SMART++

PHYSICS

สรุปฟิสิกส์ ม.ปลาย

การันตี SURE 100%
ADVANCED
อ่านเลย ติดชัวร์

เนื้อหาเข้มข้น เล่มเดียวเนื้อหาครบ!
เพื่อการสอบเข้ามหาวิทยาลัยทุกรูปแบบ

ติวเข้ม! ติวสอบ!
รวมสูตรฟิสิกส์และเนื้อหาฟิสิกส์ ม.ปลาย

พร้อมเทคนิคการทำโจทย์แบบรวดเร็วและเข้าใจง่าย

ทวินันท์ อยู่สุนทร
(ติวเตอร์ ANN)

PHYSICS

สรุปฟิสิกส์

ม.ปลาย

ติวเข้ม! ติวสอบ!

รวมสูตรฟิสิกส์และเนื้อหาฟิสิกส์ ม.ปลาย

พร้อมเทคนิคการทำโจทย์แบบรวดเร็วและเข้าใจง่าย

สรุปฟิสิกส์ ม.ปลาย

ผู้เขียน : ทวินันท์ อยู่สุนทร และธรธนัฐ ภักดีภิญโญ

ราคา 295 บาท

พิมพ์ครั้งที่ 1 : กันยายน 2560

จัดพิมพ์โดย : **บริษัท สมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด**

SMART++

2387 อาคารรวมทุนพัฒนา ชั้น 3 ถนนเพชรบุรีตัดใหม่
แขวงบางกะปิ เขตห้วยขวาง กรุงเทพฯ 10310
โทร. 0-2318-4818 (10 คู่สาย)
แฟกซ์ : 0-2318-4809
E-mail : SM8RTINTEL@gmail.com

ISBN E-BOOK 978-616-7972-28-2

คำนำ

หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นมาจากประสบการณ์การเรียนและการสอนวิชาฟิสิกส์ของพี่แอน รวม ๆ แล้วมากกว่า 10 ปี โดยพี่แอนและทีมงานได้รวบรวมสูตร และเนื้อหาฟิสิกส์ ม.ปลายทั้งหมด 21 บท พร้อมการทำโจทย์ และเทคนิคที่จะช่วยทำโจทย์ได้เร็วขึ้น ซึ่งจะเหมาะสำหรับน้อง ๆ ม.ปลายใช้ทบทวนและเตรียมสอบในโรงเรียนหรือเตรียมตัวสอบเข้ามหาวิทยาลัย หนังสือเล่มนี้จะช่วยให้น้อง ๆ เข้าใจฟิสิกส์มากยิ่งขึ้น และลบคำบ่นที่ว่า...

“ฟิสิกส์โคตรยาก ใช้สูตรแล้วก็คำตอบไม่ตรง”

“นึกภาพไม่ออก สูตรเยอะ จำไม่ไหว ใช้อย่างไร”

“เรียนฟิสิกส์อย่างไรก็ไม่เข้าใจ”

และกว่าจะเป็นหนังสือเล่มนี้ พี่แอนก็ต้องขอขอบคุณคุณพ่อคุณแม่ที่เลี้ยงดูและให้การอบรมสั่งสอนเป็นอย่างดี ขอบคุณคุณครู อาจารย์ฟิสิกส์ทุกท่านที่ให้ทั้งความรู้ ความรัก ความคิด จนพี่ได้นำความรู้ที่พี่มีไปถ่ายทอดในรูปแบบการสอน และหนังสือเล่มนี้ขึ้นมา ขอบคุณพี่ญี่ปุ่น ตอง น้องเติร์ด พี่ติวเตอร์ที่ช่วยตรวจทานและเรียบเรียงหนังสือเล่มนี้ขึ้นมาจนสำเร็จ สุดท้ายขอบคุณบริษัทสมาร์ท อินเทลลิเจนท์ จำกัด และทีมงานที่ไว้วางใจค่ะ

ฟิสิกส์จะไม่ยากอีกต่อไป ลองหยิบเล่มนี้มาอ่านดูนะคะ ถ้ามีข้อเสนอแนะ ข้อคิดเห็นหรือคำถามสงสัย ส่งมาทางอีเมลพี่แอนได้ที่ tawinan_ann@hotmail.com และ Inbox เข้ามาคุยที่ facebook SeeUBright ได้เลยค่ะ

ทวินันท์ อยู่สุนทร
ติวเตอร์แอน

สารบัญ

01 พื้นฐานทางฟิสิกส์และเวกเตอร์

1) ปริมาณทางฟิสิกส์

ก่อนจะเริ่มทบทวนวิชาฟิสิกส์ มีเรื่องสำคัญที่สุดที่น้อง ๆ ต้องทำความเข้าใจกัน นั่นก็คือปริมาณทางฟิสิกส์ ซึ่งจะเป็นตัวแปรที่ใช้ในการคำนวณเรื่องต่าง ๆ โดยปริมาณทางฟิสิกส์สามารถแบ่งได้เป็น 2 ประเภทหลัก ดังนี้

1. ***ปริมาณสเกลาร์ (Scalar)*** ปริมาณประเภทนี้จะมี**เพียงขนาดเท่านั้น** เช่น มวล ระยะทาง ความหนาแน่น อัตราเร็ว อัตราเร่ง

2. ***ปริมาณเวกเตอร์ (Vector)*** ปริมาณประเภทนี้จะมี**ทั้งขนาดและทิศทาง** เช่น แรง น้ำหนัก การกระจัด ความเร็ว ความเร่ง

Note ความแตกต่างของระยะทาง/การกระจัด อัตราเร็ว/ความเร็ว อัตราเร่ง/ความเร่ง น้อง ๆ สามารถดูรายละเอียดได้ในบทที่ 2 นะคะ

อ้อ เข้าใจแล้วครับ

2) หน่วยในระบบนานาชาติ

ตัวแปรในวิชาฟิสิกส์นั้นมีเยอะมาก แต่ละตัวแปรก็มีหน่วยแตกต่างกันออกไป
จึงต้องมีระบบที่จัดการหน่วยวัด เพื่อให้เข้าใจตรงกันเป็นสากลทั่วโลก

ระบบนี้เรียกว่า ***“ระบบหน่วยระหว่างชาติ (System International of Units)”*** หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ***“หน่วยเอสไอ (SI System)”*** เป็นระบบการวัดที่ปรับปรุงมาจากระบบเมตริก โดยเน้นการสร้างมาจากหน่วยมูลฐานทั้งเจ็ดหน่วยและใช้ระบบเลขฐานสิบ ถือเป็นระบบการวัดที่ใช้แพร่หลายที่สุดในการวัดทางวิทยาศาสตร์

หน่วยมูลฐาน (Basic Units) ในระบบเอสไอ

ประเภท	หน่วย	สัญลักษณ์
ความยาว	เมตร (meter)	m
เวลา	วินาที (second)	s
มวล	กิโลกรัม (kilogram)	kg
อุณหภูมิ	เคลวิน (Kelvin)	K
กระแสไฟฟ้า	แอมแปร์ (Ampere)	A
จำนวนอนุภาค	โมล (mole)	mol
ความเข้มการส่องสว่าง	แคนเดลา (candela)	cd

ในวิชาฟิสิกส์จะมีสมการและตัวแปรต่าง ๆ มากมาย ซึ่งหน่วยของตัวแปรส่วนมากเป็นหน่วยที่เกิดจากการรวมกันของหน่วยมูลฐาน ตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไป เช่น อัตราเร็ว ที่มีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที (m/s) เกิดจากตัวแปร **ระยะทาง** ที่มีหน่วยเป็น เมตร (m) หารด้วยตัวแปร **เวลา** ที่มีหน่วยเป็น วินาที (s) โดยหน่วยเมตรและวินาทีนั้นมาจากหน่วยมูลฐานนั่นเอง

ตัวอย่างเช่น

$$\text{ความเร็ว} = \frac{\text{การกระจัด}}{\text{เวลา}}\ (\mathrm{m/s})$$

$$\text{ความเร่ง} = \frac{\text{ความเร็ว}}{\text{เวลา}}\ (\mathrm{m/s^2})$$

$$\text{แรง} = \text{มวล} \times \text{ความเร่ง}\ \mathrm{kg.m/s^2}$$

3) เวกเตอร์และการรวมเวกเตอร์

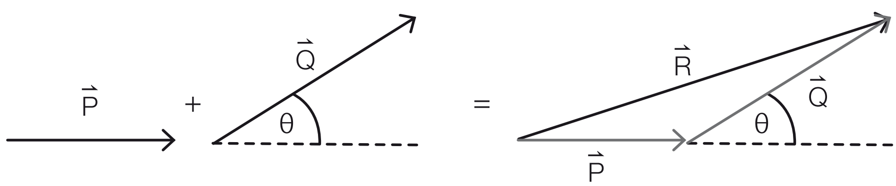
เวกเตอร์นั้นมีความสำคัญมาก
เพราะสามารถนำมาใช้ต่อยอดในการคำนวณทางฟิสิกส์
และก็มีเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ด้วยนะคะ

การคำนวณเวกเตอร์ทางฟิสิกส์ จะใช้ในเรื่องของแรงหรือการเคลื่อนที่ เป็นต้น ซึ่งส่วนมากแล้วจะมีมากกว่า 1 เวกเตอร์ขึ้นไป เราจึงต้องมาเรียนกันว่าหากมีเวกเตอร์มากกว่า 1 เวกเตอร์แล้วจะรวมกันได้อย่างไร ทั้งการบวกเวกเตอร์และลบเวกเตอร์

อ้อจำได้ครับ ผมเพิ่งเรียนในวิชาคณิตศาสตร์มาเลยครับ

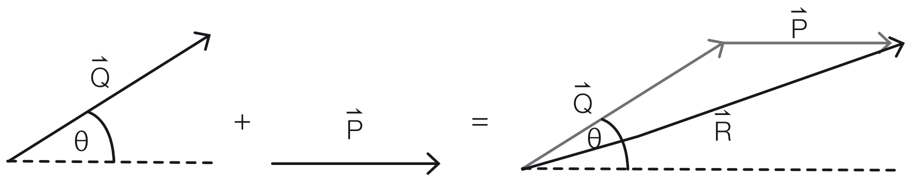
ดีเลยค่ะ ถ้าอย่างนั้นเรามาเริ่มเนื้อหากันเลยนะคะ
วิธีที่ง่ายที่สุดในการรวมเวกเตอร์ คือ การวาดรูปเวกเตอร์ต่อกันนั่นเองค่ะ มาดูตัวอย่างที่ง่ายที่สุดก่อนเลย

3.1 การบวกเวกเตอร์



การบวกเวกเตอร์สามารถทำได้ง่าย ๆ เพียงแค่นำหางของเวกเตอร์ $\vec{Q}$ มาต่อกับหัวของเวกเตอร์ $\vec{P}$ เท่านั้น น้องก็จะได้เวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ ออกมาแล้วค่ะ

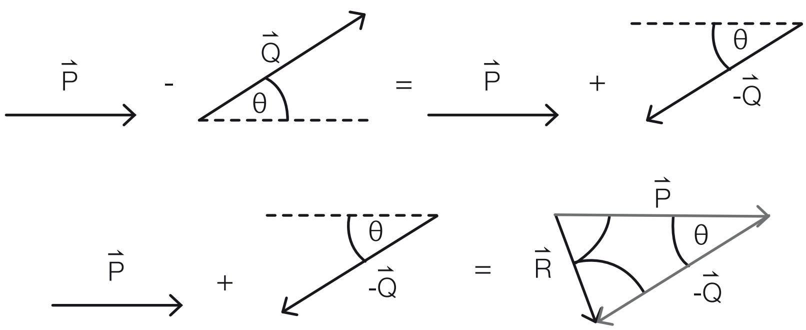
Note เวกเตอร์ลัพธ์ (Resultant Vector) แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{R}$ เป็นเวกเตอร์ที่เริ่มต้นจากปลายหางของเวกเตอร์และไปสิ้นสุดที่หัวลูกศรของอีกเวกเตอร์

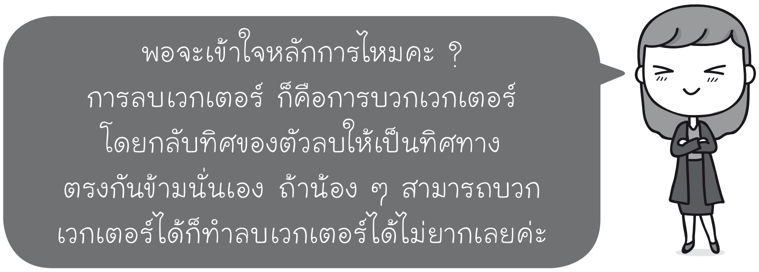


แม้จะสลับตำแหน่งเวกเตอร์ $\vec{P}$ และเวกเตอร์ $\vec{Q}$ แล้วก็ยังได้เวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ ที่มีขนาดและมุมเท่ากัน

ถ้าเข้าใจการบวกเวกเตอร์แล้ว เราลองมาดูการลบเวกเตอร์กันบ้างนะคะ

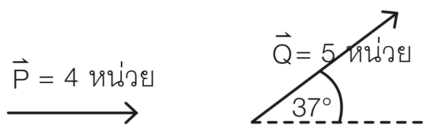
3.2 การลบเวกเตอร์





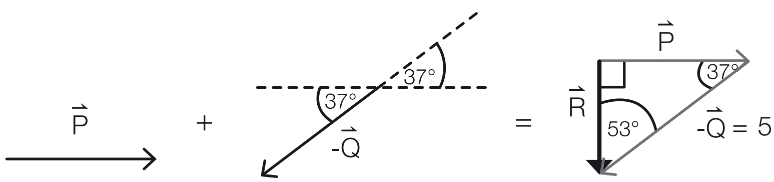
ตัวอย่างที่ 1

ถ้าเวกเตอร์ $\vec{P}$ มีความยาว 4 หน่วย เวกเตอร์ $\vec{Q}$ มีความยาว 5 หน่วย และเวกเตอร์ $\vec{Q}$ ทำมุมแนวระนาบ 37° จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ของ $\vec{P} - \vec{Q}$



<u>**วิธีทำ**</u>

ทำตามขั้นตอนที่บอกไปได้เลยค่ะ โดยจัดการกลับทิศของเวกเตอร์แล้วบวกกันได้เลย

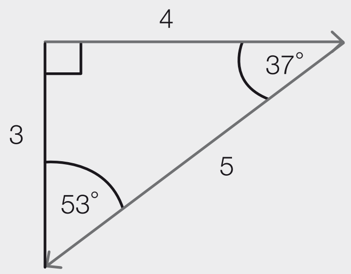


ข้อนี้เป็นเลขลงตัวง่าย ๆ ที่ใช้ทฤษฎีพีทาโกรัส เลขชุดสามเหลี่ยม 3 - 4 - 5 ก็สามารถหาคำตอบได้

คำตอบก็คือ เวกเตอร์ลัพธ์ $\vec{R}$ มีขนาด 3 หน่วย และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{P}$ นั่นเองค่ะ

Note

สามเหลี่ยม 3-4-5 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านยาว 3, 4, 5 หน่วย และมีมุมภายในเป็น 37°, 53° และมุมฉาก โดยสามเหลี่ยม 3-4-5 นั้น

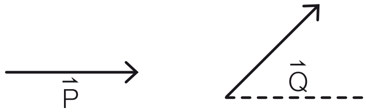


อิงมาจาก ทฤษฎีพีทาโกรัส ที่ใช้สำหรับคำนวณความยาวด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยพีทาโกรัสกล่าวไว้ว่า **ผลรวมของกำลังสองของด้านประกอบมุมฉากจะเท่ากับกำลังสองของด้านตรงข้ามมุมฉาก** ($5^2 = 4^2 + 3^2$)

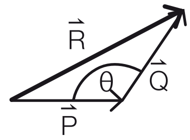
น้อง ๆ สามารถหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ลัพธ์ที่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้โดยใช้ทฤษฎีพีทาโกรัสค่ะ

3.3 การหาขนาดของเวกเตอร์ลัพธ์

เราสามารถหาได้ โดยใช้กฎของ cos หรือ
ทฤษฎีสี่เหลี่ยมด้านขนานได้ค่ะ มาดูการใช้กฎของ cos ก่อนนะคะ

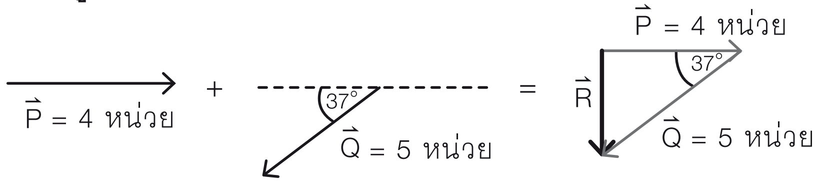


จะได้



กฎของ cos จะได้ว่า $\vec{R}^2 = \vec{P}^2 + \vec{Q}^2 - 2\vec{P}\vec{Q}\cos\theta$ (โดย θ คือ มุมภายในสามเหลี่ยมที่อยู่ตรงข้ามกับ $\vec{R}$)

ลองมาดูตัวอย่างกัน

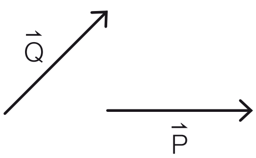


แทนตามสูตร

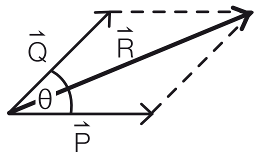
$$\vec{R}^2 = \vec{P}^2 + \vec{Q}^2 - 2\vec{P}\vec{Q}\cos\theta$$
$$\vec{R}^2 = 4^2 + 5^2 - 2(4)(5)\cos 37^\circ$$
$$|\vec{R}| = 3 \text{ หน่วย}$$

ถ้าต่อเวกเตอร์แบบหัวต่อหางเป็นรูป r
อย่าลืมใช้สูตรตามกฎของ cos นะคะ $\vec{R}^2 = \vec{P}^2 + \vec{Q}^2 - 2\vec{P}\vec{Q}\cos\theta$

ต่อมาเรามาดูการใช้ทฤษฎีสี่เหลี่ยมด้านขนาน

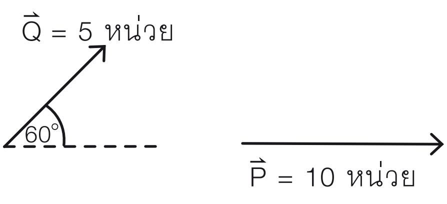


จะได้

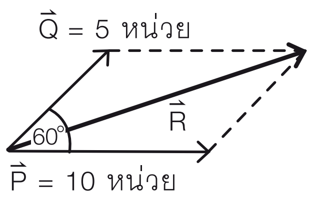


เราจะใช้สูตร $\vec{R}^2 = \vec{P}^2 + \vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q}\cos\theta$ (โดย θ คือมุมระหว่าง $\vec{P}$ กับ $\vec{Q}$ ทำมุมกัน

ลองมาดูตัวอย่างกัน



จะได้



แทนค่าในสูตร $\vec{R}^2 = \vec{P}^2 + \vec{Q}^2 + 2\vec{P}\vec{Q}\cos\theta$

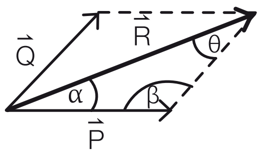
$$\vec{R}^2 = 10^2 + 5^2 + 2(10)(5)\cos 60^\circ$$

$$|\vec{R}| = 13.23 \text{ หน่วย}$$

ถ้าต่อเวกเตอร์แบบหางต่อหางได้รูป □ ด้านขนาน
อย่าลืมใช้สูตรบวกนะคะ $\vec{R}^2 = \vec{P}^2 + \vec{Q}^2 \oplus 2\vec{P}\vec{Q}\cos\theta$

3.4 การหามุมของเวกเตอร์ลัพธ์

การหามุมของเวกเตอร์ลัพธ์ เราจะใช้กฎของ sin เข้ามาช่วยค่ะ ไปดูสูตรกัน



$$\tan\alpha = \frac{Q\sin\theta}{P + Q\cos\theta}$$

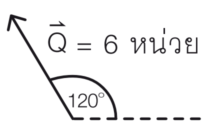
หรือใช้กฎของ sin

$$\frac{\sin\theta_A}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta_A} = \frac{\sin\theta_B}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta_B} = \frac{\sin\theta_C}{\text{ความยาวด้านตรงข้ามมุม } \theta_C}$$

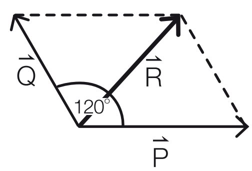
จะได้

$$\frac{\sin\alpha}{|\vec{Q}|} = \frac{\sin\theta}{|\vec{P}|} = \frac{\sin\beta}{|\vec{R}|}$$

ลองมาดูตัวอย่างกัน



จะได้



ใช้สูตร $\vec{R}^2 = \vec{P}^2 + \vec{Q}^2 + 2\,\vec{P}\vec{Q}\cos\theta$

$$\vec{R}^2 = (8)^2 + (6)^2 + 2(8)(6)\cos 120^\circ$$

$$|\vec{R}| = 7.2 \text{ หน่วย}$$

หามุม α จาก

$$\tan\alpha = \frac{6\sin 120^\circ}{8+6\cos 120^\circ}$$

$$= \frac{6\sin(180^\circ-60^\circ)}{8+6\cos(180^\circ-60^\circ)}$$

$$= \frac{6\sin 60^\circ}{8+6(-\cos 60^\circ)}$$

$$\tan\alpha = 1.03$$

$$\alpha = \tan^{-1} 1.03$$

$$\alpha \approx 45.8^\circ \text{ กับแนวแกน } x$$

ดังนั้น $|\vec{R}| = 7.2$ หน่วย มีทิศทางทำมุม 45.8° กับแนวแกน x

3.5 เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (Unit Vector)

อย่างที่บอกไปว่าเวกเตอร์คือ ปริมาณทางฟิสิกส์ที่ระบุทั้ง "ขนาด" และ "ทิศทาง" เวกเตอร์หนึ่งหน่วยก็คือการเขียนระบุ "ทิศทาง" ของเวกเตอร์นั้นเองค่ะ

ยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{A}$

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A} = |\vec{A}| = A$

ทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{A} = \dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

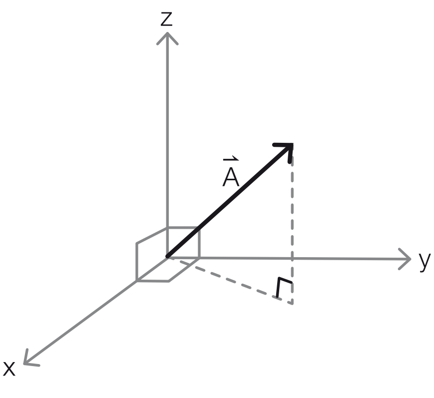
$\dfrac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ นี่แหละคือเวกเตอร์หนึ่งหน่วย เราจะเอาเวกเตอร์มาหารด้วยขนาดของตัวมันเองค่ะ หรือเราจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{e}_A$ ซึ่งก็คือเวกเตอร์ขนาด 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\vec{A}$ นั่นเองค่ะ หรือถ้าเราจะเขียนสวย ๆ สไตล์เวกเตอร์ ที่ต้องระบุทั้ง "ขนาด" และ "ทิศทาง" จะเขียนได้ดังนี้

$$\vec{A} = A\vec{e}_A$$

การเขียนเวกเตอร์จึงมีความสำคัญมาก ๆ ที่เราต้องระบุทิศทาง และขนาด แต่เราจะใช้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยเป็นตัวช่วยบอกค่ะ

4) องค์ประกอบเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

ระบบพิกัดฉาก คือระบบที่ช่วยเราวิเคราะห์สิ่งต่าง ๆ ในมุมมอง 3 มิติ ซึ่งเป็นการมองผ่าน 3 แกน ได้แก่ แกน x, แกน y, แกน z หรือถ้าเรียกง่าย ๆ ก็คือ กว้าง ยาว สูง นั่นแหละค่ะ (**ทั้ง 3 แกนนี้ตั้งฉากซึ่งกันและกันนะคะ**)

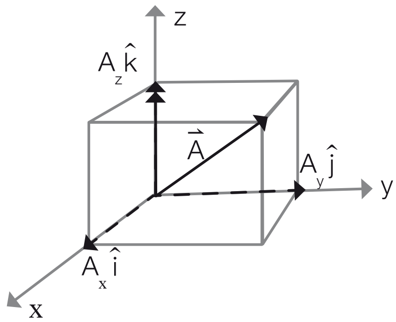


เราสามารถใช้ประโยชน์จากเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่กล่าวไปก่อนหน้านี้ได้ โดยสมมติเวกเตอร์ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งในระบบพิกัดฉาก การระบุ “ขนาด” และ “ทิศทาง” ในระบบพิกัดฉากจะต้องแยกทั้ง “ขนาด” และ “ทิศทาง” ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ออกไปตามแกน x, y, z

ทิศทางที่ระบุตามแกน x, y, z ก็คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ ตามลำดับค่ะ

ขนาดของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ตามทิศทางต่าง ๆ ก็คือ A_x, A_y, A_z

ดังนั้นจะได้เป็น $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$



ถ้าอยากรู้ว่าเวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำมุมเท่าไรกับแต่ละแกน เราก็จะเขียนได้ดังนี้ค่ะ

$A_x = A\cos\theta_x \rightarrow \theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{A_x}{A}\right)$ โดยที่ θ_x คือมุมที่เวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำกับแกน x

$A_y = A\cos\theta_y \rightarrow \theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{A_y}{A}\right)$ โดยที่ θ_y คือมุมที่เวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำกับแกน y

$A_z = A\cos\theta_z \rightarrow \theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{A_z}{A}\right)$ โดยที่ θ_z คือมุมที่เวกเตอร์ $\vec{A}$ ทำกับแกน z

แทนค่าก็จะได้ $\vec{A} = A(\cos\theta_x)\hat{i} + A(\cos\theta_y)\hat{j} + A(\cos\theta_z)\hat{k}$

หรืออาจเขียนแทนได้ว่า $\vec{A} = A(\cos\theta_x,\ \cos\theta_y,\ \cos\theta_z)$ โดยการหาขนาดของเวกเตอร์ $|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 2

จงหาขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ โดย $\vec{A} = (0, 2, 4)$ และ $\vec{B} = (4, 3, 5)$

วิธีคิด เวกเตอร์ $\vec{A} = (0, 2, 4)$ ซึ่งหมายถึงเวกเตอร์ที่มีหางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0, 0) และหัวลูกศรอยู่ที่พิกัด (0, 2, 4)

มีขนาดตามแกน x เท่ากับ 0 หน่วย

มีขนาดตามแกน y เท่ากับ 2 หน่วย

มีขนาดตามแกน z เท่ากับ 4 หน่วย

หรืออาจเขียนได้ว่า $\vec{A} = 2\hat{j} + 4\hat{k}$

เวกเตอร์ $\vec{B} = (4, 3, 5)$ ซึ่งหมายถึงเวกเตอร์ที่มีหางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0, 0) และหัวลูกศรอยู่ที่พิกัด (4, 3, 5)

มีขนาดตามแกน x เท่ากับ 4 หน่วย

มีขนาดตามแกน y เท่ากับ 3 หน่วย

มีขนาดตามแกน z เท่ากับ 5 หน่วย

หรืออาจเขียนได้ว่า $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}$

หากเราอยากรู้ว่า เวกเตอร์จากจุด (0, 2, 4) ไปจุด (4, 3, 5) หรือเวกเตอร์ที่ลากจากหัวเวกเตอร์ $\vec{A}$ ไปหัวเวกเตอร์ $\vec{B}$ มีหน้าตาเป็นอย่างไร เราก็ทำได้อย่างง่ายดาย ไม่ต้องไปวาดรูป 3 มิติให้ยุ่งยาก โดยการนำเวกเตอร์ทั้งสองมาลบกัน ให้เวกเตอร์ปลายทางเป็นตัวตั้งลบด้วยเวกเตอร์ต้นทาง ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \vec{B} - \vec{A} \\
&= (4, 3, 5) - (0, 2, 4) \\
&= (4 - 0, 3 - 2, 5 - 4) \\
&= (4, 1, 1)
\end{aligned}
$$

หรือ

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= \vec{B} - \vec{A} \\
&= (4\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k}) - (2\hat{j} + 4\hat{k}) \\
&= (4 - 0)\hat{i} + (3 - 2)\hat{j} + (5 - 4)\hat{k} \\
&= 4\hat{i} + 1\hat{j} + 1\hat{k}
\end{aligned}
$$

โดยขนาดของเวกเตอร์

$|\overrightarrow{AB}| = AB = \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ หน่วย และมุมที่ทำกับแกนต่าง ๆ เป็นดังนี้

มุมที่ $\overrightarrow{AB}$ ทำกับแกน x ; $\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{AB_x}{AB}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)$

$= 19.47^\circ$

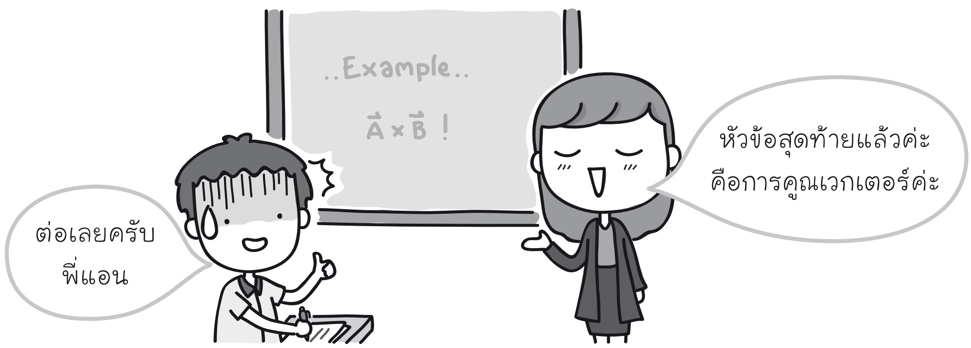
มุมที่ $\overrightarrow{AB}$ ทำกับแกน y ; $\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{AB_y}{AB}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

$= 76.37^\circ$

มุมที่ $\overrightarrow{AB}$ ทำกับแกน x ; $\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{AB_z}{AB}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

$= 76.37^\circ$

ระวัง ! **เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ไม่เท่ากับเวกเตอร์ $\overrightarrow{BA}$ แต่จะมีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางตรงกันข้าม**



5) การคูณเวกเตอร์

การคูณเวกเตอร์แบ่งออกได้เป็น 2 ประเภท

1. ผลคูณเวกเตอร์เชิงสเกลาร์ (Scalar Product) ซึ่งจะแทนด้วยเครื่องหมายจุด เช่น $\vec{A} \bullet \vec{B}$ ผลคูณแบบนี้จึงมีอีกชื่อหนึ่งว่า Dot Product

2. ผลคูณเวกเตอร์เชิงเวกเตอร์ (Vector Product) ซึ่งจะแทนด้วยเครื่องหมายคูณ เช่น $\vec{A} \times \vec{B}$ ผลคูณแบบนี้จึงมีอีกชื่อหนึ่งว่า Cross Product (กากบาทนั่นแหละค่ะ)

5.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์

เราเรียกมันว่าผลคูณเชิงสเกลาร์ เพราะผลคูณแบบนี้จะให้คำตอบเป็นปริมาณสเกลาร์นั่นเอง โดยมีสูตรดังนี้ค่ะ

$\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$ โดยที่ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

คุ้น ๆ ไหมคะน้อง ๆ เหมือนในเรื่องเวกเตอร์ที่เราเรียนในวิชาคณิตศาสตร์เลย

สิ่งที่น้อง ๆ ต้องจำคือคุณสมบัติดังต่อไปนี้ค่ะ เพราะเป็นส่วนที่ต่างกันระหว่างผลคูณเชิงสเกลาร์ กับผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. $\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2$
2. $\vec{A} \bullet \vec{B} = \vec{B} \bullet \vec{A}$
3. $\vec{A} \bullet (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \bullet \vec{B}) + (\vec{A} \bullet \vec{C})$
4. $a(\vec{A} \bullet \vec{B}) = (a\vec{A}) \bullet \vec{B} = \vec{A} \bullet (a\vec{B})$ โดยที่ a คือค่าคงที่
5. $\vec{A} \bullet \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$
6. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตัวเดียวกันคูณกัน ผลคูณเชิงสเกลาร์มีค่าเป็น 1

$$\hat{i} \bullet \hat{i} = \hat{j} \bullet \hat{j} = \hat{k} \bullet \hat{k} = 1$$

แต่ถ้าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตั้งฉากกันคูณกัน ผลคูณเชิงสเกลาร์จะมีค่าเป็น 0 ดังนั้น

$$\hat{i} \bullet \hat{j} = \hat{j} \bullet \hat{k} = \hat{k} \bullet \hat{i} = 0$$

7. ถ้าเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้ว $\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$ ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์ทั้งสองตั้งฉากกัน หรือมีเวกเตอร์ใดเวกเตอร์หนึ่งมีค่าเท่ากับ 0

เรามาดูตัวอย่างกันเลยดีกว่าค่ะ

ตัวอย่างที่ 3

จงหา Dot Product ของเวกเตอร์ $\vec{A} = (0, 2, 4)$ และ $\vec{B} = (4, 3, 5)$

ในกรณีที่โจทย์ให้ค่าเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ มา เราสามารถนำ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ คูณกันได้เลยตามคุณสมบัติของผลคูณเชิงสเกลาร์

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = (0)(4) + (2)(3) + (4)(5) = 0 + 6 + 20 = 26$$

ดังนั้น Dot Product ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เท่ากับ 26

แต่ถ้าโจทย์ให้ขนาดเวกเตอร์และค่ามุม เราจะใช้สูตร $\vec{A} \bullet \vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta$ ลองดูตัวอย่างกันนะคะ

ตัวอย่างที่ 4

จงหา Dot Product ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และเวกเตอร์ $\vec{B}$ ที่มีขนาด 2 และ 5 หน่วย ตามลำดับ โดยเวกเตอร์ทั้งสองทำมุมกัน 60°

$$\begin{aligned} \vec{A} \bullet \vec{B} &= |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\theta \\ &= (2)(5)\cos(60^\circ) \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น Dot Product ของเวกเตอร์ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เท่ากับ 5

5.2 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

หัวข้อนี้เป็นเรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์นะคะ ทำไมจึงเรียกว่า ผลคูณเชิงเวกเตอร์ เนื่องจากผลคูณที่ได้จะให้ค่าเป็นเวกเตอร์ค่ะ ซึ่งเวกเตอร์ใหม่นี้จะต้องมีทั้ง “ขนาด” และ “ทิศทาง”

ขนาดของผลคูณเชิงเวกเตอร์

$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \times |\vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\theta$

โดย θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสอง

ส่วนทิศทาง พี่แอนจะกำหนดให้

$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ โดย $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ทำมุม θ กัน

ต่อจากนี้พี่จะสอนหาทิศทางของผลคูณเชิงเวกเตอร์กันนะคะ โดยการใช้มือค่ะ ให้น้อง ๆ เอา**มือขวา**ขึ้นมาค่ะแล้วทำตามพี่แอนนะ