



ทุนส่งเสริม
การผลิตตำรา

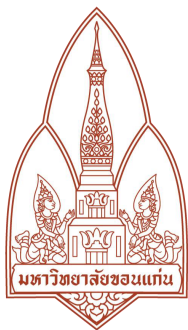
กลศาสตร์แบบฉบับ

Classical Mechanics



ธีรศักดิ์ คำวรรณะ

สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์
มหาวิทยาลัยขอนแก่น



กลศาสตร์แบบฉบับ

Classical Mechanics

รองศาสตราจารย์ ดร.ธีรศักดิ์ คำวรรณะ
คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ได้รับทุนสนับสนุนการผลิตตำรา มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ลำดับที่ 215

โดยมหาวิทยาลัยขอนแก่น พ.ศ.2566

ISBN (e-book) 978-616-438-828-4

ธีรศักดิ์ คำวรรณะ.

กลศาสตร์แบบฉบับ = Classical mechanics / ธีรศักดิ์ คำวรรณะ. -- พิมพ์ครั้งที่ 1. -- ขอนแก่น : คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น, 2566.

340 หน้า : ภาพประกอบ

1. กลศาสตร์. 2. เวกเตอร์วิเคราะห์. 3. ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์. 4. แรง. 5. ระบบอนุภาค.
6. ฮามิลโทเนียน. (1) มหาวิทยาลัยขอนแก่น. คณะวิทยาศาสตร์. สาขาวิชาฟิสิกส์. (2) ชื่อเรื่อง.

QC762 น465 2566

ISBN (e-book) 978-616-438-828-4

จัดทำโดย ศูนย์นวัตกรรมการเรียนการสอน มหาวิทยาลัยขอนแก่น

ราคา 290 บาท

สงวนลิขสิทธิ์โดยมหาวิทยาลัยขอนแก่น ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2566

คำนำ

กลศาสตร์เป็นวิชาที่ใช้ในการศึกษาและวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุ ทำให้กลศาสตร์แบบฉบับเป็นวิชาพื้นฐานที่สำคัญในสาขาวิชาฟิสิกส์ และเป็นวิชาบังคับสำหรับนักศึกษาทั้งในระดับปริญญาตรีและระดับบัณฑิตศึกษา เนื้อหาในตำราเล่มนี้จึงได้เรียบเรียงขึ้นโดยตั้งความหวังไว้ว่าจะทำให้นักศึกษาได้เรียนรู้และเข้าใจการใช้คณิตศาสตร์กับวิชากลศาสตร์เป็นหลัก โดยเริ่มต้นจากการทบทวนเวกเตอร์ และมีเนื้อหาครอบคลุมการเคลื่อนที่ของอนุภาคในลักษณะต่างๆ โดยใช้กลศาสตร์แบบนิวตัน การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ แรงในแนวศูนย์กลาง ระบบพิกัดที่เคลื่อนที่ ระบบอนุภาค วัตถุแข็งเกร็ง กลศาสตร์ลากรางเจียน และ กลศาสตร์แฮมิลโทเนียน อนึ่งผู้ใช้ตำราเล่มนี้จะได้รับความรู้ที่สมบูรณ์ก็ต่อเมื่อประกอบการเรียนและการศึกษาค้นคว้าด้วยตัวเอง โดยอาศัยหนังสือที่ได้อ้างอิงไว้ในบรรณานุกรมและหนังสืออื่นๆ ที่เกี่ยวข้องด้วย

ผู้เขียนหวังว่าตำราเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่ออาจารย์และนักศึกษาที่ใช้ประกอบการเรียน การสอนวิชากลศาสตร์แบบฉบับมากพอสมควร หากผู้อ่านพบข้อผิดพลาดประการใดในตำราเล่มนี้ ผู้เขียนขออภัยในความผิดพลาดเหล่านั้น และยินดีรับคำแนะนำไว้เพื่อแก้ไขให้ถูกต้องสมบูรณ์ต่อไป ผู้เขียนขอขอบพระคุณสาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ที่ให้ความอนุเคราะห์ได้ใช้วัสดุอุปกรณ์ของสาขาวิชาฯ ในการจัดทำตำราเล่มนี้ และขอขอบคุณคณาจารย์สาขาวิชาฟิสิกส์ทุกท่านสำหรับคำแนะนำต่างๆ ที่มีประโยชน์

ธีรศักดิ์ คำวรรณะ

สาขาวิชาฟิสิกส์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

สารบัญ

1	การวิเคราะห์เวกเตอร์ Vector Analysis	1
1.1	ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์	1
1.2	เวกเตอร์ทางพีชคณิต	2
1.3	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	4
1.4	องค์ประกอบของเวกเตอร์	5
1.5	การคูณเวกเตอร์	8
1.5.1	ผลคูณสเกลาร์	8
1.5.2	ผลคูณเวกเตอร์	9
1.6	แคลคูลัสเวกเตอร์	12
1.6.1	เกรเดียนต์ (gradient)	13
1.6.2	ไดเวอร์เจนซ์ (divergence)	13
1.6.3	เคิร์ล (curl)	14
1.7	อนุพันธ์ของเวกเตอร์	16

1.8	ปริพันธ์ของเวกเตอร์	23
1.9	ระบบพิกัด	25
1.9.1	ระบบพิกัดเชิงขั้ว	26
1.9.2	ระบบพิกัดทรงกระบอก	30
1.9.3	ระบบพิกัดทรงกลม	32
1.10	แบบฝึกหัดท้ายบท	34
2	กลศาสตร์แบบนิวตัน Newtonian Mechanics	37
2.1	กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน	38
2.2	แรงเป็นค่าคงตัว	40
2.3	แรงเป็นฟังก์ชันของเวลา	41
2.4	แรงเป็นฟังก์ชันของความเร็ว	43
2.5	การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์	52
2.6	แรงเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง	54
2.6.1	แรงอนุรักษ์	55
2.6.2	การเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้แรงที่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง . .	60
2.6.3	การเปลี่ยนแปลงของแรงโน้มถ่วงตามความสูง	65
2.7	แบบฝึกหัดท้ายบท	69
3	ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์ Harmonic Oscillators	73
3.1	ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์เชิงเส้น	74
3.2	การเคลื่อนที่แบบฮาร์มอนิกอย่างง่าย	75
3.3	การแกว่งแบบฮาร์มอนิกในสองมิติ	80

3.4	ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์แบบหนึ่ง	84
3.5	ฮาร์มอนิกออสซิลเลเตอร์แบบมีแรงบังคับ	89
3.6	แบบฝึกหัดท้ายบท	93
4	แรงในแนวศูนย์กลาง Central Force	95
4.1	แรงในแนวศูนย์กลางและพลังงานศักย์	95
4.2	ปัญหาหนึ่งอนุภาคสำหรับแรงในแนวศูนย์กลาง	97
4.3	การเคลื่อนที่ภายใต้แรงในแนวศูนย์กลาง	98
4.4	สมการการเคลื่อนที่	101
4.5	วงโคจรภายใต้แรงในแนวศูนย์กลาง	104
4.6	พลังงานศักย์ยังผล	105
4.7	เสถียรภาพของวงโคจรวงกลม	110
4.8	แรงซึ่งเป็นสัดส่วนกลับกับกำลังสองของระยะทาง	115
4.8.1	วงโคจรภายใต้แรงที่เป็นสัดส่วนกลับกับกำลังสองของระยะทาง	115
4.8.2	วงโคจรวงรี	120
4.8.3	วงโคจรวงกลม	122
4.8.4	วงโคจรไฮเพอร์โบลา	122
4.8.5	วงโคจรพาราโบลา	123
4.9	กฎของเคปเลอร์	124
4.9.1	กฎข้อที่หนึ่งของเคปเลอร์	125
4.9.2	กฎข้อที่สองของเคปเลอร์	130
4.9.3	กฎข้อที่สามของเคปเลอร์	131
4.10	วงโคจรไฮเพอร์โบลา: ปัญหาของรัทเทอร์ฟอร์ด	133
4.11	แบบฝึกหัดท้ายบท	138

5	ระบบพิกัดที่เคลื่อนที่ Noninertial Coordinate Systems	141
5.1	ระบบพิกัดที่เคลื่อนที่แบบเลื่อน	142
5.2	ระบบพิกัดที่เคลื่อนที่แบบหมุน	145
5.3	ระบบพิกัดที่เคลื่อนที่แบบเลื่อนและแบบหมุน	149
5.4	สมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดที่เคลื่อนที่	151
5.5	การเคลื่อนที่ของวัตถุใกล้ผิวโลก	153
5.5.1	วัตถุหยุดนิ่งบนผิวโลก : แนวลูกตุ้ม	154
5.5.2	วัตถุมีการเคลื่อนที่บนผิวโลก	155
5.6	ลูกตุ้มนาฬิกาแบบฟูโกต์	162
5.7	แบบฝึกหัดท้ายบท	167
6	ระบบอนุภาค System of Particles	169
6.1	แรงภายในและแรงภายนอกของระบบอนุภาค	169
6.2	การเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของระบบอนุภาค	171
6.3	การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น	173
6.4	การอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงมุม	174
6.5	การอนุรักษ์ของพลังงาน	177
6.6	ปัญหาของการชนกัน	179
6.6.1	การชนแบบยืดหยุ่น	180
6.6.2	การชนแบบไม่ยืดหยุ่น	184
6.7	ปัญหาของระบบที่มีสองอนุภาค	186
6.8	การชนของอนุภาคในระบบพิกัดแบบจุดศูนย์กลางมวล	189
6.9	การเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อมวลเปลี่ยนแปลง	193

6.9.1	การเคลื่อนที่ของจรวด	194
6.9.2	การเคลื่อนที่ของสายพานนำส่งวัตถุ	195
6.10	แบบฝึกหัดท้ายบท	197
7	วัตถุแข็งเกร็ง Rigid Body	201
7.1	จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุแข็งเกร็ง	202
7.2	การหมุนรอบแกนหนึ่งแกนของวัตถุแข็งเกร็ง	206
7.3	การคำนวณหาโมเมนต์ความเฉื่อย	209
7.4	ลูกตุ้มนาฬิกาอย่างง่าย	214
7.5	ลูกตุ้มนาฬิกาเชิงซ้อน	216
7.6	แบบฝึกหัดท้ายบท	219
8	กลศาสตร์ลากรางเจียน Lagrangian Mechanics	221
8.1	พิกัดทั่วไป	222
8.2	การกระทำจริงและการกระทำเสมือน	225
8.3	แรงทั่วไป	227
8.4	หลักการของดาล็องแบร์และสมการการเคลื่อนที่ทั่วไป	230
8.5	ลากรางเจียนและสมการออยเลอร์-ลากรางจ์	234
8.6	พิกัดไซคลิกและโมเมนต์แบบบัญญัติ	237
8.7	แคลคูลัสของการแปรผัน	247
8.8	สมการออยเลอร์-ลากรางจ์จากหลักของแฮมิลตัน	251
8.9	สมการออยเลอร์กับเงื่อนไขบังคับ	252
8.10	สมการออยเลอร์-ลากรางจ์สำหรับตัวคุณลากรางจ์	253
8.11	แบบฝึกหัดท้ายบท	260

9	กลศาสตร์แฮมิลโทเนียน Hamiltonian Mechanics	263
9.1	ฟังก์ชันแฮมิลโทเนียน	264
9.2	ทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับพลังงานจลน์	266
9.3	สมการของแฮมิลตัน	269
9.4	การแปลงเลอร์จองและสมการของแฮมิลตัน	271
9.4.1	การแปลงเลอร์จอง	271
9.4.2	สมการการเคลื่อนที่ของแฮมิลตัน	274
9.4.3	แคลคูลัสของการแปรผันและหลักการของแฮมิลตัน	274
9.5	ทฤษฎีบทฟูรีเยน	280
9.6	วงเล็บโพซง	283
9.7	การแปลงแบบบัญญัติ	287
9.8	ฟังก์ชันกำเนิด	289
9.8.1	ฟังก์ชันกำเนิด $F_3(p, Q, t)$	290
9.8.2	ฟังก์ชันกำเนิด $F_4(p, P, t)$	291
9.8.3	ฟังก์ชันกำเนิด $F_2(q, P, t)$	291
9.9	เงื่อนไขกำหนดการแปลงแบบบัญญัติ	300
9.10	สมการแฮมิลตัน-จาโคบี	306
9.11	แบบฝึกหัดท้ายบท	314
ภาคผนวก		317
ก	สมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสอง	319
ก.1	สมการอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์	320
ก.2	สมการอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธ์	321

ข	สูตรคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้อง	323
ข.1	อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series)	323
ข.2	การกระจายทวินาม (Binomial Expansion)	324
ข.3	เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ	324
	บรรณานุกรม	327
	ดัชนี	329
	เฉลยแบบฝึกหัด	333

บทที่ 1

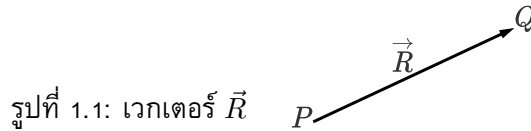
การวิเคราะห์เวกเตอร์ VECTOR ANALYSIS

เวกเตอร์เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งซึ่งเป็นเครื่องมืออย่างแรกที่ต้องใช้ และมีความสำคัญในการศึกษาทางฟิสิกส์ เนื่องจากเป็นเครื่องมือที่ช่วยอำนวยความสะดวกในการคำนวณปริมาณที่วัดในทางฟิสิกส์ ในบทนี้จะอธิบายถึงข้อกำหนดพื้นฐานของเวกเตอร์ ตัวดำเนินการสำคัญของแคลคูลัสเวกเตอร์ ซึ่งเป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ปัญหาทางฟิสิกส์ อนุพันธ์และปริพันธ์ของเวกเตอร์ รวมถึงการประยุกต์ในทางฟิสิกส์สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุ และในตอนท้ายจะอธิบายถึงเวกเตอร์บอกตำแหน่งในระบบพิกัดต่างๆ ซึ่งจะได้ความเร็วและความเร่งของวัตถุในพิกัดนั้นๆ เพื่อที่จะสามารถนำไปวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุต่อไปได้

1.1 ปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

ปริมาณต่างๆ ที่วัดในทางฟิสิกส์จะแบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ

- ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) คือ ปริมาณที่ระบุขนาดเพียงอย่างเดียว เช่น อุณหภูมิ ปริมาตร มวล พลังงาน เวลา เป็นต้น

รูปที่ 1.1: เวกเตอร์ $\vec{R}$

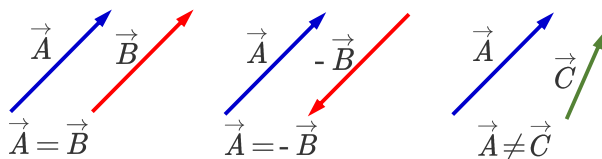
2. ปริมาณเวกเตอร์ (vectors) คือ ปริมาณที่ต้องระบุทั้งขนาดและทิศทางพร้อมกันจึงจะได้ความหมายที่สมบูรณ์ เช่น การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง แรง สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก เป็นต้น

สัญลักษณ์ของเวกเตอร์จะใช้ตัวย่อของปริมาณนั้นๆ โดยมีหลายรูปแบบในหนังสือหรือตำรา บางเล่มจะใช้ตัวพิมพ์หนา เช่น แรง $\mathbf{F}$ ความเร็ว $\mathbf{v}$ หรือโมเมนตัม $\mathbf{p}$ สำหรับตัวเขียนด้วยมือนิยมเขียนลูกศรกำกับเหนือตัวอักษร เช่น แรง $\vec{F}$ ความเร็ว $\vec{v}$ หรือโมเมนตัม $\vec{p}$ การแสดงปริมาณเวกเตอร์ด้วยรูปแสดงได้ด้วยเส้นที่มีลูกศรกำหนดทิศทาง โดยขนาดแสดงด้วยความยาวของเส้น และทิศทางจะเป็นไปตามทิศของลูกศรนั้น ดังแสดงในรูปที่ 1.1 สัญลักษณ์ของเวกเตอร์ คือ $\vec{R} = \overrightarrow{PQ}$ ส่วนขนาดของเวกเตอร์เขียนแทนด้วย $|\vec{R}| = R = |\overrightarrow{PQ}| = PQ$ นั่นคือจะเขียนเฉพาะอักษรที่ใช้แทนปริมาณนั้นโดยไม่ต้องใส่เครื่องหมายลูกศร

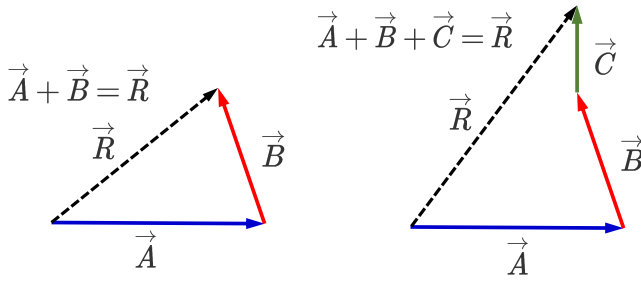
1.2 เวกเตอร์ทางพีชคณิต

เวกเตอร์เป็นปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทางพร้อมกันผิดกับสเกลาร์ที่มีแต่ขนาดอย่างเดียว ดังนั้นการบวก-ลบ และการคูณ (product) ของเวกเตอร์จะต่างจากสเกลาร์ มองอีกมุมหนึ่งเสมือนว่าเวกเตอร์มีมากกว่าหนึ่งมิติ ในขณะที่สเกลาร์มีแค่มิติเดียว ดังนั้นการรวมกันของปริมาณเวกเตอร์ตั้งแต่สองเวกเตอร์ขึ้นไป ผลลัพธ์ที่ได้อาจจะมีความมากหรือน้อยลงกว่าเดิมก็ได้ขึ้นอยู่กับข้อกำหนดพื้นฐานต่อไปนี้

การเท่ากันของเวกเตอร์ เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ มีขนาดที่เท่ากัน และมีทิศทางเดียวกัน โดยไม่จำเป็นต้องมีจุดเริ่มต้นเดียวกัน ดังแสดงในรูปที่ 1.2 กำหนดให้เวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มีขนาดเท่ากันและชี้ไปในทิศเดียวกัน สองเวกเตอร์นี้มีค่าเท่ากันเขียนแบบ



รูปที่ 1.2: การเท่ากันของเวกเตอร์



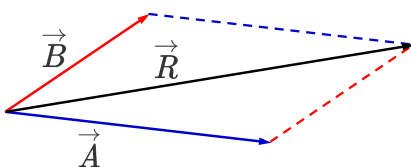
รูปที่ 1.3: การรวมเวกเตอร์โดยวิธีเรขาคณิต

พีชคณิตได้ว่า $\vec{A} = \vec{B}$ สำหรับเวกเตอร์ $\vec{B}$ ที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ $\vec{A}$ เขียนแบบพีชคณิตได้ว่า $\vec{A} = -\vec{B}$

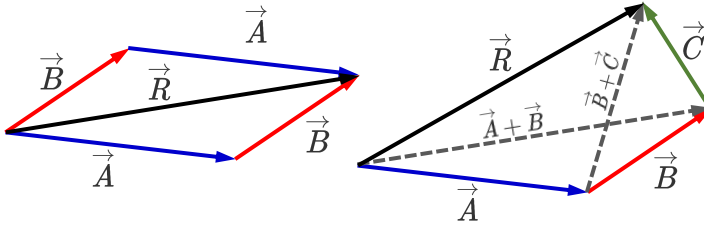
การหาผลบวกของเวกเตอร์ใดๆ สามารถใช้วิธีเรขาคณิต (geometric method) มาหาผลลัพธ์ได้โดยการนำหางของเวกเตอร์ตัวที่สองต่อเข้ากับหัวของเวกเตอร์ตัวแรก และนำหางของเวกเตอร์ตัวที่สามถัดไปมาต่อเข้ากับหัวของเวกเตอร์ตัวที่สอง ทำแบบนี้ต่อไปเรื่อยๆ ตามลำดับ ส่วนเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ ได้จากการลากจากหางของเวกเตอร์ตัวแรกไปยังหัวเวกเตอร์ตัวสุดท้าย ดังแสดงในรูปที่ 1.3 ในกรณีการรวมกันระหว่างสองเวกเตอร์สามารถเขียนในอีกแบบหนึ่ง เรียกว่าการบวกเวกเตอร์แบบสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน (parallelogram) ดังแสดงในรูปที่ 1.4 โดยให้หางเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นด้านประชิด แล้วเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ คือเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน สำหรับผลต่างของเวกเตอร์ เช่น $\vec{A} - \vec{B}$ สามารถใช้วิธีการหาผลรวมเวกเตอร์มาใช้โดยเขียนใหม่ให้อยู่ในรูป $\vec{A} + (-\vec{B})$

การกระทำกันระหว่างเวกเตอร์ใดๆ ในรูปแบบต่างๆ สามารถรวบรวมเป็นกฎเกณฑ์เรียกว่า กฎของเวกเตอร์พีชคณิต (Law of vector algebra) ดังนี้

- การสลับที่ของการบวก (commutative law of addition) การรวมกันของเวกเตอร์สามารถที่จะนำเวกเตอร์ตัวไหนเป็นตัวตั้งต้นก่อนก็ได้ ตัวอย่างเช่น เวกเตอร์ $\vec{A}$ รวมกับเวกเตอร์ $\vec{B}$ ดังรูปที่ 1.5 จะได้ $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$
- การเปลี่ยนกลุ่มของการบวก (associative law of addition) การรวมกันของเวกเตอร์



รูปที่ 1.4: การบวกเวกเตอร์แบบสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



รูปที่ 1.5: กฎของเวกเตอร์พีชคณิต

สามารถที่จะจัดกลุ่มใหม่ได้โดยที่ผลลัพธ์ยังคงเท่าเดิมอยู่ ตัวอย่างเช่น ในรูปที่ 1.5 เป็นการรวมกันของเวกเตอร์ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ นั่นคือ $\vec{R} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

- การคูณปริมาณสเกลาร์ (m) กับเวกเตอร์ $\vec{A}$ ผลลัพธ์ได้เวกเตอร์ $\vec{B}$ จะยาวเป็น m เท่าของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ดังนี้

$$\vec{B} = m\vec{A} \begin{cases} m > 0 & \text{ทิศเดียวกัน} \\ m < 0 & \text{ทิศตรงกันข้ามกัน} \\ m = 0 & \text{เวกเตอร์ศูนย์ (null vector)} \end{cases}$$

นอกจากนี้ ยังมีกฎที่เกี่ยวข้องของการคูณปริมาณสเกลาร์กับเวกเตอร์อีก คือ

$$(mn)\vec{A} = m(n\vec{A}) = n(m\vec{A}) \quad \text{กฎการคูณจับกลุ่ม}$$

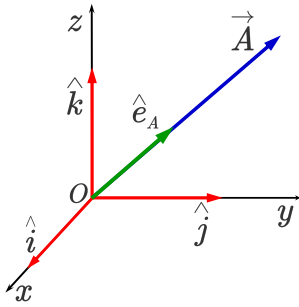
$$(m+n)\vec{A} = m\vec{A} + n\vec{A} \quad \text{กฎการกระจาย}$$

$$m(\vec{A} + \vec{B}) = m\vec{A} + m\vec{B} \quad \text{กฎการกระจาย}$$

1.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเพียงหนึ่งหน่วย และมีทิศทางตามเวกเตอร์ที่พิจารณา รูปที่ 1.6 แสดงเวกเตอร์ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ A มี $\hat{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{A}$ ดังนั้น สามารถเขียนเวกเตอร์ $\vec{A}$ ได้ใหม่อยู่ในรูป

$$\vec{A} = A\hat{e}_A \quad (1.1)$$



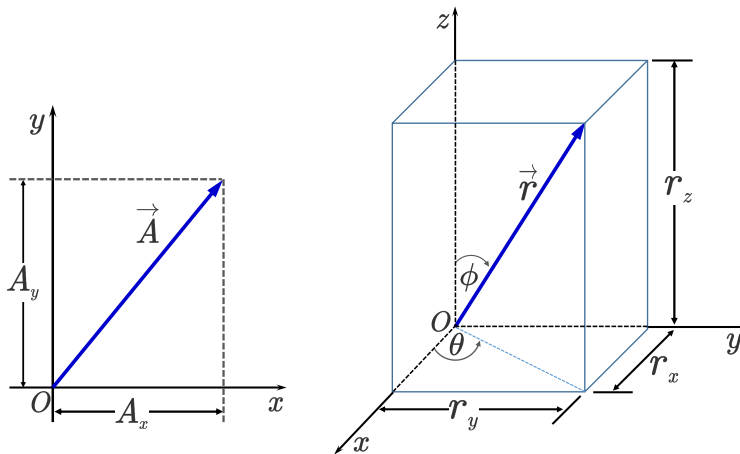
รูปที่ 1.6: เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก

ในระบบพิกัดฉาก (Rectangular coordinates system) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยแทนด้วย $\hat{i}$, $\hat{j}$ และ $\hat{k}$ มีขนาดหนึ่งหน่วยทิศตามแกน x , y และ z ตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 1.6

1.4 องค์ประกอบของเวกเตอร์

เวกเตอร์ในระบบพิกัดใดๆ สามารถที่จะเขียนในรูปของเวกเตอร์องค์ประกอบในแนวแกนนั้นๆ ของระบบพิกัด ยกตัวอย่างเช่น เวกเตอร์ $\vec{A}$ อยู่ในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ (x, y) โดยที่ เวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำมุม θ กับแกน x โดยจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ที่จุดเริ่มต้น O (origin) ของระบบพิกัด ปลายลูกศรของเวกเตอร์จะบอกเป็นตำแหน่งของพิกัด ดังแสดงในรูปที่ 1.7 ส่วนประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ บนระนาบ xy คือ

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \quad (1.2)$$



รูปที่ 1.7: องค์ประกอบของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

เมื่อ A_x และ A_y คือองค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ในแนวแกน x และ y ตามลำดับ โดย $A_x = A \cos \theta$ และ $A_y = A \sin \theta$ จะได้

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{A_y}{A_x} \right) \quad (1.3)$$

ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ คือ

$$A = |\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (1.4)$$

ถ้าเวกเตอร์ $\vec{r}$ อยู่ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ (x, y, z) ดังแสดงในรูปที่ 1.7 เขียนเป็นองค์ประกอบได้เป็น

$$\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k} \quad (1.5)$$

เมื่อ r_x , r_y และ r_z คือ องค์ประกอบของเวกเตอร์ $\vec{r}$ ตามแกน x , y และ z ตามลำดับ จากรูปจะได้ว่า

$$r_x = r \sin \theta \cos \phi; \quad r_y = r \sin \theta \sin \phi; \quad r_z = r \cos \theta$$

ดังนั้น ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{r}$ คือ

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \quad (1.6)$$

เวกเตอร์ $\vec{r}$ ที่มีจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์อยู่ที่จุดเริ่มต้นของพิกัด สามารถใช้บอกตำแหน่งของวัตถุใดๆ ได้ จึงเรียกว่า เวกเตอร์บอกตำแหน่ง (position vector)

ตัวอย่าง 1.1: องค์ประกอบของเวกเตอร์

นักศึกษาคนหนึ่งเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงไปทางทิศเหนือเป็นมุม 60° ได้ระยะทาง 30 m จงหาระยะทางที่เขาเดินทางได้ในทิศเหนือและทิศตะวันออก

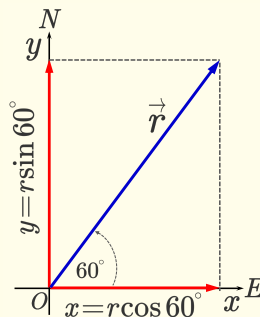
วิธีทำ หาส่วนประกอบของเวกเตอร์ $\vec{r}$ โดยที่ $r = 30 \text{ m}$; $\theta = 60^\circ$

แกน x (ทิศตะวันออก)

$$x = r \cos \theta = 30 \cos 60^\circ = 15.00 \text{ m}$$

แกน y (ทิศเหนือ)

$$y = r \sin \theta = 30 \sin 60^\circ = 25.98 \text{ m}$$



จะได้เวกเตอร์บอกตำแหน่งเป็น $\vec{r} = 15.00\hat{i} + 25.98\hat{j}$

ดังนั้น ระยะทางที่เราเดินทางได้ในทิศเหนือ คือ **25.98 m** ...#

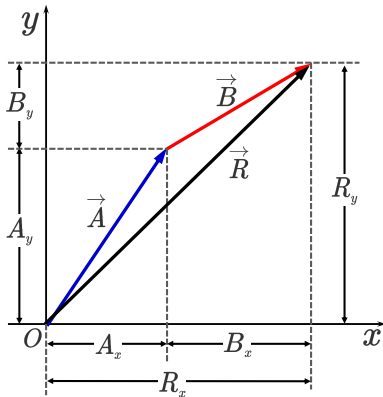
และทิศตะวันออก คือ **15.00 m** ...#

นอกจากการรวมเวกเตอร์โดยใช้วิธีสร้างรูปเรขาคณิตแล้ว ยังสามารถทำได้โดยใช้วิธีแยกองค์ประกอบหรือวิธีวิเคราะห์ผลบวกของเวกเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 1.8 แสดงวิธีการรวมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$ ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ $\vec{R}$ โดยองค์ประกอบบนแกน x ของเวกเตอร์ $\vec{R}$ คือ $R_x = A_x + B_x$ และองค์ประกอบบนแกน y ของเวกเตอร์ $\vec{R}$ คือ $R_y = A_y + B_y$ ดังนั้น ถ้าใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน x และ y จะเขียนได้เป็น

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j}) + (B_x\hat{i} + B_y\hat{j}) = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j}$$

ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{R}$ จะได้เป็น

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right)$$



รูปที่ 1.8: การรวมเวกเตอร์ด้วยวิธีแยกองค์ประกอบ

ตัวอย่าง 1.2: การรวมเวกเตอร์ด้วยวิธีแยกองค์ประกอบ

จงหาระยะการกระจัดของนักศึกษาคนหนึ่งซึ่งเดินทางไปทางทิศตะวันออกเฉียงไปทางเหนือ เป็นมุม 60° ได้ระยะทาง 30 m จากนั้นเดินทางไปทางทิศตะวันตกอีก 20 m

วิธีทำ หาส่วนประกอบของเวกเตอร์ $\vec{R}$

จากตัวอย่าง 1.1 เวกเตอร์บอกตำแหน่งของเวกเตอร์ $\vec{A} = 15.00\hat{i} + 25.98\hat{j}$

เวกเตอร์บอกตำแหน่งของเวกเตอร์ $\vec{B} = 20.00\hat{i}$

ดังนั้น องค์ประกอบบนแกน x คือ

$$R_x = A_x + B_x = 15.00 + (-20.00) = -5.00 \text{ m}$$

องค์ประกอบบนแกน y คือ

$$R_y = A_y + B_y = 25.98 + 0 = 25.98 \text{ m}$$

จะได้เวกเตอร์ลัพธ์เป็น $\vec{R} = -5.00\hat{i} + 25.98\hat{j}$

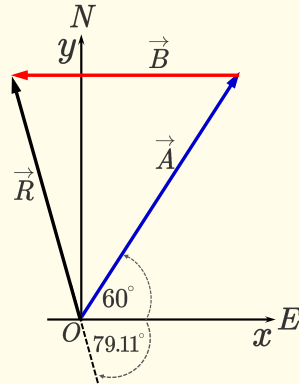
ดังนั้น ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ คือ

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-5)^2 + (25.98)^2}$$

$$= 26.46 \text{ m} \quad \dots \#$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{25.98}{-5} \right)$$

$$= -79.11^\circ \text{ เทียบกับแกน } x \quad \dots \#$$



1.5 การคูณเวกเตอร์

การคูณกันระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ มีอยู่ 2 ชนิด คือ

- ผลคูณสเกลาร์หรือผลคูณแบบดอท (scalar or dot product)
- ผลคูณเวกเตอร์หรือผลคูณแบบครอส (vector or cross product)

1.5.1 ผลคูณสเกลาร์

ผลคูณสเกลาร์หรือผลคูณแบบดอทเป็นการคูณกันระหว่างสองเวกเตอร์แล้วผลลัพธ์ที่ได้เป็นปริมาณสเกลาร์ โดยกำหนดการคูณไว้ดังนี้

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta \quad (1.7)$$

โดยที่ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$ และมีค่า $0 \leq \theta \leq \pi$ เนื่องจาก A และ B เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$ ดังนั้น ตามข้อกำหนดนี้ผลคูณที่ได้จึงเป็นปริมาณสเกลาร์ กฎที่สามารถใช้ได้กับผลคูณสเกลาร์มีดังต่อไปนี้

$$1. \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$2. \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{C})$$

$$3. m(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (m\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (m\vec{B}) = (\vec{A} \cdot \vec{B})m \text{ เมื่อ } m \text{ เป็นปริมาณสเกลาร์}$$

$$4. \vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \text{ เมื่อเวกเตอร์ } \vec{A} \text{ และเวกเตอร์ } \vec{B} \text{ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จะได้ว่าเวกเตอร์ } \vec{A} \text{ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ } \vec{B}$$

ให้ $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ และ $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ ผลคูณสเกลาร์ของสองเวกเตอร์จะได้เป็น

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

เนื่องจาก $(\hat{i} \cdot \hat{i}) = (\hat{j} \cdot \hat{j}) = (\hat{k} \cdot \hat{k}) = 1$ และ $(\hat{i} \cdot \hat{j}) = (\hat{i} \cdot \hat{k}) = (\hat{j} \cdot \hat{k}) = 0$

1.5.2 ผลคูณเวกเตอร์

ผลคูณเวกเตอร์ หรือผลคูณแบบครอส เป็นการคูณกันระหว่างสองเวกเตอร์แล้วผลลัพธ์ที่ได้เป็นปริมาณเวกเตอร์ โดยกำหนดการคูณไว้ดังนี้

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} \quad (1.8)$$

เมื่อ $\vec{C}$ คือเวกเตอร์ผลลัพธ์ โดยทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{C}$ จะตั้งฉากกับระนาบของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$ และชี้ไปในทิศทางของหัวแม่มือของมือขวาที่กำหมุ่มนจากเวกเตอร์ $\vec{A}$ (เวกเตอร์ตั้งต้น) ไปยังเวกเตอร์ $\vec{B}$ หรือชี้ไปในทิศทางของปลายสกรูที่หมุนด้วยมือขวา ซึ่งเรียกว่า กฎมือขวาหรือกฎมือขาวของการหมุนสกรู ดังแสดงในรูปที่ 1.9 สำหรับขนาดของเวกเตอร์ $\vec{C}$ คือ

$$C = |\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (1.9)$$

โดยที่ θ คือมุมระหว่างเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$ และมีค่า $0 < \theta < \pi$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณเราสามารถหาผลคูณแบบเวกเตอร์ได้โดยใช้เมตริกซ์ดังนี้

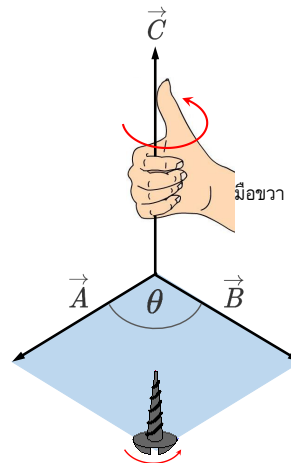
$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}\end{aligned}\quad (1.10)$$

การพิจารณาเครื่องหมายผลคูณเวกเตอร์สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉาก มีดังนี้

- ทิศทวนเข็มนาฬิกาเครื่องหมายบวก $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}; \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}; \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$
- ทิศตามเข็มนาฬิกาเครื่องหมายลบ $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}; \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}; \quad \hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$

กฎที่สามารถใช้ได้กับผลคูณสเกลาร์มีดังต่อไปนี้

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
2. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$
3. $m(\vec{A} \times \vec{B}) = (m\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (m\vec{B})$ เมื่อ m เป็นปริมาณสเกลาร์



รูปที่ 1.9: เวกเตอร์ $\vec{C}$ ซึ่งเป็นผลคูณเวกเตอร์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ กับเวกเตอร์ $\vec{B}$

4. $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ และเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จะได้เวกเตอร์ $\vec{A}$ กับเวกเตอร์ $\vec{B}$ ขนานกัน
5. ขนาดของผลคูณเวกเตอร์ $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A} \times \vec{B}|$ คือพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบด้วยเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$
6. $\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$
7. $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$

ตัวอย่าง 1.3: การคูณเวกเตอร์

พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{A} = -\hat{i} + 2\hat{j}$ และ $\vec{B} = -\hat{i} + 3\hat{k}$ จงหา

(ก) ผลคูณสเกลาร์

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-\hat{i} + 2\hat{j}) \cdot (-\hat{i} + 3\hat{k}) = (-1)(-1) + (2)(0) = 1 \quad \dots \#$$

(ข) มุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + (2)^2} \sqrt{(-1)^2 + (3)^2}} \right) \\ &= 82^\circ \quad \dots \# \end{aligned}$$

(ค) ผลคูณเวกเตอร์

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6 - 0)\hat{i} + (0 - [-3])\hat{j} + (0 - [-2])\hat{k} \\ &= 6\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k} \quad \dots \# \end{aligned}$$

(ง) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{A} \times \vec{B}$

ให้ $\hat{n}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ลัพธ์ นั่นคือ

$$\hat{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

ขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์ $|\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = 7$

$$\hat{n} = \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|} = \frac{6}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k} \quad \dots \#$$

1.6 แคลคูลัสเวกเตอร์

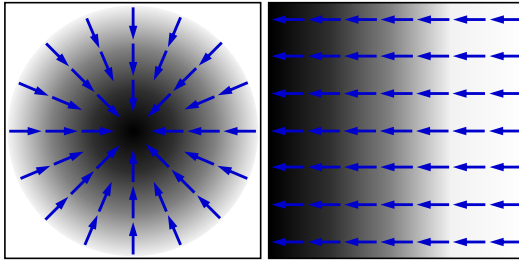
การพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ในมิติที่สูงกว่าหรือเท่ากับสองมิติ จะใช้ตัวดำเนินการของแคลคูลัสเวกเตอร์เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A}$ เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง (x, y, z) ในระบบพิกัดฉาก เขียนเป็น $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ เรียกเวกเตอร์ $\vec{A}$ นี้ว่า สนามเวกเตอร์ (vector field) ในทำนองเดียวกันปริมาณสเกลาร์ที่เป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง (x, y, z) เขียนเป็น $\varphi(x, y, z)$ เรียกปริมาณสเกลาร์ฟังก์ชันนี้ว่า สนามสเกลาร์ (scalar field) ยกตัวอย่างเช่น ถ้าพิจารณาน้ำในสระ อุณหภูมิของน้ำในสระเป็นสนามสเกลาร์ โดยเป็นการระบุค่าอุณหภูมิซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์ให้กับแต่ละตำแหน่ง ส่วนการไหลของน้ำในสระนั้นเป็นสนามเวกเตอร์เนื่องจากการไหลของน้ำที่แต่ละจุดนั้นจะถูกระบุด้วยเวกเตอร์ความเร็ว เป็นต้น

ตัวดำเนินการที่สำคัญในแคลคูลัสเวกเตอร์ที่ใช้งานมากในทางฟิสิกส์ คือ

- เกรเดียนต์ (gradient)
- ไดเวอร์เจนซ์ (divergence)
- เคิร์ล (curl)

เพื่อความสะดวกในการเขียนจะกำหนด ตัวดำเนินการอนุพันธ์เวกเตอร์ (vector differential operator) เรียกว่า เดล (del) ใช้สัญลักษณ์เป็น $\vec{\nabla}$ สำหรับพิกัดฉากกำหนดให้เป็น

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \quad (1.11)$$



รูปที่ 1.10: เกรเดียนต์ของสนามสเกลาร์

1.6.1 เกรเดียนต์ (gradient)

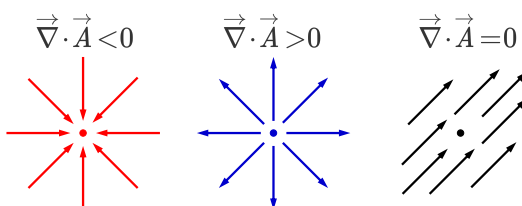
เกรเดียนต์ ใช้สัญลักษณ์ $\text{grad } \varphi$ หรือ $\vec{\nabla} \varphi$ เป็นตัวดำเนินการใช้วัดอัตราและทิศทางความเปลี่ยนแปลงของสนามสเกลาร์ กำหนดให้

$$\vec{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \quad (1.12)$$

ดังนั้นเกรเดียนต์ของสนามสเกลาร์จะได้เป็นสนามเวกเตอร์ที่ชี้ไปในทิศทางของอัตราการเพิ่มขึ้นที่ใหญ่ที่สุดของสนามสเกลาร์ และมีขนาดที่เป็นอัตราของการเพิ่มขึ้น ดังตัวอย่างแสดงในรูปที่ 1.10 สนามสเกลาร์ที่อยู่ในสีดำและสีขาว โดยสีดำเป็นตัวแทนของค่าที่มีค่าสูงกว่าสีขาว และเกรเดียนต์ที่สอดคล้องกันจะแสดงด้วยลูกศรโดยหัวลูกศรจะชี้ไปในทิศที่มีค่าสูง คือชี้ไปทางสีดำ

1.6.2 ไดเวอร์เจนซ์ (divergence)

ไดเวอร์เจนซ์ ใช้สัญลักษณ์ $\text{div } \vec{A}$ หรือ $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ เป็นตัวดำเนินการใช้วัดความลู่เข้าหรือลู่ออกของสนามเวกเตอร์ ณ จุดใดๆ ดังแสดงในรูปที่ 1.11 โดยไดเวอร์เจนซ์มีค่าน้อยกว่าศูนย์จะเป็นการลู่เข้า และไดเวอร์เจนซ์มีค่ามากกว่าศูนย์จะเป็นการลู่ออก ส่วนไดเวอร์เจนซ์เท่ากับศูนย์หมายถึงมีปริมาณการลู่เข้าเท่ากับลู่ออก ไดเวอร์เจนซ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ จะเขียนได้



รูปที่ 1.11: ไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวกเตอร์

เป็น

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.13)$$

ดังนั้นไดเวอร์เจนซ์ของสนามเวกเตอร์จะได้เป็นปริมาณสเกลาร์

1.6.3 เคิร์ล (curl)

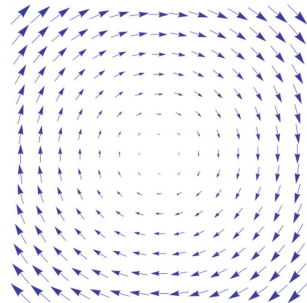
เคิร์ล ใช้สัญลักษณ์ $\text{curl } \vec{A}$ หรือ $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ เป็นตัวดำเนินการใช้วัดระดับความหมุนวน ณ จุดใดๆ ดังแสดงในรูปที่ 1.12 กำหนดให้

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \times (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k} \end{aligned} \quad (1.14)$$

ดังนั้นเคิร์ลของสนามเวกเตอร์จะได้เป็นอีกสนามเวกเตอร์หนึ่ง

รูปที่ 1.12: เคิร์ลของสนามเวกเตอร์



ตัวอย่าง 1.4: แคลคูลัสเวกเตอร์

ถ้า $\varphi = x^2yz^3$ และ $\vec{A} = xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 2x^2y\hat{k}$ จงหา

(ก) $\vec{\nabla}\varphi$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2yz^3)\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}(x^2yz^3)\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}(x^2yz^3)\hat{k} \\ &= 2xyz^3\hat{i} + x^2z^3\hat{j} + 3x^2yz^2\hat{k} \quad \dots\#\end{aligned}$$

(ข) $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k} \right) \cdot (xz\hat{i} - y^2\hat{j} + 2x^2y\hat{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^2y) \\ &= z - 2y \quad \dots\#\end{aligned}$$

(ค) $\vec{\nabla} \times \vec{A}$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{A} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & -y^2 & 2x^2y \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial(2x^2y)}{\partial y} - \frac{\partial(-y^2)}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial(xz)}{\partial z} - \frac{\partial(2x^2y)}{\partial x} \right) \hat{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial(-y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xz)}{\partial y} \right) \hat{k} \\ &= 2x^2\hat{i} + (x - 4xy)\hat{j} \quad \dots\#\end{aligned}$$

(ง) $\text{div}(\varphi\vec{A})$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot (\varphi\vec{A}) &= \vec{\nabla} \cdot (x^3yz^4\hat{i} - x^2y^3z^3\hat{j} + 2x^4y^2z^3\hat{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3yz^4) + \frac{\partial}{\partial y}(-x^2y^3z^3) + \frac{\partial}{\partial z}(2x^4y^2z^3) \\ &= 3x^2yz^4 - 3x^2y^2z^3 + 6x^4y^2z^2 \quad \dots\#\end{aligned}$$

(จ) $\text{curl } (\varphi \vec{A})$

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{A}) &= \vec{\nabla} \times (x^3 y z^4 \hat{i} - x^2 y^3 z^3 \hat{j} + 2x^4 y^2 z^3 \hat{k}) \\
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3 y z^4 & -x^2 y^3 z^3 & 2x^4 y^2 z^3 \end{vmatrix} \\
&= (4x^4 y z^3 + 3x^2 y^3 z^2) \hat{i} + (4x^3 y z^3 - 8x^3 y^2 z^3) \hat{j} \\
&\quad - (2x y^3 z^3 + x^3 z^4) \hat{k} \quad \dots \#
\end{aligned}$$

1.7 อนุพันธ์ของเวกเตอร์

พิจารณาเวกเตอร์ $\vec{A}$ ใดๆ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสเกลาร์ u เขียนได้เป็น $\vec{A}(u)$ อนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ นิยามไว้ ดังนี้

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(u + \Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u} \quad (1.15)$$

ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A}$ อยู่ในพิกัดฉากสามารถเขียนได้เป็น $\vec{A}(u) = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ อนุพันธ์ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ สามารถหาได้จาก

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \frac{dA_x}{du} \hat{i} + \frac{dA_y}{du} \hat{j} + \frac{dA_z}{du} \hat{k} \quad (1.16)$$

โดยที่องค์ประกอบ A_x , A_y และ A_z เป็นฟังก์ชันของตัวแปร u และในทำนองเดียวกันสามารถหาอนุพันธ์อันดับสองได้ ถ้าค่าที่ได้ยังมีความหมายอยู่ คือ

$$\frac{d^2 \vec{A}}{du^2} = \frac{d^2 A_x}{du^2} \hat{i} + \frac{d^2 A_y}{du^2} \hat{j} + \frac{d^2 A_z}{du^2} \hat{k} \quad (1.17)$$

ตัวอย่าง 1.5: อนุพันธ์ของเวกเตอร์

ถ้า $\vec{r} = (t^3 + 2t)\hat{i} - 3e^{-2t}\hat{j} + 2\sin 5t\hat{k}$ จงหา (ก) $d\vec{r}/dt$ (ข) $|d\vec{r}/dt|$ (ค) $d^2\vec{r}/dt^2$ และ (ง) $|d^2\vec{r}/dt^2|$ เมื่อ $t = 0$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \text{(ก)} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(t^3 + 2t)\hat{i} - \frac{d}{dt}(3e^{-2t})\hat{j} + \frac{d}{dt}(2\sin 5t)\hat{k} \\ &= (3t^2 + 2)\hat{i} + 6e^{-2t}\hat{j} + 10\cos 5t\hat{k} \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } t = 0 \text{ จะได้} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = 2\hat{i} + 6\hat{j} + 10\hat{k} \quad \dots\#$$

$$\text{(ข)} \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 10^2} = 2\sqrt{35} \quad \dots\#$$

$$\begin{aligned} \text{(ค)} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left\{ (3t^2 + 2)\hat{i} + 6e^{-2t}\hat{j} + 10\cos 5t\hat{k} \right\} \\ &= 6t\hat{i} - 12e^{-2t}\hat{j} - 50\sin 5t\hat{k} \end{aligned}$$

$$\text{เมื่อ } t = 0 \text{ จะได้} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -12\hat{j} \quad \dots\#$$

$$\text{(ง)} \quad \left| \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \right| = \sqrt{(-12)^2} = 12 \quad \dots\#$$

การหาอนุพันธ์ของเวกเตอร์จะเป็นไปตามกฎต่างๆ ของการหาอนุพันธ์ที่ใช้ในวิชาแคลคูลัส แต่ข้อที่ต้องคำนึงถึงคือ ลำดับของฟังก์ชัน เพราะในกรณีปริมาณเวกเตอร์นั้นลำดับของฟังก์ชันบางปริมาณจะสลับที่กันไม่ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับตัวดำเนินการที่มากระทำกับเวกเตอร์นั้นๆ ตัวอย่างเช่น ถ้า $\vec{A}(u)$ และ $\vec{B}(u)$ เป็นเวกเตอร์ฟังก์ชันของ u ส่วน $\phi(u)$ เป็นสเกลาร์ฟังก์ชันของ u จะพบว่า

$$\frac{d(\phi\vec{A})}{du} = \phi \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\phi}{du} \vec{A} \quad (1.18)$$

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{du} = \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \cdot \vec{B} \quad (1.19)$$

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{du} = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du} \times \vec{B} \quad (1.20)$$

จากสมบัติของเวกเตอร์ทำให้ทราบว่าการสลับลำดับในสมการ (1.18) และ (1.19) สามารถทำได้โดยไม่ทำให้ความหมายผิด แต่สำหรับสมการ (1.20) นั้นไม่สามารถทำได้เพราะจะทำให้ความหมายผิดไปได้

ตัวอย่าง 1.6: อนุพันธ์ของเวกเตอร์

ถ้า $\phi(x, y, z) = x^2yz$ และ $\vec{A} = 3x^2y\hat{i} + yz^2\hat{j} - xz\hat{k}$ จงหา $\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\phi \vec{A})$ ณ จุด $(1, -2, -1)$

วิธีทำ

$$\phi \vec{A} = (x^2yz) (3x^2y\hat{i} + yz^2\hat{j} - xz\hat{k}) = 3x^4y^2z\hat{i} + x^2y^2z^3\hat{j} - x^3yz^2\hat{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\phi \vec{A}) = 3x^4y^2\hat{i} + 3x^2y^2z^2\hat{j} - 2x^3yz\hat{k}$$

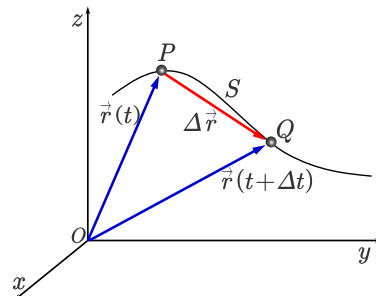
$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\phi \vec{A}) = 6x^4y\hat{i} + 6x^2yz^2\hat{j} - 2x^3z\hat{k}$$

ถ้า $x = 1$, $y = -2$ และ $z = -1$ จะได้

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\phi \vec{A}) = -12\hat{i} - 12\hat{j} + 2\hat{k} \quad \dots \#$$

การประยุกต์ใช้อนุพันธ์ในทางฟิสิกส์มีความจำเป็นอย่างมากในการวิเคราะห์ปัญหา เช่น การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุ เพื่อหาความเร็ว (velocity) และความเร่ง (accelerator) ของวัตถุ พิจารณาวัตถุหนึ่งเคลื่อนที่จากตำแหน่ง P ไปตำแหน่ง Q ตามเส้นโค้ง S โดยใช้เวลา Δt ดังแสดงในรูปที่ 1.13 ให้เวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุที่ตำแหน่ง P ที่เวลา t คือ $\vec{r}(t)$ ถ้าเขียนได้เป็น

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$



รูปที่ 1.13: เส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค และเวกเตอร์บอกตำแหน่งที่เวลา t และ $t + \Delta t$

การกระจัด (displacement) ของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้คือ $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ สามารถหาความเร็ว ($\vec{v}$) ของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ ได้โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของเวกเตอร์บอกตำแหน่งของวัตถุ ดังนี้

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{[x(t + \Delta t) - x(t)]}{\Delta t} \hat{i} + \frac{[y(t + \Delta t) - y(t)]}{\Delta t} \hat{j} + \frac{[z(t + \Delta t) - z(t)]}{\Delta t} \hat{k} \right\}\end{aligned}$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} + \frac{dz}{dt} \hat{k} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k} \quad (1.21)$$

ขนาดของความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง เรียกว่า อัตราเร็ว (speed) เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนี้

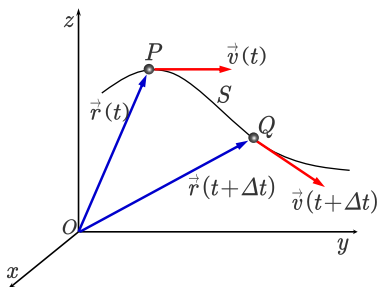
$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (1.22)$$

ส่วนความเร็วเฉลี่ย (average velocity) ในช่วง P ถึง Q คืออัตราส่วนของการกระจัดที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ต่อเวลาเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนี้

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (1.23)$$

เมื่อ $\Delta \vec{r}$ คือการกระจัดของวัตถุโดยวัดจากจุดเริ่มต้นใดๆ ในที่นี้คือ P ไปยัง Q

ความเร่ง ($\vec{a}$) เป็นอัตราส่วนระหว่างการเปลี่ยนแปลงของความเร็วต่อเวลา (เป็นปริมาณเวกเตอร์) จากรูปที่ 1.14 เมื่อเวลา t อนุภาคอยู่ที่ P มีความเร็ว $\vec{v}(t)$ และเมื่อเวลาผ่านไปเป็น $t + \Delta t$ อนุภาคอยู่ที่ Q มีความเร็ว $\vec{v}(t + \Delta t)$ ดังนั้นสามารถหาความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t ใดๆ ได้โดย การหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของความเร็วของวัตถุ ดังนี้



รูปที่ 1.14: เส้นทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค และความเร็วของอนุภาคที่เวลา t และ $t + \Delta t$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{[v_x(t + \Delta t) - v_x(t)]}{\Delta t} \hat{i} + \frac{[v_y(t + \Delta t) - v_y(t)]}{\Delta t} \hat{j} + \frac{[v_z(t + \Delta t) - v_z(t)]}{\Delta t} \hat{k} \right\}\end{aligned}$$

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (1.24)$$

เนื่องจาก $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ และ $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ จึงสามารถเขียนสมการของความเร่งใหม่ได้เป็น

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \hat{k} \quad (1.25)$$

ขนาดของความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง เรียกว่า อัตราเร่ง เป็นปริมาณสเกลาร์ ดังนี้

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.26)$$

ส่วนความเร่งเฉลี่ย (average accelerator) ในช่วง P ถึง Q คืออัตราส่วนของผลต่างความเร็วต่อเวลาเป็นปริมาณเวกเตอร์ ดังนี้

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \quad (1.27)$$

ตัวอย่าง 1.7: ความเร็ว ความเร่ง ของอนุภาค

อนุภาคเคลื่อนที่โดยตำแหน่งที่เวลาต่างๆ เขียนได้เป็น $\vec{r}(t) = 2t^2\hat{i}$ โดย $\vec{r}(t)$ มีหน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหา

(ก) ความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลา $t = 4$ วินาที ถึง $t = 5$ วินาที

$$\vec{v}_{av} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{2(5)^2\hat{i} - 2(4)^2\hat{i}}{5 - 4} = 18\hat{i} \text{ m/s} \quad \dots \#$$

(ข) ความเร็วของอนุภาคที่ $t = 5$ วินาทีพอดี

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (2t^2) \hat{i} = 4t\hat{i} = 4(5)\hat{i} = 20\hat{i} \text{ m/s} \quad \dots \#$$