

เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยซิมแลบ

Finite Element Method Crash Course
with SimLab



ปราโมทย์ เดชะอำไพ
เสกฐวรรธ สัจจิตภวัตสกุล

เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยซีมแลบ

เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วยซีมแลบ

ปราโมทย์ เดชะอำไพ
เสกฐาวรธ สุจริตภวัตสกุล

 **สำนักพิมพ์**
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2566

390.-

ปราโมทย์ เคชะอำไพ

เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยซีแมท / ปราโมทย์ เคชะอำไพ และ เสฏฐวรรธ สุจริตกวัตสกุล

1. การวิเคราะห์โครงสร้าง (วิศวกรรมศาสตร์) -- โปรแกรมคอมพิวเตอร์. 2. ความร้อน -- การถ่ายเท.
 3. พลศาสตร์ของไหล. 4. ไฟไนต์เอลิเมนต์. 5. ไฟไนต์เอลิเมนต์ -- การประมวลผลข้อมูล.
 6. ไฟไนต์เอลิเมนต์ -- โปรแกรมคอมพิวเตอร์. 7. SimLab (โปรแกรมคอมพิวเตอร์).
- I. เสฏฐวรรธ สุจริตกวัตสกุล.

620.00151825

ISBN (e-book) 978-974-03-4227-4

สพจ. 2628



assคุณค่าวิชาการ สู่สังคม
Knowledge to All
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว
การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น
ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดทำโดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2566
www.cupress.chula.ac.th [CUB6606-021E]
โทร. 0-2218-3562-3

บรรณาธิการอำนวยการ : ศาสตราจารย์ ดร.อรรณู หาญสืบสาย นางอรทัย นันทนาดิษฐ์
กองบรรณาธิการฝ่ายวิชาการ : ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ปิยนดา บุนนาค
รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์พันธ์ เคชะคุปต์
รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ชัยณ พันธ์เจริญ
รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลวรรณ พิมพ์พันธุ์

ผู้ประสานงาน : วาสนา ชำชื่น

พิสูจน์อักษร : ตรีสุนันท์ อุปรมัย

ออกแบบปกและรูปเล่ม : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
<http://www.chulabook.com>
โทร. 08-6323-3703-4
customer@cubook.chula.ac.th, info@cubook.chula.ac.th
Apps: CU-eBook Store

คำนำ

หนังสือ “เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วยซิมแลบ” ได้แต่งขึ้นเพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถใช้ซอฟต์แวร์ SimLab ได้โดยง่าย เนื้อหา รวม 12 บทครอบคลุมการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านของแข็งและโครงสร้าง (solid and structural mechanics) การถ่ายเทความร้อน (heat transfer) และการไหล (fluid flow) เนื้อหาในแต่ละบทประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ และสมการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้วิเคราะห์งานนั้น ๆ ตัวอย่างพื้นฐานเพื่อการศึกษาพร้อมคำอธิบายขั้นตอนการใช้ซอฟต์แวร์โดยละเอียด และตัวอย่างงานในทางปฏิบัติเพื่อแสดงถึงการนำไปประยุกต์ใช้ได้จริง

ผู้เขียนขอขอบคุณบริษัท Altair Engineering, USA ที่มอบซอฟต์แวร์ SimLab เพื่อใช้ในการแต่งหนังสือเล่มนี้ และขอขอบคุณสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในการจัดพิมพ์เผยแพร่หนังสือ ก่อให้เกิดประโยชน์แก่นิสิตนักศึกษาไทยและผู้สนใจทั่วไป

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

เสฏฐวรรธ สุจริตภักตสกุล

สารบัญ

คำนำ

บทที่ 1	ความรู้เบื้องต้น	1
1.1	การแก้ปัญหาทางวิศวกรรม	1
1.1.1	องค์ประกอบของปัญหา	2
1.1.2	วิธีการแก้เพื่อหาผลลัพธ์	3
1.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	4
1.2.1	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร	4
1.2.2	ขั้นตอนในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	5
1.3	ซอฟต์แวร์ SimLab	7
1.3.1	หน้าจอและแถบเครื่องมือ	8
1.3.2	ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์	9
1.4	ประโยชน์ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	10
บทที่ 2	การวิเคราะห์วัสดุท่อน	13
2.1	สมการพื้นฐาน	13
2.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	13
2.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	14
2.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	15
2.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	15
2.2.2	ชนิดของเอลิเมนต์	15
2.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	17
2.3.1	ปัญหาโครงสร้าง 1 มิติ	17
2.3.2	ปัญหาโครงสร้าง 2 วัสดุท่อน	26

2.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	31
2.4.1 ปัญหาโครงสร้าง 21 วัสดุท่อน	31
บทที่ 3 การวิเคราะห์คานและโครงสร้าง	33
3.1 สมการพื้นฐาน	34
3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	34
3.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	34
3.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	35
3.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	35
3.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์	36
3.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	37
3.3.1 ปัญหาโครงสร้างคาน 2 ท่อน	37
3.3.2 ปัญหาโครงสร้างคาน 21 ท่อน	43
3.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	45
3.4.1 ปัญหาโครงสร้างรถแข่งใน 3 มิติ	45
บทที่ 4 การวิเคราะห์ความยืดหยุ่นใน 2 มิติ	49
4.1 สมการพื้นฐาน	49
4.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	49
4.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง	50
4.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	51
4.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	51
4.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์	51
4.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	54
4.3.1 ปัญหาแผ่นบางมีรูกลมตรงกลาง	54
4.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	61
4.4.1 ปัญหาความแข็งแรงของล้อพินเฟือง	61

บทที่ 5	การวิเคราะห์แผ่นบาง	65
5.1	สมการพื้นฐาน	65
5.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	65
5.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	66
5.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	67
5.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	67
5.2.2	ชนิดของเอลิเมนต์	68
5.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	69
5.3.1	ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง	69
5.4	ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	76
5.4.1	ปัญหาความแข็งแรงเหล็กลากชั้นวางของ	76
บทที่ 6	การวิเคราะห์ความยืดหยุ่นใน 3 มิติ	79
6.1	สมการพื้นฐาน	79
6.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	79
6.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	80
6.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	81
6.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	81
6.2.2	ชนิดของเอลิเมนต์	82
6.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	84
6.3.1	ปัญหาชิ้นงาน 3 มิติ	84
6.4	ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	91
6.4.1	ปัญหาความแข็งแรงของชิ้นส่วนในปีกเครื่องบิน	91
บทที่ 7	การวิเคราะห์โหมด	97
7.1	สมการพื้นฐาน	97
7.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	97

7.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	99
7.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	100
7.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	100
7.2.2	ชนิดของเอลิเมนต์	101
7.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	102
7.3.1	ปัญหาการสั่นของแผ่นบาง	102
7.4	ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	108
7.4.1	ปัญหาความถี่ของการสั่นในโครงสร้างรถยนต์	108
บทที่ 8	การวิเคราะห์รูปทรงแบบไม่เชิงเส้น	111
8.1	สมการพื้นฐาน	112
8.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	112
8.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	112
8.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	113
8.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	113
8.2.2	ขั้นตอนการคำนวณ	114
8.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	116
8.3.1	ปัญหาคานยื่นรับแรงในแนวดิ่ง	116
8.4	ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	122
8.4.1	ปัญหาการยืดตัวของคอกยล์สปริง	122
บทที่ 9	การวิเคราะห์วัสดุแบบไม่เชิงเส้น	125
9.1	สมการพื้นฐาน	126
9.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	126
9.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	127

9.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	129
9.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	129
9.2.2	ขั้นตอนการคำนวณ	130
9.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	131
9.3.1	ปัญหาคานยื่นรับแรงในแนวดิ่ง	131
9.4	ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	138
9.4.1	ปัญหาความไม่เชิงเส้นของวัสดุแผ่นยึด	138
บทที่ 10	การวิเคราะห์ปัญหาความร้อน	141
10.1	สมการพื้นฐาน	142
10.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	142
10.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	143
10.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	144
10.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	144
10.2.2	ชนิดของเอลิเมนต์	145
10.3	ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	148
10.3.1	อุณหภูมิในแผ่นโลหะ	148
10.4	ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	154
10.4.1	อุณหภูมิในลูกสูบสันดาปภายใน	154
บทที่ 11	การวิเคราะห์ความเค้นจากอุณหภูมิ	157
11.1	สมการพื้นฐาน	158
11.1.1	สมการเชิงอนุพันธ์	158
11.1.2	สมการที่เกี่ยวข้อง	159
11.2	วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	160
11.2.1	สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	160
11.2.2	ชนิดของเอลิเมนต์	161

11.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	162
11.3.1 ปัญหาความเค้นจากอุณหภูมิในแผ่นบาง	162
11.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	174
11.4.1 ความเค้นเนื่องจากความร้อนในลูกสูบสันดาปภายใน	174
บทที่ 12 การวิเคราะห์ปัญหาการไหล	179
12.1 สมการพื้นฐาน	180
12.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์	180
12.1.2 เงื่อนไขขอบเขต	181
12.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์	182
12.2.1 ฟังก์ชันการประมาณภายใน	182
12.2.2 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์	183
12.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้	185
12.3.1 ปัญหาการไหลหมุนวนในช่องสี่เหลี่ยม	185
12.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้	191
12.4.1 ปัญหาการไหลของน้ำในระบบท่อ	191
บรรณานุกรม	195
ดัชนี	197
ประวัติผู้แต่ง	205

บทที่ 1

ความรู้เบื้องต้น

1.1 การแก้ปัญหาทางวิศวกรรม

เทคโนโลยีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้ซอฟต์แวร์ทำให้การแก้ปัญหาทางวิศวกรรมสะดวกและรวดเร็วขึ้นมาก ผู้ออกแบบในปัจจุบันสามารถใช้ซอฟต์แวร์ก่อให้เกิดชิ้นงานที่มีความแข็งแรง ใช้เนื้อวัสดุน้อย ลดค่าใช้จ่าย และที่สำคัญคือใช้เวลาสั้น สามารถแข่งขันได้ หลีกเลี่ยงการลองผิดลองถูกไปโดยสิ้นเชิง

ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ช่วยในการออกแบบงานทางวิศวกรรม (Computer-Aided Engineering, CAE) ได้เข้ามามีบทบาทในภาคอุตสาหกรรมเป็นอย่างมาก ทำให้สถาบันการศึกษาจำเป็นต้องสอนองค์ความรู้ที่บรรจุในซอฟต์แวร์เหล่านี้ เพื่อให้ผู้ใช้สามารถใช้ซอฟต์แวร์เหล่านี้ได้อย่างเหมาะสมถูกต้อง

ซอฟต์แวร์เหล่านี้ตั้งอยู่บนทฤษฎีของความเป็นจริง เช่น มวลต้องไม่มีการสูญหาย (conservation of mass) โมเมนตัมและพลังงานต้องเกิดการอนุรักษ์ (conservation of momentums and energy) แรงต้องอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium of forces) หรือกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) ที่ว่าแรงเท่ากับมวล (mass) คูณกับความเร่ง (acceleration) ต้องเป็นจริงอยู่เสมอ

ทฤษฎีของความเป็นจริงดังกล่าวข้างต้นปรากฏอยู่ในตำราเรียนทางสายวิศวกรรมต่าง ๆ เช่น วิชาพลศาสตร์ของไหล (fluid dynamics) วิชาการถ่ายเทความร้อน (heat trans-

fer) ด้วยการนำ (conduction) การพา (convection) และการแผ่รังสี (radiation) วิชา กลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) เพื่อหาความเค้น (stress) และการสั่นสะเทือน (vibration) ส่งผลทำให้การออกแบบงานต่าง ๆ เป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ

หากเปิดตำราเรียนในศาสตร์ต่าง ๆ ข้างต้น เราจะพบว่าทฤษฎีของความเป็นจริง เหล่านี้ล้วนเขียนอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) เมื่อเราแก้ สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ได้ เราก็จะได้ผลลัพธ์ที่แสดงถึงปรากฏการณ์ซึ่งเกิดขึ้นในงาน เหล่านั้น ความเข้าใจในคณิตศาสตร์จึงเป็นบันไดขั้นแรกและเป็นสาเหตุสำคัญทำให้แคลคูลัส (calculus) และสมการเชิงอนุพันธ์ กลายเป็นวิชาบังคับในการศึกษาขั้นพื้นฐาน

1.1.1 องค์ประกอบของปัญหา

ผลลัพธ์ (solution) หรือปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นนั้น ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลัก 3 ประการ คือ

(ก) สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) ซึ่งบ่งบอกความเป็นจริงของ ปัญหานั้น ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการทราบปรากฏการณ์การไหลวนของอากาศเย็นภายใน ห้องปรับอากาศ เราจำเป็นต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแทนความเป็นจริงที่ว่า มวลของอากาศ โมเมนตัมของการไหล และพลังงาน ณ ตำแหน่งใด ๆ ต้องเกิดการอนุรักษ์ (conserved) เสมอ สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ปรากฏอยู่ในบทแรก ๆ ของตำราของไหล (fluid textbooks) ที่ใช้ เรียนกันในระดับอุดมศึกษา ซึ่งประกอบไปด้วยพจน์อนุพันธ์ (partial derivative terms) แสดงโดยใช้สัญลักษณ์กรีก (Greek symbol) คล้ายเลขหกหันหัวกลับทาง

(ข) เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ผลลัพธ์ของปัญหาจะแตกต่าง ออกไปหากเงื่อนไขขอบเขตเปลี่ยนแปลงไป ดังเช่นในตัวอย่างของห้องปรับอากาศข้างต้น หาก เราเปลี่ยนความเร็วของพัดลมเพื่อทำให้อากาศเย็นพุ่งออกมาจากเครื่องด้วยความเร็วสูงขึ้น ลักษณะการหมุนวนของอากาศเย็นภายในห้องก็จะแตกต่างไปจากเดิม ลมเย็นจะกระทบตัวเรา ด้วยความเร็วสูงขึ้นทำให้เรารู้สึกเย็นขึ้น

(ค) รูปร่าง (geometry) ของปัญหา หากเราเพิ่มโต๊ะทำงานหรือตู้ใส่เอกสารลง ในห้องปรับอากาศเดียวกันนี้ เนื้อที่ของการไหลก็จะลดน้อยลงทำให้รูปแบบของการไหลวนใน ห้องเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมอีกเช่นกัน

องค์ประกอบทั้ง 3 นี้ส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์ในทุก ๆ งานทางวิศวกรรม ยกตัวอย่างเช่น โครงสะพานเหล็กแรงรถไฟจะเกิดความเค้น ตามตำแหน่งต่าง ๆ แตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับน้ำหนักของขบวนรถไฟซึ่งก็คือเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ความเค้นนี้ยังเปลี่ยนแปลงออกไปหากโครงสร้างนี้ใช้คานขนาดแตกต่างกันหรือออกแบบให้มีรูปร่างต่างออกไปจากเดิมซึ่งก็คือการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของปัญหานั้นเอง

1.1.2 วิธีการแก้เพื่อหาผลลัพธ์

กระบวนการหาผลลัพธ์หรือปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นมี 2 วิธีหลัก ๆ คือ

(ก) *วิธีเชิงวิเคราะห์ (analytical method)* เป็นวิธีที่เราคุ้นเคยในช่วงของการเรียนระดับอุดมศึกษา กล่าวคือเป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) วิธีเชิงวิเคราะห์นี้มีขีดจำกัด สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้สำหรับปัญหาที่มีรูปทรงง่าย ๆ เท่านั้น เช่น ท่อนโลหะ 1 ท่อน หรือแผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 แผ่น ภายใต้เงื่อนไขขอบเขตที่ง่าย ๆ เช่นกัน โดยเฉพาะเมื่อสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) ไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) จะทำให้การแก้เพื่อหาผลลัพธ์นั้นเป็นไปได้และเกิดความสะดวกมากยิ่งขึ้น

หากปัญหามีความซับซ้อนมากขึ้น เช่น โลหะแผ่นบางมีขอบโค้งและเจาะรูภายใน หรือเป็นโครงสร้างผนังตัวรถยนต์ซึ่งโค้งเว้าใน 3 มิติ กระบวนการหาผลลัพธ์ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ข้างต้นนี้ไม่อาจนำมาใช้เพื่อหาผลลัพธ์ให้ได้ ดังนั้นในอดีต ผู้ออกแบบจึงมักใช้ประสบการณ์ที่สั่งสมมา หรือไม่ก็ลองผิดลองถูกบ้างซึ่งตั้งอยู่บนประสบการณ์ที่มีอยู่นั้น

(ข) *วิธีเชิงตัวเลข (numerical method)* เป็นวิธีที่เริ่มใช้กันมากขึ้น โดยเฉพาะเมื่อคอมพิวเตอร์ได้รับการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น วิธีเชิงตัวเลขนี้ประกอบไปด้วยระดับพื้นฐานและระดับสูง แนวคิดที่สำคัญในวิธีเชิงตัวเลขก็คือการเปลี่ยนสมการทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยสัญลักษณ์ต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ การหาค่าอนุพันธ์ การหาค่าอินทิเกรต ฯลฯ ไปเป็นสมการทางพีชคณิตอันประกอบด้วยกระบวนการบวก ลบ คูณ และหารตัวเลขด้วยกันเท่านั้น แล้วประดิษฐ์โปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำงานแทนการกดเครื่องคิดเลขด้วยมือ

วิธีเชิงตัวเลขระดับพื้นฐาน (fundamentals) ประกอบไปด้วยหัวข้อของการหาราก (root) ของสมการเดียวและระบบสมการขนาดใหญ่ทั้งแบบเชิงเส้น (linear) และแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) การประคิษฐ์ฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) การหาค่าอนุพันธ์ (differentiation) การอินทิเกรต (integration) การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) รวมถึงวิธีผลต่างแบบสืบเนื่อง (finite difference method) ผู้ที่เข้าใจวิธีเชิงตัวเลขเบื้องต้นนี้จะพบว่าผลลัพธ์ของบางปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถหาได้อย่างง่ายดายขึ้นมาก

วิธีเชิงตัวเลขระดับสูง (advanced) เพื่อใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมในปัจจุบันประกอบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) และวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) วิธีทั้งสองนี้ได้รับการยอมรับว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพ ก่อให้เกิดซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์ (commercial software) จำหน่ายกันในราคาสูง ซอฟต์แวร์เหล่านี้ตั้งอยู่บนศาสตร์จำเพาะของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม ซึ่งตั้งอยู่บนองค์ความรู้ของวิธีเชิงตัวเลขระดับพื้นฐานอีกต่อหนึ่ง

ดังนั้นโดยสรุปก็คือ ผู้ที่ใช้ซอฟต์แวร์ในระดับสูงเช่นนี้ได้อย่างถูกต้องเหมาะสม จึงควรมีความรู้ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข อย่างน้อยก็ควรทราบคร่าว ๆ ว่าผลลัพธ์ที่ปรากฏเป็นทोनส์ต่างกันบนหน้าจอคอมพิวเตอร์นั้นเกิดขึ้นมาได้อย่างไร จึงสามารถบอกได้ว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้มีความเที่ยงตรงและถูกต้อง

1.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์ส่วนใหญ่ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาผลลัพธ์ เราจึงมาทำความเข้าใจวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนในหัวข้อย่อนี้

1.2.1 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นกระบวนการเชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณ (approximate solution) สำหรับปัญหาที่ประกอบไปด้วย 3 องค์ประกอบหลักซึ่งคือสมการเชิงอนุพันธ์ เงื่อนไขขอบเขต และรูปร่างของปัญหาได้โดยครบถ้วน เนื่องจากปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ รวมทั้งศาสตร์อื่น ๆ มักถูกครอบคลุม (governed) ด้วย

องค์ประกอบทั้งสามนี้ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงถูกประยุกต์นำไปใช้แก้ปัญหาได้หลากหลาย ทำให้นิยมใช้กันโดยแพร่หลาย ก่อให้เกิดซอฟต์แวร์ตามขึ้นมาเป็นจำนวนมากเช่นกัน

ซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ในสมัยแรก เช่น NASTRAN (NAsa STRuctural ANalysis program) ซึ่งเน้นทางด้านกลศาสตร์ของแข็งเพียงอย่างเดียว ได้ถูกผลักดันโดยองค์การอวกาศนาซาด้วยการให้ทุนเพื่อประดิษฐ์ซอฟต์แวร์นี้ในปี พ.ศ. 2508 จำนวน 3 ล้านดอลลาร์ต่อลำสหรัฐ หากคิดเป็นราคารในปัจจุบันจะตกประมาณ 30 ล้านดอลลาร์ต่อลำสหรัฐหรือพันกว่าล้านบาทไทย เพียงไม่กี่ปีหลังจากซอฟต์แวร์ NASTRAN ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้น ซอฟต์แวร์แอนซิส ANSYS, ANalysis SYstem) จึงได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นตามมาเพื่อใช้ในเชิงพาณิชย์ ซอฟต์แวร์ทั้งสองได้ถูกพัฒนาอย่างต่อเนื่องเพื่อแก้ปัญหาศาสตร์ทางด้านอื่น ๆ และเป็นที่นิยมใช้กันจนถึงปัจจุบันนี้

ตลอดช่วงเวลาที่ผ่านมามหาวิทยาลัยต่าง ๆ ได้เปิดการเรียนการสอนวิชาทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์นี้กันอย่างกว้างขวาง ก่อให้เกิดตำรา (textbooks) ของวิธีนี้ในสาขาแตกต่างกันเป็นจำนวนมากหลายร้อยเล่ม ในขณะเดียวกันก็มีนักวิจัยเป็นจำนวนมากได้ศึกษาค้นคว้าทำให้วิธีนี้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น เกิดความเที่ยงตรงของผลลัพธ์มากขึ้นและใช้เวลาในการคำนวณน้อยลง

แนวคิดหลักของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือการแบ่งโดเมน (domain) ของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ (element) ย่อย ๆ จากนั้นจึงสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับเอลิเมนต์เหล่านี้ ก่อนนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของทุกเอลิเมนต์มารวมกันเข้าเพื่อก่อให้เกิดระบบสมการขนาดใหญ่ แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงบนระบบสมการใหญ่นี้เพื่อแก้หาผลลัพธ์

กระบวนการโดยรวมข้างต้นนี้มีรูปแบบที่ชัดเจนและครอบคลุม 3 องค์ประกอบที่สำคัญในการแก้ปัญหาทั่วไปเพื่อหาผลลัพธ์ เราจะมาศึกษาขั้นตอนโดยละเอียดมากยิ่งขึ้นในหัวข้อย่อยต่อไปนี้

1.2.2 ขั้นตอนในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

กระบวนการแก้ปัญหาภายในซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วย 6 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นตอนนี้เริ่มจากการสร้างโดเมนรูปร่างของปัญหา ซึ่งอาจประกอบด้วยพื้นผิว ขอบตรง ขอบโค้ง ฯลฯ ซอฟต์แวร์ส่วนใหญ่จึงมีวิธีการสร้างรูปทรงทางเรขาคณิตที่มักมี ขั้นตอนเฉพาะในตัวเอง ผู้เริ่มต้นจึงต้องฝึกฝนจนเกิดความเคยชิน จากนั้นซอฟต์แวร์จะแบ่ง โดเมนรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ เอลิเมนต์เหล่านี้ต่อกันที่จุดต่อ (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะหาตัวไม่รู้ค่า (unknown)

ขั้นตอนที่ 2 เอลิเมนต์ย่อย ๆ ที่เกิดขึ้นอาจเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าหากเป็น ปัญหาใน 2 มิติ เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมอาจประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มุมทั้งสาม หรือ 6 จุดต่อ คือที่มุมทั้งสามและที่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามด้วย จำนวนจุดต่อเหล่านี้มีผลโดยตรงต่อ ลักษณะการกระจายของผลลัพธ์บนเอลิเมนต์นั้น ๆ ที่เราเรียกว่าฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ มีฟังก์ชันการประมาณภายใน เอลิเมนต์ที่ซับซ้อนกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ ดังนั้น จึงให้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรง มากกว่า แต่ในทางตรงกันข้ามก็จะใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้นเพราะจำนวนจุดต่อบ่งบอก จำนวนตัวไม่รู้ค่าของปัญหานั้นมีมากขึ้น ในทำนองเดียวกัน โดเมนของปัญหาใน 3 มิติ อาจถูก แบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ทรงตันย่อย ๆ เช่น รูปทรงลูกบาศก์คล้ายลูกเต๋าแต่ละด้านนั้นไม่ขนาน กัน เอลิเมนต์แบบ 3 มิตินี้ อาจประกอบไปด้วย 8 จุดต่อที่มุมทั้งแปด หรือ 20 จุดต่อหากมีจุดต่อ ที่กึ่งกลางของสันขอบด้วย

ขั้นตอนที่ 3 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ขั้นตอน นี้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์และศึกษากันโดยละเอียดในการเรียนวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการ ไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นเป็นสมการทางพีชคณิต (algebraic equations) ซึ่งประกอบด้วย กระบวนการทำบวก ลบ คูณ และหารตัวเลขเป็นจำนวนมาก จึงสามารถนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็น โปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เหล่านี้ยังขึ้นอยู่กับชนิดของเอลิเมนต์ที่ เลือกใช้ซึ่งมีฟังก์ชันการประมาณภายในที่แตกต่างกัน

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากทุกเอลิเมนต์มารวมกันขึ้นเป็นระบบสมการ ทางพีชคณิต (system of algebraic equations) ขนาดใหญ่ การรวมสมการจากเอลิเมนต์ย่อย เข้าด้วยกันต้องทำอย่างเหมาะสม เปรียบเสมือนการประกอบตัวต่อ (jigsaw puzzle) ขึ้นเป็น รูปภาพใหญ่ ตัวต่อแต่ละตัวจำเป็นต้องอยู่ในตำแหน่งที่ถูกต้อง จึงจะนำมาสู่ภาพใหญ่ที่ถูกต้อง สมบูรณ์ขึ้นมาได้

ขั้นตอนที่ 5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเข้ากับระบบสมการทางพีชคณิตขนาดใหญ่แล้ว จึงแก้เพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ ขั้นตอนนี้อาจใช้เวลาในการคำนวณมาก โดยเฉพาะหากเป็นปัญหามีขนาดใหญ่ซึ่งอาจประกอบไปด้วยหลายเส้นหรือหลายล้านสมการ หรือเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้นซึ่งระบบสมการทางพีชคณิตขนาดใหญ่เช่นนี้ ต้องถูกแก้ซ้ำแล้วซ้ำอีกหลายครั้ง

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อได้ผลลัพธ์ที่จุดต่อจากขั้นตอนที่ 5 แล้ว ค่าอื่น ๆ ที่มีความสำคัญเช่นกัน จึงสามารถหาตามมาได้ ทำให้การแก้ปัญหานั้นเสร็จสิ้นโดยสมบูรณ์ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อได้ค่าการเสียรูป (displacements) ตามจุดต่อต่าง ๆ ของโครงสร้างแล้ว ก็สามารถคำนวณหาค่าความเครียด (strains) และค่าความเค้น (stresses) ที่เกิดขึ้นตามมาได้ ตามลำดับ

จากขั้นตอนทั้ง 6 ดังอธิบายข้างต้นนี้จะเห็นได้ว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีกระบวนการที่เป็นขั้นเป็นตอนอย่างชัดเจน ให้ผลลัพธ์โดยสมบูรณ์ และสามารถประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาโดยทั่วไปได้ โดยองค์ประกอบที่สำคัญของปัญหาคือสมการเชิงอนุพันธ์ เงื่อนไขขอบเขต และรูปร่างของปัญหา ได้ถูกจัดการดูแลโดยครบถ้วนในขั้นตอนที่ 3, 5 และ 1 ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตามลำดับ

1.3 ซอฟต์แวร์ SimLab

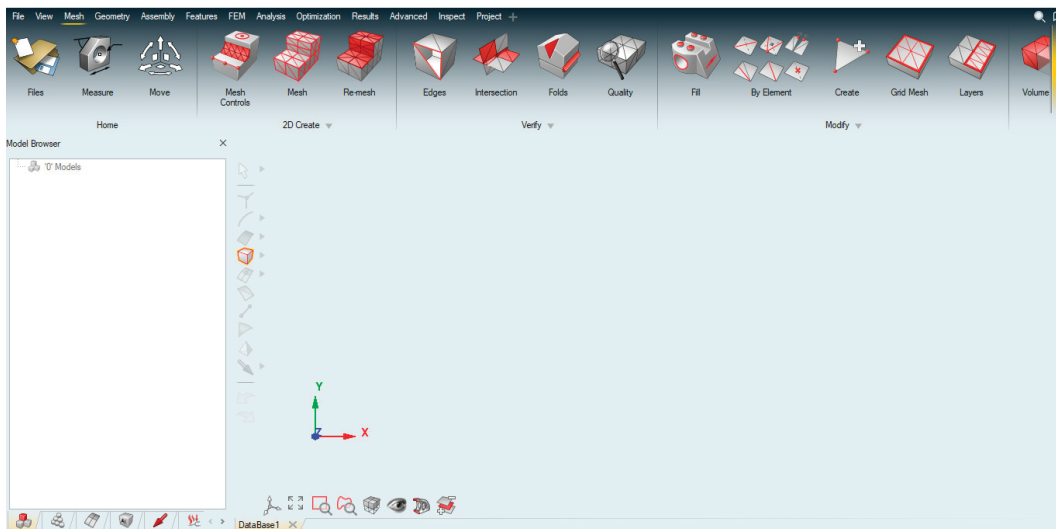
SimLab เป็นซอฟต์แวร์ทางด้าน CAE เพื่อใช้วิเคราะห์งานต่าง ๆ ทางวิศวกรรม ด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ซอฟต์แวร์ SimLab เป็นส่วนหนึ่งของซอฟต์แวร์หลัก Altair ซึ่งมีศักยภาพในการแก้ปัญหาได้หลากหลายชนิด ซอฟต์แวร์ Altair มีจุดเด่นในการสร้างเมช (mesh) สำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพ ในขณะที่ซอฟต์แวร์ SimLab ได้รับความเชื่อถือเพื่อการวิเคราะห์ปัญหาด้านของแข็งมาอย่างยาวนาน จุดเด่นทั้งสองประการนี้ส่งผลให้ SimLab ได้รับความนิยมเพื่อใช้วิเคราะห์งานทางด้านนี้ในภาคอุตสาหกรรม

ในปัจจุบัน ซอฟต์แวร์ SimLab ได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่องด้วย GUI (Graphic User Interface) ทำให้ใช้งานได้ง่าย ปุ่มคำสั่งบนหน้าจอคอมพิวเตอร์มีจำนวนน้อย จึงลดความสับสน โดยเฉพาะสำหรับผู้เริ่มต้น ได้เป็นอย่างดี และเหมาะสำหรับใช้เพื่อ

การศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในสถาบันการศึกษา เพราะผู้ศึกษาไม่จำเป็นต้องจดจำปุ่มคำสั่งจำนวนมากดังเช่นซอฟต์แวร์อื่น ๆ

1.3.1 หน้าจอและแถบเครื่องมือ

เมื่อเปิดซอฟต์แวร์ SimLab ขึ้น หน้าจอประกอบไปด้วยแถบเครื่องมือในแนวนอนคล้ายกับซอฟต์แวร์วินโดวส์ทั่วไป รวมทั้งไอคอนขนาดใหญ่เรียงจากซ้ายไปขวา ดังแสดงในรูป



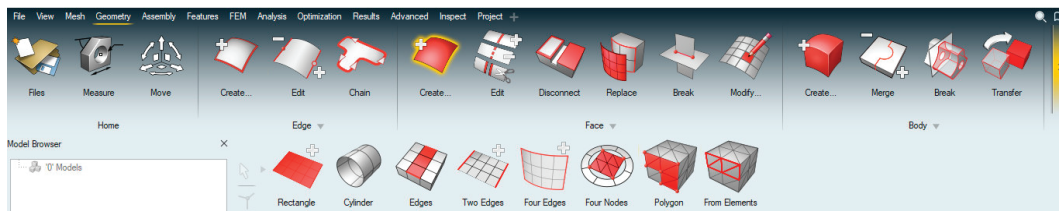
แถบเครื่องมือที่ปรากฏในแถบประกอบไปด้วยหัวข้อ File, View, Mesh, Geometry, Assembly, Features, FEM, Analyses, Optimization, Results, Advanced Inspect, Project, ฯลฯ หากคลิกที่หัวข้อเหล่านี้ หน้าต่างเล็ก ๆ ซึ่งประกอบไปด้วยรายละเอียดภายใต้หัวข้อนั้น ๆ จะปรากฏขึ้น ยกตัวอย่าง เช่น ภายใต้หัวข้อ File ผู้ใช้สามารถ import ไฟล์ CAD เพื่อใช้ในการสร้างเมชต่อไปได้โดยตรง หรือ Export เมชเพื่อนำไปใช้วิเคราะห์งานประเภทอื่นได้อีก อนึ่ง หัวข้อที่จำเป็นสำหรับผู้ใช้งานเบื้องต้น ประกอบด้วยหัวข้อ File, Geometry, FEM, Analysis และ Results เท่านั้น ส่วนหัวข้ออื่น ๆ ผู้ใช้สามารถฝึกฝนหลังจากมีความชำนาญในการใช้งานในเบื้องต้นแล้ว

ภายใต้หัวข้อ Geometry ผู้ใช้สามารถสร้างรูปร่างง่าย ๆ ของปัญหาด้วยการใช้เพียงไม่กี่คำสั่ง รูปร่างของปัญหาพร้อมทั้งเมชซึ่งสร้างขึ้นบนโดเมนของปัญหานั้นจะปรากฏบนหน้าจอทันที นอกจากนี้ผู้ใช้งานยังสามารถสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์โมเดลได้โดยตรงด้วยคำสั่ง

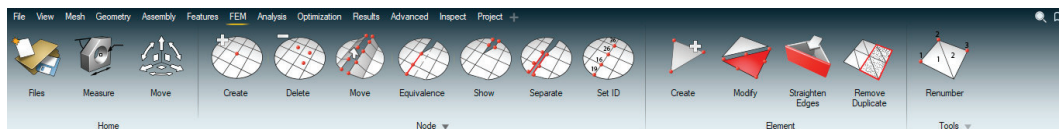
ภายใต้หัวข้อ FEM ความสะดวกในการใช้งานเช่นนี้เองทำให้ซอฟต์แวร์ SimLab เหมาะแก่การเรียนรู้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ในชั้นเรียน

1.3.2 ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์

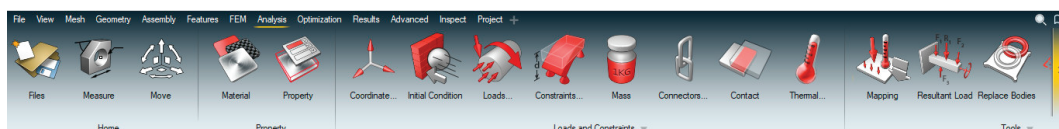
คำสั่งบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ลำดับขั้นตอนการวิเคราะห์ปัญหาโดยทั่วไปจากซ้ายไปขวา เริ่มตั้งแต่การสร้างรูปแบบโดเมนของปัญหาด้วยคำสั่ง Geometry จากนั้นผู้ใช้สามารถสร้าง line, face และ body ได้ด้วยการคลิกไอคอนใหญ่เหล่านี้ ซึ่งไอคอนย่อยอีกหลายรูปแบบจะปรากฏขึ้นตามมา ดังแสดงในรูป



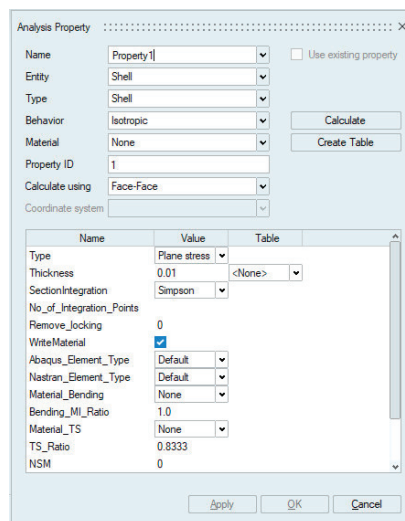
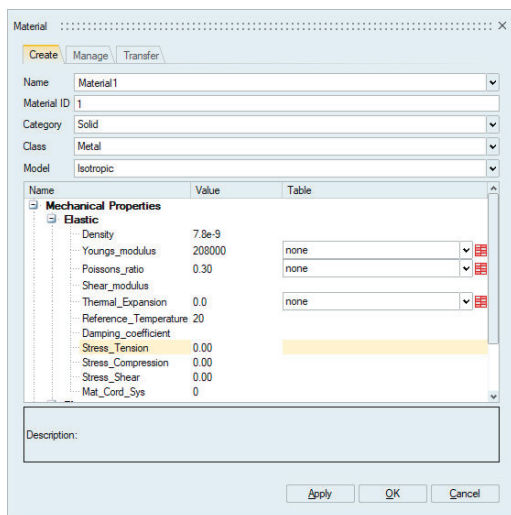
หากโมเดลมีรูปร่างที่ไม่ซับซ้อนและประกอบไปด้วยเอลิเมนต์จำนวนน้อย ผู้ใช้อาจสร้าง nodes และ elements ได้โดยตรงบนหน้าจอผ่านคำสั่ง FEM ดังแสดงในรูป



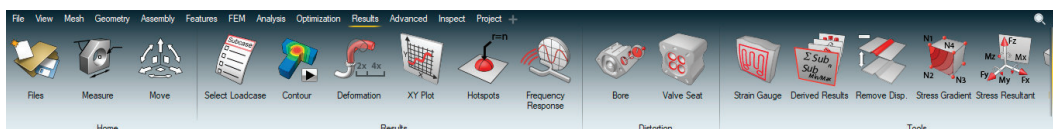
คำสั่ง Analysis เป็นคำสั่งที่สำคัญ ประกอบไปด้วยไอคอนเพื่อให้ผู้ใช้ได้กรอกข้อมูลต่าง ๆ ที่ใช้เพื่อการวิเคราะห์ปัญหานั้น นับตั้งแต่ Material, Property, Loads, Constraints ไปจนถึงวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหานั้น ๆ



ยกตัวอย่างเช่น ข้อมูลหลังจากคลิกไอคอน Material และ Property ประกอบไปด้วยค่าต่าง ๆ ที่ผู้ใช้ต้องกรอกลงอย่างเหมาะสมให้สอดคล้องกับปัญหาที่วิเคราะห์อยู่ ดังแสดงในรูป



หลังจากการวิเคราะห์ได้สิ้นสุดแล้ว ผลลัพธ์สามารถแสดงได้ในหลายรูปแบบด้วยการคลิกไอคอนแตกต่างกัน ดังแสดงในรูป



ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้ดังปรากฏในบทต่าง ๆ แสดงขั้นตอนการกดปุ่มเพื่อวิเคราะห์ปัญหาหลากหลาย เมื่อผู้ศึกษาได้ลองกดอย่างเป็นขั้นเป็นตอนดังแสดงในตัวอย่างเหล่านี้แล้ว จะเกิดความเข้าใจเป็นอย่างดี และจะพบว่า SimLab เป็นซอฟต์แวร์ที่ใช้งานได้ง่ายมากทีเดียว

1.4 ประโยชน์ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำไปใช้วิเคราะห์งานหลากหลายชนิดเป็นจำนวนมาก ในปัจจุบัน จนกลายเป็นเครื่องมือที่ได้รับการยอมรับกันทั่วโลก ส่งผลให้เกิดซอฟต์แวร์ที่จำหน่ายกันในราคาสูง งานต่าง ๆ ที่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถวิเคราะห์ได้ประกอบไปด้วย

- (ก) การวิเคราะห์ความแข็งแรงของโครงสร้างรถยนต์ เครื่องบิน รถไฟ เรือ อาคารสูง สะพาน ลงไปถึงชิ้นงานขนาดเล็ก เช่น ชิ้นส่วนยานยนต์ มอเตอร์ แก้ว ขวดน้ำ และภาชนะต่าง ๆ

- (ข) การวิเคราะห์การสั่นไหวของเสาไฟฟ้าแรงสูงและป้ายทางด่วนจากแรงลม การยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ขณะเกิดการชน ความเค้นจากอุณหภูมิสูงของกังหันใบพัดเทอร์ไบน์
- (ค) การวิเคราะห์การไหลของอากาศผ่านบ้านและอาคารในเมืองขนาดใหญ่ การหมุนวนของอากาศภายในอาคารเพื่อการประหยัดพลังงาน การทำนายสภาวะอากาศ การเคลื่อนตัวของอากาศเย็นผ่านทวีป ทิศทางการไหลท่วมของน้ำเมื่อเกิดอุทกภัย
- (ง) การวิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับเสาส่งสัญญาณทางอากาศ ทรานซิสเตอร์ มอเตอร์ สายไฟฟ้าแรงสูง
- (จ) การวิเคราะห์การไหลในเส้นเลือดตามร่างกายและหัวใจ ไปจนถึงอุปกรณ์ทางการแพทย์ กระดูกข้อต่อเทียม เท้าเทียม รากฟันเทียม
- (ฉ) และงานอื่น ๆ ที่ไม่สามารถทดลองได้เพราะอาจเป็นอันตรายต่อมนุษย์หรือมีค่าใช้จ่ายสูง เช่น อานุภาพการระเบิดของจีปนาซุ การไหลของแก๊สที่เป็นพิษต่อมนุษย์ในโรงงานอุตสาหกรรม

ประโยชน์ต่าง ๆ ดังตัวอย่างข้างต้นนี้เองทำให้สถาบันการศึกษาจำนวนมากบรรจุวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิชาที่นิสิตนักศึกษาในหลายสาขาต้องเรียนรู้กัน ก่อให้เกิดความเข้าใจในทฤษฎีที่ฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ เพื่อให้ผู้ใช้ซอฟต์แวร์ได้อย่างถูกต้องจึงมีความมั่นใจในผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

บทที่ 2

การวิเคราะห์วัสดุท่อน

การวิเคราะห์วัสดุท่อนจัดเป็นพื้นฐานเบื้องต้นในการศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะมีจำนวนตัวไม่รู้ค่า (unknown) น้อย ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้คือค่าของการเสียรูป (displacement) ซึ่งมีความหมายทางกายภาพที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจ วัสดุท่อน (truss, rod) รับแรงดึงหรือแรงกดในแนวแกนได้เพียงอย่างเดียว ทำให้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสปริง (spring) ได้โดยตรง

2.1 สมการพื้นฐาน

2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์

วัสดุท่อนยาวเรียวยาวตัวอยู่ในแนวแกน x อาจถูกยึดที่ปลายข้างหนึ่งและมีแรงดึงหรือแรงกดที่ปลายอีกข้างหนึ่ง จะเกิดการยืดหดตัวขึ้นจนอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium) ความสมดุลนี้เกิดขึ้นทุกตำแหน่งตลอดความยาวของวัสดุท่อนยาวเรียว นั้น สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแสดงถึงความสมดุลนี้หากไม่คำนึงถึงแรงจากน้ำหนักของตัววัสดุท่อน (body force) เองคือ

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$$

โดย σ_x แทนค่าความเค้น (stress) ที่เกิดขึ้นในท่อนวัสดุยาวเรียว นั้น