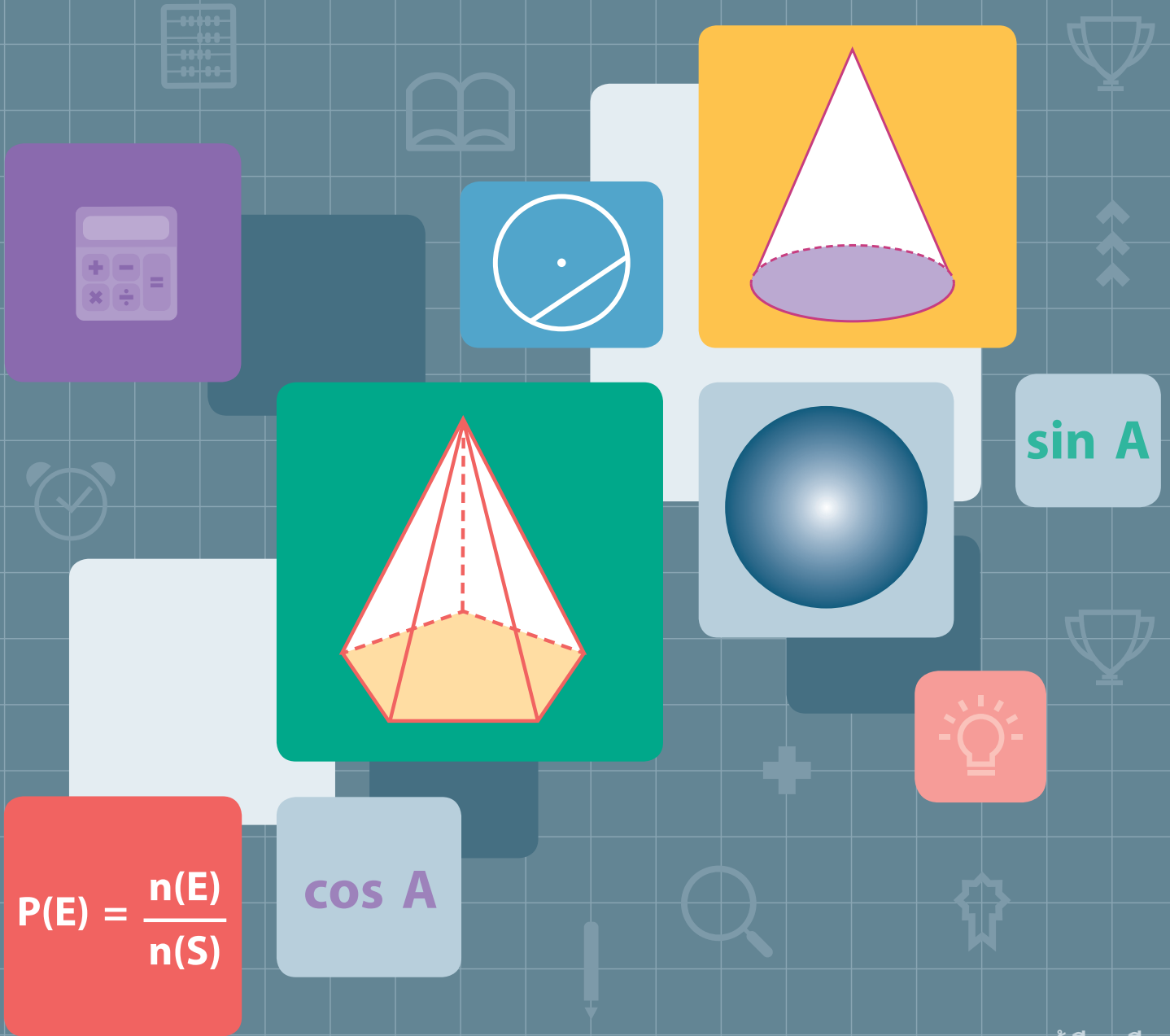




ผู้เรียบเรียง
ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ม.3
เล่ม 2



IMAC EDUCATION

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)

ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

ม.3

เล่ม 2



แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาพื้นฐาน

คณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2

จัดทำโดย

MACEDUCATION

ส่งหนาสั่งจ่าย ไปรษณีย์ลาดพร้าว

ในนาม บริษัท แม็คเอ็ดดูเคชั่น จำกัด

9/99 อาคารแม็ค ซอยลาดพร้าว 38 ถนนลาดพร้าว

แขวงจันทระเกษม เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทร. 0-2512-0661, 0-2938-2022-7 แฟกซ์ 0-2938-2028

www.MACeducation.com

พิมพ์ที่ : บริษัท เพ็ญทรัพย์ การพิมพ์ จำกัด



คำนำ

แบบฝึกเสริมทักษะรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มุ่งพัฒนาการคิดวิเคราะห์ ความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผลเป็นระบบ มีแบบแผน แก้ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างครบถ้วนตามทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จากการเรียนรู้สาระสำคัญ ความคิดรวบยอด ฝึกทักษะในกิจกรรมที่หลากหลายอย่างต่อเนื่อง บทสรุปมีเครื่องมือวัดผลและตรวจสอบความรู้ที่คงทนของผู้เรียน ผู้เรียนได้เรียนรู้ครบตามมาตรฐานและตัวชี้วัดได้ครบถ้วนและประเมินผู้เรียนได้สอดคล้องกับมาตรฐานและตัวชี้วัด

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการพัฒนาทักษะการคิดของผู้เรียนได้เป็นอย่างดี

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา



สารบัญ

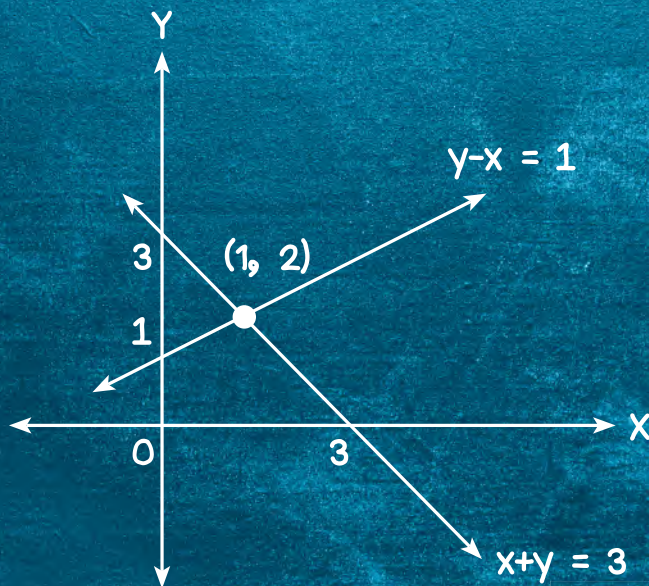
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ระบบการเชิงเส้นสองตัวแปร	1
(ตรงตามตัวชี้วัด ค 1.3 ม.3/3)	
1.1 แนะนำระบบการเชิงเส้นสองตัวแปร	2
1.2 การแก้ระบบการเชิงเส้นสองตัวแปร	8
1.3 การแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้ระบบการเชิงเส้นสองตัวแปร	19
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	43
หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 วงกลม	46
(ตรงตามตัวชี้วัด ค 2.2 ม.3/3)	
2.1 มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม	47
2.2 คอร์ดของวงกลม	70
2.3 เส้นสัมผัสวงกลม	85
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	105
หน่วยการเรียนรู้ที่ 3 พีระมิด กรวย และทรงกลม	109
(ตรงตามตัวชี้วัด ค 2.1 ม.3/1, 2)	
3.1 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของพีระมิด	110
3.2 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของกรวย	122
3.3 ปริมาตรและพื้นที่ผิวของทรงกลม	132
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	140
หน่วยการเรียนรู้ที่ 4 ความน่าจะเป็น	142
(ตรงตามตัวชี้วัด ค 3.2 ม.3/1)	
4.1 โอกาสของเหตุการณ์	143
4.2 ความน่าจะเป็น	146
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	170



หน่วยการเรียนรู้ที่ 5 อัตราส่วนตรีโกณมิติ	173
(ตรงตามตัวชี้วัด ค 2.2 ม.3/2)	
5.1 ความหมายของอัตราส่วนตรีโกณมิติ	174
5.2 อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมแหลม	178
5.3 การนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา	190
แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์	196
 บรรณานุกรม	 199



ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร



คำตอบของระบบสมการคือ $(1, 2)$

สาระและมาตรฐานการเรียนรู้

สาระที่ 1

จำนวนและพีชคณิต

มาตรฐาน ค 1.3

ใช้นิพจน์ สมการ และอสมการ อธิบายความสัมพันธ์

หรือช่วยแก้ปัญหาที่กำหนดให้

ตัวชี้วัด

ประยุกต์ใช้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรในการ

แก้ปัญหาคณิตศาสตร์

รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรคือ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัว โดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง โดยที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ระบบที่ประกอบด้วยสมการ

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ที่มี x และ y เป็นตัวแปร

a และ c เป็นสัมประสิทธิ์ของ x

b และ d เป็นสัมประสิทธิ์ของ y

คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสอง ซึ่งอาจมีคำตอบเดียว มีหลายคำตอบ หรือไม่มีคำตอบเลยก็ได้

1.1 แนะนำระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถระบุระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรและกราฟที่กำหนดให้ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง
3. การให้เหตุผล
4. การคิดสร้างสรรค์

รูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นสองตัวแปรคือ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นค่าคงตัวโดยที่ A และ B ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน คู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการข้างต้นเป็นคำตอบของสมการ และกราฟแสดงคำตอบของสมการเป็นเส้นตรง

ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริง โดยที่ a, b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ระบบที่ประกอบด้วยสมการ

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ที่มี x และ y เป็นตัวแปร

a และ c เป็นสัมประสิทธิ์ของ x

b และ d เป็นสัมประสิทธิ์ของ y

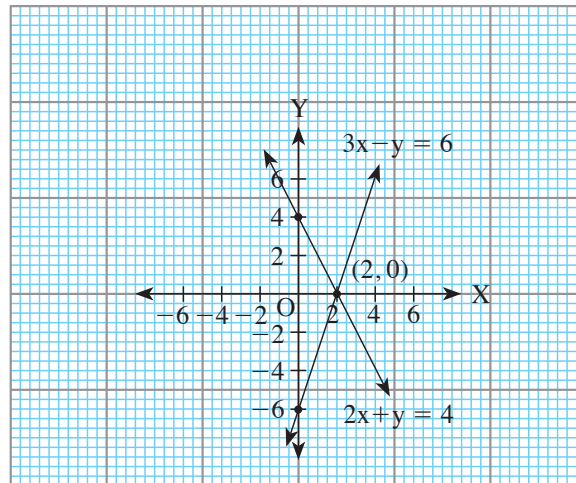
คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร คือ คู่อันดับ (x, y) ที่สอดคล้องกับสมการทั้งสอง



ตัวอย่าง 1. กำหนดระบบสมการ $3x - y = 6$ (1)

$$2x + y = 4 \quad \text{.....(2)}$$

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่ามีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $3x - y = 6$ และมีคู่อันดับมากมายเช่นกันที่เป็นคำตอบของสมการ $2x + y = 4$

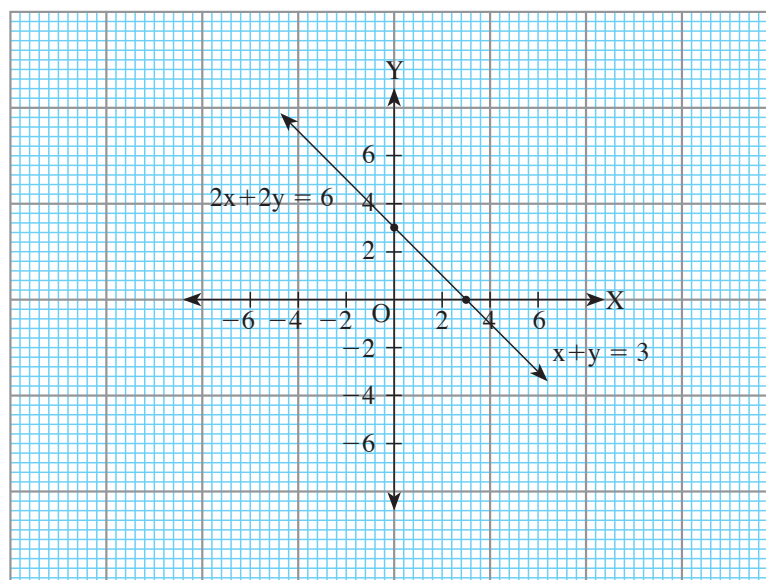
เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด $(2, 0)$ เพียงจุดเดียว แสดงว่า $(2, 0)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบเพียงคำตอบเดียวคือ $(2, 0)$

2. กำหนดระบบสมการ $x + y = 3$ (1)

$$2x + 2y = 6 \quad \text{.....(2)}$$

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่ามีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $x+y = 3$ และมีคู่อันดับมากมายเช่นกันที่เป็นคำตอบของสมการ $2x+2y = 6$

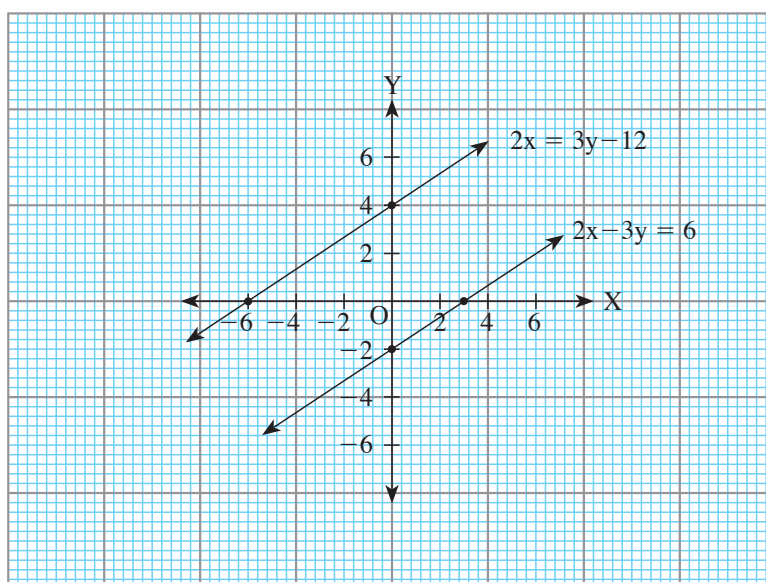
เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นซึ่งทับกัน แสดงว่าคู่อันดับทุกคู่ที่เป็นพิกัดของจุดบนเส้นตรงที่ทับกันนี้เป็นคำตอบของระบบสมการ

ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงมีคำตอบมากมายไม่จำกัด

3. กำหนดระบบสมการ $2x-3y = 6$

$$2x = 3y - 12$$

เขียนกราฟของสมการทั้งสองได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่ามีคู่อันดับมากมายที่เป็นคำตอบของสมการ $2x-3y = 6$ และมีคู่อันดับมากมายเช่นกันที่เป็นคำตอบของสมการ $2x = 3y - 12$

เนื่องจากกราฟของสมการทั้งสองเป็นเส้นตรงสองเส้นขนานกัน จึงไม่มีคู่อันดับใดเป็นคำตอบของสมการทั้งสอง

ดังนั้น ระบบสมการนี้จึงไม่มีคำตอบ

✓ ข้อสังเกต

จากตัวอย่างข้างต้น ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรอาจมีคำตอบเดียว มีหลายคำตอบ หรือไม่มีคำตอบเลยก็ได้



แบบฝึกหัดที่ 1.1

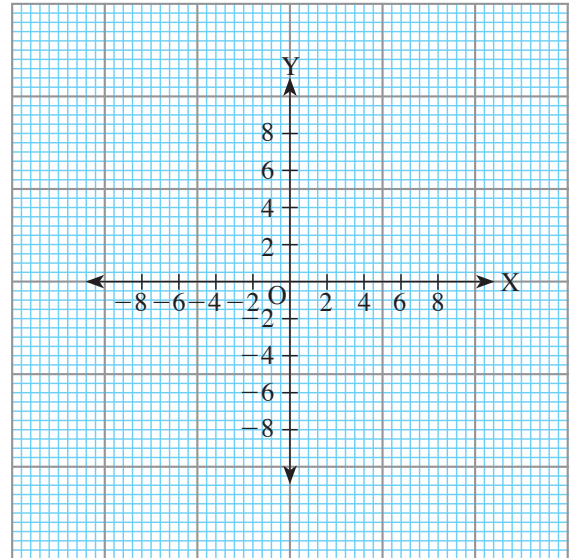
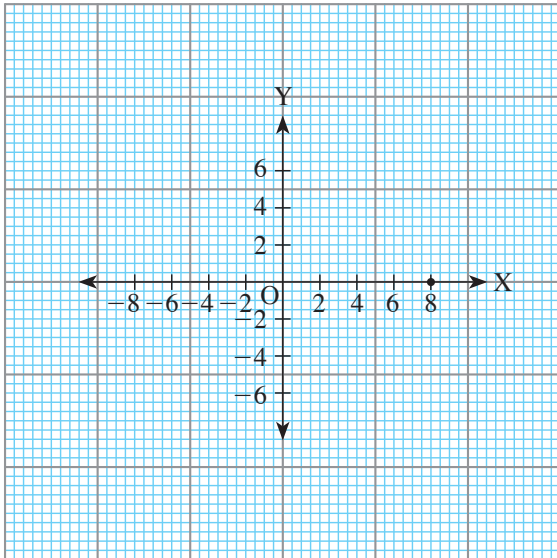
1. จงเขียนกราฟของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร แล้วหาคำตอบของระบบสมการ

(1) $x - 3y = 1$ (1)

(2) $3x - 2y = 13$ (1)

$2x + y = 16$ (2)

$4x + 3y = 6$ (2)



คำตอบของระบบสมการคือ

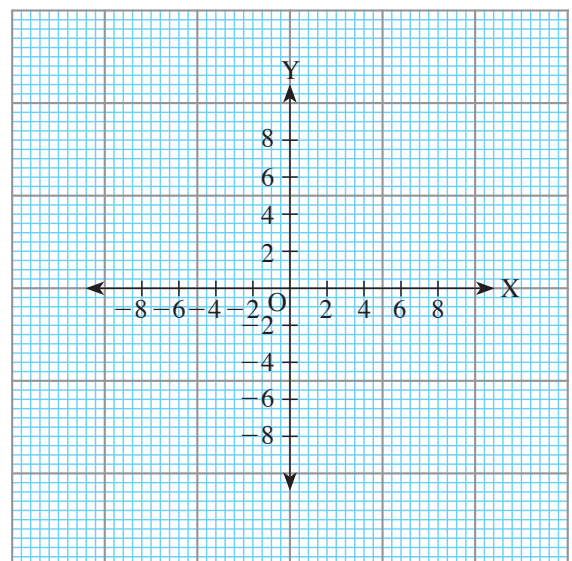
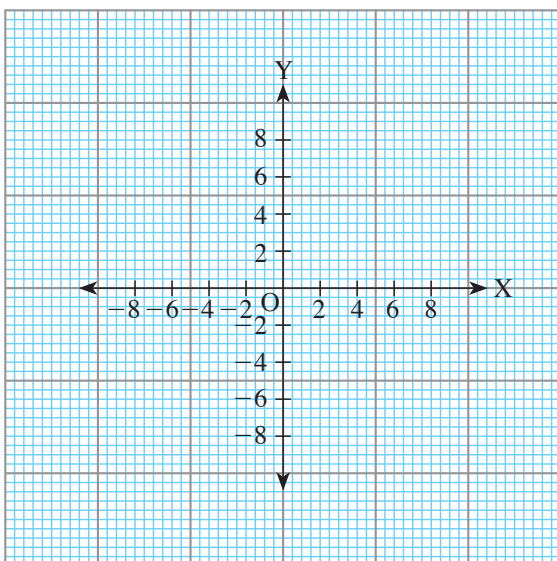
คำตอบของระบบสมการคือ

(3) $2x + y = -3$ (1)

(4) $3x + 4y = 10$ (1)

$3x - y = -7$ (2)

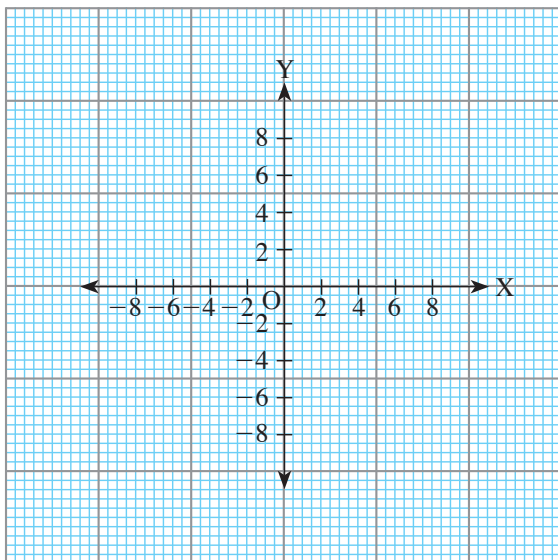
$x + 2y = 2$ (2)



คำตอบของระบบสมการคือ

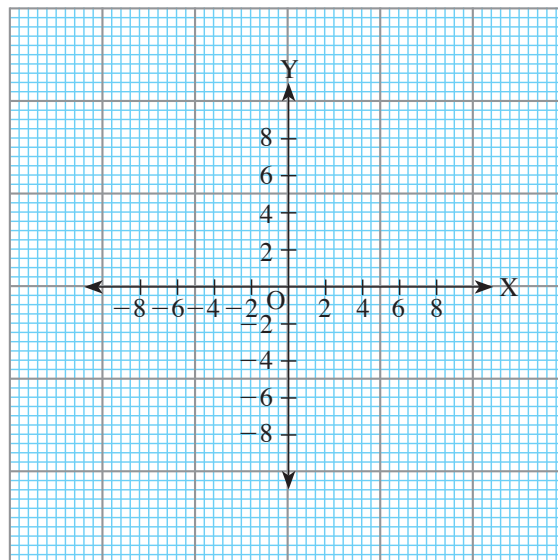
คำตอบของระบบสมการคือ

$$\begin{aligned} (5) \quad 2x + 3y &= 6 & \dots(1) \\ 2x + 3y &= -6 & \dots(2) \end{aligned}$$



คำตอบของระบบสมการคือ

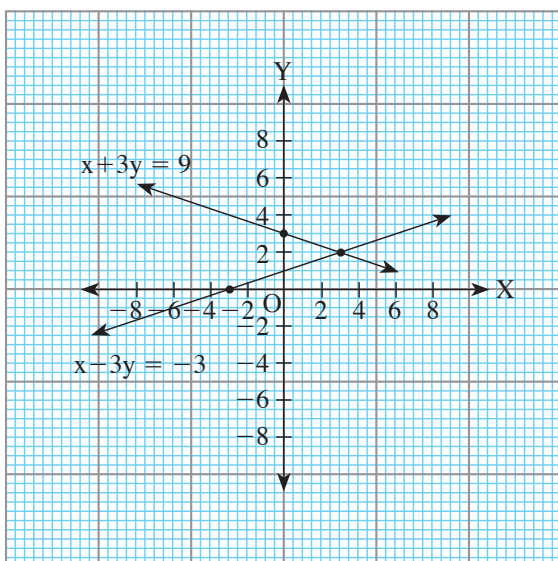
$$\begin{aligned} (6) \quad 2x - y &= 3 & \dots(1) \\ 4x - 2y &= 6 & \dots(2) \end{aligned}$$



คำตอบของระบบสมการคือ

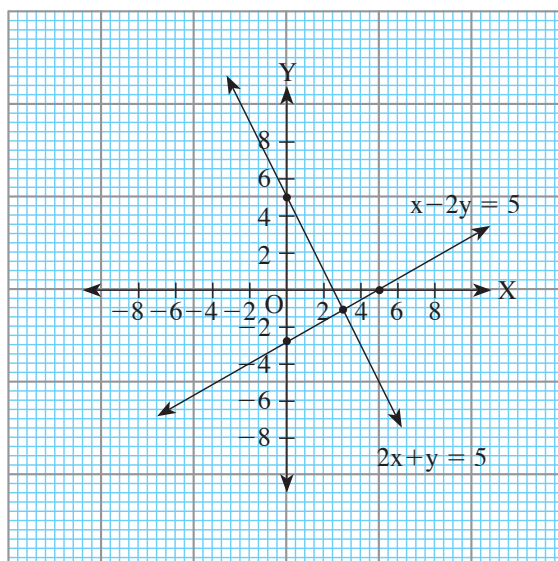
2. จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรจากกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

(1)



คำตอบของระบบสมการคือ

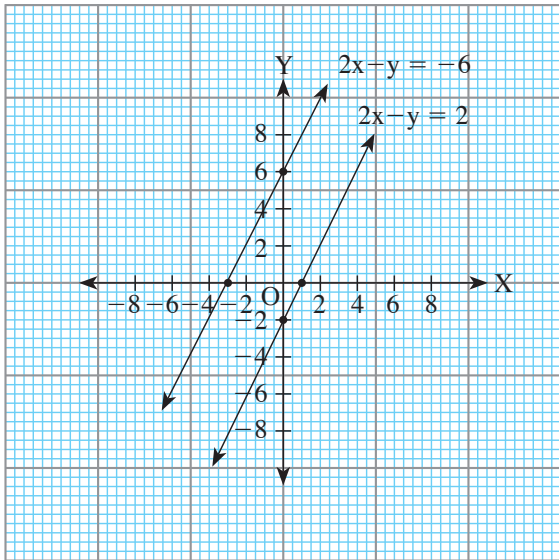
(2)



คำตอบของระบบสมการคือ

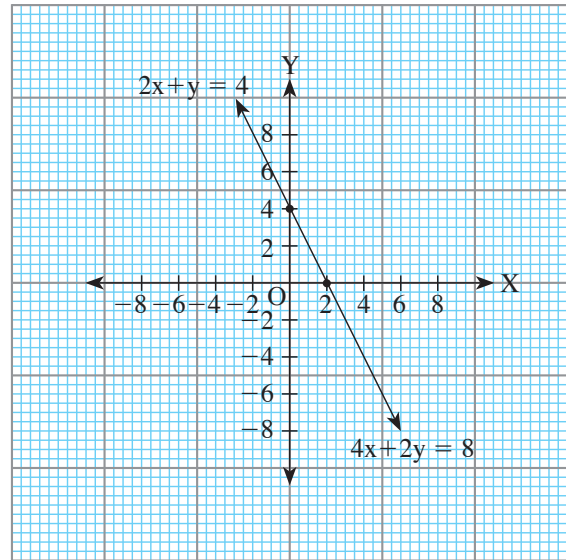


(3)



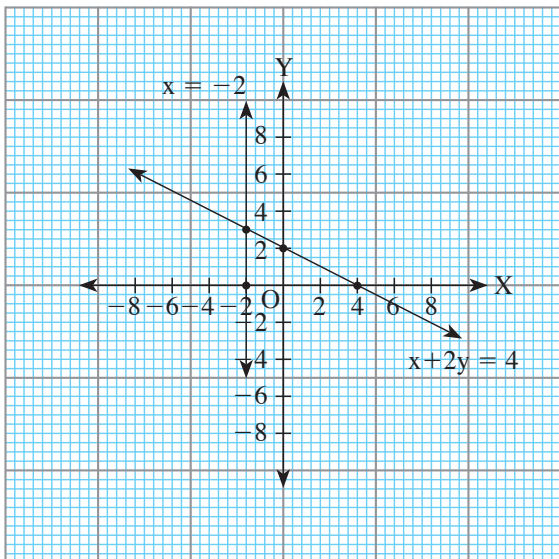
คำตอบของระบบสมการคือ

(4)



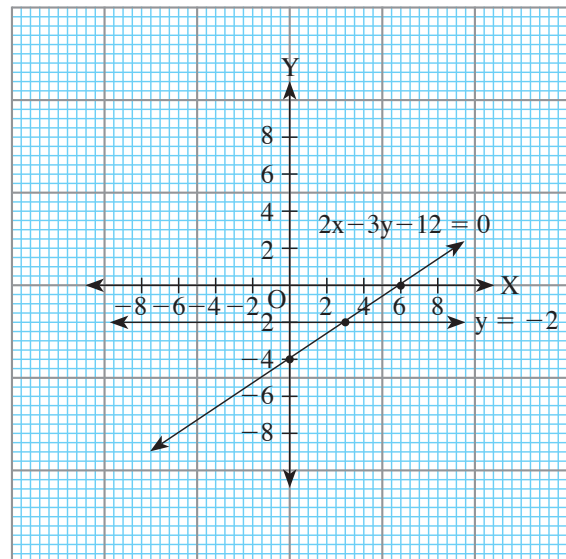
คำตอบของระบบสมการคือ

(5)



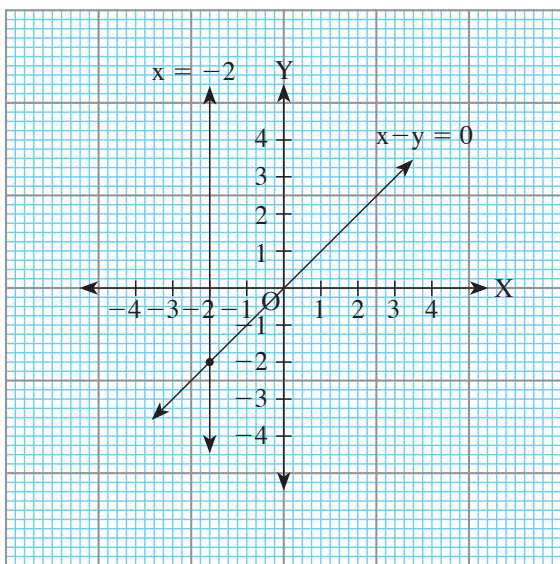
คำตอบของระบบสมการคือ

(6)



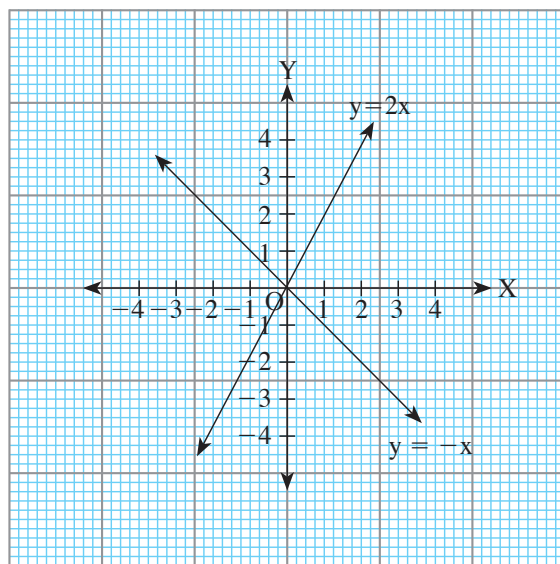
คำตอบของระบบสมการคือ

(7)



คำตอบของระบบสมการคือ

(8)



คำตอบของระบบสมการคือ

1.2 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง
3. การให้เหตุผล
4. การคิดสร้างสรรค์

การแก้สมการเป็นการหาคำตอบของสมการ การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร นอกจากใช้กราฟแล้ว ยังใช้สมบัติการเท่ากัน เช่น สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติการบวก และ สมบัติการคูณ



ตัวอย่างที่ 1

จงแก้ระบบสมการ $3x - y = 9$

$$2x + y = 6$$

วิธีทำ

$$3x - y = 9 \quad \dots(1)$$

$$2x + y = 6 \quad \dots(2)$$

$$(1)+(2); \quad (3x-y)+(2x+y) = 9+6$$

$$5x = 15$$

$$\frac{1}{5} \times 5x = \frac{1}{5} \times 15$$

$$x = 3$$

แทนค่า $x = 3$ ใน (2) เพื่อหาค่าของ y

$$2(3)+y = 6$$

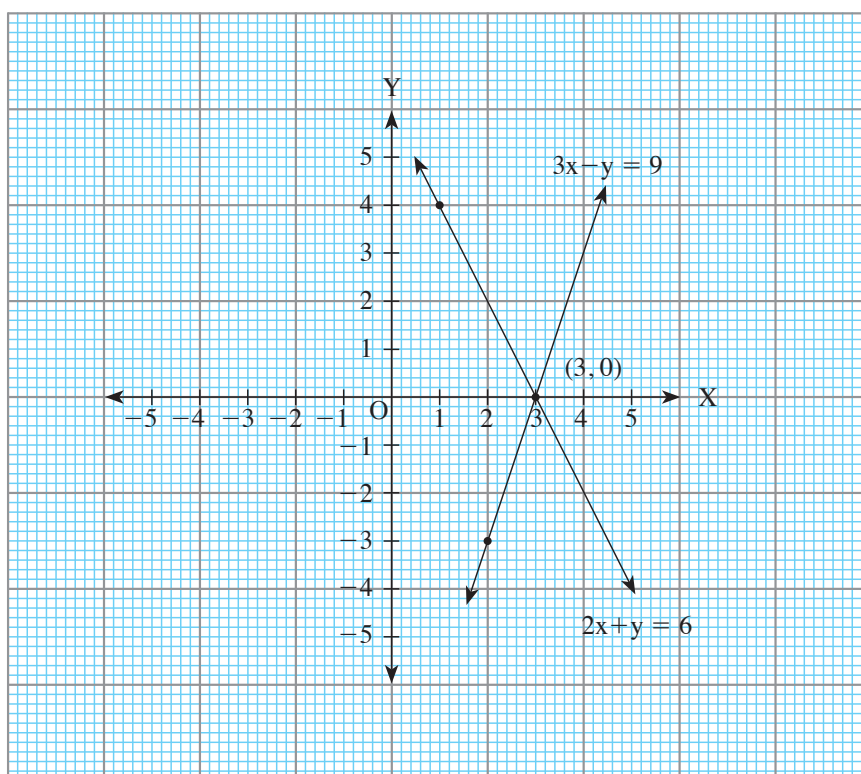
$$6+y = 6$$

$$6+y-6 = 6-6$$

$$y = 0$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้คือ $(3, 0)$

เขียนกราฟของระบบสมการ (1) และ (2) ได้ดังนี้



เนื่องจากกราฟของสมการ (1) และ (2) เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกันที่จุด $(3, 0)$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้มีเพียงคำตอบเดียวคือ $(3, 0)$

ตัวอย่างที่ 2

จงแก้ระบบสมการ

$$2x + y = 3$$

$$6x + 3y = -12$$

วิธีทำ

$$2x + y = 3 \quad \dots(1)$$

$$6x + 3y = -12 \quad \dots(2)$$

$$(1) \times 3; \quad 6x + 3y = 9 \quad \dots(3)$$

$$(2) - (3); \quad (6x + 3y) - (6x + 3y) = -12 - 9$$

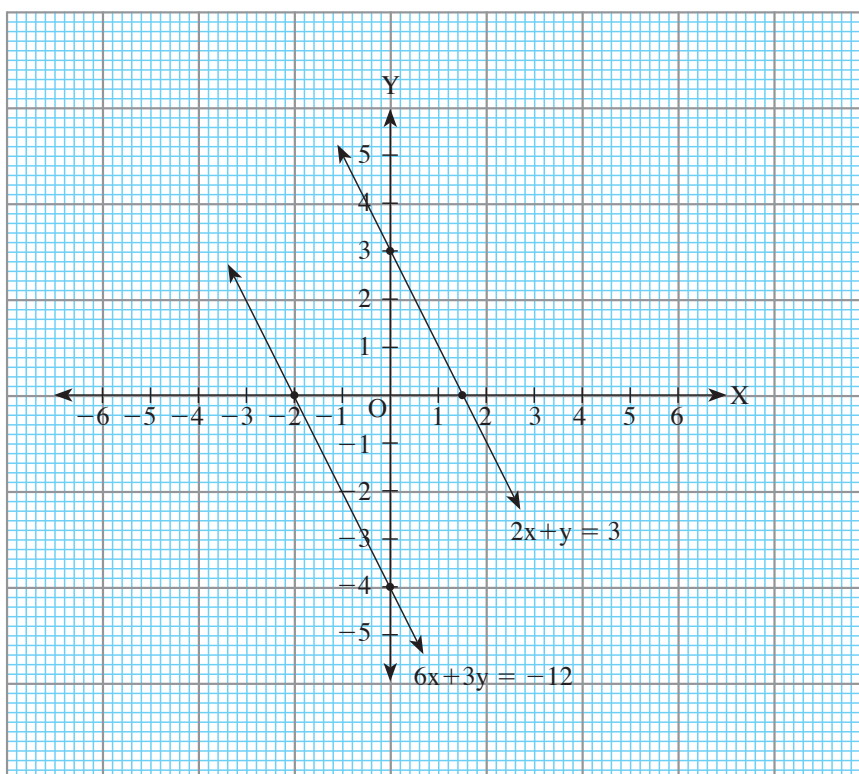
$$6x + 3y - 6x - 3y = -21$$

$$0 = -21 \text{ ซึ่งเป็นสมการที่เป็นเท็จ}$$

ไม่สามารถหาค่า x และค่า y ที่ทำให้สมการเป็นจริง

ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ

เขียนกราฟของสมการ (1) และ (2) ได้ดังนี้



เนื่องจากกราฟของสมการ (1) และ (2) เป็นเส้นตรงที่ขนานกัน จึงไม่มีจุดตัด
ดังนั้น ระบบสมการนี้ไม่มีคำตอบ



ตัวอย่างที่ 3

จงแก้ระบบสมการ $x - 2y = -1$

$$-2x + 4y = 2$$

วิธีทำ

$$x - 2y = -1 \quad \dots(1)$$

$$-2x + 4y = 2 \quad \dots(2)$$

$$(2) \div (-2); \quad x - 2y = -1 \quad \dots(3)$$

จะเห็นว่า สมการ (3) ที่ได้จากสมการ (2) เป็นสมการเดียวกับสมการ (1) แสดงว่า สมการ (1)

และสมการ (2) มีคำตอบเป็นอย่างเดียวกันซึ่งมีมากมาย

ดังนั้น คู่อันดับที่เป็นคำตอบของระบบสมการนี้ได้จากสมการ (1) หรือสมการ (2)

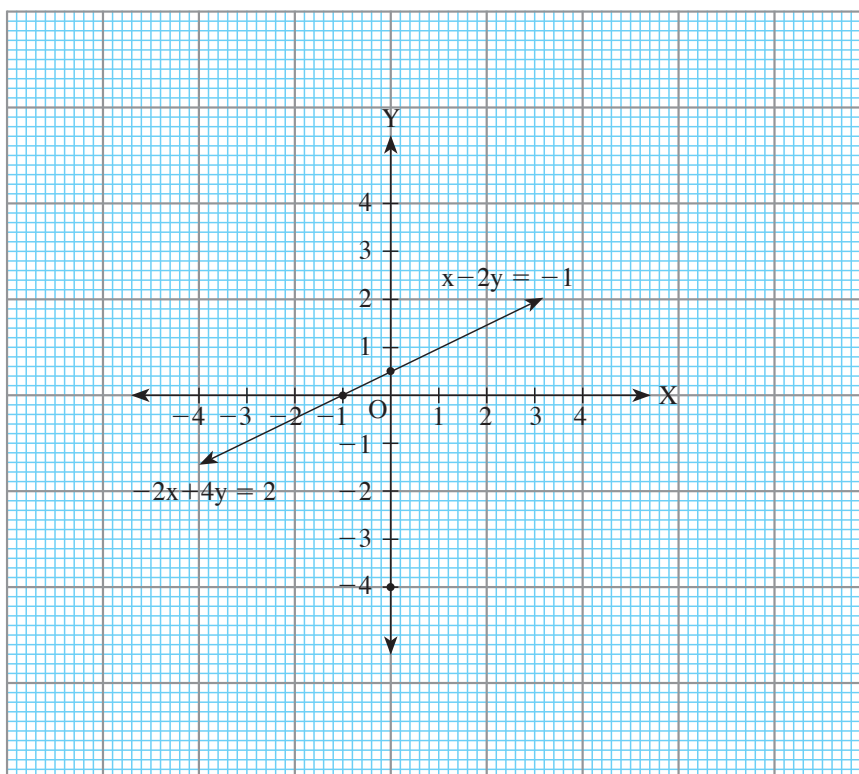
จาก (1); $x - 2y = -1$

$$x + 1 = 2y$$

$$y = \frac{x+1}{2}$$

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายในรูป $\left(x, \frac{x+1}{2}\right)$ เมื่อ x แทนจำนวนจริงใดๆ

เขียนกราฟของสมการ (1) และ (2) ได้ดังนี้



เนื่องจากกราฟของสมการ (1) และ (2) เป็นเส้นตรงที่ทับกัน

ดังนั้น ระบบสมการนี้มีคำตอบมากมายในรูป $\left(x, \frac{x+1}{2}\right)$ เมื่อ x แทนจำนวนจริงใดๆ

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. จงแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟของระบบสมการ

$$(1) \quad x - y = 1 \quad \dots(1) \quad (2) \quad x + 5y = 1 \quad \dots(1)$$

$$2x + y = 5 \quad \dots(2) \quad x + 2y = 4 \quad \dots(2)$$

$$(1) + (2); \quad 3x = \dots$$

$$x = \dots$$

แทนค่า $x = \dots$ ใน (1) เพื่อหาค่า y

$$\dots - y = \dots$$

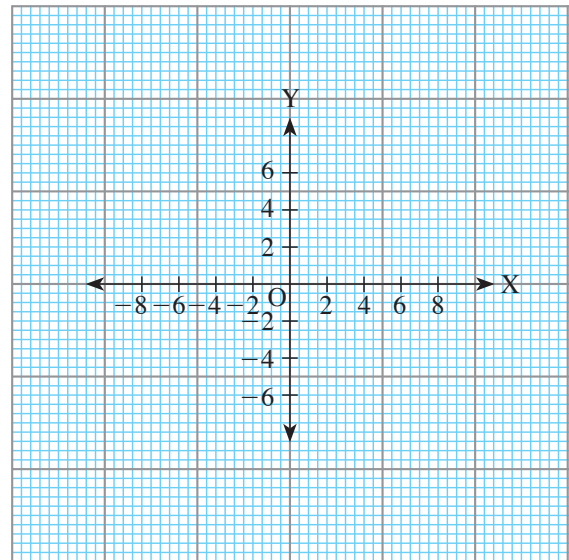
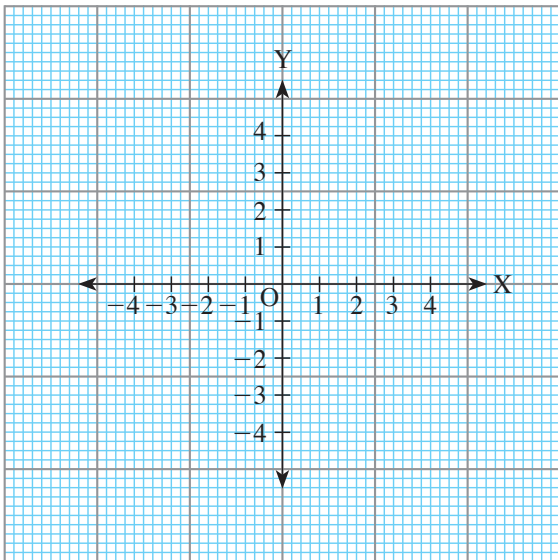
$$y = \dots$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้คือ

.....

เขียนกราฟของระบบสมการได้ดังนี้

เขียนกราฟของระบบสมการได้ดังนี้



$$(3) \quad 3x - 4y = 0 \quad \dots(1) \quad (4) \quad x + 2y = 1 \quad \dots(1)$$

$$6x - 8y = 24 \quad \dots(2) \quad 3x + 6y = 6 \quad \dots(2)$$

$$(1) \times 2; \quad \dots = \dots \quad \dots(3)$$

$$(2) - (3); \quad \dots = \dots$$

ซึ่งเป็นสมการที่

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการนี้คือ

.....