

ความน่าจะเป็น การประมาณ และ การลดสัญญาณรบกวน

Probability, Estimation, and Denoising

ฉบับปรับปรุงใหม่



พิชิต กิตติสุวรรณ

ความน่าจะเป็น การประมาณ และการลดสัญญาณรบกวน

Probability, Estimation, and Denoising

ฉบับปรับปรุงใหม่

พิชิต กิตติสุวรรณ

ความน่าจะเป็น การประมาณ และการลดสัญญาณรบกวน

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติ

ห้ามทำการลอกเลียนแบบไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ ตลอดจนก๊อปปี้
โดยการถ่ายเอกสารนอกจากจะได้รับอนุญาตจากเจ้าของลิขสิทธิ์

พิมพ์ครั้งที่ 1 กันยายน 2561

พิมพ์ครั้งที่ 2 ตุลาคม 2565

เล่มราคา 200 บาท

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

พิชิต กิตติสุวรรณ.

ความน่าจะเป็น การประมาณ และการลดสัญญาณรบกวน = Probability, Estimation,
and Denoising. -- พิมพ์ครั้งที่ 2. -- กรุงเทพฯ : ทริปเพิลกรุ๊ป, 2565.

175 หน้า

1. ความน่าจะเป็น. I. ชื่อเรื่อง.

519.2

ISBN 978-616-474-945-0

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย



บริษัท ทริปเพิล เอ็ดดูเคชั่น จำกัด

100/64-65 ถ.เทศบาลสงเคราะห์ แขวงลาดยาว เขตจตุจักร กรุงเทพฯ 10900

โทรศัพท์ 0 2954 4727 โทรสาร 0 2954 3406

www.triple-ed.com E-mail : info@triple-ed.com



พิมพ์ที่ : บริษัท ทริปเพิล กรุ๊ป จำกัด โทร.0 2591 6868

คำนิยม

ข้าพเจ้าได้มีโอกาสรู้จักผู้เขียนหนังสือเล่มนี้ คือ รองศาสตราจารย์ ดร.พิชิต กิตติสุวรรณ ครั้งแรกเมื่อเป็นนิสิตในระดับบัณฑิตศึกษา ที่สาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสาร ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ข้าพเจ้าสอนอยู่ นอกจากนี้ข้าพเจ้ายังมีโอกาสได้เป็นประธานสอบวิทยานิพนธ์ของผู้เขียนด้วย ซึ่งเมื่อพิจารณาจากผลการเรียนและวิทยานิพนธ์ในขณะนั้นและผลงานวิจัยที่ผู้เขียนได้ทำอย่างต่อเนื่อง ทำให้ข้าพเจ้ามีความมั่นใจในความสามารถทางคณิตศาสตร์ของผู้เขียนเป็นอย่างยิ่ง โดยเฉพาะด้านความน่าจะเป็นและสถิติ สำหรับหนังสือเล่มแรกที่ข้าพเจ้ามีโอกาสเขียนคำนิยมให้ผู้เขียน คือ หนังสือเรื่องเวฟเล็ต การวิเคราะห์ และการออกแบบ ในเวลานั้นข้าพเจ้าได้แนะนำให้ผู้เขียนทำหนังสือที่เกี่ยวกับ ความน่าจะเป็น สถิติ และการประยุกต์ใช้สำหรับการลดสัญญาณรบกวน ซึ่งเป็นหัวข้อวิจัยที่ผู้เขียนศึกษาและตีพิมพ์ผลงานวิจัยอย่างต่อเนื่องในวารสารวิชาการระดับนานาชาติออกมาอีกเล่มหนึ่ง อย่างไรก็ตามช่วงนั้นลูกศิษย์ของข้าพเจ้าคนนี้มี ความกตัญญู กตเวทิตะ และสนิทกับมารดา มาก ยังไม่พร้อมเพราะเพิ่งสูญเสียมารดาไป

แต่มาบัดนี้เมื่อลูกศิษย์ของข้าพเจ้าคนนี้มีพร้อมและได้นำต้นฉบับหนังสือเรื่อง ความน่าจะเป็น การประมาณ และการลดสัญญาณรบกวน มาให้ข้าพเจ้าพิจารณาเพื่อตรวจทานและเขียนคำนิยม เมื่อข้าพเจ้าพิจารณาเนื้อหาแล้ว มั่นใจเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้อ่านอย่างมาก ไม่ว่าจะเป็นด้านพื้นฐานที่เกี่ยวกับความน่าจะเป็นและการประมาณ หรือด้านประยุกต์ที่เกี่ยวกับการลดสัญญาณรบกวนซึ่งได้ใส่เนื้อหาที่เกี่ยวกับงานวิจัยของลูกศิษย์ข้าพเจ้าคนนี้อย่างดี โดยมีงานวิจัยที่เกี่ยวกับการถดถอยกำลังสองน้อยสุดเพนเนลไลซ์ เพิ่มเข้ามาในฉบับปรับปรุงใหม่ สุดท้ายนี้ข้าพเจ้าขอแสดงความยินดีและเป็นกำลังใจให้ลูกศิษย์คนนี้อย่างยิ่ง ให้ได้สร้างสรรค์ผลงานเพื่อประโยชน์ในวงวิชาการต่อไป

รองศาสตราจารย์ ดร.เจษฎา ชินรุ่งเรือง
อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมไฟฟ้าสื่อสาร ภาควิชาวิศวกรรมไฟฟ้า
คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
สิงหาคม 2565

คำนำ

หนังสือเล่มนี้จัดทำขึ้นจากประสบการณ์ในการศึกษาและทำวิจัยของผู้เขียน ในเรื่องความน่าจะเป็น สถิติ สัญญารบกวนในรูปแบบต่าง ๆ และวิธีการลดสัญญาณรบกวน ซึ่งหนังสือเล่มนี้ได้รวบรวมทฤษฎีพื้นฐานที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นและสถิติทางด้านการประมาณ รวมถึงเนื้อหาในงานวิจัยของผู้เขียน เช่น วิธีการลดสัญญาณรบกวนด้วยการประมาณแบบเบสในรูปแบบต่าง ๆ การประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดที่เขียนในรูปอนุพันธ์ทั้งในรูปหนึ่งมิติและสองมิติ การผสมขนาดเกาส์เซียน และการถดถอยกำลังสองน้อยสุดเพนเนลไลซ์ โดยเน้นที่การออกแบบตัวกำกับ เป็นต้น ซึ่งหนังสือเล่มนี้ได้ใช้คำศัพท์ตามแบบราชบัณฑิตยสถาน นอกจากคำศัพท์บางคำที่ใช้จนคุ้นเคยมาอย่างยาวนานในวงการวิชาการแล้วเท่านั้น

ผู้เขียนหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่สนใจศึกษาด้านความน่าจะเป็น การประมาณ สัญญารบกวน และวิธีการลดสัญญาณรบกวน บ้างไม่มากนักน้อย ซึ่งหากมีคุณความดีใด ๆ ในหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนขออุทิศให้มารดา ผู้ช่วยศาสตราจารย์ วรกร (สุวิมล) กิตติสุวรรณ อดีตอาจารย์ประจำคณะบัญชี มหาวิทยาลัยหอการค้าไทย ซึ่งได้ให้ความรัก ดูแลเอาใจใส่ และเป็นกำลังใจให้ผู้เขียนเสมอมา หากไม่มีท่านคงไม่มีข้าพเจ้าในวันนี้ แต่เป็นที่น่าเสียดายที่ท่านมาด่วนจากไปเสียก่อนที่จะได้เห็นความสำเร็จของข้าพเจ้าหรือให้ข้าพเจ้าได้มีโอกาสทดแทนคุณท่านบ้างก็ตาม

รองศาสตราจารย์ ดร.พิชิต กิตติสุวรรณ
อาจารย์ประจำสาขาวิชาวิศวกรรมโทรคมนาคม คณะวิศวกรรมศาสตร์
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี พื้นที่ศาลายา
สิงหาคม 2565

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	i
สารบัญรูป	iv
บทที่ 1 ความน่าจะเป็น.....	1
1.1 การดำเนินการของเซต.....	1
1.2 สัจพจน์ความน่าจะเป็น.....	2
1.3 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขและทฤษฎีบทของเบส์.....	4
1.4 ตัวแปรสุ่ม.....	5
แบบฝึกหัดบทที่ 1.....	6
บทที่ 2 ตัวแปรสุ่มวิฤต.....	8
2.1 ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็น.....	8
2.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม.....	10
2.3 ค่าคาดหวังและความแปรปรวน.....	12
2.4 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มวิฤตกรณีฟังก์ชันขึ้นกับตัวแปรเดียว.....	13
2.5 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขเมื่อกำหนดเหตุการณ์.....	15
แบบฝึกหัดบทที่ 2.....	17
บทที่ 3 ตัวแปรสุ่มวิฤตหลายตัว.....	20
3.1 ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นร่วม ฟังก์ชันมวลความน่าจะเป็นขอบ และฟังก์ชันการแจก แจงสะสมร่วม.....	20
3.2 ค่าคาดหวัง ความแปรปรวนร่วม สหสัมพันธ์ และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์.....	24
3.3 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข.....	25
3.4 ความเป็นอิสระต่อกัน.....	29
แบบฝึกหัดบทที่ 3.....	32
บทที่ 4 ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง.....	36
4.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม.....	36
4.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็น.....	36
4.3 ตัวแปรสุ่มผสม.....	39
4.4 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องกรณีฟังก์ชันขึ้นกับตัวแปรเดียว.....	43
4.5 ค่าคาดหวังและความแปรปรวน.....	49

	หน้า
แบบฝึกหัดบทที่ 4.....	51
บทที่ 5 ตัวแปรสุ่มต่อเนื่องหลายตัว.....	58
5.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมร่วม ฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วม และฟังก์ชันความหนาแน่นความน่าจะเป็นขอบ.....	58
5.2 ฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มกรณีฟังก์ชันขึ้นกับหลายตัวแปร.....	63
5.3 ค่าคาดหวัง ความแปรปรวนร่วม สหสัมพันธ์ และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์.....	72
5.4 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข.....	75
5.5 ความเป็นอิสระต่อกัน.....	77
แบบฝึกหัดบทที่ 5.....	79
บทที่ 6 ผลรวมของตัวแปรสุ่ม.....	81
6.1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดโมเมนต์.....	81
6.2 ตัวแปรสุ่มเกาส์เซียน.....	84
แบบฝึกหัดบทที่ 6.....	88
บทที่ 7 แบบจำลองสัญญาณรบกวน.....	90
7.1 สัญญาณรบกวนเกาส์เซียนสีขาวแบบวก.....	90
7.2 สัญญาณรบกวนแบบคุน.....	92
7.3 สัญญาณรบกวนเกาส์เซียนปัวซอง.....	95
แบบฝึกหัดบทที่ 7.....	97
บทที่ 8 ทฤษฎีบทพื้นฐานของการประมาณ.....	99
8.1 ตัวประมาณไม่เอนเอียงความแปรปรวนต่ำสุด.....	99
8.2 สถิติที่พอเพียง.....	100
8.3 ทฤษฎีบทราว-แบลคเวลล์.....	101
8.4 ขอบล่างคราเมอร์-ราว.....	102
8.5 แบบจำลองเชิงเส้น.....	104
8.5.1 วิธีกำลังสองน้อยสุดเชิงเส้น.....	105
แบบฝึกหัดบทที่ 8.....	108
บทที่ 9 การประมาณแบบเบส์สำหรับการลดสัญญาณรบกวน.....	111
9.1 การประมาณแบบภายหลังสูงสุด.....	112
9.2 การประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุด.....	116
9.2.1 การประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดในรูปอนุพันธ์แบบหนึ่งมิติ.....	118
9.2.2 การประมาณแบบผิดพลาดกำลังสองเฉลี่ยน้อยสุดในรูปอนุพันธ์แบบสองมิติ.....	123
9.2.3 การผสมขนาดเกาส์เซียน.....	127

	หน้า
9.3 การประมาณพารามิเตอร์ทางสถิติด้วยการประมาณแบบเบส์.....	133
9.4 ตัวอย่างการลดสัญญาณรบกวน.....	137
แบบฝึกหัดบทที่ 9.....	143
บทที่ 10 การถดถอยกำลังสองน้อยสุดเพนเนลไลซ์.....	148
10.1 รูปแบบการถดถอยกำลังสองน้อยสุดเพนเนลไลซ์.....	148
10.1.1 ตัวกำกับไม่คอนเวกซ์ที่สามารถทำให้เกิดจุดเริ่มเปลี่ยนคู่.....	150
10.1.2 ตัวกำกับไม่คอนเวกซ์ที่สามารถทำให้เกิดค่าเอนเอียงน้อย.....	154
แบบฝึกหัดบทที่ 10.....	159
รายการอ้างอิง.....	160
บรรณานุกรม.....	164
ประวัติของผู้เขียน.....	166

สารบัญรูป

	หน้า
1.1 ลักษณะของตัวแปรสุ่ม X	5
2.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ R ในตัวอย่าง 2.2.....	11
2.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ Y ในตัวอย่าง 2.3.....	11
4.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_X(x)$ ในตัวอย่าง 4.1.....	37
4.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_X(x)$ ในตัวอย่าง 4.3.....	40
4.3 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_X(x)$ ในตัวอย่าง 4.4.....	41
4.4 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_X(x)$ ในตัวอย่าง 4.5.....	42
4.5 ลักษณะฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม $Y = X^2$ หรือ $X = \pm\sqrt{Y}$ ในตัวอย่าง 4.6.....	44
4.6 ลักษณะฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในตัวอย่าง 4.7.....	45
4.7 ลักษณะฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในตัวอย่าง 4.8.....	46
4.8 ลักษณะฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในตัวอย่าง 4.9.....	47
4.9 ลักษณะฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_Y(y)$ ในตัวอย่าง 4.9.....	48
4.10 ลักษณะฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในแบบฝึกหัดข้อ 1.....	51
4.11 ลักษณะฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในแบบฝึกหัดข้อ 2.....	52
4.12 ลักษณะฟังก์ชันการแจกแจงสะสม $F_Y(y)$ ในแบบฝึกหัดข้อ 4.....	55
5.1 บริเวณ $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4, y > x$ และลักษณะการอินทิเกรตเพื่อหา $P[Y > X]$	59
5.2 บริเวณ $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ (ก) ลักษณะการอินทิเกรตเพื่อหา $f_X(x)$ (ข) ลักษณะการอินทิเกรตเพื่อหา $f_Y(y)$	60
5.3 บริเวณ $-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ (ก) ลักษณะการอินทิเกรตเพื่อหา $f_X(x)$ (ข) ลักษณะการอินทิเกรตเพื่อหา $f_Y(y)$	61
5.4 บริเวณ $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ และการอินทิเกรตเพื่อหาค่า c	61
5.5 บริเวณ $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, x \leq y$ และการอินทิเกรตเพื่อหา $P[X \leq Y]$	62
5.6 บริเวณ $x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1/2$ และการอินทิเกรตเพื่อหา $P\left[X + Y \leq \frac{1}{2}\right]$	62
5.7 บริเวณของตัวแปรสุ่ม (v, w) คือ R และบริเวณของตัวแปรสุ่ม (x, y) คือ R'	63
5.8 บริเวณ S_{WZ} และการอินทิเกรตเพื่อหา $f_W(w)$ ในตัวอย่าง 5.5.....	66
5.9 บริเวณ S_{WZ} และการอินทิเกรตเพื่อหา $f_W(w)$ ในตัวอย่าง 5.6.....	67
5.10 บริเวณ S_{WZ} และการอินทิเกรตเพื่อหา $f_W(w)$ ในตัวอย่าง 5.7.....	68

	หน้า
5.11 บริเวณ S_{WZ} และการอินทิเกรตเพื่อหา $f_W(w)$ ในตัวอย่าง 5.8.....	69
5.12 บริเวณ S_{WZ} และการอินทิเกรตเพื่อหา $f_W(w)$ ในตัวอย่าง 5.9.....	71
5.13 บริเวณ S_{WZ} และการอินทิเกรตเพื่อหา $f_W(w)$ ในตัวอย่าง 5.10.....	72
5.14 บริเวณ S_{XY} และเส้นทางการอินทิเกรตในตัวอย่าง 5.12.....	73
5.15 บริเวณ S_{XY} และเส้นทางการอินทิเกรตในตัวอย่าง 5.13.....	75
5.16 บริเวณ S_{XY} และเส้นทางการอินทิเกรตในตัวอย่าง 5.14.....	76
5.17 บริเวณ S_{XY} และเส้นทางการอินทิเกรตในตัวอย่าง 5.15.....	77
5.18 บริเวณ S_{WZ} และเส้นทางการอินทิเกรตในแบบฝึกหัดข้อ 2.....	79
5.19 บริเวณ S_{UV} และเส้นทางการอินทิเกรตในแบบฝึกหัดข้อ 3.....	80
9.1 ลักษณะของฟังก์ชันหัดตัวในสมการ 9.9 ของตัวอย่าง 9.1 เมื่อเปรียบเทียบกับฟังก์ชันหัดตัวเชิงเส้นและฟังก์ชันหัดตัว soft-threshold.....	114
9.2 ลักษณะของฟังก์ชันหัดตัวในสมการ 9.13 ของตัวอย่าง 9.2 เมื่อเปรียบเทียบกับฟังก์ชันหัดตัวเชิงเส้นและฟังก์ชันหัดตัว soft-threshold.....	116
9.3 ลักษณะของฟังก์ชันหัดตัวในสมการ 9.24 ของตัวอย่าง 9.3 เมื่อเปรียบเทียบกับฟังก์ชันหัดตัวเชิงเส้นและฟังก์ชันหัดตัว soft-threshold.....	121
9.4 ลักษณะของฟังก์ชันหัดตัวในสมการ 9.25 ของตัวอย่าง 9.4 เมื่อเปรียบเทียบกับฟังก์ชันหัดตัวเชิงเส้นและฟังก์ชันหัดตัว soft-threshold.....	122
9.5 สัญญาณหนึ่งมิติ (ก) ฟังก์ชันไซน์ (ข) ฟังก์ชันไซน์ที่สัญญาณรบกวนระดับ $\sigma_n = 0.05$ (ค) วิธีลดสัญญาณรบกวนด้วยฟังก์ชันหัดตัวเชิงเส้นดังในงานวิจัย [18], PSNR = 89.47 (ง) วิธีลดสัญญาณรบกวนในตัวอย่าง 9.4, PSNR = 91.52.....	139
9.6 สัญญาณสองมิติ (ก) ภาพ Hill (ข) ภาพ Hill ที่สัญญาณรบกวนระดับ $\sigma_n = 20$ (ค) วิธีลดสัญญาณรบกวนด้วยฟังก์ชัน soft-threshold ในงานวิจัย [24], PSNR = 25.29 (ง) วิธีลดสัญญาณรบกวนในตัวอย่าง 9.3, PSNR = 28.97.....	140
9.7 สัญญาณสองมิติ (ก) ภาพ Barbara (ข) ภาพ Barbara ที่สัญญาณรบกวนระดับ $\sigma_n = 30$ (ค) วิธีลดสัญญาณรบกวนด้วยฟังก์ชัน soft-threshold ในตัวอย่าง 9.1, PSNR = 26.01 (ง) วิธีลดสัญญาณรบกวนในตัวอย่าง 9.2, PSNR = 26.51.....	141
10.1 ลักษณะของตัวกำกับ $\phi_{MC}(x)$ และ $\phi(x)$	151
10.2 ลักษณะ PLSR ของตัวกำกับ $\phi_{MC}(x)$ และ $\phi(x)$	154
10.3 ลักษณะของตัวกำกับ $\phi_{\log}(x)$ และ $\phi(x)$	155
10.4 ลักษณะ PLSR ของตัวกำกับ $\phi_{\log}(x)$ และ $\phi(x)$	157

บทที่ 1

ความน่าจะเป็น

ในบทนี้จะกล่าวถึงเรื่องพื้นฐานที่เกี่ยวกับการศึกษา ความน่าจะเป็นสมัยใหม่ คือ การดำเนินการของเซต (set operation) ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) เหตุการณ์ (event) สัจพจน์ความน่าจะเป็น (probability axiom) ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability) ทฤษฎีบทของเบส์ (Bayes' theorem) และ ตัวแปรสุ่ม (random variable)

1.1 การดำเนินการของเซต

ในความเป็นจริงแล้ว เซต (set) เป็นสิ่งที่ไม่นิยามทางคณิตศาสตร์ แต่สามารถเข้าใจได้ว่าเซตหมายถึง กลุ่มของวัตถุที่เราสามารถบอกได้อย่างชัดเจนว่าวัตถุใดเป็นสมาชิกของเซตนั้น ซึ่งในหัวข้อนี้จะศึกษาถึง การดำเนินการของเซต (set operation) เพื่อเป็นพื้นฐานในการศึกษาเกี่ยวกับความน่าจะเป็น ดังนี้

ในกรณีที่พิจารณาให้เซตทั้งหมดเป็นเซตย่อย (subset) ของเซตใหญ่ U ซึ่งเรียกว่า เอกภพสัมพัทธ์ (relative universe) และ A, B คือ เซตใด ๆ แล้วเราจะนิยามการดำเนินการของเซต ดังนี้

(1) ยูเนียน (union) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ คือ เซตของ x ซึ่ง x เป็นสมาชิกของ A หรือ B กล่าวคือ

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$$

(2) อินเตอร์เซกชัน (intersection) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ คือ เซตของ x ซึ่ง x เป็นสมาชิกของ A และ B กล่าวคือ

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

(3) ผลต่าง (difference) ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A - B$ คือ เซตของ x ซึ่ง x เป็นสมาชิกของ A แต่ไม่เป็นสมาชิกของ B กล่าวคือ

$$A - B = \{x : x \in A \text{ และ } x \notin B\}$$

(4) ส่วนเติมเต็ม (complement) ของ A (ในหนังสือเล่มนี้จะเทียบกับเอกภพสัมพัทธ์ U ในทุกกรณี) เขียนแทนด้วย A^C คือ เซตของ x ซึ่ง x ไม่เป็นสมาชิกของ A กล่าวคือ

$$A^C = U - A$$

1.2 สัจพจน์ความน่าจะเป็น

นิยาม การทดลองสุ่ม (random experiment) คือ การทดลองที่ไม่สามารถบอกล่วงหน้าได้ว่า ผลลัพธ์ (outcome) จะออกมาในรูปแบบใด โดยเซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม เรียกว่า ปริภูมิตัวอย่าง (sample space) S และเซตย่อย (subset) ของปริภูมิตัวอย่างที่เราสนใจ เรียกว่า เหตุการณ์ (event) $A \subseteq S$ และ P คือ ความน่าจะเป็น (probability) แล้ว สัจพจน์ความน่าจะเป็นมี 3 ข้อดังนี้

(1) ทุกเหตุการณ์ $A \subseteq S$ แล้ว $P(A) \geq 0$

(2) $P(S) = 1$

(3) ถ้า $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วม (mutually exclusive events) กล่าวคือ $A_i \cap A_j = \phi, i \neq j$ เมื่อ ϕ คือ เซตว่าง (empty set) แล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \dots \cup A_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

โดยสัจพจน์ข้อ 3 สามารถใช้ในกรณีเหตุการณ์มีจำนวนไม่จำกัดได้ดังนี้ ถ้า $A_1, A_2, \dots$ เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมแล้ว

$$P(A_1 \cup A_2 \dots) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

ตัวอย่าง 1.1 ทดลองหยิบลูกบอลแล้วใส่คืนจำนวน 2 ครั้งจากกล่องที่ใส่ลูกบอล 2 ลูก โดยลูกหนึ่งสีแดง (R) และอีกลูกหนึ่งสีดำ (B) จงหาปริภูมิตัวอย่าง S และเหตุการณ์ A ที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงก่อนสีดำ

วิธีทำ $S = \{RB, RR, BR, BB\}$ และ $A = \{RB, RR\}$

ตัวอย่าง 1.2 จงแสดงว่า $P(A^C) = 1 - P(A)$ เมื่อ $A \subseteq S$

วิธีทำ เมื่อ $A \cap A^C = \phi$ จากสัจพจน์ความน่าจะเป็นข้อ 3 ดังนั้น

$$P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$$

เมื่อ $A \cup A^C = S$ จากสัจพจน์ความน่าจะเป็นข้อ 2 ดังนั้น

$$P(A \cup A^C) = P(S) = 1$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(A) + P(A^C) = 1$ หรือ $P(A^C) = 1 - P(A)$

ตัวอย่าง 1.3 จงแสดงว่า $P(\phi) = 0$ เมื่อ ϕ คือ เซตว่าง

วิธีทำ เมื่อ $A \cap \phi = \phi$ จากสัจพจน์ความน่าจะเป็นข้อ 3 ดังนั้น

$$P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi)$$

แต่ $A \cup \phi = A$ หรือ $P(A \cup \phi) = P(A)$ ดังนั้น $P(\phi) = 0$

ตัวอย่าง 1.4 จงแสดงว่า $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

วิธีทำ พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างเซต $A - B$ และ $A \cap B$ จากนิยามการดำเนินการของเซต

$$A - B = \{x : x \in A \text{ และ } x \notin B\} \text{ และ } A \cap B = \{x : x \in A \text{ และ } x \in B\}$$

โดยที่

$$(A - B) \cap (A \cap B) = \{x : (x \in A \text{ และ } x \notin B) \text{ และ } (x \in A \text{ และ } x \in B)\} = \phi$$

จากสัจพจน์ความน่าจะเป็นข้อ 3 ดังนั้น

$$P((A - B) \cup (A \cap B)) = P(A - B) + P(A \cap B)$$

โดยที่

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (A \cap B) &= \{x : (x \in A \text{ และ } x \notin B) \text{ หรือ } (x \in A \text{ และ } x \in B)\} \\ &= \{x : x \in A\} = A\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

ตัวอย่าง 1.5 นิยามเซตย่อย $A \subseteq B$ เมื่อสมาชิกทั้งหมดของเซต A เป็นสมาชิกของเซต B แล้วจงแสดงว่า $P(A) \leq P(B)$

วิธีทำ ในกรณีที่ $A \subseteq B$ แล้ว

$$A = \{x : x \in A \text{ แล้ว } x \in B\} \text{ และ } A^c \cap B = \{x \notin A \text{ และ } x \in B\}$$

ดังนั้น

$$A \cap (A^c \cap B) = \{x : (x \in A \text{ แล้ว } x \in B) \text{ และ } (x \notin A \text{ และ } x \in B)\} = \phi$$

จากสัจพจน์ความน่าจะเป็นข้อ 3 ดังนั้น $P(A \cup (A^c \cap B)) = P(A) + P(A^c \cap B)$

พิจารณา

$$\begin{aligned}A \cup (A^c \cap B) &= \{x : (x \in A \text{ แล้ว } x \in B) \text{ หรือ } (x \notin A \text{ และ } x \in B)\} \\ &= \{x : x \in B\} = B\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B) \geq P(A)$ เมื่อ $P(A^c \cap B) \geq 0$

ตัวอย่าง 1.6 จงแสดงว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

วิธีทำ ก่อนอื่นจะแสดงว่า $(A - B) \cap (B - A) \cap (A \cap B) = \phi$ ซึ่งในตัวอย่าง 1.5 ได้แสดงแล้วว่า $(B - A) \cap (A \cap B) = \phi$ ดังนั้น

$$(A - B) \cap (B - A) \cap (A \cap B) = (A - B) \cap \phi = \phi$$

จากสัจพจน์ความน่าจะเป็นข้อ 3 ดังนั้น

$$P((A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

โดยที่ $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B) = A \cup B$ (สำหรับการพิสูจน์ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด)
 ดังนั้น

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B - A) + P(A \cap B)$$

ซึ่งจากตัวอย่าง 1.4 พบว่า $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$ หรือ

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

และเมื่อสลับตัวแปร A และ B จะพบว่า $P(B) = P(B - A) + P(A \cap B)$ หรือ

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

ดังนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

1.3 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขและทฤษฎีบทของเบส์

เราจะนิยามความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability) ของเหตุการณ์ 2 เหตุการณ์ดังนี้ ให้ A และ B เป็นสองเหตุการณ์ใด ๆ ของปริภูมิตัวอย่าง S โดย $P(B) > 0$ แล้ว ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของ A เมื่อกำหนด B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(A | B)$ คือ

$$P(A | B) = P(A \cap B) / P(B) = P(AB) / P(B) \text{ เมื่อ } AB = A \cap B$$

ซึ่งจะพิสูจน์สัจพจน์ความน่าจะเป็นทั้ง 3 ข้อของ $P(A | B)$ ดังนี้

(1) $P(A | B) \geq 0$

พิสูจน์ จาก $P(AB) \geq 0$ และ $P(B) \geq 0$ ดังนั้น $P(A | B) \geq 0$

(2) $P(S | B) = 1$

พิสูจน์ $P(S | B) = P(SB) / P(B) = P(B) / P(B) = 1$

(3) ถ้า $A_1, A_2, \dots$ เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดพร้อมแล้ว

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

พิสูจน์

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \frac{P((A_1 \cup A_2 \cup \dots)B)}{P(B)} = \frac{P(A_1B \cup A_2B \cup \dots)}{P(B)}$$

เนื่องจาก $A_1, A_2, \dots$ เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกัน ดังนั้น $A_1B, A_2B, \dots$ ก็เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกันด้วย ดังนั้น

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i | B\right) = \frac{1}{P(B)} \sum_{i=1}^{\infty} P(A_iB) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$$

โดยต่อไปนี้จะศึกษาถึงสูตรอย่างหนึ่งที่เป็นประโยชน์มากในเรื่องความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข คือ ทฤษฎีบทของเบส์ (Bayes' theorem) ดังนี้ ถ้าเหตุการณ์ $B_1, B_2, \dots, B_n$ แบ่งกันปริภูมิตัวอย่าง S โดย $B_i B_j = \phi, i \neq j, \bigcup_{i=1}^n B_i = S$ และ $P(B_i) > 0, i = 1, \dots, n$ ดังนั้นสำหรับเหตุการณ์ A ใดๆ จะพบว่า

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A | B_i)$$

พิสูจน์ ถ้า $B_i B_j = \phi, i \neq j$ แล้ว $AB_i \cap AB_j = \phi$ จากสัจพจน์ความน่าจะเป็นข้อ 3 ดังนั้น

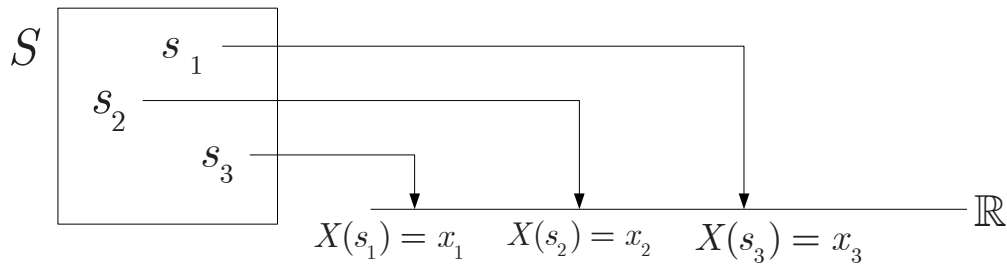
$$P(AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n) = \sum_{i=1}^n P(AB_i)$$

และจาก $A = AS = A\left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) = AB_1 \cup AB_2 \cup \dots \cup AB_n$ ดังนั้น

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(AB_i) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$

1.4 ตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่ม (random variable) X จะทำหน้าที่กำหนดค่าตัวเลขจำนวนจริงให้กับผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นในปริภูมิตัวอย่าง S ดังนั้น ตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชันจากปริภูมิตัวอย่างไปยังจำนวนจริง $X : S \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งมีลักษณะดังรูป 1.1 ในกรณีทั่วไปถ้าพิสัย (range) ของตัวแปรสุ่ม $S_X = \{x : x = X(s), s \in S\}$ มีสมาชิกเป็นจำนวนที่นับได้เราจะเรียกตัวแปรสุ่ม X ว่า ตัวแปรสุ่มวิฤต (discrete random variable) แต่ถ้ามีสมาชิกเป็นจำนวนที่นับไม่ได้เราจะเรียกตัวแปรสุ่ม X ว่า ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable)



รูป 1.1 ลักษณะของตัวแปรสุ่ม X

แบบฝึกหัดบทที่ 1

1) เมื่อ $A_1, A_2, \dots$ เป็นเหตุการณ์ใด ๆ จงพิสูจน์อสมการบูล (Boole inequality) ดังต่อไปนี้

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

วิธีทำ กำหนดให้ $C_1 = A_1$ และ $C_n = A_1^C \cap A_2^C \cap \dots \cap A_{n-1}^C \cap A_n, n = 2, 3, \dots$ ดังนั้น $C_i C_j = \phi, i \neq j$ จากสัจพจน์ความน่าจะเป็นข้อ 3 ทำให้

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(C_n)$$

และจาก $C_n \subseteq A_n, n \geq 1$ ทำให้ $P(C_n) \leq P(A_n)$ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(C_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \text{ หรือ } P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

และจาก $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ หรือ $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$ ทำให้

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

2) เมื่อ $A_1, A_2, \dots$ เป็นเหตุการณ์ใดๆ จงพิสูจน์อสมการบอนเฟอร์โรนี (Bonferroni inequality)

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^C)$$

วิธีทำ กำหนดให้ $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C$ แล้ว $X^C = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right)^C = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

จาก $P(X^C) = 1 - P(X)$ ดังนั้น

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right)$$

จากอสมการบูล $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^C\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^C)$ ดังนั้น

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^C)$$

3) จงแสดงว่า $P(E \cap F^C) = P(E) - P(E \cap F)$

วิธีทำ เราต้องการพิสูจน์ว่า

$$P(E \cap F^C) + P(E \cap F) = P(E)$$

จาก $(E \cap F^C) \cap (E \cap F) = \phi$ ดังนั้น

$$P((E \cap F^C) \cup (E \cap F)) = P(E \cap F^C) + P(E \cap F)$$

จาก

$$\begin{aligned}(E \cap F^C) \cup (E \cap F) &= \{x : (x \in E \text{ และ } x \notin F) \text{ หรือ } (x \in E \text{ และ } x \in F)\} \\ &= \{x : x \in E\} = E\end{aligned}$$

ดังนั้น $P((E \cap F^C) \cup (E \cap F)) = P(E)$ ทำให้

$$P(E) = P(E \cap F^C) + P(E \cap F)$$