่ง คือ ปริมาณ เวกเตอร์ หรือเรียกสั้นๆ ว่า เวกเตอร์เป็นปริมาณ ซึ่งมีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น ชายคนหนึ่งเดินทาง ไปทางทิศเหนือเป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร

สัญลักษณ์ของเวกเตอร์

ในทางเรขาคณิตจะกำหนดเวกเตอร์โดยใช้ส่วนของเส้นตรงที่มีหัวลูกศรแทนเวกเตอร์ โดยที่ ความยาวของส่วนของเส้นตรงจะบอกขนาดและหัวลูกศรจะบอกถึงทิศทางของเวกเตอร์

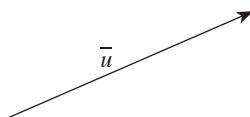


สัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ (อ่านว่า เวกเตอร์เอบี) ใช้แทนส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางจาก A ไป B ซึ่งสัญลักษณ์นี้จะแทนเวกเตอร์จาก A ไป B

จุด A เรียกว่า **จุดเริ่มต้น**
จุด B เรียกว่า **จุดสิ้นสุด**

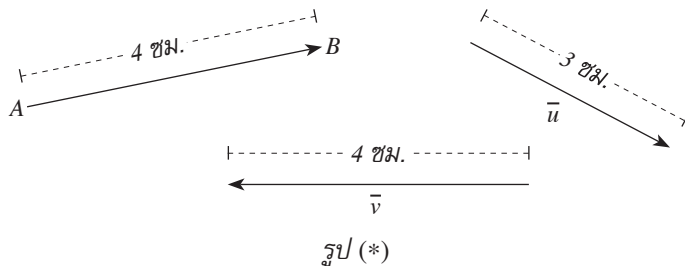


การเขียนเวกเตอร์ นอกจากจะใช้จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดแล้ว อาจจะเรียกโดยใช้ตัวอักษร เพียงตัวเดียว แล้วใช้เครื่องหมาย “ $-$ ” กำกับไว้เหนือตัวอักษรนั้น เช่น $\vec{u}$ อ่านว่า **เวกเตอร์ยู** แสดง $\vec{u}$ ดังรูป



ขนาดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ คือ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|\overrightarrow{AB}|$ ในทำนองเดียวกัน ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{u}$ จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|\vec{u}|$ อ่านว่า ขนาดของเวกเตอร์ยู

เช่น



จากรูป จะได้ว่า $|\vec{AB}| = 4$, $|\vec{u}| = 3$ และ $|\vec{v}| = 4$

ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์

บทนิยาม $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน ก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางที่แทน $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีความยาวเท่ากัน

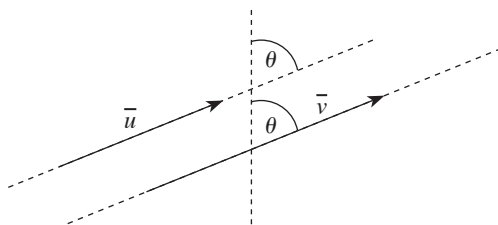
ดังนั้น ในรูป (*) จะได้ว่า $\vec{AB}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน ทั้งนี้เพราะ

$$|\vec{AB}| = 4 = |\vec{v}|$$

ทิศทางของเวกเตอร์ กำหนดได้ด้วยหัวลูกศรที่ปรากฏในส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางจึงสามารถนิยามเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน และเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้ามได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางที่แทน $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน หรืออยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และมีหัวลูกศรชี้ไปทางเดียวกัน

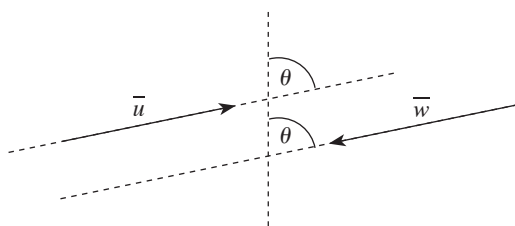
เช่น



จากรูป $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกัน

บทนิยาม $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม ก็ต่อเมื่อ ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางที่แทน $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ชนกัน หรืออยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และมีหัวลูกศรชี้ไปทางตรงกันข้าม

เช่น



จากรูป $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงกันข้าม

เวกเตอร์ที่เท่ากัน

ความหมายของการเท่ากันของเวกเตอร์มีบทนิยามดังต่อไปนี้

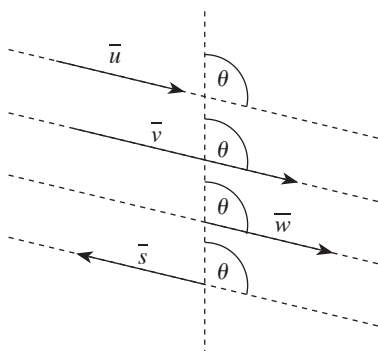
บทนิยาม $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่เท่ากัน ก็ต่อเมื่อ

(1) $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

(2) $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

ถ้า $\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$ แล้ว จะเขียนแทนด้วย $\vec{u} = \vec{v}$

ถ้า $\vec{u}$ ไม่เท่ากับ $\vec{v}$ แล้ว จะเขียนแทนด้วย $\vec{u} \neq \vec{v}$



จากรูป $\vec{u} = \vec{v}$ เพราะ $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ และ $\vec{u}$, $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

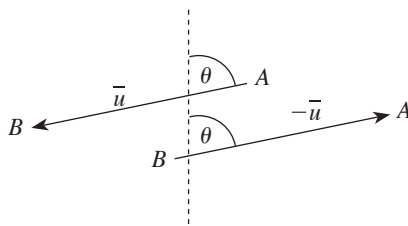
$\vec{u} \neq \vec{v}$ เพราะ $|\vec{u}| \neq |\vec{v}|$ ถึงแม้ว่า $\vec{u}$, $\vec{v}$ จะมีทิศทางเดียวกัน

$\vec{u} \neq \vec{s}$ เพราะ $\vec{u}$ และ $\vec{s}$ ไม่มีทิศทางเดียวกัน ถึงแม้ว่า $|\vec{u}| = |\vec{s}|$

1.2 นิเสธของเวกเตอร์

บทนิยาม นิเสธของ $\vec{u}$ หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$

เช่น



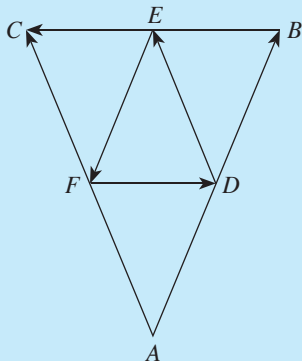
นิเสธของ $\vec{u}$ จะเขียนแทนด้วย $-\vec{u}$



จากรูป ในกรณีที่ $\vec{u} = \vec{AB}$ จะได้ว่า $-\vec{u} = -\vec{AB} = \vec{BA}$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC จุด D , E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB , BC และ CA ตามลำดับ และกำหนดเวกเตอร์ $\vec{AB}$, $\vec{DB}$, $\vec{BC}$, $\vec{EC}$, $\vec{AC}$, $\vec{FC}$, $\vec{DE}$, $\vec{EF}$, $\vec{FD}$

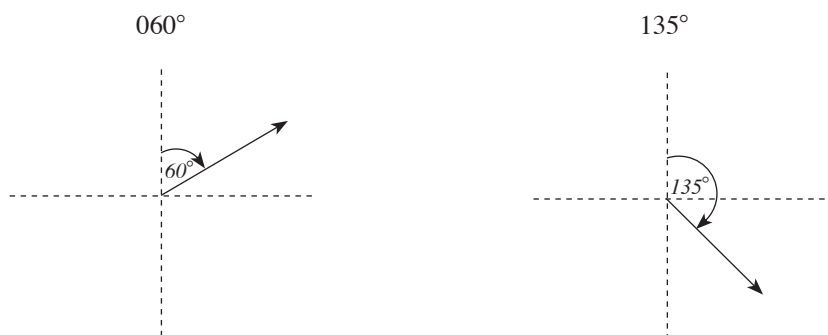


- (1) เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน
- (2) เวกเตอร์ใดบ้างที่มีทิศทางเดียวกัน
- (3) เวกเตอร์ใดบ้างที่มีทิศทางตรงกันข้าม
- (4) เวกเตอร์ใดบ้างที่เท่ากัน
- (5) เวกเตอร์ใดบ้างที่เป็นนิเสธกัน

- ตอบ**
- (1) $\vec{AB}$, $\vec{DB}$ และ $\vec{EF}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน
 $\vec{BC}$, $\vec{EC}$ และ $\vec{FD}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน
 $\vec{AC}$, $\vec{FC}$ และ $\vec{DE}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน
 - (2) $\vec{AB}$ และ $\vec{DB}$ มีทิศทางเดียวกัน
 $\vec{BC}$ และ $\vec{EC}$ มีทิศทางเดียวกัน
 $\vec{DE}$, $\vec{AC}$ และ $\vec{FC}$ มีทิศทางเดียวกัน

- (3) $\vec{AB}$ และ $\vec{EF}$ มีทิศทางตรงกันข้าม
 $\vec{DB}$ และ $\vec{EF}$ มีทิศทางตรงกันข้าม
 $\vec{BC}$ และ $\vec{FD}$ มีทิศทางตรงกันข้าม
 $\vec{EC}$ และ $\vec{FD}$ มีทิศทางตรงกันข้าม
- (4) $\vec{DE} = \vec{FC}$
- (5) $\vec{DB}$ เป็นนิเสธของ $\vec{EF}$ ($\vec{DB} = -\vec{EF}$)
 $\vec{EC}$ เป็นนิเสธของ $\vec{FD}$ ($\vec{EC} = -\vec{FD}$)

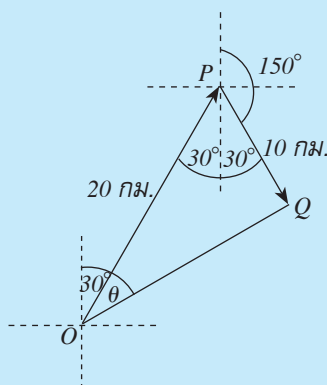
การกำหนดทิศทางเป็นองศาจะบอกค่าของมุมที่วัดจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกาซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 องศา ถึง 360 องศา โดยใช้ระบบตัวเลขสามตัว เช่น 060° , 135° ในการระบุทิศ



ตัวอย่างที่ 2

ณเดชออกเดินทางในทิศ 030° เป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร แล้วจึงออกเดินทางต่อไปในทิศ 150° เป็นระยะทาง 10 กิโลเมตร จงหาว่าณเดชจะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเป็นระยะทางเท่าไร และอยู่ในทิศทางใดของจุดเริ่มต้น

วิธีทำ ณเดชเริ่มออกเดินทางจากจุด O ในทิศ 030° เป็นระยะทาง 20 กิโลเมตร ถึงจุด P แล้วออกเดินทางต่อไปในทิศ 150° เป็นระยะทาง 10 กิโลเมตร ถึงจุด Q



จากรูป รูปสามเหลี่ยม OPQ จะได้ว่า

$$OP = 20, PQ = 10 \text{ และ } \hat{OPQ} = 60^\circ$$

ดังนั้น จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} OQ^2 &= OP^2 + PQ^2 - 2OP \cdot PQ \cos \hat{OPQ} \\ &= 20^2 + 10^2 - 2(20)(10) \cos 60^\circ \\ &= 400 + 100 - 400\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 500 - 200 \\ &= 300 \end{aligned}$$

$$OQ = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$$

แสดงว่า วนเดชอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น $10\sqrt{3} \approx 10 \times 1.732 \approx 17.32$ กิโลเมตร

ตอบ

ในรูปสามเหลี่ยม OPQ จะพบว่า

$$\begin{aligned} OQ^2 + PQ^2 &= (10\sqrt{3})^2 + 10^2 \\ &= 300 + 100 \\ &= 400 \\ &= 20^2 \\ &= OP^2 \end{aligned}$$

แสดงว่า รูปสามเหลี่ยม OPQ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\hat{OQP} = 90^\circ$ ดังนั้น $\theta = 30^\circ$ เพราะฉะนั้น วนเดชจะอยู่ในทิศ 060° ของจุดเริ่มต้น

ตอบ

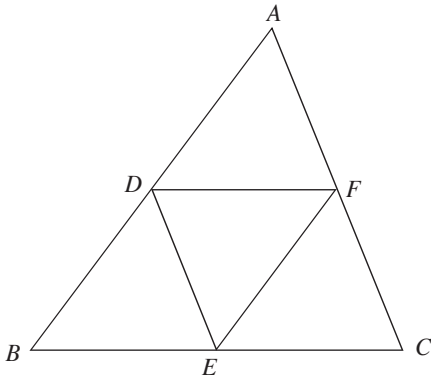
หมายเหตุ

ในกรณีที่ OPQ ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จะสามารถคำนวณหามุม θ ได้จากการใช้กฎของไซน์หรือกฎของโคไซน์



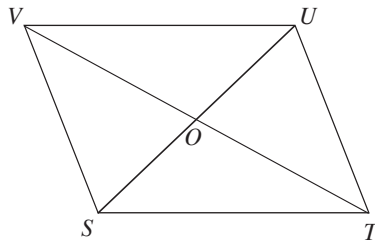
แบบฝึกหัดที่ 1

1. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม D, E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC และ CA ตามลำดับ จงหาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ต่อไปนี้



- (1) $\vec{DB}$
- (2) $\vec{EF}$
- (3) $\vec{FD}$
- (4) $\vec{AD}$
- (5) $\vec{AF}$

2. กำหนดให้ STUV เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และ O เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม จงหาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุด S, T, U, V หรือ O ตามเงื่อนไขต่อไปนี้



- (1) เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\vec{ST}$
 - (2) เวกเตอร์ที่เท่ากับ $\vec{SO}$
 - (3) เวกเตอร์ที่ขนานกับ $\vec{TU}$
 - (4) เวกเตอร์ที่ขนานกับ $\vec{UT}$
 - (5) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{OU}$
 - (6) เวกเตอร์ที่มีทิศตรงกันข้ามกับ $-\vec{OT}$
 - (7) เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธของ $\vec{VO}$
 - (8) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $-\vec{VO}$
3. จงบอกขนาดและทิศทางของ $-\vec{u}$ โดยใช้ระบบตัวเลขสามตัว เมื่อกำหนดขนาดและทิศทางของ $\vec{u}$ ต่อไปนี้
- (1) ขนาดเท่ากับ 5 ทิศทาง 045°
 - (2) ขนาดเท่ากับ 12 ทิศทาง 210°
 - (3) ขนาดเท่ากับ 21 ทิศทาง 125°
 - (4) ขนาดเท่ากับ 150 ทิศทาง 300°

4. ดนัยขับรถไปทางทิศ 135° เป็นระยะทาง 4 กิโลเมตร แล้วขับรถต่อไปทางทิศ 225° เป็นระยะทาง 4 กิโลเมตร จงหาว่าดนัยอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตรและอยู่ทางทิศใดของจุดเริ่มต้น
5. สมชายเดินไปทางทิศ 30° เป็นระยะทาง $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ กิโลเมตร จากนั้นเดินไปทางทิศ 165° เป็นระยะทาง 4 กิโลเมตร สมชายอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตรและอยู่ทางทิศใดของจุดเริ่มต้น
6. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ข้อความต่อไปนี้ถูกต้องหรือผิด ถ้าผิดจงให้เหตุผล
 - (1) ถ้า $\vec{u} = \vec{v}$ แล้ว $\vec{u}$ ชนานกับ $\vec{v}$
 - (2) ถ้า $\vec{u}$ ชนานกับ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u} = \vec{v}$
 - (3) ถ้า $\vec{u} = \vec{v}$ แล้ว $|\vec{u}| = |\vec{v}|$
 - (4) ถ้า $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ ถ้า $\vec{u} = \vec{v}$
 - (5) ถ้า $|\vec{u}| = 10$ ถ้า $|\vec{-u}| = 10$
 - (6) ถ้า $\vec{u} = -\vec{v}$ แล้ว $-\vec{u} = \vec{v}$
 - (7) ถ้า $\vec{u}$ ไม่ชนานกับ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เป็นนิเสธกัน
 - (8) ถ้า $\vec{u}$ มีทิศทาง 065° แล้ว $-\vec{u}$ มีทิศทาง 115°
 - (9) ถ้า $-\vec{u}$ มีทิศทาง 108° แล้ว $\vec{u}$ มีทิศทาง 252°
 - (10) ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางตรงกันข้าม แล้ว $\vec{u}$ ชนานกับ $\vec{v}$



กิจกรรมตรวจสอบการเรียนรู้ที่ 1

1. ให้นักเรียนแบ่งกลุ่ม กลุ่มละ 2-3 คน
2. แต่ละกลุ่มสร้างรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า
3. แต่ละกลุ่มสร้างคำถามเกี่ยวกับเวกเตอร์ที่เท่ากัน หรือนิเสธของเวกเตอร์จากรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่ามา 3 ข้อ พร้อมทั้งหาคำตอบ
4. แต่ละกลุ่มส่งตัวแทนออกมานำเสนอที่หน้าชั้นเรียน