



สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น (Elementary of Abstract Algebra)

ดร. ปุณศยา พัฒนางกูร

พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น
(*Elementary of Abstract Algebra*)

โครงการหนังสือวิชาการที่น่าพิมพ์ได้รับทุนสนับสนุนจากมหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
ให้จัดพิมพ์ และจำหน่ายในราคาขอมเยา



ถ่ายเอกสารแทนการใช้หนังสือ
คือการทำลายภูมิปัญญาสร้างสรรค์

พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น
(*Elementary of Abstract Algebra*)

รองศาสตราจารย์ ดร. ปุณศยา พัฒนางกูร
ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์
2555

ปณศยา พัฒนางกูร

พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น.

1. พีชคณิตนามธรรม

QA162

ISBN 978-616-7398-19-8

eISBN 978-616-314-119-4

ลิขสิทธิ์ของรองศาสตราจารย์ ดร. ปณศยา พัฒนางกูร

สงวนลิขสิทธิ์

ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 1 เดือนกรกฎาคม 2555 (พิมพ์เพิ่มครั้งที่ 1)

จำนวน 200 เล่ม

ฉบับอิเล็กทรอนิกส์ (e-book) กันยายน 2557

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

อาคารธรรมศาสตร์ 60 ปี ชั้น U1 มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

ถนนพระจันทร์ กรุงเทพฯ 10200

โทร. 0-2223-9232, 0-2613-3801-2

โทรสาร 0-2226-2083

(สำนักงานศูนย์รังสิต โทร. 0-2564-2859-60)

e-mail address: unipress@tu.ac.th

พิมพ์ที่ห้างหุ้นส่วนจำกัด เอ็มแอนด์เอ็มเลเซอร์พริ้นต์

นายสมชาย คำจำ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา

แบบปกโดยนายณรงค์ฤทธิ์ สิงห์ทอง

ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 1 เดือนกันยายน 2553 จำนวน 300 เล่ม

ฉบับพิมพ์ครั้งที่ 1 เดือนกรกฎาคม 2555 จำนวน 200 เล่ม (พิมพ์เพิ่มครั้งที่ 1)

ราคาเล่มละ 190.- บาท

สารบัญ

คำนำ	(7)
บทที่ 1 ความรู้พื้นฐาน	1
1.1 บทนิยามและสัญลักษณ์ของเซต	1
1.2 พิจารณาเบื้องต้นของเซต	7
1.3 ความสัมพันธ์สมมูล	13
1.4 ฟังก์ชัน	23
1.5 การดำเนินการทวิภาค	36
บทที่ 2 สมบัติของจำนวนเต็ม	45
2.1 หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	45
2.2 การหารลงตัว	55
2.3 ขั้นตอนวิธีการหาร	59
2.4 ตัวหารร่วมมาก	62
2.5 ขั้นตอนวิธีแบบยุคลิด	76
2.6 ตัวคูณร่วมน้อย	82
2.7 จำนวนเฉพาะ	87
2.8 คอนกรูเอนซ์	92

บทที่ 3 กรุป	111
3.1 บทนิยามและตัวอย่างของกรุป	111
3.2 สมบัติเบื้องต้นของกรุป	118
3.3 กรุปวัฏจักร	122
3.4 กรุปย่อยและทฤษฎีบทลาگرانจ์	128
3.5 กรุปย่อยปกติและกรุปผลหาร	139
3.6 โฮโมมอร์ฟิซึมและไอโซมอร์ฟิซึม	146
3.7 กรุปสมมาตร	159
 บทที่ 4 ริง	 181
4.1 บทนิยามและตัวอย่างของริง	181
4.2 สมบัติเบื้องต้นของริง	190
4.3 ไอเดิลและริงผลหาร	198
4.4 โฮโมมอร์ฟิซึมและไอโซมอร์ฟิซึม	205
4.5 ริงพหุนาม	217
 บทที่ 5 ฟิวด์	 225
5.1 บทนิยามสมบัติเบื้องต้นของฟิวด์	225
5.2 ฟิวด์ของผลหาร	231
5.3 การแยกตัวประกอบของพหุนามบนฟิวด์	237
 บรรณานุกรม	 253
ดัชนี	255
ดัชนีสัญลักษณ์	270

คำนำ

หนังสือ **พีชคณิตนามธรรมเบื้องต้น** เล่มนี้ ผู้เขียนรวบรวมขึ้นเพื่อเป็นการแนะนำพีชคณิตนามธรรม (Abstract Algebra) ซึ่งเป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ ซึ่งเหมาะสำหรับนักศึกษาที่เรียนวิชาเอกคณิตศาสตร์ และคณิตศาสตร์ประยุกต์ รวมถึงบุคคลทั่วไปที่มีความสนใจและมีพื้นฐานเบื้องต้นเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนและการพิสูจน์

หนังสือเล่มนี้ประกอบด้วย 5 บท ซึ่งแต่ละบทจะเป็นพื้นฐานในการศึกษาในบทต่อ ๆ ไป นอกจากนี้ ผู้อ่านสามารถศึกษาได้เข้าใจมากยิ่งขึ้นถ้าได้ทำแบบฝึกหัดตอนท้ายของแต่ละหัวข้อ และแบบฝึกหัดบางข้อจะเป็นพื้นฐานหรือแนวทางในการทำความเข้าใจในหัวข้อต่อ ๆ ไป

บทที่ 1 ประกอบด้วยความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต ความสัมพันธ์สมมูล ฟังก์ชัน และการดำเนินการทวิภาค ซึ่งเป็นส่วนสำคัญในการศึกษาพีชคณิต

บทที่ 2 กล่าวถึงสมบัติของจำนวนเต็มที่น่าสนใจ อันได้แก่ หลักการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ขั้นตอนวิธีการหาร ตัวหารร่วมมาก ทฤษฎีบทการแยกตัวประกอบได้อย่างเดียว และคอนกรูเอนซ์ ซึ่งจะนำไปใช้ประกอบการศึกษาเรื่องกรุปต่อไป

บทที่ 3 ได้ให้บทนิยามและสมบัติเบื้องต้นของกรุป รวมถึงได้กำหนดนิยามของกรุปวัฏจักร กรุปย่อย กรุปย่อยปรกติและกรุปผลหาร และในหัวข้อที่ 3.6 ได้ให้บทนิยามและศึกษาสมบัติที่สำคัญของโฮโมมอร์ฟิซึมและไอโซมอร์ฟิซึมของกรุปซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างกรุป 2 กรุป นอกจากนี้ ยังมีการพิสูจน์ทฤษฎีบทลากรานจ์ และทฤษฎีบทเคย์เลย์ ซึ่งถือว่าเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญบทหนึ่ง สำหรับในหัวข้อที่ 3.7 เราได้ให้บทนิยามของการเรียงสับเปลี่ยนและกรุปสมมาตร ซึ่งเป็นตัวอย่างของกรุปตัวอย่างหนึ่งที่น่าสนใจ

บทที่ 4 ได้กล่าวถึงระบบคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วยเซต และการดำเนินการ 2 การดำเนินการที่สอดคล้องกับสมบัติชุดหนึ่ง นั่นคือเราได้ให้บทนิยามของริง และได้ศึกษาสมบัติเบื้องต้นของริง นอกจากนี้ ยังได้ศึกษาเกี่ยวกับไอดีล ริงผลหาร โฮโมมอร์ฟิซึมและไอโซมอร์ฟิซึมของริง และริงพหุนาม อีกด้วย

บทที่ 5 ได้ให้บทนิยามของฟิลด์ และศึกษาสมบัติเบื้องต้นของฟิลด์ ตลอดจนศึกษาสมบัติของฟิลด์ของผลหาร และการแยกตัวประกอบของพหุนามบนฟิลด์

เนื่องจากหนังสือเล่มนี้มีเนื้อหาเกี่ยวกับพีชคณิตนามธรรมเบื้องต้นเท่านั้น ดังนั้นเนื้อหาอาจจะไม่ครอบคลุมเนื้อหาทั้งหมดของพีชคณิตนามธรรมทั่ว ๆ ไป อย่างไรก็ตาม ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์แก่นิสิต นักศึกษา และผู้ที่สนใจ

สุดท้ายนี้ ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณบิดาและมารดาเป็นอย่างสูง สำหรับความรักและกำลังใจตลอดมา ขอขอบคุณอาจารย์ของผู้เขียนทุกท่านที่ทำให้ผู้เขียนรักและซาบซึ้งในคณิตศาสตร์ ซึ่งผู้เขียนมีอาจลืมพระคุณได้

รองศาสตราจารย์ ดร. ปุณศยา พัฒนางกูร

มิถุนายน 2553

บทที่ 1

ความรู้พื้นฐาน

(Basic Concepts)

ในบทนี้ได้รวบรวมความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเซต ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน และการดำเนินการ
ทวิภาค เพื่อเป็นสำเนาเพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาเรื่องที่เกี่ยวข้องในบทต่อไป

1.1

บทนิยามและสัญลักษณ์ของเซต (Definition and Notation of a Set)

ลักษณะนามที่ใช้เรียกสิ่งที่มีหลายคำ เช่น ชุม หมู่ กลุ่ม พวก หมู่ โขลง คณะ เป็นต้น แต่ในทางคณิตศาสตร์นั้นเราใช้คำว่า “ เซต ” ซึ่งเป็นคำนิยาม (undefined term) แทนลักษณะนามดังกล่าว ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.1 เซต (set) เป็นคำซึ่งใช้แทนกลุ่มของสิ่งต่าง ๆ ที่มีคุณลักษณะบางประการร่วมกัน และสิ่งประกอบกันเป็นเซตเรียกว่าสมาชิกของเซต (element of a set)

โดยทั่วไปนิยมใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ในภาษาอังกฤษแทนเซต และใช้อักษรตัวพิมพ์เล็กในภาษาอังกฤษแทนสมาชิกของเซต ในหนังสือเล่มนี้จะใช้สัญลักษณ์ต่าง ๆ ดังนี้

$\mathbb{Z}$	แทนเซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Z}^+$	แทนเซตของจำนวนเต็มบวก
$\mathbb{Z}^-$	แทนเซตของจำนวนเต็มลบ
$\mathbb{N}$	แทนเซตของจำนวนธรรมชาติหรือเซตของจำนวนนับ
$\mathbb{Q}$	แทนเซตของจำนวนตรรกยะ
$\mathbb{Q}^+$	แทนเซตของจำนวนตรรกยะบวก
$\mathbb{R}$	แทนเซตของจำนวนจริง
$\mathbb{R}^+$	แทนเซตของจำนวนจริงบวก
และ $\mathbb{C}$	แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

เพื่อความสะดวกในการเขียนบรรยายเซตจึงมีการกำหนดสัญลักษณ์ต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

สัญลักษณ์ $a = b$	หมายถึง	“ a และ b เป็นสิ่งเดียวกัน ”
สัญลักษณ์ $a \neq b$	หมายถึง	“ นิเสธของ $a = b$ ”
สัญลักษณ์ $\in$	แทนคำว่า	“ เป็นสมาชิกของ ”
และ สัญลักษณ์ $\notin$	แทนคำว่า	“ ไม่เป็นสมาชิกของ ”

นั่นคือ ถ้า A เป็นเซตใด ๆ แล้วจะได้ว่า

สัญลักษณ์ $a \in A$	หมายถึง	a เป็นสมาชิกของเซต A
และ สัญลักษณ์ $a \notin A$	หมายถึง	a ไม่เป็นสมาชิกของเซต A

ตัวอย่างเช่น

ถ้าให้ A แทนเซตของจำนวนเต็มลบที่มากกว่า -4 แล้วจะได้ว่า $A = \{-1, -2, -3\}$ ดังนั้น $-1 \in A$, $-2 \in A$, $-3 \in A$ แต่ $-4 \notin A$ เป็นต้น จะเห็นว่า เซตเป็นคำจำกัด (well-defined) กล่าวคือ ถ้า A เป็นเซตและ a เป็นสิ่ง ๆ หนึ่งแล้ว $a \in A$ หรือ $a \notin A$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

สำหรับการเขียนเซตนั้นโดยทั่วไปที่นิยมกันมี 2 แบบดังนี้

1. การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกของเซต (Tabular form) คือการเขียนสมาชิกทุกตัวลงในวงเล็บปีกกา “ $\{ \}$ ” และคั่นสมาชิกแต่ละตัวด้วยเครื่องหมายจุลภาค “ , ” ตัวอย่างเช่น เซต $\{ 1, 2, 15 \}$ หรือถ้าให้ A เป็นเซตของสระทั้งหมดในภาษาอังกฤษ แล้วจะเขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิกของเซตได้เป็น $A = \{a, e, i, o, u\}$ เป็นต้น

สำหรับในกรณีที่เซตนั้น ๆ มีจำนวนสมาชิกมากและเรียงลำดับอย่างเป็นระบบ สามารถเขียนสมาชิกเพียง 2 – 3 ตัวแรก แล้วใช้จุด 3 จุด “...” (เท่านั้น) เพื่อเป็นการละไว้ในฐานที่เข้าใจว่าสมาชิกที่ตามมาประกอบด้วยอะไรบ้าง เช่น เซต $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ เป็นต้น

ในกรณีที่ทราบสมาชิกตัวสุดท้ายของเซต สามารถเขียนสมาชิกตัวสุดท้ายไว้ในเซตด้วย เช่น ถ้าให้ X แทนเซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 30 แล้ว $X = \{1, 2, 3, \dots, 29\}$ ทำให้ทราบว่าสมาชิกที่เว้นไว้คือ 4 ถึง 28 เป็นต้น

2. การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขของเซต (set – builder form) คือการเขียนคุณสมบัติของสมาชิกลงไปเพื่อให้ทราบว่าสิ่งใดเป็นสมาชิกของเซตนั้น หรือกล่าวได้ว่าเป็นการเขียนเซตโดยใช้ตัวแปร ตามด้วยเครื่องหมาย “|” แทนคำว่า “ซึ่ง” หรือ “โดยที่” แล้วอธิบายคุณสมบัติของตัวแปรดังกล่าว

เซตที่เขียนคุณสมบัติของสมาชิกลงไปนั้นจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\{x \mid P(x)\}$ เมื่อ x เป็นสมาชิกของเซตนั้น ๆ และอ่านว่า “เซตของสมาชิก x ทั้งหมดที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง” เช่น ถ้า B เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่บวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 10 แล้วจะเขียนเซต B แบบบอกเงื่อนไขของเซตได้เป็น

$$\begin{aligned} B &= \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่บวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ } 10\} \\ &= \{2x \mid x = 1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

สัญลักษณ์ $\{x \mid P(x)\}$ เรียกว่า “set – builder notation”

ตัวอย่างเช่น

- (1) ถ้า X แทนเซตของจำนวนเต็มที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 - 6x - 7 = 0$ แล้วสามารถเขียนเซต X ได้ดังนี้

$$\text{แบบแจกแจงสมาชิกของเซต : } X = \{-1, 7\}$$

$$\text{แบบบอกเงื่อนไขของเซต : } X = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ และ } x^2 - 6x - 7 = 0\}$$

- (2) ถ้า Y แทนเซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง -1 กับ 1 แล้วไม่สามารถเขียนเซต Y แบบแจกแจงสมาชิกของเซตได้ แต่สามารถเขียนเซต Y แบบบอกเงื่อนไขของเซตได้ดังนี้

$$Y = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ และ } -1 < x < 1\}$$

พิจารณาตัวอย่างข้างต้นที่ให้ B แทนเซตของจำนวนเต็มคู่บวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 10 อีกครั้งหนึ่ง จะเห็นว่า $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ซึ่งถ้าเราจะเขียนเซต B ใหม่เป็น

$$B = \{4, 8, 10, 2, 6\}$$

$$\text{หรือ } B = \{ 6, 10, 8, 4, 2 \}$$

$$\text{หรือ } B = \{ 10, 8, 6, 4, 2 \}$$

การเขียนดังกล่าวก็ยังสื่อความหมายเดียวกัน เพราะก็ยังให้ความหมายแก่เราว่าจำนวนเต็มคู่บวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 10 มีอะไรอยู่บ้างนั่นเอง สังเกตได้ว่าตำแหน่งของสมาชิกในเซตนั้นไม่สำคัญจากเซต B ดังกล่าวถ้าเราเขียนใหม่เป็น

$$B = \{ 2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8, 10, 10 \}$$

$$\text{หรือ } B = \{ 2, 2, 4, 6, 6, 6, 8, 10, 10, 10, 10 \}$$

$$\text{หรือ } B = \{ 2, 4, 6, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 10 \}$$

การเขียนดังกล่าวก็ยังสื่อความหมายเดียวกัน เพราะไม่ว่าจะเขียน 2 ซ้ำกี่ครั้งก็ตามก็ยังหมายถึง 2 เป็นจำนวนเต็มคู่บวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 10 ทำนองเดียวกับการเขียน 4, 6, 8 และ 10 ไม่ว่าจะเขียนซ้ำกี่ครั้งในเซตนี้ก็ยังคงหมายถึง 4, 6, 8 และ 10 เป็นจำนวนเต็มคู่บวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 10 ดังนั้นจึงได้ข้อสังเกตว่าสมาชิกที่ซ้ำกันในเซตเดียวกันถือว่าเป็นเพียงตัวเดียว

บทนิยาม 1.1.2 เซต A เท่ากับเซต B (A is equal to B) ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B และทุกสมาชิกของ B เป็นสมาชิกของ A (นั่นคือ A และ B มีสมาชิกเหมือนกัน) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A = B$$

ถ้าเซต A และเซต B มีสมาชิกบางตัวแตกต่างกัน เรากล่าวว่าเซต A ไม่เท่ากับเซต B (A is not equal to B) ในกรณีนี้เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \neq B$$

เซตที่ไม่มีสมาชิกหรือจำนวนสมาชิกเท่ากับศูนย์ เรียกว่าเซตว่าง (empty set or null set or void set) ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\{ \}$ หรือ $\emptyset$ และเรียกเซตที่ไม่เป็นเซตว่างว่าเซตไม่ว่าง (non – empty set)

ตัวอย่างเช่น

$$(1) \text{ ถ้า } A = \{ 1, 2, 3, 5, 7 \} \text{ และ } B = \{ 2, 3, 5, 5, 7, 1 \} \text{ แล้ว } A = B$$

$$(2) \text{ ถ้า } A = \{ x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \} \text{ และ } B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 3 \} \text{ แล้ว } A = B$$

$$(3) \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 < 0 \} = \emptyset$$

$$(4) \{ x \in \mathbb{Z} \mid 2x = 1 \} = \emptyset$$

บทนิยาม 1.1.3 เซต A เทียบเท่ากับเซต B (A is equivalence to B) ก็ต่อเมื่อ สามารถจับคู่กันแบบหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (one-to-one correspondence) ระหว่างสมาชิกของเซต A และเซต B พอดี ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \sim B$$

ตัวอย่างเช่น

ถ้า $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-10, -20, -30\}$ และ $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ แล้วจะได้ว่า $A \sim B$ แต่เซต A ไม่เทียบเท่ากับเซต C

บทนิยาม 1.1.4 เซต A เรียกว่าเป็นเซตย่อย (subset) ของเซต B ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \subseteq B \text{ หรือ } B \supseteq A$$

ถ้า $A \subseteq B$ และ $A \neq B$ แล้วเรียก A ว่าเป็นเซตย่อยแท้ (proper subset) ของ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \subset B$$

และถ้ามีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวของ A ที่ไม่เป็นสมาชิกของ B เรากล่าวว่า A ไม่เป็นเซตย่อยของ B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \not\subset B$$

หมายเหตุ เราเรียก B ว่าเซตย่อยไม่แท้ (improper subset) ของ B

ตัวอย่างเช่น

(1) ถ้า $S = \{1, 2, 3\}$ แล้วจะได้ว่า S มีทั้งหมด 8 เซตย่อย ดังนี้ $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ และ $\{1, 2, 3\}$

(2) ถ้า $A = \{10, 20, 30\}$ และ $B = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ แล้ว $A \subset B$

เพื่อความสะดวกเราจะให้ทุกเซตที่กล่าวถึงเป็นเซตย่อยของเซตใหญ่เซตหนึ่ง ซึ่งเรียกว่าเอกภพสัมพัทธ์ (relative universe or universal set) และเขียนแทนเอกภพสัมพัทธ์ด้วย $\mathcal{U}$ กล่าวคือเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตที่กำหนดขึ้น โดยมีข้อตกลงว่าต่อไปจะกล่าวถึงแต่สมาชิกของเซตนี้เท่านั้น จะไม่มีการกล่าวถึงสิ่งใดที่ไม่เป็นสมาชิกของเซตนี้

ตัวอย่างเช่น

กำหนดให้ $K = \{x \mid 2x^2 + x - 1 = 0\}$ จะได้ว่า

$K = \{\frac{1}{2}, -1\}$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$K = \{-1\}$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ แทนเซตของจำนวนเต็มลบ

$K = \emptyset$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก

และ $K = \{\frac{1}{2}\}$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ แทนเซตของจำนวนจริงบวก เป็นต้น

ทฤษฎีบทต่อไปนี้เป็นผลที่ได้จากบทนิยามที่เกี่ยวกับเซตดังที่ได้กล่าวไปแล้ว

ทฤษฎีบท 1.1.1 กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จะได้ว่า

- (1) $A \subseteq A, \emptyset \subseteq A$ และ $A \subseteq \mathcal{U}$
- (2) $A \subseteq \emptyset$ ก็ต่อเมื่อ $A = \emptyset$
- (3) $\{x\} \subseteq A$ ก็ต่อเมื่อ $x \in A$
- (4) ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$
- (5) ถ้า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

จะเห็นได้ว่า เซตบางเซตสามารถนับจำนวนสมาชิกของเซตได้ แต่บางเซตก็ไม่สามารถนับจำนวนสมาชิกของเซตได้ ตัวอย่างเช่น เซต $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x \leq 9\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ มีสมาชิกทั้งหมด 10 ตัว ในขณะที่เซต $N = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 9\}$ ไม่สามารถบอกได้ว่าสมาชิกของเซต N มีอะไรบ้างและมีจำนวนสมาชิกเท่าไร

บทนิยาม 1.1.5 เซตจำกัด (finite set) คือเซตที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับจำนวนนับจำนวนหนึ่ง นั่นคือเซต A เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$$

โดยที่ $k \in \mathbb{N}$ และจำนวนสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(A)$ นอกจากนี้ เราเรียกเซตว่างว่าเซตจำกัด และเรียกเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัดว่าเซตอนันต์ (infinite set)

ตัวอย่างเช่น

- (1) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}^+ \text{ และ } 5x+1 > 10\}$ เป็นเซตอนันต์
- (2) $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ และ } 5x+1=10\} = \emptyset$ เป็นเซตจำกัด
- (3) $C = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ และ } 20 > 5x+1 > 10\}$ เป็นเซตอนันต์
- (4) $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ และ } 20 > 5x+1 > 10\}$ เป็นเซตจำกัด

แบบฝึกหัดท้ายหัวข้อ 1.1

1. จงเขียนสมาชิกทั้งหมดของเซตต่อไปนี้
 - 1.1 $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 3\}$
 - 1.2 $\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 = 3\}$
 - 1.3 $\{m \in \mathbb{Z} \mid mn = 60 \text{ สำหรับบาง } n \in \mathbb{Z}\}$
 - 1.4 $\{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 - m < 115\}$
 - 1.5 $\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid 1 < x < 8\}$
 - 1.6 $\{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 + x - 6 = 0\}$
2. จงพิสูจน์ทฤษฎีบท 1.1.1
3. จงพิสูจน์ว่าทุกเซตย่อยของเซตจำกัดเป็นเซตจำกัด
4. จงพิสูจน์ว่าทุกเซตที่มีเซตย่อยเป็นเซตอนันต์จะเป็นเซตอนันต์
5. ให้ A เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัว จงพิสูจน์ว่าเซตย่อยของ A มีอยู่ทั้งหมด 2^n เซตย่อย

1.2

พีชคณิตเบื้องต้นของเซต (Elementary Algebra of Sets)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงพีชคณิตของเซตหรือการดำเนินการระหว่างเซต (operation on sets) ถ้า A และ B เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{X}$ แล้วการดำเนินการระหว่างเซต A และ B ซึ่ง

ประกอบด้วย การดำเนินการยูเนียน อินเตอร์เซกชัน ผลต่าง และส่วนเติมเต็ม นั้น ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นเซตใหม่ที่สร้างขึ้นจากเซต A และ B ที่กำหนดให้ดังกล่าว ซึ่งจะนิยามดังนี้

บทนิยาม 1.2.1 ยูเนียน (union) ของเซต A และเซต B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cup B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเป็นสมาชิกของเซต A หรือเป็นสมาชิกของเซต B นั่นคือ

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

อินเตอร์เซกชัน (intersection) ของเซต A และเซต B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A \cap B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งในเซต A และเซต B นั่นคือ

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

ผลต่าง (difference) ของเซต A และเซต B ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A - B$ คือเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต A แต่ไม่อยู่ในเซต B นั่นคือ

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

เรียกผลต่าง $\mathcal{U} - A$ ว่าส่วนเติมเต็ม (complement) ของเซต A และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$A' \text{ หรือ } A^c$$

ถ้า $A \cap B = \emptyset$ แล้วเซต A และเซต B เรียกว่าเป็นเซตไม่มีส่วนร่วม (disjoint set)

ตัวอย่างเช่น

กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6\}$ และ $B = \{1, 2, 5, 7\}$ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ จะได้ว่า

$$A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{2\}$$

$$A - B = \{4, 6\}$$

$$B - A = \{1, 5, 7\}$$

$$\mathcal{U} - A = A' = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

$$B' = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

และ

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$$

สัญลักษณ์ ยูเนียน และอินเตอร์เซกชันของเซตจำนวน n เซตคือ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เขียนแทนด้วย

สัญลักษณ์ $\bigcup_{i=1}^n A_i$ และ $\bigcap_{i=1}^n A_i$ ตามลำดับ นั่นคือ

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

และ
$$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$$

จากบทนิยามของยูเนียน และอินเตอร์เซกชัน จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2.1 กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จะได้ว่า

- (1) $A \cup A = A = A \cap A$
- (2) $A \cup B = B \cup A$ และ $A \cap B = B \cap A$
- (3) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ และ
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- (4) $A \cup \emptyset = A$ และ $A \cap \emptyset = \emptyset$
- (5) $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$ และ $A \cap \mathcal{U} = A$
- (6) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
- (8) ถ้า $A \subseteq C$ และ $B \subseteq D$ แล้ว $A \cup B \subseteq C \cup D$
และ $A \cap B \subseteq C \cap D$

การพิสูจน์

เราจะพิสูจน์ข้อ (4) ที่ว่า $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(สำหรับข้อที่เหลือจะเว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด)

สมมติให้ $x \in A \cup (B \cap C)$ ดังนั้น $x \in A$ หรือ $x \in B \cap C$

กรณีที่ 1 ถ้า $x \in A$ แล้ว $x \in A \cup B$ และ $x \in A \cup C$
นั่นคือ $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

กรณีที่ 2 ถ้า $x \in B \cap C$ แล้ว $x \in B$ และ $x \in C$

จาก $x \in B$ จะได้ $x \in A \cup B$ และ

จาก $x \in C$ จะได้ $x \in A \cup C$

ดังนั้น $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

จากทั้งสองกรณี จะได้ว่า $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

นั่นคือ $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ในทางกลับกัน สมมติให้ $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ดังนั้น $x \in A \cup B$ และ $x \in A \cup C$

จาก $x \in A \cup B$ จะได้ $x \in A$ หรือ $x \in B$ และ

จาก $x \in A \cup C$ จะได้ $x \in A$ หรือ $x \in C$

ดังนั้น $x \in A$ หรือ $x \in B \cap C$ นั่นคือ $x \in A \cup (B \cap C)$

เพราะฉะนั้น $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$

สรุปได้ว่า $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

■

ทฤษฎีบท 1.2.2 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (1) $A \subseteq B$
- (2) $A = A \cap B$
- (3) $B = A \cup B$

ตัวอย่างเช่น

กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ และ $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ จะได้ว่า $A \subseteq B$ นอกจากนี้ยังได้อีกว่า

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8\} = A \text{ และ } A \cup B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} = B$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยอาศัยบทนิยามของยูเนียน อินเตอร์เซกชัน และส่วนเติมเต็ม

ทฤษฎีบท 1.2.3 กำหนดให้ A และ B เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จะได้ว่า

- (1) $A = (A \cap B) \cup (A - B)$
- (2) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- (3) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- (4) ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $B' \subseteq A'$
- (5) $(A')' = A$, $\emptyset' = \mathcal{U}$ และ $\mathcal{U}' = \emptyset$
- (6) $A \cup A' = \mathcal{U}$ และ $A \cap A' = \emptyset$

ในบางครั้งเราอาจจะพบเซตที่มีสมาชิกเป็นเซต ซึ่งจะเรียกเซตดังกล่าวว่า **วงศ์ของเซต** (family of sets) ซึ่งวงศ์ของเซตชนิดหนึ่งก็คือเซตกำลัง (power set) ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2.2 กำหนดให้ A เป็นเซตใด ๆ เรียกเซตที่มีสมาชิกเป็นเซตย่อยทั้งหมดของ A ว่า **เซตกำลัง (power set)** ของ A และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A)$ นั่นคือ

$$P(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$$

กำหนดให้ T เป็นเซตโดยที่ $T \neq \emptyset$ เรียก T ว่าเป็น **เซตดัชนี (index set)** สำหรับวงศ์ของเซต $\mathcal{F} = \{A_\alpha\}$ ก็ต่อเมื่อ $A_\alpha \in \mathcal{F}$ สำหรับทุก $\alpha \in T$

ข้อสังเกต เซตดัชนีจะเป็นเซตจำกัดหรือเซตอนันต์ก็ได้

ตัวอย่างเช่น

- (1) ถ้า $A = \{a, b\}$ แล้ว $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$
- (2) ถ้า $B = \{1, 2, 3\}$ แล้ว $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, B\}$
- (3) ให้ $T = \{1, 2, \dots, 9\}$ และ $A_i = \{0, 1, \dots, i\}$ สำหรับทุก $i \in T$ ถ้า $\mathcal{F} = \{A_i \mid i \in T\}$

แล้ว $\mathcal{F}$ เป็นวงศ์ของเซตที่มีเซต T เป็นเซตดัชนี

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 1.2.2 จะเห็นว่า $\{\emptyset, A\} \subseteq P(A)$ เสมอ และถ้า $x \in A$ แล้ว $\{x\} \in P(A)$ นอกจากนี้ยังพบว่าจำนวนสมาชิกของ $P(A)$ จะมากกว่าจำนวนสมาชิกของเซต A ซึ่งเราสามารถพิสูจน์ได้ว่าถ้า A เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัวแล้ว $P(A)$ ก็จะเป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิก 2^n ตัว (ดังได้พิสูจน์ไว้ในตัวอย่าง 2.1.2)

สัญลักษณ์ กำหนดให้ T เป็นเซตดัชนี จะได้ว่าการยูเนียนของเซต A_α เมื่อ $\alpha \in T$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha$ หรือ $\bigcup \{A_\alpha \mid \alpha \in T\}$ หรือ $\bigcup A_\alpha$ จะหมายถึงเซต

$$\{x \mid x \in A_\alpha \text{ สำหรับบาง } \alpha \in T\}$$

การอินเตอร์เซกชันของเซต A_α เมื่อ $\alpha \in T$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\bigcap_{\alpha \in T} A_\alpha$ หรือ

$\bigcap \{A_\alpha \mid \alpha \in T\}$ หรือ $\bigcap A_\alpha$ จะหมายถึงเซต

$$\{x \mid x \in A_\alpha \text{ สำหรับทุก } \alpha \in T\}$$

เซต $\{A_\alpha \mid \alpha \in T\}$ ดังกล่าวเรียกว่า **มิวชวลิติสจอยท์ (mutually disjoint)** ก็ต่อเมื่อ