

# เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วย Patran/MSC Nastran

Finite Element Method Crash Course  
with Patran/MSC Nastran



ปราโมทย์ เดชะอำไพ  
เสกฐวรรธ สัจจิตภวัตสกุล



# **เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วย Patran/MSC Nastran**



# เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ด้วย Patran/MSC Nastran

ปราโมทย์ เตชะอำไพ  
เสกฐาวรธร สุจริตภวัตสกุล

 **สำนักพิมพ์**  
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2566

390.-

## ปราโมทย์ เดชะอำไพ

เขียนลัดคิวไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วย Patran/MSC Nastran / ปราโมทย์ เดชะอำไพ และ  
เสกฐรรฐ สุจริตกวีตสกุล

1. การวิเคราะห์โครงสร้าง (วิศวกรรมศาสตร์) -- โปรแกรมคอมพิวเตอร์.
2. ไฟไนต์เอลิเมนต์. 3. ไฟไนต์เอลิเมนต์ -- การประมวลผลข้อมูล.
4. ไฟไนต์เอลิเมนต์ -- โปรแกรมคอมพิวเตอร์. 5. Patran (โปรแกรมคอมพิวเตอร์).
6. MSC Nastran (โปรแกรมคอมพิวเตอร์). I. เสกฐรรฐ สุจริตกวีตสกุล.

620.00151825

ISBN (e-book) 978-974-03-4228-1

สพจ. 2625



สรรคุณค่าวิชาการ สู่สังคม  
Knowledge to All  
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว  
การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น  
ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดทำโดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2566  
www.cupress.chula.ac.th [CUB6606-019E]  
โทร. 0-2218-3562-3

บรรณาธิการอำนวยการ : ศาสตราจารย์ ดร.อรรักษ์ หาญสืบสาย นางอรทัย นันทนาดิษฐ์  
กองบรรณาธิการฝ่ายวิชาการ : ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ปิยนดา บุญนาค  
รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์  
รองศาสตราจารย์ นายแพทย์ชิษณุ พันธุ์เจริญ  
รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลวรรณ พิมพ์พันธุ์

ผู้ประสานงาน : วาสนา ชำเซ็น

พิสูจน์อักษร : ศิริสุนันท์ อุปรมัย

ออกแบบปกและรูปเล่ม : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330  
<http://www.chulabook.com>  
โทร. 08-6323-3703-4  
[customer@cubook.chula.ac.th](mailto:customer@cubook.chula.ac.th), [info@cubook.chula.ac.th](mailto:info@cubook.chula.ac.th)  
Apps: CU-eBook Store

# คำนำ

หนังสือ “เรียนลัดวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ด้วย Patran/MSC Nastran” ได้แต่งขึ้นเพื่อให้ผู้ศึกษาสามารถใช้ซอฟต์แวร์ Patran/MSC Nastran ได้โดยง่าย เนื้อหา รวม 12 บท ครอบคลุมการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านของแข็งและโครงสร้าง (solid and structural mechanics) เนื้อหาในแต่ละบทประกอบไปด้วยสมการเชิงอนุพันธ์ และสมการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้วิเคราะห์งานนั้น ๆ ตัวอย่างพื้นฐานเพื่อการศึกษาพร้อมคำอธิบายขั้นตอนการใช้ซอฟต์แวร์โดยละเอียด และตัวอย่างงานในทางปฏิบัติเพื่อแสดงถึงการนำไปประยุกต์ใช้ได้จริง

ผู้เขียนขอขอบคุณบริษัท MSC Software Corporation, USA ที่มอบซอฟต์แวร์ Patran/MSC Nastran เพื่อใช้ในการแต่งหนังสือเล่มนี้ และขอขอบคุณคุณชัยฤทธิ์ อุฬิชาติ บริษัท Sigma Solutions Co., Ltd. ผู้สนับสนุนผลักดันการใช้ซอฟต์แวร์ให้กว้างขวางในประเทศไทย และขอขอบคุณสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยด้วยการจัดพิมพ์และเผยแพร่หนังสือเล่มนี้ ก่อให้เกิดประโยชน์แก่นักศึกษาไทยและผู้สนใจทั่วไป

ปราโมทย์ เดชะอำไพ

เสฏฐวรรธ สุจิตกวัตตกุล

# สารบัญ

## คำนำ

|                |                                |           |
|----------------|--------------------------------|-----------|
| <b>บทที่ 1</b> | <b>ความรู้เบื้องต้น</b>        | <b>1</b>  |
| 1.1            | การแก้ปัญหาทางวิศวกรรม         | 1         |
| 1.1.1          | องค์ประกอบของปัญหา             | 2         |
| 1.1.2          | วิธีการแก้เพื่อหาผลลัพธ์       | 3         |
| 1.2            | วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์            | 4         |
| 1.2.1          | วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร     | 4         |
| 1.2.2          | ขั้นตอนในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์   | 5         |
| 1.3            | ซอฟต์แวร์ Patran/MSC Nastran   | 7         |
| 1.3.1          | ข้อมูลทั่วไป                   | 7         |
| 1.3.2          | หน้าจอและแถบเครื่องมือ         | 8         |
| 1.4            | ประโยชน์ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ | 11        |
| <b>บทที่ 2</b> | <b>การวิเคราะห์วัสดุท่อน</b>   | <b>13</b> |
| 2.1            | สมการพื้นฐาน                   | 13        |
| 2.1.1          | สมการเชิงอนุพันธ์              | 13        |
| 2.1.2          | สมการที่เกี่ยวข้อง             | 14        |
| 2.2            | วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์            | 15        |
| 2.2.1          | สมการไฟไนต์เอลิเมนต์           | 15        |
| 2.2.2          | ชนิดของเอลิเมนต์               | 15        |
| 2.3            | ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้       | 17        |
| 2.3.1          | ปัญหาโครงสร้าง 1 มิติ          | 17        |
| 2.3.2          | ปัญหาโครงสร้าง 2 วัสดุท่อน     | 27        |

|                                                  |           |
|--------------------------------------------------|-----------|
| 2.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                       | 37        |
| 2.4.1 ปัญหาโครงสร้าง 21 วัสดุท่อน                | 37        |
| <b>บทที่ 3 การวิเคราะห์คานและโครงสร้าง</b>       | <b>41</b> |
| 3.1 สมการพื้นฐาน                                 | 42        |
| 3.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์                          | 42        |
| 3.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง                         | 42        |
| 3.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                          | 43        |
| 3.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                       | 43        |
| 3.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์                           | 44        |
| 3.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                     | 45        |
| 3.3.1 ปัญหาโครงสร้าง 2 คาน                       | 45        |
| 3.3.2 ปัญหาโครงสร้าง 21 คาน                      | 56        |
| 3.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                       | 58        |
| 3.4.1 ปัญหาโครงสร้างรถแข่งใน 3 มิติ              | 58        |
| <b>บทที่ 4 การวิเคราะห์ความยืดหยุ่นใน 2 มิติ</b> | <b>61</b> |
| 4.1 สมการพื้นฐาน                                 | 62        |
| 4.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์                          | 62        |
| 4.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง                         | 62        |
| 4.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                          | 63        |
| 4.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                       | 63        |
| 4.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์                           | 64        |
| 4.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                     | 66        |
| 4.3.1 ปัญหาแผ่นบางมีรูกลมตรงกลาง                 | 66        |
| 4.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                       | 80        |
| 4.4.1 ปัญหาความแข็งแรงของล้อพื้นเพื่อง           | 80        |

|                                                      |                |
|------------------------------------------------------|----------------|
| <b>บทที่ 5 การวิเคราะห์แผ่นบาง</b>                   | <b>83</b>      |
| 5.1 สมการพื้นฐาน                                     | 83             |
| 5.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์                              | 83             |
| 5.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง                             | 85             |
| 5.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                              | 85             |
| 5.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                           | 85             |
| 5.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์                               | 86             |
| 5.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                         | 87             |
| 5.3.1 ปัญหาการโก่งของแผ่นบาง                         | 87             |
| 5.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                           | 98             |
| 5.4.1 ปัญหาความแข็งแรงเหลือจากชั้นวางของ             | 98             |
| <br><b>บทที่ 6 การวิเคราะห์ความยืดหยุ่นใน 3 มิติ</b> | <br><b>101</b> |
| 6.1 สมการพื้นฐาน                                     | 102            |
| 6.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์                              | 102            |
| 6.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง                             | 102            |
| 6.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                              | 103            |
| 6.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                           | 103            |
| 6.2.2 ชนิดของเอลิเมนต์                               | 104            |
| 6.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                         | 107            |
| 6.3.1 ปัญหาชิ้นงาน 3 มิติ                            | 107            |
| 6.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                           | 118            |
| 6.4.1 ปัญหาความแข็งแรงของชิ้นส่วนในปีกเครื่องบิน     | 118            |
| <br><b>บทที่ 7 การวิเคราะห์การโก่งงอ</b>             | <br><b>121</b> |
| 7.1 สมการพื้นฐาน                                     | 122            |
| 7.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์                              | 122            |

|                |                                         |            |
|----------------|-----------------------------------------|------------|
| 7.1.2          | สมการที่เกี่ยวข้อง                      | 123        |
| 7.2            | วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                     | 124        |
| 7.2.1          | สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                    | 124        |
| 7.2.2          | ชนิดของเอลิเมนต์                        | 125        |
| 7.3            | ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                | 126        |
| 7.3.1          | การโค้งงอของคาน                         | 126        |
| 7.4            | ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                  | 136        |
| 7.4.1          | ปัญหาการโค้งของขดน้ำยาซักผ้า            | 136        |
| <b>บทที่ 8</b> | <b>การวิเคราะห์โหมด</b>                 | <b>139</b> |
| 8.1            | สมการพื้นฐาน                            | 140        |
| 8.1.1          | สมการเชิงอนุพันธ์                       | 140        |
| 8.1.2          | สมการที่เกี่ยวข้อง                      | 143        |
| 8.2            | วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                     | 145        |
| 8.2.1          | สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                    | 145        |
| 8.2.2          | ชนิดของเอลิเมนต์                        | 145        |
| 8.3            | ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                | 147        |
| 8.3.1          | ปัญหาการสั่นของแผ่นบาง                  | 147        |
| 8.4            | ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                  | 156        |
| 8.4.1          | ปัญหาความถี่ของการสั่นในโครงสร้างรถยนต์ | 156        |
| <b>บทที่ 9</b> | <b>การวิเคราะห์การตอบสนองความถี่</b>    | <b>159</b> |
| 9.1            | สมการพื้นฐาน                            | 160        |
| 9.1.1          | สมการเชิงอนุพันธ์                       | 160        |
| 9.1.2          | สมการที่เกี่ยวข้อง                      | 160        |
| 9.2            | วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                     | 161        |
| 9.2.1          | สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                    | 161        |

|                 |                                         |            |
|-----------------|-----------------------------------------|------------|
| 9.2.2           | ขั้นตอนการคำนวณ                         | 161        |
| 9.3             | ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                | 163        |
| 9.3.1           | ระบบก่อนมวลและสปริง                     | 163        |
| 9.4             | ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                  | 174        |
| 9.4.1           | ปัญหาความถี่ของการสั่นในโครงสร้างรถยนต์ | 174        |
| <b>บทที่ 10</b> | <b>การวิเคราะห์การตอบสนองชั่วคราว</b>   | <b>177</b> |
| 10.1            | สมการพื้นฐาน                            | 178        |
| 10.1.1          | สมการเชิงอนุพันธ์                       | 178        |
| 10.1.2          | สมการที่เกี่ยวข้อง                      | 178        |
| 10.2            | วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                     | 179        |
| 10.2.1          | สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                    | 179        |
| 10.2.2          | ขั้นตอนการคำนวณ                         | 179        |
| 10.3            | ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                | 181        |
| 10.3.1          | ระบบก่อนมวลและสปริง                     | 181        |
| 10.4            | ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                  | 192        |
| 10.4.1          | ปัญหาความถี่ของการสั่นในโครงสร้างรถยนต์ | 192        |
| <b>บทที่ 11</b> | <b>การวิเคราะห์วัสดุแบบไม่เชิงเส้น</b>  | <b>196</b> |
| 11.1            | สมการพื้นฐาน                            | 196        |
| 11.1.1          | สมการเชิงอนุพันธ์                       | 196        |
| 11.1.2          | สมการที่เกี่ยวข้อง                      | 197        |
| 11.2            | วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                     | 199        |
| 11.2.1          | สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                    | 199        |
| 11.2.2          | ขั้นตอนการคำนวณ                         | 200        |
| 11.3            | ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                | 202        |
| 11.3.1          | ปัญหาคานยื่นรับแรงในแนวดิ่ง             | 202        |

|                                                   |            |
|---------------------------------------------------|------------|
| 11.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                       | 212        |
| 11.4.1 ปัญหาความไม่เชิงเส้นของวัสดุแผ่นยึด        | 212        |
| <b>บทที่ 12 การวิเคราะห์รูปร่างแบบไม่เชิงเส้น</b> | <b>216</b> |
| 12.1 สมการพื้นฐาน                                 | 216        |
| 12.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์                          | 216        |
| 12.1.2 สมการที่เกี่ยวข้อง                         | 217        |
| 12.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์                          | 218        |
| 12.2.1 สมการไฟไนต์เอลิเมนต์                       | 218        |
| 12.2.2 ขั้นตอนการคำนวณ                            | 218        |
| 12.3 ตัวอย่างเพื่อการเรียนรู้                     | 220        |
| 12.3.1 ปัญหาความขึ้นรับแรงในแนวดิ่ง               | 220        |
| 12.4 ตัวอย่างการประยุกต์ใช้                       | 229        |
| 12.4.1 ปัญหาการยึดตัวมากของคอกซ์สปริง             | 229        |
| <b>บรรณานุกรม</b>                                 | <b>233</b> |
| <b>ดัชนี</b>                                      | <b>235</b> |
| <b>ประวัติผู้แต่ง</b>                             | <b>243</b> |



# บทที่ 1

## ความรู้เบื้องต้น

### 1.1 การแก้ปัญหาทางวิศวกรรม

เทคโนโลยีการคำนวณทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้ซอฟต์แวร์ทำให้การแก้ปัญหาทางวิศวกรรมสะดวกและรวดเร็วขึ้นมาก ผู้ออกแบบในปัจจุบันสามารถใช้ซอฟต์แวร์ก่อให้เกิดชิ้นงานที่มีความแข็งแรง ใช้เนื้อวัสดุน้อย ลดค่าใช้จ่าย และที่สำคัญคือใช้เวลาสั้น สามารถแข่งขันได้ หลีกเลี่ยงการลองผิดลองถูกไปโดยสิ้นเชิง

ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ช่วยในการออกแบบงานทางวิศวกรรม (Computer-Aided Engineering, CAE) ได้เข้ามามีบทบาทในภาคอุตสาหกรรมเป็นอย่างมาก ทำให้สถาบันการศึกษาจำเป็นต้องสอนองค์ความรู้ที่บรรจุในซอฟต์แวร์เหล่านี้ เพื่อให้ผู้ใช้สามารถใช้ซอฟต์แวร์เหล่านี้ได้อย่างเหมาะสมถูกต้อง

ซอฟต์แวร์เหล่านี้ตั้งอยู่บนทฤษฎีของความเป็นจริง เช่น มวลต้องไม่มีการสูญหาย (conservation of mass) โมเมนตัมและพลังงานต้องเกิดการอนุรักษ์ (conservation of momentums and energy) แรงต้องอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium of forces) หรือกฎข้อที่สองของนิวตัน (Newton's second law) ที่ว่าแรงเท่ากับมวล (mass) คูณกับความเร่ง (acceleration) ต้องเป็นจริงอยู่เสมอ

ทฤษฎีของความเป็นจริงดังกล่าวข้างต้นปรากฏอยู่ในตำราเรียนทางสายวิศวกรรมต่าง ๆ เช่น วิชาพลศาสตร์ของไหล (fluid dynamics) วิชาการถ่ายเทความร้อน (heat transfer) ด้วยการนำ (conduction) การพา (convection) และการแผ่รังสี (radiation) วิชากลศาสตร์ของแข็ง (solid mechanics) เพื่อหาความเค้น (stress) และการสั่นสะเทือน (vibration) ส่งผลทำให้การออกแบบงานต่าง ๆ เป็นไปได้อย่างมีประสิทธิภาพ

หากเปิดตำราเรียนในศาสตร์ต่าง ๆ ข้างต้นเราจะพบว่า ทฤษฎีของความเป็นจริงเหล่านี้ล้วนเขียนอยู่ในรูปแบบของสมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) เมื่อเราแก้สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ได้ เราก็จะได้ผลลัพธ์ที่แสดงถึงปรากฏการณ์ซึ่งเกิดขึ้นในงานเหล่านั้น ความเข้าใจในคณิตศาสตร์จึงเป็นบันไดขั้นแรกและเป็นสาเหตุสำคัญทำให้แคลคูลัส (calculus) และสมการเชิงอนุพันธ์ กลายเป็นวิชาบังคับในการศึกษาขั้นพื้นฐาน

### 1.1.1 องค์ประกอบของปัญหา

ผลลัพธ์ (solution) หรือปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นนั้น ขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลัก 3 ประการ คือ

(ก) สมการเชิงอนุพันธ์ (differential equations) ซึ่งบ่งบอกความเป็นจริงของปัญหานั้น ยกตัวอย่างเช่น หากเราต้องการทราบปรากฏการณ์การไหลวนของอากาศเย็นภายในห้องปรับอากาศ เราจำเป็นต้องแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแทนความเป็นจริงที่ว่า มวลของอากาศโมเมนตัมของการไหล และพลังงาน ณ ตำแหน่งใด ๆ ต้องเกิดการอนุรักษ์ (conserved) สมการเชิงอนุพันธ์เหล่านี้ปรากฏอยู่ในบทแรก ๆ ของตำราของไหล (fluid textbooks) ที่ใช้เรียนกันในระดับอุดมศึกษา ซึ่งประกอบไปด้วยพจน์อนุพันธ์ (partial derivative terms) แสดงโดยใช้สัญลักษณ์กรีก (Greek symbol) คล้ายเลขหกหันหัวกลับทาง

(ข) เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ผลลัพธ์ของปัญหาจะแตกต่างออกไปหากเงื่อนไขขอบเขตเปลี่ยนแปลงไป ดังเช่นในตัวอย่างของห้องปรับอากาศข้างต้น หากเราเปลี่ยนความเร็วของพัดลมเพื่อให้อากาศเย็นพุ่งออกมาจากเครื่องด้วยความเร็วสูงขึ้น ลักษณะการหมุนวนของอากาศเย็นภายในห้องก็จะแตกต่างไปจากเดิม ลมเย็นจะกระทบตัวเราด้วยความเร็วสูงขึ้นทำให้เรารู้สึกเย็นขึ้น

(ค) รูปร่าง (*geometry*) ของปัญหา หากเราเพิ่มโต๊ะทำงาน หรือตู้ใส่เอกสารลงในห้องปรับอากาศเดียวกันนี้ เนื้อที่ของการไหลก็จะลดน้อยลงทำให้รูปแบบของการไหลวนในห้องเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมอีกเช่นกัน

องค์ประกอบทั้ง 3 นี้ส่งผลกระทบต่อผลลัพธ์ในทุก ๆ งานทางวิศวกรรม ยกตัวอย่างเช่น โครงสะพานเหล็กทางรถไฟจะเกิดความเค้น ตามตำแหน่งต่าง ๆ แตกต่างกันไป ขึ้นอยู่กับน้ำหนักของขบวนรถไฟซึ่งก็คือเงื่อนไขขอบเขตของปัญหา ความเค้นนี้ยังเปลี่ยนแปลงออกไปหากโครงสร้างนี้ใช้คานขนาดแตกต่างกัน หรือออกแบบให้มีรูปร่างต่างออกไปจากเดิมซึ่งก็คือ การเปลี่ยนแปลงรูปร่างของปัญหานั้นเอง

### 1.1.2 วิธีการแก้เพื่อหาผลลัพธ์

กระบวนการหาผลลัพธ์หรือปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นมี 2 วิธีหลัก ๆ คือ

(ก) วิธีเชิงวิเคราะห์ (*analytical method*) เป็นวิธีที่เราคุ้นเคยในช่วงของการเรียนระดับอุดมศึกษา กล่าวคือ เป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์เพื่อหาผลเฉลยแม่นยำตรง (*exact solution*) วิธีเชิงวิเคราะห์นี้มีขีดจำกัด สามารถหาผลลัพธ์ให้ได้สำหรับปัญหาที่มีรูปทรงง่าย ๆ เท่านั้น เช่น ท่อนโลหะ 1 ท่อน หรือแผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า 1 แผ่น ภายใต้งานขอบเขตที่ง่าย ๆ เช่นกัน โดยเฉพาะเมื่อสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาลดรูปจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (*partial differential equation*) ไปเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (*ordinary differential equation*) จะทำให้การแก้เพื่อหาผลลัพธ์นั้นเป็นไปได้และเกิดความสะดวกมากยิ่งขึ้น

หากปัญหามีความซับซ้อนมากขึ้น เช่น โลหะแผ่นบางมีขอบโค้งและเจาะรูภายใน หรือเป็นโครงสร้างผนังตัวรถยนต์ซึ่งโค้งเว้าใน 3 มิติ กระบวนการหาผลลัพธ์ด้วยวิธีเชิงวิเคราะห์ข้างต้นนี้ไม่อาจนำมาใช้เพื่อหาผลลัพธ์ให้ได้ ดังนั้นในอดีต ผู้ออกแบบจึงมักใช้ประสบการณ์ที่สั่งสมมา หรือไม่ก็ลองผิดลองถูกบ้างซึ่งตั้งอยู่บนประสบการณ์ที่มีอยู่นั้น

(ข) วิธีเชิงตัวเลข (*numerical method*) เป็นวิธีที่เริ่มใช้กันมากขึ้น โดยเฉพาะเมื่อคอมพิวเตอร์ได้รับการพัฒนาให้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น วิธีเชิงตัวเลขนี้ประกอบไปด้วยระดับพื้นฐานและระดับสูง แนวคิดที่สำคัญในวิธีเชิงตัวเลขก็คือ การเปลี่ยนสมการทางคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยสัญลักษณ์ต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ การหาค่าอนุพันธ์ การหาค่าอินทิเกรต ฯลฯ ไปเป็นสมการทางพีชคณิตอันประกอบด้วยกระบวนการบวก ลบ คูณ

และหารตัวเลขด้วยกันเท่านั้น แล้วประดิษฐ์โปรแกรมให้คอมพิวเตอร์ทำงานแทนการกดเครื่องคิดเลขด้วยมือ

วิธีเชิงตัวเลขระดับพื้นฐาน (fundamentals) ประกอบไปด้วยหัวข้อของการหาราก (root) ของสมการเดียวและระบบสมการขนาดใหญ่ทั้งแบบเชิงเส้น (linear) และแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) การประดิษฐ์ฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) การหาค่าอนุพันธ์ (differentiation) การอินทิเกรต (integration) การแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) รวมถึงวิธีผลต่างแบบสืบเนื่อง (finite difference method) ผู้ที่เข้าใจวิธีเชิงตัวเลขเบื้องต้นนี้จะพบว่า ผลลัพธ์ของบางปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นสามารถหาได้อย่างง่ายดายขึ้นมาก

วิธีเชิงตัวเลขระดับสูง (advanced) เพื่อใช้แก้ปัญหาทางวิศวกรรมในปัจจุบันประกอบด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) และวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) วิธีทั้งสองนี้ได้รับการยอมรับว่าเป็นวิธีที่มีประสิทธิภาพ ก่อให้เกิดซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์ (commercial software) จำหน่ายกันในราคาสูง ซอฟต์แวร์เหล่านี้ตั้งอยู่บนศาสตร์จำเพาะของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์และไฟไนต์วอลุ่ม ซึ่งตั้งอยู่บนองค์ความรู้ของวิธีเชิงตัวเลขระดับพื้นฐานอีกต่อหนึ่ง

ดังนั้นโดยสรุปก็คือ ผู้ที่ใช้ซอฟต์แวร์ในระดับสูงเช่นนี้ได้อย่างถูกต้องเหมาะสมจึงควรมีความรู้ในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข อย่างน้อยก็ควรทราบคร่าว ๆ ว่าผลลัพธ์ที่ปรากฏเป็นทोनีสต่างกันบนหน้าจอคอมพิวเตอร์นั้นเกิดขึ้นมาได้อย่างไร จึงสามารถบอกได้ว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้มีความเที่ยงตรงและถูกต้อง

## 1.2 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ซอฟต์แวร์เชิงพาณิชย์ส่วนใหญ่ใช้วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อหาผลลัพธ์ เราจึงมาทำความเข้าใจวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ก่อนในหัวข้อย่อนี้

### 1.2.1 วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คืออะไร

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นกระบวนการเชิงตัวเลขเพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณ (approximate solution) สำหรับปัญหาที่ประกอบไปด้วย 3 องค์ประกอบหลักซึ่งคือสมการเชิงอนุพันธ์ เงื่อนไขขอบเขต และรูปร่างของปัญหาได้โดยครบถ้วน เนื่องจากปัญหาทาง

วิศวกรรมศาสตร์ วิทยาศาสตร์ รวมทั้งศาสตร์อื่น ๆ มักถูกครอบคลุม (governed) ด้วยองค์ประกอบทั้งสามนี้ วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จึงถูกประยุกต์นำไปใช้แก้ปัญหาได้หลากหลาย ทำให้นิยมใช้กันโดยแพร่หลาย ก่อให้เกิดซอฟต์แวร์ตามขึ้นมาเป็นจำนวนมากเช่นกัน

ซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ในสมัยแรก เช่น NASTRAN (NA Sa STRuctural ANalysis program) ซึ่งเน้นทางด้านกลศาสตร์ของแข็งเพียงอย่างเดียว ได้ถูกผลักดันโดยองค์การอวกาศนาซาด้วยการให้ทุนเพื่อประดิษฐ์ซอฟต์แวร์นี้ในปี พ.ศ. 2508 จำนวน 3 ล้านดอลลาร์ต่อลำสหรัฐ หากคิดเป็นราคาในปัจจุบันจะตกประมาณ 30 ล้านดอลลาร์ต่อลำสหรัฐ หรือพันกว่าล้านบาทไทย เพียงไม่กี่ปีหลังจากซอฟต์แวร์ NASTRAN ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้น ซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์อื่น ๆ ได้ถูกประดิษฐ์ขึ้นตามมาอีกเป็นจำนวนมากเพื่อใช้ในการศึกษา การวิจัยและพัฒนา รวมทั้งการใช้งานในเชิงพาณิชย์

ตลอดช่วงเวลาที่ผ่านมามีมหาวิทยาลัยต่าง ๆ ได้เปิดการเรียนการสอนวิชาทางด้านไฟไนต์เอลิเมนต์นี้กันอย่างกว้างขวาง ก่อให้เกิดตำรา (textbooks) ของวิธีนี้ในสาขาแตกต่างกันเป็นจำนวนมากหลายร้อยเล่ม ในขณะที่เดียวกันก็มีนักวิจัยเป็นจำนวนมากได้ศึกษาค้นคว้าทำให้วิธีนี้มีประสิทธิภาพสูงขึ้น เกิดความเที่ยงตรงของผลลัพธ์มากขึ้นและใช้เวลาในการคำนวณน้อยลง

แนวคิดหลักของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์คือ การแบ่งโดเมน (domain) ของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ (element) ย่อย ๆ จากนั้นจึงสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับเอลิเมนต์เหล่านี้ ก่อนนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของทุกเอลิเมนต์มารวมกันเข้าเพื่อก่อให้เกิดระบบสมการขนาดใหญ่ แล้วจึงประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตลงบนระบบสมการใหญ่นี้เพื่อแก้หาผลลัพธ์

กระบวนการโดยรวมข้างต้นนี้มีรูปแบบที่ชัดเจนและครอบคลุม 3 องค์ประกอบที่สำคัญในการแก้ปัญหาทั่วไปเพื่อหาผลลัพธ์ เราจะมาศึกษาขั้นตอนโดยละเอียดมากยิ่งขึ้นในหัวข้อย่อยต่อไปนี้

### 1.2.2 ขั้นตอนในวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

กระบวนการแก้ปัญหายภายในซอฟต์แวร์ไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วย 6 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นตอนนี้เริ่มจากการสร้างโดเมนรูปร่างของปัญหา ซึ่งอาจประกอบด้วยพื้นผิว ขอบตรง ขอบโค้ง ฯลฯ ซอฟต์แวร์ส่วนใหญ่จึงมีวิธีการสร้างรูปทรงทางเรขาคณิตที่มีขั้นตอนเฉพาะในตัวเอง ผู้เริ่มต้นจึงต้องฝึกฝนจนเกิดความเคยชิน จากนั้นซอฟต์แวร์จะแบ่งโดเมนรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ เอลิเมนต์เหล่านี้ต่อกันที่จุดต่อ (node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่จะหาตัวไม่รู้ค่า (unknown)

ขั้นตอนที่ 2 เอลิเมนต์ย่อย ๆ ที่เกิดขึ้นอาจเป็นรูปสามเหลี่ยม หรือสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่าหากเป็นปัญหาใน 2 มิติ เอลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมอาจประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มุมทั้งสาม หรือ 6 จุดต่อ คือ ที่มุมทั้งสามและที่จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามด้วย จำนวนจุดต่อเหล่านี้มีผลโดยตรงสู่ลักษณะการกระจายของผลลัพธ์บนเอลิเมนต์นั้น ๆ ที่เราเรียกว่าฟังก์ชันการประมาณภายใน (interpolation functions) เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 6 จุดต่อ มีฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่ซับซ้อนกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบ 3 จุดต่อ ดังนั้น จึงให้ผลลัพธ์ที่เที่ยงตรงมากกว่า แต่ในทางตรงกันข้ามก็จะใช้เวลาในการคำนวณมากขึ้นเพราะจำนวนจุดต่อบ่งบอกจำนวนตัวไม่รู้ค่าของปัญหานั้นมีมากขึ้น ในทำนองเดียวกัน โดเมนของปัญหาใน 3 มิติ อาจถูกแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ทรงตันย่อย ๆ เช่น รูปทรงลูกบาศก์คล้ายลูกเต๋าแต่ละด้านนั้นไม่ขนานกัน เอลิเมนต์แบบ 3 มิติ อาจประกอบไปด้วย 8 จุดต่อที่มุมทั้งแปด หรือ 20 จุดต่อหากมีจุดต่อที่กึ่งกลางของสันขอบด้วย

ขั้นตอนที่ 3 ประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ขั้นตอนนี้เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์และศึกษากันโดยละเอียดในการเรียนวิชาไฟไนต์เอลิเมนต์ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เกิดขึ้นเป็นสมการทางพีชคณิต (algebraic equations) ซึ่งประกอบด้วยกระบวนการทำบวก ลบ คูณ และหารตัวเลขเป็นจำนวนมาก จึงสามารถนำไปประดิษฐ์ขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ได้ สมการไฟไนต์เอลิเมนต์เหล่านี้ยังขึ้นอยู่กับชนิดของเอลิเมนต์ที่เลือกใช้ซึ่งมีฟังก์ชันการประมาณภายในที่แตกต่างกัน

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการไฟไนต์เอลิเมนต์จากทุกเอลิเมนต์มารวมกันขึ้นเป็นระบบสมการทางพีชคณิต (system of algebraic equations) ขนาดใหญ่ การรวมสมการจากเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันต้องทำอย่างเหมาะสม เปรียบเสมือนการประกอบตัวต่อ (jigsaw puzzle) ขึ้นเป็นรูปภาพใหญ่ ตัวต่อแต่ละตัวจำเป็นต้องอยู่ในตำแหน่งที่ถูกต้อง จึงจะนำมาสู่ภาพใหญ่ที่ถูกต้องสมบูรณ์ขึ้นมาได้

ขั้นตอนที่ 5 การประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตของปัญหาเข้ากับระบบสมการทางพีชคณิตขนาดใหญ่แล้ว จึงแก้เพื่อหาผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ ขั้นตอนนี้จัดว่าใช้เวลาในการคำนวณมาก โดยเฉพาะหากเป็นปัญหาขนาดใหญ่ซึ่งอาจประกอบไปด้วยหลายแสนหรือหลายล้านสมการ หรือเป็นปัญหาแบบไม่เชิงเส้นซึ่งระบบสมการทางพีชคณิตขนาดใหญ่เช่นนี้ ต้องถูกแก้ซ้ำแล้วซ้ำอีกหลายครั้ง

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อได้ผลลัพธ์ที่จุดต่อจากขั้นตอนที่ 5 แล้ว ค่าอื่น ๆ ที่มีความสำคัญเช่นกัน จึงสามารถหาตามมาได้ ทำให้การแก้ปัญหานั้นเสร็จสิ้นโดยสมบูรณ์ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อได้ค่าการเสียรูป (displacements) ตามจุดต่อต่าง ๆ ของโครงสร้างแล้ว ก็สามารถคำนวณหาค่าความเครียด (strains) และค่าความเค้น (stresses) ที่เกิดขึ้นตามมาได้ ตามลำดับ

จากขั้นตอนทั้ง 6 ดังอธิบายข้างต้นนี้จะเห็นได้ว่า วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์มีกระบวนการที่เป็นขั้นตอนอย่างชัดเจน ให้ผลลัพธ์โดยสมบูรณ์ และสามารถประยุกต์ใช้เพื่อแก้ปัญหาโดยทั่วไปได้ โดยองค์ประกอบที่สำคัญของปัญหาคือ สมการเชิงอนุพันธ์ เงื่อนไขขอบเขต และรูปร่างของปัญหา ได้ถูกจัดการดูแลโดยครบถ้วนในขั้นตอนที่ 3, 5 และ 1 ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ตามลำดับ

## 1.3 ซอฟต์แวร์ Patran/MSC Nastran

### 1.3.1 ข้อมูลทั่วไป

ในปี พ.ศ. 2508 องค์การอวกาศ NASA ต้องการประดิษฐ์โปรแกรมไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านของแข็งและโครงสร้าง เพื่อช่วยในการออกแบบโครงสร้างอากาศยานความเร็วเหนือเสียง โครงสร้างเหล่านี้จำเป็นต้องมีน้ำหนักเบาและแข็งแรง จึงให้ทุนวิจัยเพื่อสร้างองค์ความรู้ใหม่พร้อมกับประดิษฐ์ซอฟต์แวร์ บริษัท MacNeal-Schwendler Corporation (MSC) เป็นบริษัทหลักที่ได้รับทุนในเวลานั้น ต่อมาเมื่อการประดิษฐ์ซอฟต์แวร์ได้ดำเนินไปจนเกือบเสร็จสิ้น บริษัทได้ส่งมอบซอฟต์แวร์ให้แก่หน่วยงานใน NASA และบางมหาวิทยาลัยเพื่อทดลองใช้กัน จนกระทั่งปี พ.ศ. 2512 บริษัทจึงได้จัดจำหน่ายจริงซอฟต์แวร์นี้จึงพร้อมกับตั้งชื่อให้ว่า MSC/NASTRAN จากนั้น ซอฟต์แวร์นี้ได้ถูกใช้กันในการอวกาศอย่างต่อเนื่องเพื่อออกแบบโครงสร้างกระสวยอวกาศ (Space

Shuttle) สถานีอวกาศ (Space Stations) รวมทั้งยานอวกาศความเร็วสูง (Aerospace Plane) ซอฟต์แวร์นี้ยังได้รับการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง และถูกนำไปประยุกต์ใช้กับงานอื่น ๆ เช่น การออกแบบโครงสร้างรถยนต์ รถบรรทุก เรือ รถไฟ สะพาน โรงงานผลิตไฟฟ้า ตีกระฟ้า และเครื่องบินโดยสาร เป็นต้น จนเป็นที่ยอมรับกันอย่างกว้างขวางในปัจจุบัน โดยเฉพาะงานที่เกี่ยวข้องกับอุตสาหกรรมยานพาหนะและเครื่องจักรกล

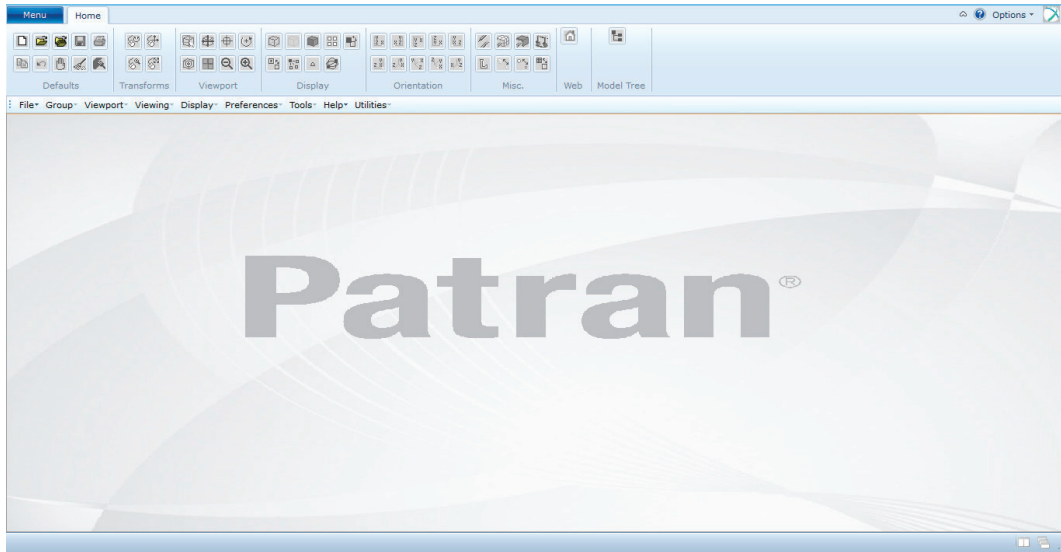
เนื่องจากซอฟต์แวร์ Nastran ถูกประดิษฐ์ขึ้นในยุคแรก ๆ ของการคำนวณด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์จึงใช้ภาษา Fortran เป็นหลัก ในตัวซอฟต์แวร์ประกอบด้วยคำสั่งเป็นจำนวนมากกว่าล้านบรรทัด เป็นซอฟต์แวร์ที่มีศักยภาพสูงเพื่อวิเคราะห์โครงสร้างและของแข็งรูปร่างทั่วไปด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

หน้าที่หลักของ Nastran เป็นเพียงการวิเคราะห์ปัญหาด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์จากข้อมูลนำเข้า (input data) ซอฟต์แวร์ Nastran ไม่ได้มีศักยภาพในการทำกราฟิกเพื่อสร้างโมเดล ดีเมช หรือแสดงผลลัพธ์ออกเป็นเจดลี ข้อมูลนำเข้าและส่งออกจาก Nastran เป็นไฟล์แบบอ่านได้ (text file) ซึ่งประกอบไปด้วยอักขรและตัวเลข ดังนั้น การสร้างข้อมูลนำเข้าสำหรับปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อนจึงเป็นสิ่งที่ใช้เวลาและความพยายามมากในอดีต

Patran เป็นซอฟต์แวร์กราฟิก (graphic software) ถูกประดิษฐ์ขึ้นเพื่อใช้ร่วมกับวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ทั่วไป เป็นซอฟต์แวร์ที่ได้รับความนิยมอย่างต่อเนื่องมาเป็นระยะเวลานาน หน้าที่หลักของซอฟต์แวร์ Patran คือการสร้างโมเดล ดีเมช กำหนดเงื่อนไขขอบเขต ฯลฯ ที่เรียกว่าเป็นผู้เตรียมข้อมูลก่อนหน้า (pre-processor) เพื่อใช้ในการคำนวณให้แก่ซอฟต์แวร์ Nastran จากนั้น เมื่อซอฟต์แวร์ Nastran คำนวณเสร็จสิ้นแล้ว จึงส่งกลับให้ Patran เพื่อแสดงผลลัพธ์ (post-processor) ดังนั้น การใช้ Nastran ร่วมกับ Patran จึงก่อให้เกิดการดำเนินงานโดยรวมที่มีประสิทธิภาพสูง

### 1.3.2 หน้าจอและขั้นตอนการวิเคราะห์

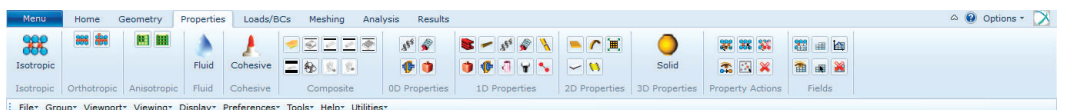
เมื่อเริ่มวิเคราะห์ปัญหา ผู้ใช้เปิดซอฟต์แวร์ Patran จะพบปุ่มคำสั่งหลากหลายปรากฏขึ้นบนหน้าจอ ปุ่มคำสั่งจำนวนมากภายใต้เมนู **Home** ใช้เพื่อแสดงภาพในมุมมองต่าง ๆ การหมุนภาพ การขยายภาพ การลบภาพเพื่อพล็อตใหม่ ฯลฯ



ขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหาด้วย Patran ดำเนินไปตามขั้นตอนทั่วไปของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เริ่มจากการสร้างโมเดลด้วยการใช้จุด เส้น พื้นผิว และรูปทรงตัน นอกจากนั้น Patran ยังบรรจุคำสั่ง **P-Shape** ที่ช่วยสร้างรูปแบบที่มักใช้กันอยู่เสมอ เช่น สี่เหลี่ยมผืนผ้า วงกลม ลูกบาศก์ ทรงกระบอก เป็นต้น

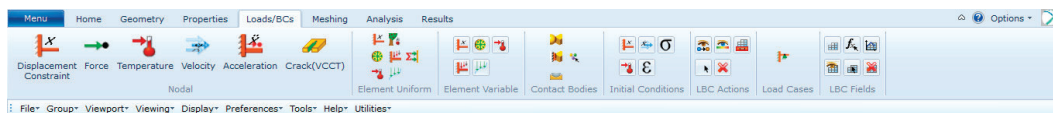


จากนั้นจึงเป็นการกำหนดชนิดและคุณสมบัติของวัสดุให้แก่โมเดลที่สร้างขึ้น ผู้ใช้สามารถกำหนดชนิดของวัสดุได้หลากหลาย ไม่ว่าจะเป็นแบบ isotropic, orthotropic หรือ anisotropic รวมทั้งคุณสมบัติของวัสดุ เช่น ค่าโมดูลัสความยืดหยุ่น (elastic modulus) ค่าอัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson's ratio) ค่าสัมประสิทธิ์การขยายตัวเนื่องจากอุณหภูมิ (thermal expansion coefficient) ฯลฯ

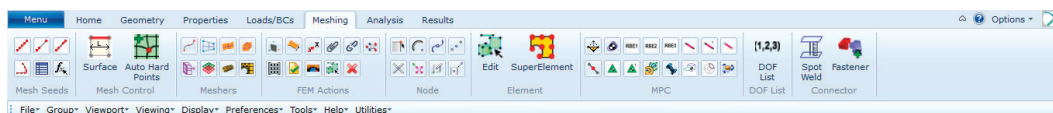


ขั้นตอนถัดไปเป็นการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) เช่น การจับยึดในลักษณะแตกต่างกัน รวมทั้งการกำหนดค่าการเคลื่อนตัวและการหมุน ส่วนการกำหนด

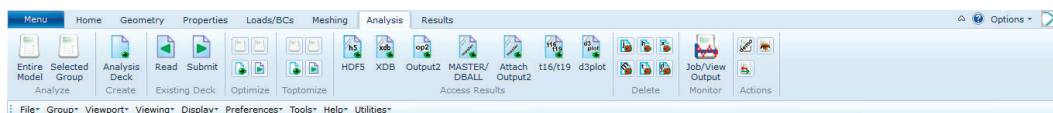
โหลด (load) ให้แก่โมเดลนั้นครอบคลุมหลากหลายแบบ นับตั้งแต่การกำหนดแรง โมเมนต์ แรงดัน อุณหภูมิ เป็นต้น เงื่อนไขขอบเขตและโหลดเหล่านี้อาจกำหนดผ่านรูปทรงทางเรขาคณิต (geometry) ของปัญหา หรือผ่านโมเดลไฟไนต์เอลิเมนต์ได้โดยตรง



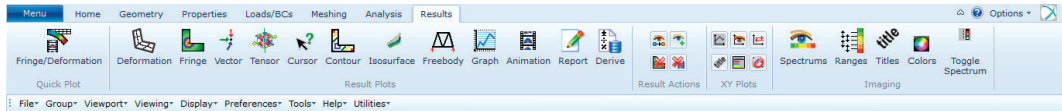
Patran อนุญาตให้ผู้ใช้สร้างเมชด้วยเอลิเมนต์ในหลายรูปแบบ เช่น เอลิเมนต์แบบจุด (point) แบบท่อน (truss) สปริง (spring) สามเหลี่ยม (triangle) สี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า (quadrilateral) เอลิเมนต์แบบสามมิติทรงสี่หน้า (tetrahedral) และเอลิเมนต์แบบสามมิติทรงหกหน้า (hexahedral) เป็นต้น ผู้ใช้ยังสามารถกำหนดขนาดของเอลิเมนต์เหล่านี้ได้ตามความต้องการ



หลังการสร้างไฟไนต์เอลิเมนต์เมช กำหนดคุณสมบัติของวัสดุ รวมทั้งเงื่อนไขขอบเขตและโหลดแล้ว จึงพร้อมทำการคำนวณ ผู้ใช้ต้องระบุชนิดของการคำนวณที่ต้องการว่าเป็นแบบสถิตศาสตร์ (statics) พลศาสตร์ (dynamics) แบบเชิงเส้น (linear) หรือแบบไม่เชิงเส้น (nonlinear) ข้อมูลต่าง ๆ ที่เหมาะสมจะถูกส่งออกจาก Patran ไปยัง Nastran เพื่อการวิเคราะห์ (analysis)



เมื่อการวิเคราะห์ด้วย Nastran ดำเนินไปจนเสร็จสิ้นจนได้ผลลัพธ์ ข้อมูลส่งออก (output data) จะถูกส่งจาก Nastran กลับมายัง Patran เพื่อการแสดงผล ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นนี้สามารถแสดง (display) ได้ในหลายรูปแบบ เช่น การพล็อตแถบสี (fringe plot) ของผลลัพธ์บนโมเดลที่เลี้ยวรูป (deformed shape) ไปแล้ว การพล็อตแบบกราฟ (x-y plot) การพล็อตด้วยเส้นชั้น (contour lines) รวมทั้งการแสดงผลการเคลื่อนไหว (animation) ของผลลัพธ์ได้เป็นต้น



กระบวนการวิเคราะห์ด้วย Patran และ Nastran นี้จะนำเสนอด้วยตัวอย่างหลากหลายในบทต่อ ๆ ไป ตัวอย่างเหล่านี้เป็นตัวอย่างพื้นฐานที่มีผลเฉลยแม่นยำตรง (exact solution) และมักใช้ศึกษากันในชั้นเรียน ผู้ใช้จึงมั่นใจว่ากระบวนการใช้ซอฟต์แวร์นี้ได้ดำเนินไปอย่างเหมาะสมก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ถูกต้อง ก่อนใช้ซอฟต์แวร์เพื่อวิเคราะห์ปัญหาจริง

## 1.4 ประโยชน์ของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ถูกนำไปใช้วิเคราะห์งานหลากหลายชนิดเป็นจำนวนมาก ในปัจจุบัน จนกลายเป็นเครื่องมือที่ได้รับการยอมรับกันทั่วโลก ส่งผลให้เกิดซอฟต์แวร์ที่จำหน่ายกันในราคาสูง งานต่าง ๆ ที่วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถวิเคราะห์ได้ประกอบไปด้วย

- (ก) การวิเคราะห์ความแข็งแรงของโครงสร้างรถยนต์ เครื่องบิน รถไฟ เรือ อาคารสูง สะพาน ลงไปถึงชิ้นงานขนาดเล็ก เช่น ชิ้นส่วนยานยนต์ มอเตอร์ แก้ว ขวดน้ำ และภาชนะต่าง ๆ
- (ข) การวิเคราะห์การสั่นไหวของเสาไฟฟ้าแรงสูงและป้ายทางด่วนจากแรงลม การยุบตัวของโครงสร้างรถยนต์ขณะเกิดการชน ความเค้นจากอุณหภูมิสูงของกังหันใบพัดเทอร์ไบน์
- (ค) การวิเคราะห์การไหลของอากาศผ่านบ้านและอาคารในเมืองขนาดใหญ่ การหมุนวนของอากาศภายในอาคารเพื่อการประหยัดพลังงาน การทำนายสภาวะอากาศ การเคลื่อนตัวของอากาศเย็นผ่านทวีป ทิศทางการไหลท่วมของน้ำเมื่อเกิดอุทกภัย
- (ง) การวิเคราะห์คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสำหรับเสาส่งสัญญาณทางอากาศ ทรานซิสเตอร์ มอเตอร์ สายไฟฟ้าแรงสูง
- (จ) การวิเคราะห์การไหลในเส้นเลือดตามร่างกายและหัวใจ ไปจนถึงอุปกรณ์ทางการแพทย์ กระดูกข้อต่อเทียม เท้าเทียม รากฟันเทียม

- (จ) และงานอื่น ๆ ที่ไม่สามารถทดลองได้เพราะอาจเป็นอันตรายต่อมนุษย์หรือมีค่าใช้จ่ายสูง เช่น อานุภาพการระเบิดของจีปนาวัธ การไหลของแก๊สที่เป็นพิษต่อมนุษย์ในโรงงานอุตสาหกรรม

ประโยชน์ต่าง ๆ ดังตัวอย่างข้างต้นนี้เองทำให้สถาบันการศึกษาจำนวนมากบรรจุวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิชาที่นิสิตนักศึกษาในหลายสาขาต้องเรียนรู้กัน ก่อให้เกิดความเข้าใจในทฤษฎีที่ฝังตัวอยู่ในซอฟต์แวร์ เพื่อให้ผู้ใช้ซอฟต์แวร์ได้อย่างถูกต้องจึงมีความมั่นใจในผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

## บทที่ 2

# การวิเคราะห์วัสดุท่อน

การวิเคราะห์วัสดุท่อนจัดเป็นพื้นฐานเบื้องต้นในการศึกษาวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เพราะมีจำนวนตัวไม่รู้ค่า (unknown) น้อย ตัวไม่รู้ค่าเหล่านี้คือค่าของการเสียรูป (displacement) ซึ่งมีความหมายทางกายภาพที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจ วัสดุท่อน (truss, rod) รับแรงดึงหรือแรงกดในแนวแกนได้เพียงอย่างเดียว ทำให้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับสปริง (spring) ได้โดยตรง

### 2.1 สมการพื้นฐาน

#### 2.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์

วัสดุท่อนยาวเรียวยาวตัวอยู่ในแนวแกน  $x$  อาจถูกยึดที่ปลายข้างหนึ่งและมีแรงดึงหรือแรงกดที่ปลายอีกข้างหนึ่ง จะเกิดการยืดหดตัวขึ้นจนอยู่ในสภาวะสมดุล (equilibrium) ความสมดุลนี้เกิดขึ้นทุกตำแหน่งตลอดความยาวของวัสดุท่อนยาวเรียว นั้น สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งแสดงถึงความสมดุลนี้หากไม่คำนึงถึงแรงจากน้ำหนักของตัววัสดุท่อน (body force) เองคือ

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$$

โดย  $\sigma_x$  แทนค่าความเค้น (stress) ที่เกิดขึ้นในท่อนวัสดุยาวเรียว นั้น