



กลศาสตร์ ของวัสดุ

ไพโรจน์ สิงห์ศักดิ์

กลศาสตร์ของวัสดุ

(พิมพ์ครั้งที่ 3)

กลศาสตร์ของวัสดุ

Mechanics of Materials

ไพโรจน์ สิงห์นัดกิจ

 **สำนักพิมพ์**
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

2566

580.-

ไฟโรจน์ สิงหนัดกิจ

กลศาสตร์ของวัสดุ/ไฟโรจน์ สิงหนัดกิจ

1. กลศาสตร์. 2. วัสดุศาสตร์.

620.11

ISBN (e-book) 978-974-03-4207-6

สพจ. 1652/3



สรรคุณคำวิชาการ สู่สังคม
Knowledge to All
www.cupress.chula.ac.th

สิทธิในการผลิตและพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นของสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยแต่ผู้เดียว

การผลิตและการลอกเลียนหนังสือเล่มนี้ไม่ว่ารูปแบบใดทั้งสิ้น

ต้องได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรจากสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

จัดทำโดย สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ครั้งที่ 3 พ.ศ. 2566

www.cupress.chula.ac.th [CUB6511-009K]

โทร. 0-2218-3562-3

บรรณาธิการอำนวยการ : ศาสตราจารย์ ดร.อรรณพ หาญสืบสาย นางอรทัย นันทนาติชัย

กองบรรณาธิการฝ่ายวิชาการ : ศาสตราจารย์กิตติคุณ ดร.ปิยนถ บุนนาค รองศาสตราจารย์ ดร.พิมพ์พันธ์ เดชะคุปต์

รองศาสตราจารย์ นายแพทย์วิชฌ พันธ์เจริญ รองศาสตราจารย์ ดร.วิมลวรรณ พิมพ์พันธ์ุ

ผู้ประสานงาน : วาสนา ชำเซ็น

พิสูจน์อักษร : ลักษมณ รัชตะวณิชย์

ออกแบบปก : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ภาพปก : <https://pixabay.com/photos/skyscrapers-bridge-port-skyline-1598418/>

ออกแบบรูปเล่ม : ไฟโรจน์ สิงหนัดกิจ

สั่งซื้อได้ที่

ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

<http://www.chulabook.com>

โทร. 08-6323-3703-4

customer@cubook.chula.ac.th, info@cubook.chula.ac.th

Apps: CU-eBook Store

ขอขอบคุณความดีของหนังสือเล่มนี้ให้แก่คุณพ่อและคุณแม่ของผู้เขียน

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 3

หนังสือกลศาสตร์ของวัสดุ (ฉบับปรับปรุงใหม่) เล่มนี้มีการเพิ่มเติมเนื้อหาและสื่อการเรียนการสอนในรูปแบบวิดีโอการบรรยายเพิ่มเติมจากที่พิมพ์ไป 2 ครั้งก่อนหน้านี้ หนังสือฉบับปรับปรุงใหม่นี้มีการเพิ่มเนื้อหาในหัวข้อ 10.4 เรื่องเกณฑ์ความเสียหาย เนื้อหาเรื่องเกณฑ์ความเสียหายนี้จะช่วยให้ผู้อ่านมีมุมมองในศาสตร์ทางด้านกลศาสตร์ของวัสดุที่กว้างมากขึ้น เกณฑ์ความเสียหายที่นำเสนอจำนวน 4 เกณฑ์เหมาะที่จะใช้กับวัสดุเหนียวหรือวัสดุเปราะตามแนวคิดเบื้องต้นของเกณฑ์นั้น ๆ นอกจากการเพิ่มเติมเนื้อหาในบทที่ 10 แล้วยังมีการเพิ่มบทที่ 12 ซึ่งเป็นคำถามทบทวนและแบบทดสอบความเข้าใจเนื้อหาในบทที่ 2 ถึงบทที่ 11 แบบทดสอบดังกล่าวมีลักษณะเป็นคำถามปรนัยหลายตัวเลือก คำถามถูกผิด และคำถามเติมคำตอบสั้น ๆ คำถามในบทนี้จะช่วยให้ผู้อ่านได้ทดสอบตัวเองว่ามีความเข้าใจในเนื้อหามากน้อยเพียงใด นอกจากการเพิ่มเติมเนื้อหาในบทที่ 10 และบทที่ 12 แล้ว ผู้เขียนยังได้เพิ่มวิดีโอการบรรยายในส่วนของเนื้อหาและโจทย์ตัวอย่าง โดยผู้อ่านสามารถดูวิดีโอการบรรยายส่วนของเนื้อหาในบทต่าง ๆ ได้ที่ shorturl.at/kwxJR วิดีโอโจทย์ตัวอย่างที่ shorturl.at/fqwy5 และดาวน์โหลดเอกสารก่อนและหลังเรียนได้จาก shorturl.at/jmS89 ทั้งนี้ผู้เขียนได้นำรหัสคิวอาร์ (QR code) สำหรับวิดีโอส่วนเนื้อหาแสดงที่หน้าแรกของบท และรหัสคิวอาร์สำหรับวิดีโอ โจทย์ตัวอย่างแสดงในหัวข้อแบบฝึกหัด ผู้เขียนหวังว่าวิดีโอคำบรรยายและโจทย์ตัวอย่างจะช่วยให้นิสิต นักศึกษา ตลอดจนอาจารย์ผู้สอนสามารถเข้าใจเนื้อหาและนำไปประยุกต์ใช้ได้โดยง่ายต่อไป

ผู้เขียนขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่ให้การสนับสนุนการเขียนหนังสือเล่มนี้ด้วยดีเสมอมา และขอขอบคุณสำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยสำหรับการจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้เป็นครั้งที่ 3

ไพโรจน์ สิงหนัดกิจ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มกราคม 2566

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 2

กลศาสตร์ของวัสดุเป็นศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของชิ้นส่วนทางวิศวกรรมที่รับภาระทางกล ชิ้นส่วนทางวิศวกรรมในที่นี้รวมถึงชิ้นส่วนรับภาระในแนวแกน ชิ้นส่วนรับภาระบิดและชิ้นส่วนรับภาระดัด เนื้อหาส่วนใหญ่ของหนังสือเล่มนี้แสดงการหาความเค้นและการเปลี่ยนรูปของชิ้นส่วนทางกลดังกล่าว รวมทั้งอธิบายถึงนิยามของความเค้นและความเครียดในวัสดุที่รับภาระทางกล พฤติกรรมของวัสดุทางวิศวกรรมภายใต้ภาระทางกลและการแปลงรูปความเค้น นอกจากนี้เนื้อหาของหนังสือเล่มนี้จะเป็นพื้นฐานความรู้ที่จำเป็นสำหรับนิสิตนักศึกษาที่จะต้องเรียนวิชาการออกแบบชิ้นส่วนทางกลในอนาคตแล้ว เนื้อหาส่วนใหญ่ของหนังสือยังเป็นพื้นฐานความรู้ที่จำเป็นสำหรับวิศวกรในสาขาอื่น ๆ ที่ต้องทำงานเกี่ยวข้องกับระบบทางกล หนังสือเล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหาจำนวน 11 บท โจทย์ตัวอย่างสำหรับเนื้อหาในหัวข้อที่สำคัญ ๆ และแบบฝึกหัดท้ายบทพร้อมเฉลยคำตอบ

ผู้เขียนมีความยินดีที่หนังสือกลศาสตร์ของวัสดุเล่มนี้ได้รับการตอบรับเป็นอย่างดีในการพิมพ์ครั้งแรก ผู้เขียนยังคงหวังเป็นอย่างยิ่งว่าหนังสือเล่มนี้จะมีส่วนช่วยให้นิสิตนักศึกษาที่เรียนวิชากลศาสตร์ของวัสดุหรือกลศาสตร์ของแข็งได้เข้าใจหลักการและแนวคิดของรายวิชาอย่างครบถ้วนสมบูรณ์ ผู้เขียนต้องการให้นิสิตนักศึกษาได้ใช้เวลาในการอ่านและวิเคราะห์เนื้อหาในบทต่าง ๆ อย่างละเอียด โดยไม่ให้ความสนใจเฉพาะสมการที่ต้องนำไปใช้หรือเฉพาะโจทย์ตัวอย่างและแบบฝึกหัดเท่านั้น ผู้เขียนขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่สนับสนุนการเขียนตำราเล่มนี้ และขอขอบคุณกองบรรณาธิการของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยที่สนับสนุนการจัดพิมพ์หนังสือเล่มนี้ด้วยดีตลอดมา

ไพโรจน์ สิงหนัดกิจ

ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล

คณะวิศวกรรมศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

มกราคม 2557

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 1

วิชากลศาสตร์ของวัสดุหรือกลศาสตร์ของแข็งเป็นวิชาบังคับในหลักสูตรปริญญาบัณฑิตของคณะวิศวกรรมศาสตร์ รวมถึงหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูงในสาขาวิชาที่เกี่ยวข้องก่อนที่จะเรียนวิชานี้ นิสิตนักศึกษาจะต้องเรียนวิชากลศาสตร์วิศวกรรมหรือวิชาสถิตยศาสตร์ (statics) หลังจากนั้นนิสิตนักศึกษาก็จะสามารถนำความรู้จากวิชาทั้งสองไปเป็นพื้นฐานความรู้ในการเรียนวิชาการออกแบบชิ้นส่วนทางกลและระบบทางกลต่อไป หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นเพื่อเป็นตำราประกอบการเรียนของนิสิตนักศึกษาที่เรียนวิชากลศาสตร์ของวัสดุหรือวิชาอื่น ๆ ที่มีเนื้อหาใกล้เคียงจากประสบการณ์การสอนที่ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย มาเป็นเวลากว่า 10 ปี ผู้เขียนพบว่าพฤติกรรมการเรียนของนิสิตเปลี่ยนแปลงไปจากในอดีตที่นิสิตมักใช้ตำราภาษาอังกฤษเป็นตำราหลักในการเรียน ในปัจจุบัน มีนิสิตจำนวนน้อยที่อ่านตำราโดยละเอียด นิสิตมักใช้ออกสารประกอบคำสอนของอาจารย์ผู้สอนเป็นเอกสารหลักในการทบทวนบทเรียน การที่นิสิตไม่อ่านตำราทำให้นิสิตไม่เข้าใจเนื้อหาที่เรียนได้อย่างถ่องแท้ แม้นิสิตจะสามารถทำแบบฝึกหัดหรือข้อสอบได้ก็ตาม นิสิตหลายคนให้เหตุผลของการไม่อ่านตำราว่า ตำราต่างประเทศมีราคาแพงบ้าง ตำรามีเนื้อหาเกินกว่าเนื้อหาในหลักสูตร ทำให้เสียเวลาในการอ่านบ้าง นิสิตไม่ถนัดอ่านภาษาอังกฤษบ้าง ดังนั้นผู้เขียนต้องการให้หนังสือเล่มนี้เป็นตำราทางเลือกที่อาจารย์ผู้สอนสามารถใช้เป็นตำราหลักในวิชากลศาสตร์ของวัสดุ โดยพยายามทำให้เนื้อหากระชับ ในเวลาเดียวกันก็ครบถ้วนสำหรับการเรียนใน 1 ภาคการศึกษา

หนังสือเล่มนี้ประกอบด้วยเนื้อหา 11 บท และแบบฝึกหัดจำนวน 212 ข้อ พร้อมเฉลยคำตอบที่อยู่ท้ายเล่ม เนื้อหาในบทที่ 1 เป็นการทบทวนหลักการประยุกต์ใช้สมการสมดุลกับระบบทางกลและอธิบายถึงข้อสมมุติเกี่ยวกับวัตถุแข็งเกร็งและวัตถุเปลี่ยนรูปได้ ซึ่งเป็นสมมุติฐานที่แตกต่างกันระหว่างวิชากลศาสตร์ของวัสดุและวิชาสถิตยศาสตร์ บทที่ 2 และ 3 แสดงนิยามความเค้นและความเครียดของชิ้นส่วนทางกลที่มีภาระภายนอกกระทำ บทที่ 4 เป็นเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่ใช้ในงานวิศวกรรม รวมถึงความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดในวัสดุรับภาระเชิงกลและการทดสอบวัสดุเพื่อหาคุณสมบัติดังกล่าว ชิ้นส่วนทางกลที่กล่าวถึงในหนังสือเล่มนี้ประกอบด้วยชิ้นส่วนหลัก ๆ 3 ประเภท คือ ชิ้นส่วนรับภาระในแนวแกน ชิ้นส่วนรับภาระบิด และชิ้นส่วนรับภาระดัด โดยสนใจความเค้น ความเครียดและการเปลี่ยนรูปที่เกิดขึ้นในชิ้นส่วนทั้ง 3

ประเภท เนื้อหาในบทที่ 5 และบทที่ 7 เกี่ยวข้องกับชิ้นส่วนรับภาระในแนวแกนและชิ้นส่วนรับภาระบิดตามลำดับ ส่วนความเค้นในชิ้นส่วนรับภาระคดและการเปลี่ยนรูปของชิ้นส่วนดังกล่าวอธิบายในบทที่ 8 และบทที่ 9 ตามลำดับ บทที่ 6 เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับการแปลงรูปความเค้นและความเครียด เนื้อหาในบทนี้แสดงการเขียนเอลิเมนต์ความเค้นระนาบในระนาบ $x'-y'$ ใด ๆ จากเอลิเมนต์ความเค้นในระนาบ $x-y$ รวมถึงการหาความเค้นหลักและความเค้นเฉือนในระนาบสูงสุด เมื่อสามารถหาความเค้นในชิ้นส่วนที่รับภาระแต่ละประเภทได้แล้ว สามารถใช้หลักการซูเปอร์โพสิชันในการหาความเค้นของชิ้นส่วนรับภาระหลายประเภทพร้อม ๆ กันดังแสดงในบทที่ 10 เนื้อหาในบทที่ 11 ซึ่งเป็นบทสุดท้ายกล่าวถึงความเสียหายในลักษณะการโก่งคดของโครงสร้างที่รับแรงกดในแนวแกน

สำหรับอาจารย์ผู้สอน ผู้เขียนได้นำเนื้อหาเรื่องการแปลงรูปความเค้นมาแทรกไว้ในบทที่ 6 ซึ่งแตกต่างจากตำราหลาย ๆ เล่มที่เนื้อหาในส่วนนี้อยู่ต่อจากเนื้อหาของความเค้นในชิ้นส่วนทั้ง 3 ประเภท ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากผู้เขียนพบว่าการสอนการแปลงรูปความเค้นต่อจากเนื้อหาเรื่องความเค้นบนระนาบเอียงในหัวข้อสุดท้ายของบทที่ 5 ทำให้นิสิตสามารถเข้าใจความหมายของความเค้นที่จุดในทิศทางต่าง ๆ กันได้ดีขึ้น นอกจากนี้ยังพบว่าการอธิบายเนื้อหาในบทที่ 7 และบทที่ 8 รวมทั้งการแสดงตัวอย่างสามารถทำได้สะดวกขึ้นเมื่อผู้เรียนมีความรู้เรื่องการแปลงรูปความเค้นแล้ว หากอาจารย์ผู้สอนต้องการสอนเนื้อหาเกี่ยวกับความเค้นในชิ้นส่วนทางกลทั้ง 3 ประเภทให้ครบก่อนที่จะกล่าวถึงการแปลงรูปความเค้นสามารถทำได้โดยนำเนื้อหาในบทที่ 6 ไปสอนหลังจากบทที่ 8 หรือบทที่ 9 เนื้อหาบางส่วนในหนังสือเล่มนี้อาจจะเกินขอบเขตของวิชากลศาสตร์ของวัสดุที่เป็นวิชาพื้นฐาน ผู้เขียนแนะนำให้ข้ามหัวข้อเหล่านั้นไปได้โดยไม่กระทบกับเนื้อหาในส่วนถัด ๆ ไป หัวข้อย่อยที่อาจไม่ต้องสอนแสดงด้วยสัญลักษณ์ ★ ในสารบัญ

สำหรับนิสิตนักศึกษาและผู้อ่านทั่วไป ผู้เขียนพยายามนำเสนอเนื้อหาในบทต่าง ๆ ให้กะทัดรัด ในขณะเดียวกันก็สมบูรณ์ครบถ้วนตามที่ผู้เรียนควรจะต้องรู้ ผู้เขียนจึงประสงค์ให้นิสิตนักศึกษาได้ใช้เวลาในการอ่านและทำความเข้าใจเนื้อหาให้ครบถ้วนเพื่อให้ได้แนวคิดของรายวิชาที่สมบูรณ์ โดยไม่ได้ให้ความสำคัญเฉพาะสมการที่ต้องนำไปใช้หรือโจทย์ตัวอย่างเท่านั้น ผู้อ่านจะเห็นว่าเนื้อหาในแต่ละบทมีสมการคณิตศาสตร์อยู่เป็นจำนวนมาก สมการบางสมการใช้แสดงที่มาของสมการต่อ ๆ มา สมการที่มีความสำคัญและควรจะต้องจำแสดงโดยมีกรอบสี่เหลี่ยมล้อมรอบ หนังสือเล่มนี้มีแบบฝึกหัดอยู่ท้ายบททุกบทพร้อมทั้งเฉลยอยู่ท้ายเล่ม หากผู้อ่านมีข้อแนะนำหรือติชมสามารถส่งให้ผู้เขียนโดยตรงที่ paired.s@chula.ac.th และสามารถติดตามข้อมูลเพิ่มเติมของหนังสือเล่มนี้ได้จากเว็บไซต์ http://pioneer.netserv.chula.ac.th/~spaired/mech_of_mat.html

ผู้เขียนขอขอบคุณภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ที่สนับสนุนการเขียนตำราเล่มนี้ ขอขอบพระคุณผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.อังคีร์ ศรีภักการ สำหรับคำแนะนำและแรงบันดาลใจในการเขียนตำรา ทำให้หนังสือเล่มนี้มีความสมบูรณ์มากขึ้น ขอขอบคุณนายภานุพันธ์ จอมมาลัย และนางสาวปรีณชา ธารณเจษฎา นิสิตปริญญาโทในที่ปรึกษา ผู้ตรวจทานต้นฉบับในส่วนที่เป็นสมการ ตัวอย่างและแบบฝึกหัด ขอขอบคุณ คุณรวีวรรณ จันทรแม่น กองบรรณาธิการของสำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยในการพิสูจน์อักษรต้นฉบับหนังสือเล่มนี้เป็นอย่างดี หายที่สุดนี้ ขอขอบคุณกำลังใจจากอาจารย์วิไลพร สิงหนัดกิจ ภรรยาของผู้เขียน และลูก ๆ ทั้งสองคน รวมทั้งความห่วงใยจากคุณแม่ของผู้เขียนที่มักถามเสมอ ๆ ว่า “หนังสือเสร็จหรือยัง ? ถึงไหนแล้ว ?”

ไพโรจน์ สิงหนัดกิจ
ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
คณะวิศวกรรมศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรกฎาคม 2555

สารบัญ

คำนำพิมพ์ครั้งที่ 3	(ก)
คำนำพิมพ์ครั้งที่ 2	(ข)
คำนำพิมพ์ครั้งที่ 1	(ค)
บทที่ 1 แนวคิดเบื้องต้นและการทบทวนสถิติศาสตร์	1
1.1 บทนำ	1
1.2 สถิติศาสตร์	4
1.3 สมดุลของวัตถุแข็งเกร็งและวัตถุเปลี่ยนรูปได้	11
1.4 ภาระภายใน	17
1.5 บทสรุป	26
แบบฝึกหัด	27
บทที่ 2 ความเค้น	33
2.1 บทนำ	33
2.2 ความเค้นตึงจากเฉลี่ยในชิ้นส่วนรับภาระในแนวแกน	34
2.3 ความเค้นเฉือนเฉลี่ย	39
2.4 ความเค้นที่จุดในวัตถุที่รับภาระใด ๆ	46
2.5 ความเค้นที่ยอมได้	53
2.6 บทสรุป	59
แบบฝึกหัด	60
บทที่ 3 ความเครียด	69
3.1 บทนำ	69
3.2 การกระจัด การเปลี่ยนรูปร่างและความเครียด	70
3.3 ความเครียดตึงจาก	72
3.4 ความเครียดเฉือน	74
3.5 ความเครียดที่จุด	80
★ 3.6 การวัดความเครียด	83

(ช)

3.7 บทสรุป	87
แบบฝึกหัด	87
บทที่ 4 คุณสมบัติเชิงกลของวัสดุ	97
4.1 บทนำ	97
4.2 การทดสอบวัสดุ	98
4.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียด	101
4.4 กฎของฮุก	108
4.5 อัตราส่วนปัวซอง	113
★ 4.6 กฎของฮุกสำหรับกรณีใด ๆ	114
4.7 อิทธิพลของความร้อน	122
4.8 บทสรุป	127
แบบฝึกหัด	128
บทที่ 5 ชั้นส่วนรับภาระในแนวแกน	137
5.1 บทนำ	137
5.2 การกระจายความเค้นในชั้นส่วนรับภาระในแนวแกน	138
5.3 ความเครียดและการเปลี่ยนรูป	141
5.4 ชั้นส่วนอินดิเทอร์มินेटทางสถิติศาสตร์	154
5.5 ผลของความร้อน ชั้นส่วนผิวด้าน และพรีสเตรน	164
5.6 ความเค้นบนระนาบเอียง	172
5.7 บทสรุป	178
แบบฝึกหัด	179
บทที่ 6 การแปลงรูปความเค้น	187
6.1 บทนำ	187
6.2 การแปลงรูปความเค้นระนาบ	188
6.3 ความเค้นหลักและความเค้นเฉือนในระนาบสูงสุด	199
6.4 วงกลมมอร์	213
6.5 ความเค้นเฉือนสูงสุดสมบูรณ์	226
★ 6.6 การแปลงรูปความเค้นในสามมิติ	233

★ 6.7 การแปลงรูปความเครียด	237
6.8 บทสรุป	242
แบบฝึกหัด	243
บทที่ 7 ชิ้นส่วนรับภาระบิด	249
7.1 บทนำ	249
7.2 การเปลี่ยนรูปของชิ้นส่วนรับภาระบิด	251
7.3 ความเครียดในเพลากลม	255
7.4 ความเค้นเฉือนในเพลากลม	260
7.5 มุมบิด	266
7.6 เพลาส่งกำลัง	277
7.7 เพลาคอนกรีตเสริมเหล็กทางสถิตยศาสตร์	283
7.8 ความเค้นบนระนาบเฉียงและความเสียหายของเพล	292
7.9 บทสรุป	298
แบบฝึกหัด	299
บทที่ 8 ความเค้นในคาน	307
8.1 บทนำ	307
8.2 แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด	312
8.3 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดโดยวิธีกราฟิก	321
8.4 แผนภาพโมเมนต์ดัดเป็นส่วน ๆ	336
8.5 การเปลี่ยนรูปและความเครียดในคาน	343
8.6 ความเค้นดัดในคาน	348
8.7 ความเค้นเฉือนในคาน	359
8.8 บทสรุป	374
แบบฝึกหัด	375
บทที่ 9 การโค้งของคาน	383
9.1 บทนำ	383
9.2 สมการอนุพันธ์ของเส้นโค้งการโค้ง	384
9.3 การโค้งของคานโดยวิธีอินทิเกรต	390

(ญ)

9.4 การโค้งของคานาโดยวิธีโมเมนต์ของพื้นที่	401
★ 9.5 การโค้งของคานาโดยวิธีซูเปอร์โพสิชัน	416
9.6 คานาอินดีเทอรั่มินตทางสถิตยศาสตร์	419
9.7 บทสรุป	432
แบบฝึกหัด	433
บทที่ 10 ความเค้นผสม	441
10.1 บทนำ	441
10.2 ภาวะความดัดผนังบาง	442
10.3 ความเค้นผสม	455
10.4 เกณฑ์ความเสียหาย	472
10.5 บทสรุป	490
แบบฝึกหัด	491
บทที่ 11 การโค้งเดาะของเสา	499
11.1 บทนำ	499
11.2 สมดุลและการโค้งเดาะของเสา	500
11.3 การโค้งเดาะของเสาที่มีการรองรับแบบง่าย	503
★ 11.4 การโค้งเดาะของเสาที่มีการรองรับแบบอื่น ๆ	514
11.5 บทสรุป	528
แบบฝึกหัด	528
บทที่ 12 แบบทบทวนและทดสอบความเข้าใจ	533
ภาคผนวก	553
ภาคผนวก ก. จุดเซนทรอยด์	553
ภาคผนวก ข. โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่	555
ภาคผนวก ค. ระยะโค้งและความชันของคานา	560
ภาคผนวก ง. คุณสมบัติเชิงกลเฉลี่ยของวัสดุทางวิศวกรรม	563
ภาคผนวก จ. พลังงานความเครียดและพลังงานบิดเบี้ยว	566
เฉลยแบบฝึกหัด	569

บรรณานุกรม

579

บรรณานุกรม

581

บทที่ 1

แนวคิดเบื้องต้นและการทบทวนสถิตยศาสตร์

Fundamental Concepts and Reviews of Statics

1.1 บทนำ (Introduction)

กลศาสตร์วัสดุเป็นศาสตร์พื้นฐานที่สำคัญในงานวิศวกรรมเครื่องกลและวิศวกรรมโยธา หลักสูตรหลาย ๆ หลักสูตรในคณะวิศวกรรมศาสตร์บรรจุวิชานี้เป็นวิชาบังคับสำหรับนิสิตในระดับปริญญาบัณฑิต สำหรับหลักสูตรวิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สาขาวิศวกรรมเครื่องกล มักจะบรรจุวิชา กลศาสตร์วัสดุเป็นวิชาบังคับสำหรับนิสิตนักศึกษาชั้นปีที่ 2 โดยนิสิตนักศึกษาที่จะเรียนวิชานี้จะต้องผ่านการเรียนวิชาสถิตยศาสตร์ (statics) หรือวิชากลศาสตร์วิศวกรรม (engineering mechanics) มาก่อน หลังจากเรียนวิชากลศาสตร์วัสดุแล้วในภาคเรียนถัดไปนิสิตก็จะเรียนวิชาการออกแบบ ชิ้นส่วนเครื่องจักรกล (design of machine element) กลศาสตร์วัสดุเป็นศาสตร์พื้นฐานที่สำคัญ สำหรับการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกล ไม่ว่าชิ้นส่วนนั้นจะเป็นชิ้นส่วนทางกลอย่างง่าย หรือ ระบบทางกลที่ซับซ้อน นิสิตนักศึกษาจะต้องมีความรู้เกี่ยวกับการหาภาระภายนอก (external load) ที่กระทำกับระบบที่สนใจ โดยเนื้อหาดังกล่าวมีการเรียนการสอนในวิชาสถิตยศาสตร์หรือวิชา กลศาสตร์วิศวกรรม หลังจากที่สามารถหาภาระภายนอกที่กระทำกับวัตถุที่สนใจได้แล้ว การวิเคราะห์ในขั้นต่อไปเป็นการหาภาระภายใน (internal load) รวมทั้งความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในวัตถุนั้น ๆ เนื้อหาในวิชานี้ยังรวมถึงการศึกษาพฤติกรรมของวัสดุรูปร่างต่าง ๆ ภายใต้ภาระ

ภายนอกในลักษณะต่าง ๆ การวิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน การหาลักษณะการเปลี่ยนรูป และการเสียหายของชิ้นงานภายใต้ภาระภายนอก ฯลฯ

ข้อสมมุติ (assumption) ข้อหนึ่งที่ใช้มาตลอดในการแก้ปัญหาสถิตยศาสตร์ คือ การสมมุติให้ชิ้นงานที่ศึกษาเป็นวัตถุแข็งเกร็ง (rigid body) หรือวัตถุที่ไม่มีการเปลี่ยนรูปร่าง ข้อสมมุตินี้ไม่ตรงกับความเป็นจริงเท่าไรนัก เพราะในความเป็นจริงไม่ว่าวัตถุจะรับภาระมากหรือน้อยเพียงใดจะมีการเปลี่ยนรูปร่างเสมอ การเปลี่ยนรูปร่างอาจจะเป็นการยืด การหด การงอ หรือการบิด แบบใดแบบหนึ่งหรือหลายแบบรวมกัน การแก้ปัญหาทงสถิตยศาสตร์สามารถสมมุติให้ชิ้นงานที่ศึกษาเป็นวัตถุแข็งเกร็งได้โดยไม่ทำให้ค่าภาระภายนอกที่ต้องการหาคลาดเคลื่อนไป อย่างไรก็ตาม ในการศึกษาพฤติกรรมของวัตถุโดยพิจารณาภาระภายในและการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุเมื่อรับภาระภายนอกสำหรับวิชากลศาสตร์วัสดุ ข้อสมมุติดังกล่าวไม่อาจใช้ได้ นั่นคือจะต้องพิจารณาวัตถุให้เป็นวัตถุที่เปลี่ยนรูปได้ (deformable body) ซึ่งมีลักษณะคล้ายกับปรากฏการณ์จริงมากกว่าการสมมุติให้วัตถุเป็นวัตถุแข็งเกร็ง ตัวอย่างการพิจารณาปัญหาโดยพิจารณาให้วัตถุเป็นวัตถุแข็งเกร็งและวัตถุเปลี่ยนรูปได้แสดงอยู่ในหัวข้อที่ 1.3

วิชากลศาสตร์วัสดุเป็นวิชาที่ศึกษาชิ้นส่วนโครงสร้างพื้นฐานในงานวิศวกรรม ซึ่งจะศึกษาชิ้นส่วนที่รับภาระในแนวแกน (axially loaded member) เพลา (shaft) คาน (beam) และเสา (column) เท่านั้น โดยไม่พิจารณาโครงสร้างที่มีความซับซ้อน เช่น โครงถัก (truss) แผ่นบาง (thin plate) เปลือกบาง (thin shell) หรือโครงสร้างที่ประกอบด้วยชิ้นส่วนหลาย ๆ ประเภท หนังสือเล่มนี้ประกอบไปด้วยเนื้อหาจำนวน 11 บท บทที่ 1 เป็นการทบทวนความรู้สถิตยศาสตร์ สมดุลของวัตถุแข็งเกร็งและวัตถุเปลี่ยนรูปได้ และการหาภาระภายในโดยวิธีการตัด บทที่ 2 แนะนำนิยามและแนวความคิดในการหาความเค้นที่เกิดขึ้นในชิ้นงานรูปร่างใด ๆ เมื่อได้รับภาระภายนอก โดยพิจารณาทั้งความเค้นเฉพาะจุดและความเค้นเฉลี่ยบนหน้าตัด รวมทั้งแนะนำวิธีการแสดงความเค้นค่าต่าง ๆ บนเอลิเมนต์ความเค้น (stress element) ในบทนี้ยังอธิบายแนวคิดในการออกแบบชิ้นส่วนทางกลโดยพิจารณาความเค้นสูงสุดที่ยอมให้เกิดขึ้นในโครงสร้างและความเค้นที่ทำให้วัสดุเสียหาย บทที่ 3 กล่าวถึงนิยามและการหาความเครียดที่เกิดขึ้นในชิ้นงาน โดยอธิบายนิยามของความเครียดและวิธีการหาความเครียดตั้งฉาก และความเครียดเฉือนที่เกิดขึ้นเมื่อวัตถุมีการเปลี่ยนรูป เนื้อหาในบทที่ 4 เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของวัสดุที่ใช้ในงานวิศวกรรมภายใต้อิทธิพลของภาระเชิงกล ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นในวัสดุและวิธีการทดสอบวัสดุเพื่อหาคุณสมบัติเชิงกลจากคุณสมบัติเชิงกลของวัสดุที่ได้จากการทดสอบสามารถหาสมการความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น

และความเครียดที่เกิดขึ้นในวัสดุที่รับภาระได้ เนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ครอบคลุมชิ้นส่วนทางกลหลัก ๆ 3 ประเภท คือ ชิ้นงานที่รับภาระในแนวแกน เพลลา และคาน เนื้อหาในบทที่ 5 เป็นเนื้อหาในส่วนของการหาความเค้น ความเครียด และระยะยืดหดของชิ้นงานที่รับภาระในแนวแกน การนำระยะการยืดหดของชิ้นงานที่รับภาระในแนวแกนไปใช้ในการแก้ปัญหาที่ไม่สามารถแก้ได้ โดยสมการสมดุลอย่างที่ทำในวิชาสถิตยศาสตร์ ส่วนท้ายของบทนี้ กล่าวถึงความเค้นในระนาบเอียงของชิ้นงานที่รับภาระในแนวแกน ความรู้เรื่องความเค้นในระนาบเอียงนี้เป็นแนวคิดพื้นฐานในเรื่องการแปลงรูปความเค้น (stress transformation) ซึ่งจะกล่าวโดยละเอียดในบทที่ 6 การแปลงรูปความเค้นจากความเค้นบนระนาบหนึ่งไปเป็นความเค้นในอีกระนาบหนึ่งทำให้สามารถเขียนเอลิเมนต์ความเค้นที่วางตัวในทิศทางใด ๆ ในระนาบได้ อีกทั้งยังสามารถหาความเค้นหลัก (principal stresses) และความเค้นเฉือนในระนาบสูงสุด (maximum in-plane shear stress) ได้อีกด้วย เนื้อหาที่สำคัญอีกหัวข้อหนึ่งในบทนี้คือการแปลงความเค้นโดยใช้วงกลมมอร์ (Mohr's circle)

ดังที่กล่าวมาแล้วว่าชิ้นส่วนทางกลหลัก ๆ สามารถแบ่งออกเป็น 3 ประเภท บทที่ 5 ได้อธิบายถึงชิ้นส่วนประเภทแรกไปแล้ว เนื้อหาในบทที่ 7 และ 8 กล่าวถึงชิ้นส่วนทางกลอีก 2 ประเภทที่เหลือ โดยบทที่ 7 วิเคราะห์ความเค้นและการเปลี่ยนรูปของเพลลาที่รับภาระบิด ในหนังสือเล่มนี้จะพิจารณาเฉพาะเพลลาที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมเท่านั้น โดยอาจเป็นหน้าตัดกลมตันหรือหน้าตัดกลมกลวงก็ได้ การเปลี่ยนรูปของเพลลาที่สนใจอยู่ในรูปของมุมบิดของหน้าตัดหนึ่งเทียบกับอีกหน้าตัดหนึ่ง บทที่ 8 กล่าวถึงคานซึ่งเป็นชิ้นส่วนรับภาระดัด เนื้อหาในบทนี้วิเคราะห์ความเค้นที่เกิดขึ้นในคาน ซึ่งมีทั้งความเค้นดัดฉากและความเค้นเฉือน บทที่ 9 แสดงการวิเคราะห์การโก่งตัวของคาน (deflection of beam) โดยจะอธิบายถึงวิธีการหาระยะโก่งของคาน 3 วิธี คือวิธีการอินทิเกรต วิธีโมเมนต์ของพื้นที่ได้แผนภาพโมเมนต์ และวิธีชูเปอร์โพสิชัน ความรู้เรื่องการหาระยะการโก่งตัวของคานยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาคานที่ไม่สามารถแก้ได้ด้วยวิธีสมดุลของภาระได้อีกด้วย

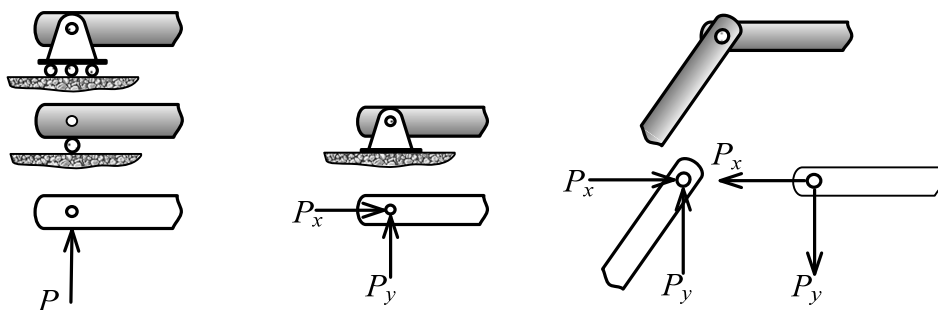
บทที่ 10 มีเนื้อหาหลักอยู่ 2 ส่วน ส่วนแรกเป็นการวิเคราะห์ชิ้นส่วนทางกลที่รับภาระเฉพาะแบบ โดยพิจารณาภาระที่เกิดจากความดันซึ่งมีลักษณะแตกต่างจากภาระหลัก 3 ประเภทที่กล่าวมาแล้ว เนื้อหาส่วนหลังเป็นการวิเคราะห์ชิ้นส่วนทางกลที่รับภาระหลายประเภท กล่าวคือ มีทั้งภาระในแนวแกน ภาระบิด ภาระดัด หรือภาระจากความดันที่แสดงในส่วนแรกของบทนี้ การวิเคราะห์ความเค้นในชิ้นส่วนทางกลที่รับภาระหลายประเภทนี้เป็นพื้นฐานสำหรับการออกแบบชิ้นส่วนเครื่องจักรกลต่อไป ในบทที่ 11 ซึ่งเป็นบทสุดท้ายเป็นการวิเคราะห์เสถียรภาพของเสาที่รับภาระกด

ในแนวนอน เหตุที่ต้องพิจารณาเสถียรภาพของโครงสร้างที่รับภาระในลักษณะนี้ก็เพราะว่าโครงสร้างที่มีลักษณะเรียวยาวมีแนวโน้มที่จะมีการเสียหายจากการโก่งคด (buckling) เพิ่มเติมจากการเสียหายเนื่องจากความเค้นที่เกิดขึ้นมีค่าเกินความแข็งแรงของวัสดุ

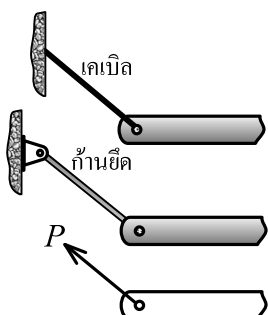
1.2 สถิตยศาสตร์ (Statics)

สถิตยศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยระบบหรือชิ้นส่วนทางกลที่รับภาระภายนอกประเภทต่าง ๆ และอยู่ในสภาพสมดุล คำว่า “สภาพสมดุล” หมายถึง สมดุลทางภาระ กล่าวคือ ผลรวมของภาระที่กระทำกับระบบมีค่าเป็นศูนย์ ทำให้ระบบหยุดนิ่งอยู่กับที่หรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ในทางปฏิบัติระบบทางกลประกอบไปด้วยชิ้นส่วนทางกลรูปร่างต่าง ๆ หลายชิ้น มีการรองรับด้วยวิธีการรองรับแบบต่าง ๆ และมีภาระภายนอกหลาย ๆ ประเภทกระทำกับระบบ จุดประสงค์ของวิชาสถิตยศาสตร์ คือ การหาภาระที่กระทำกับระบบทางกล รวมถึงภาระที่กระทำกับชิ้นส่วนต่าง ๆ ในระบบ โดยปรกติระบบทางกลมีการรองรับที่ตำแหน่งต่าง ๆ อย่างน้อยหนึ่งตำแหน่งเพื่อให้ชิ้นส่วนทำงานในสภาวะสมดุลได้ ดังนั้น ขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์ภาระในระบบทางกลคือการหาแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์ปฏิกิริยาที่ระบบรองรับกระทำกับระบบที่สนใจ แรงปฏิกิริยาและโมเมนต์ปฏิกิริยา คือ ภาระที่ระบบรองรับกระทำกับระบบทางกลที่สนใจเมื่อมีภาระภายนอกมากระทำที่ส่วนต่าง ๆ ของระบบเพื่อให้ระบบสามารถอยู่ในสภาวะสมดุลได้ สำหรับแรงปฏิกิริยาที่ระบบรองรับกระทำกับโครงสร้างสามารถแสดงได้ในแผนภาพวัตถุอิสระ (free body diagram) คำว่า “อิสระ” ในที่นี้หมายความว่า วัตถุหรือระบบที่สนใจถูกแยกอิสระจากระบบรองรับหรือวัตถุอื่น ๆ รูป 1.1 แสดงลักษณะการรองรับพื้นฐานและแผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วนทางกลที่จะพบในบทต่อ ๆ ไป รูป 1.1 (ก) และ (ข) แสดงการรองรับแบบโรลเลอร์ (roller) และแบบหมุด (pin) ระบบรองรับทั้งสองมีลักษณะบางประการเหมือนกัน กล่าวคือ ระบบรองรับทั้งสองบังคับไม่ให้จุดที่รองรับเคลื่อนที่ขึ้นลง ส่วนการรองรับแบบหมุดจะบังคับจุดที่ถูกรองรับไม่ให้เคลื่อนที่ไปในทิศทางซ้ายขวาอีกด้วย ดังนั้นเมื่อเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของระบบทางกลที่มีการรองรับทั้งสองแบบจะมีลักษณะดังแสดงในรูป โดยแรงปฏิกิริยาที่ระบบรองรับแบบโรลเลอร์กระทำกับชิ้นส่วนที่รองรับมีเพียงแรงในแนวตั้งแรงเดียว ส่วนแรงปฏิกิริยาที่เกิดจากระบบรองรับแบบหมุดมี 2 แรง คือ แรงในแนวนอนและแรงในแนวตั้ง เหตุที่ไม่มีแรงปฏิกิริยาในแนวนอนสำหรับระบบรองรับแบบโรลเลอร์ก็เพราะว่าระบบรองรับแบบนี้ยอมให้วัตถุเคลื่อนที่ในแนวนอนได้อย่างอิสระ ระบบรองรับอีกประเภทหนึ่ง คือ การ

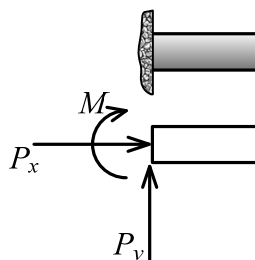
รองรับแบบหมุดภายใน (internal pin) ซึ่งเป็นการใช้หมุดยึดชิ้นส่วนโครงสร้าง 2 ส่วนเข้าด้วยกัน ดังแสดงในรูป 1.1 (ค) แรงปฏิกิริยาที่กระทำกับชิ้นส่วนทั้งสองจะเป็นแรงสองแรงในแนวตั้ง และแนวนอน การรองรับด้วยเคเบิลหรือก้านยึด (rod) มีแผนภาพวัตถุอิสระดังแสดงในรูป 1.1 (ง) แรงปฏิกิริยาที่กระทำกับระบบที่สนใจมีเพียงแรงเดียวและอยู่ในแนวแกนของเคเบิลหรือก้านยึด ที่เป็นเช่นนี้เพราะว่าทั้งเคเบิลและก้านยึดเป็นชิ้นส่วนสองแรง (two-force members) ชิ้นส่วนสองแรง คือ ชิ้นส่วนทางกลที่มีแรงเพียง 2 แรงกระทำกับชิ้นส่วนนั้น ๆ แรงสองแรงที่กระทำบนชิ้นส่วนประเภทนี้จะต้องเป็นแรงในแนวแกนเดียวกันและมีทิศทางตรงกันข้ามเสมอ เพื่อให้ชิ้นส่วนอยู่ในสภาพสมดุลได้ เมื่อแรงที่กระทำกับเคเบิลหรือก้านยึดต้องอยู่ในแนวแกน ดังนั้นแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนที่รองรับด้วยระบบรองรับประเภทนี้จะต้องอยู่ในแนวแกนของเคเบิลหรือก้านยึดด้วยเท่านั้น ระบบรองรับอีกประเภทซึ่งพบบ่อยในโครงสร้างคาน ก็คือ ระบบรองรับแบบยึดแน่น (fixed support) ตัวอย่างระบบรองรับนี้ได้แก่การยึดคานบนผนังคอนกรีตหรือการยึดเสาบนพื้นโดยใช้สกรูยึดบนหน้าแปลน ระบบรองรับแบบนี้นอกจากจะบังคับไม่ให้ตำแหน่งที่รองรับเคลื่อนที่ในแนวตั้งและแนวนอนเหมือนกับระบบรองรับแบบหมุดแล้วยังบังคับไม่ให้หน้าตัดของโครงสร้างที่



(ก) การรองรับแบบโรลเลอร์ (ข) การรองรับแบบหมุด (ค) การรองรับแบบหมุดภายใน



(ง) การรองรับด้วยเคเบิลหรือก้านยึด



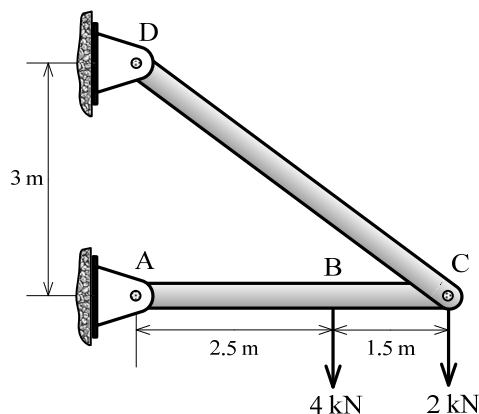
(จ) ระบบรองรับแบบยึดแน่น

รูป 1.1 การรองรับแบบต่างๆ ที่มักพบในปัญหาทางสถิตยศาสตร์

ตำแหน่งที่มีการรองรับหมุนอีกด้วย ดังนั้นการะปฏิกิริยาบนโครงสร้างนอกจากจะมีแรงปฏิกิริยาในแนวตั้งและแนวนอนแล้วยังมีโมเมนต์ที่ป้องกันการหมุนของโครงสร้างอีกด้วยดังแสดงในรูป 1.1 (จ)

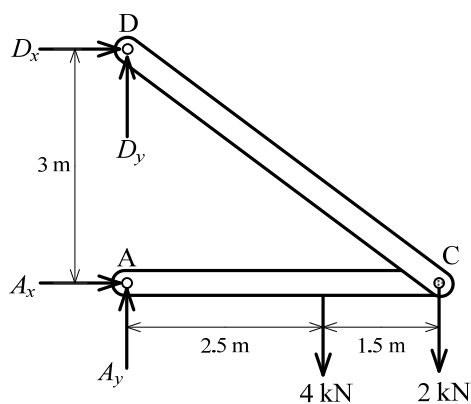
สิ่งสำคัญประการแรกในการวิเคราะห์ปัญหาทางสถิตยศาสตร์คือการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระให้ถูกต้อง โดยจะต้องแสดงภาระที่กระทำกับระบบที่สนใจให้ครบถ้วนและไม่เกินความจำเป็น การเขียนแผนภาพวัตถุอิสระโดยใส่ภาระเกินกว่าความเป็นจริงทำให้ไม่สามารถแก้ปัญหาเพื่อหาภาระที่ไม่ทราบค่าได้ การเขียนแผนภาพวัตถุอิสระอาจเขียนกับโครงสร้างทั้งหมดโดยถอดระบบรองรับทั้งหมดออก การเขียนแผนภาพวัตถุอิสระแบบนี้จะไม่แสดงภาระที่ขึ้นส่วนของโครงสร้าง ขึ้นหนึ่งกระทำกับขึ้นส่วนอีกขึ้นหนึ่ง เนื่องจากภาระนั้นเป็นภาระภายในระบบ การแสดงภาระที่ขึ้นส่วนหนึ่งกระทำกับอีกขึ้นส่วนหนึ่งสามารถทำได้โดยเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของขึ้นส่วนแต่ละขึ้น ในกรณีนี้ระบบที่สนใจ คือ ขึ้นส่วนของโครงสร้างแต่ละขึ้น ไม่ใช่โครงสร้างทั้งหมด จึงอาจพิจารณาได้ว่าภาระปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นจากขึ้นส่วนอื่น ๆ เป็นภาระภายนอกสำหรับขึ้นส่วนที่สนใจ ในตัวอย่าง 1.1 แสดงการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระสำหรับโครงสร้างทั้งหมด และขึ้นส่วนแต่ละขึ้น

ตัวอย่าง 1.1 จงเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้างในรูป 1.2 โดยแสดงแผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้างรวมทั้งหมดและของส่วนประกอบแต่ละขึ้น โครงสร้างดังกล่าวประกอบด้วยขึ้นส่วน 2 ขึ้นที่ถูกรองรับด้วยหมุดบนผนังที่จุด A และจุด D ขึ้นส่วนทั้งสองยึดติดกันด้วยหมุดภายในที่จุด C มีแรงภายนอกขนาด 4 kN และ 2 kN กระทำที่จุด B และจุด C ตามลำดับ

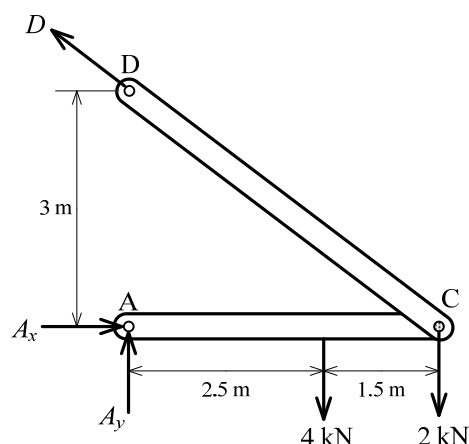


รูป 1.2 โครงสร้างที่ประกอบด้วยขึ้นส่วน AC และขึ้นส่วน CD สำหรับตัวอย่าง 1.1

วิธีทำ การเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้างโดยรวมทำได้โดยการถอดระบบรองรับซึ่งในที่นี้ก็คือ ผนังและหมุดออก แล้วใส่ภาระปฏิกิริยาลงไปแทน ดังแสดงในแผนภาพวัตถุอิสระในรูป 1.3 เนื่องจากการรองรับที่ตำแหน่ง A และ D เป็นการรองรับโดยหมุด ดังนั้นแรงปฏิกิริยาที่หมุดกระทำกับชิ้นงานที่ตำแหน่งทั้งสองจึงมี 2 แรงในแนวแกนตั้งและแนวนอนตามลักษณะที่แสดงในรูป 1.1 (ข) แผนภาพวัตถุอิสระในรูป 1.3 เป็นแผนภาพที่ต้องสมบูรณ์ แต่อาจจะไม่ใช่แผนภาพที่ดีที่สุด เนื่องจากหากใช้แผนภาพนี้ในการหาค่าแรงปฏิกิริยาโดยใช้สมการสมดุลทางสถิตยศาสตร์ จะพบว่าจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่ามีมากกว่าสมการสมดุลที่มี ทำให้ไม่สามารถแก้สมการได้ หากประยุกต์ใช้ความรู้เกี่ยวกับชิ้นส่วนสองแรงมาใช้กับปัญหานี้ พบว่าชิ้นส่วน CD เป็นชิ้นส่วนสองแรงเนื่องจากมีภาระกระทำที่ปลายทั้งสองเท่านั้น ทำให้สามารถสรุปได้ว่าแรง 2 แรงนั้นจะต้องอยู่ในแนวแกนเพื่อให้ชิ้นส่วน CD อยู่ในสมดุลได้ นั่นคือ ผลรวมของแรง D_x และ D_y จะต้องอยู่ในแนวแกนของชิ้นส่วน CD ดังนั้นจึงสามารถปรับแผนภาพวัตถุอิสระในรูป 1.3 ให้เหมาะสมขึ้นดังแสดงในรูป 1.4 แรง D เป็นแรงปฏิกิริยาที่กระทำที่จุด D ซึ่งเป็นผลรวมของแรง D_x และ D_y วิธีการหาค่าแรง A_x , A_y และแรง D จะอธิบายในหัวข้อถัดไป



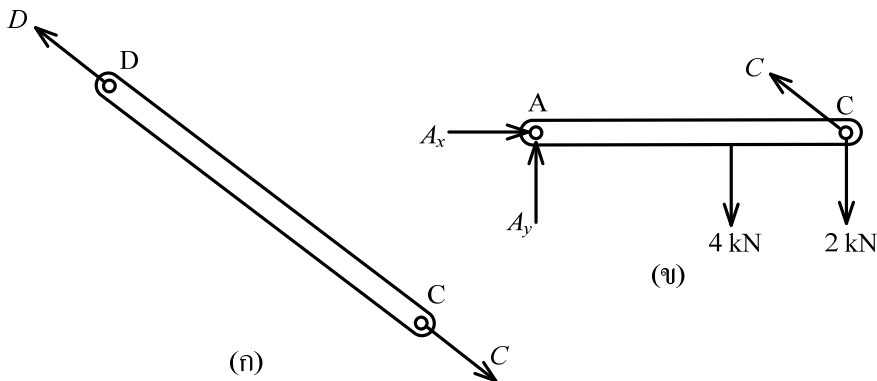
รูป 1.3 แผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้างรวม



รูป 1.4 แผนภาพวัตถุอิสระที่พิจารณาลักษณะการรับภาระของชิ้นส่วนสองแรง

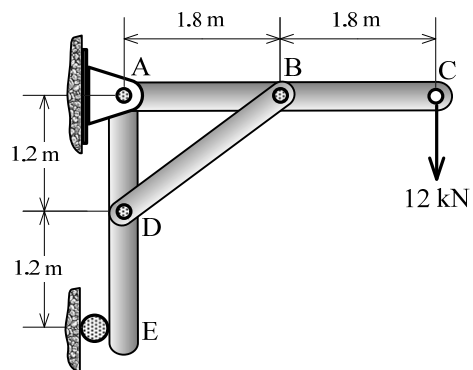
จากแผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้างรวมที่เกิดจากการถอดระบบรองรับที่จุด A และ D ออก หากต้องการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นก็สามารถทำได้โดยถอดหมุดภายในที่ยึดชิ้นส่วนทั้งสองออกแล้วแทนด้วยแรงปฏิกิริยา เมื่อถอดหมุดที่ C ออกและแยกชิ้นส่วน AC และ CD ออกจากกันสามารถเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วนทั้งสองได้ดังแสดงในรูป 1.5 จะเห็นว่า

เมื่อแยกชิ้นส่วนทั้งสองออกจากกันจะมีแรงปฏิกิริยา C กระทำกับชิ้นส่วนทั้งสองที่ตำแหน่ง C โดยที่แรงอื่น ๆ ยังอยู่ที่ตำแหน่งเดิม และมีขนาดเท่าเดิม จากรูป 1.5 (ก) ซึ่งเป็นแผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วน CD จะเห็นว่าเมื่อถอดหมุดที่ตำแหน่ง C ออก จะมีแรง C กระทำกับปลายด้าน C ของชิ้นงาน CD แรง C นี้เป็นแรงปฏิกิริยาที่หมุดกระทำกับชิ้นงาน CD จากรูป 1.1 (ค) แสดงให้เห็นว่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดจากหมุดภายในมี 2 แรง คือ แรงในแนวแกนตั้งและแรงในแนวแกนนอน ดังนั้นหากจะเขียนแผนภาพวัตถุอิสระในรูป 1.5 (ก) ตามหลักการดังกล่าว จะต้องแสดงแรงที่ปลายด้าน C ด้วยแรง C_x ในแนวนอนและแรง C_y ในแนวตั้ง แต่เมื่อใช้หลักการชิ้นส่วนสองแรงกับชิ้นส่วน CD พบว่าผลรวมของแรง C_x และ C_y จะต้องอยู่ในแนวแกน CD ดังแสดงด้วยแรง C ในรูป 1.5 (ก) โดยแรง C มีขนาดเท่ากับแรง D ในทำนองเดียวกันแรงปฏิกิริยา C ก็กระทำกับชิ้นส่วน AC ที่ตำแหน่ง C ดังแสดงในแผนภาพวัตถุอิสระในรูป 1.5 (ข) เนื่องจากแรง C เป็นแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่หมุด C ทิศทางของแรงนี้ในรูป 1.5 (ก) และ 1.5 (ข) จึงมีทิศตรงกันข้าม



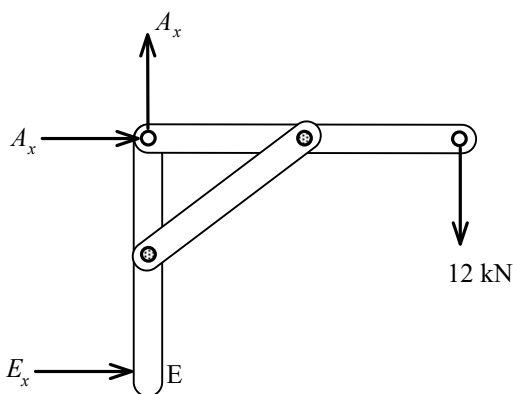
รูป 1.5 แผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วน AC และ CD

ตัวอย่าง 1.2 จงเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้างที่แสดงในรูป 1.6 และแสดงแผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นในโครงสร้าง



รูป 1.6 โครงสร้างสำหรับตัวอย่าง 1.2

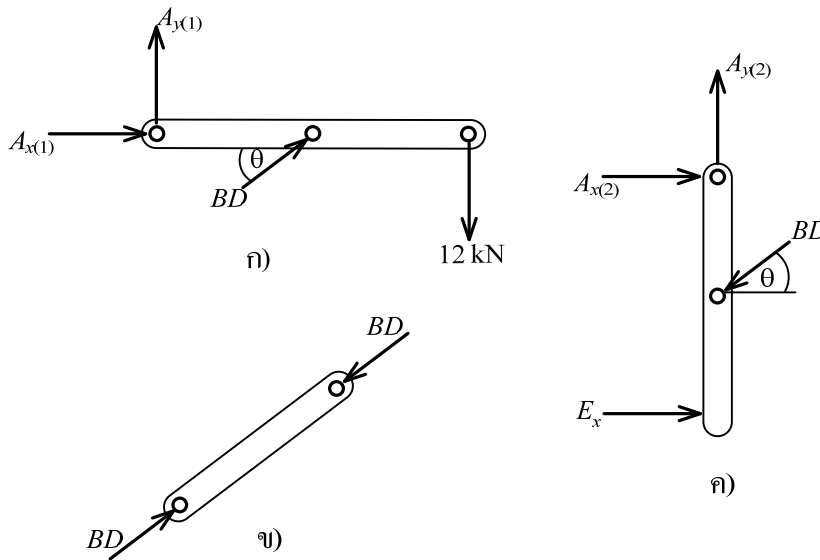
วิธีทำ แผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้างในรูป 1.6 สามารถเขียนโดยใช้แนวคิดตามที่แสดงในตัวอย่าง 1.1 เมื่อถอดระบบรองรับแบบหมุดที่ตำแหน่ง A และระบบรองรับแบบโรลเลอร์ที่ตำแหน่ง E ออกแล้วใส่แรงปฏิกิริยาที่ตำแหน่งทั้งสองจะได้แผนภาพวัตถุอิสระดังรูป 1.7 เนื่องจากการรองรับที่ตำแหน่ง A เป็นแบบหมุด แรงปฏิกิริยาที่ตำแหน่งนั้นจึงเป็นแรง A_x และ A_y ในแนวแกนนอนและแกนตั้งตามลำดับ ส่วนแรงปฏิกิริยาที่ตำแหน่ง E มีเฉพาะแรงในแนวแกนนอน E_x เท่านั้น เนื่องจากการรองรับแบบโรลเลอร์ไม่มีแรงปฏิกิริยาในแนวสัมผัส



รูป 1.7 แผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้างในรูป 1.6

แผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นสามารถเขียนได้โดยถอดชิ้นส่วนทั้งสามออกจากกัน แล้วใส่แรงปฏิกิริยาที่ตำแหน่งรองรับลงไปตามแสดงในรูป 1.8 แผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วน BD ซึ่งเป็นชิ้นส่วนสองแรงลักษณะเดียวกับชิ้นส่วน CD ในตัวอย่าง 1.1 แสดงในรูป 1.8 (ข) ชิ้นส่วนนี้มีแรงที่ตำแหน่งรองรับแบบหมุดภายในแรงเดียวและอยู่ในแนวแกนของชิ้นส่วนนั้น รูป 1.8 (ก) และ (ค) แสดงแผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วน ABC และ ADE ตามลำดับ แรงปฏิกิริยาที่ตำแหน่ง B และ D อยู่ในแนวแกนของชิ้นส่วน BD ส่วนแรง 12 kN และแรง E_x ยังคงอยู่ที่ตำแหน่ง C และ E ตามลำดับ แรงที่กระทำที่ปลาย A ของชิ้นส่วนทั้งสองจะเป็นแรงในแนวตั้งและแนวนอน เพราะการรองรับที่ตำแหน่งนี้เป็นแบบหมุด แรงที่กระทำที่ตำแหน่ง A บนชิ้นส่วนทั้งสองมีค่าไม่เท่ากัน โดยแรงบนชิ้นส่วน ABC มีค่าเท่ากับ $A_{x(1)}$ และ $A_{y(1)}$ ส่วนแรงบนชิ้นส่วน ADE เป็น $A_{x(2)}$ และ $A_{y(2)}$ มีข้อสังเกตอีกว่าแรงที่กระทำที่จุด A ในรูป 1.8 (ก) และ (ค) นั้นไม่เท่ากับแรงที่กระทำที่ตำแหน่งเดียวกันในรูป 1.7 แรง A_x และ A_y ในรูป 1.7 เป็นแรงที่หมุดที่ตำแหน่ง A กระทำกับระบบที่สนใจซึ่งก็คือโครงสร้างทั้งสามชิ้น ส่วนระบบที่สนใจในรูป 1.8 (ก) และ (ค) คือชิ้นส่วน ABC และ ADE ตามลำดับ ดังนั้นแรง $A_{x(1)}$ และ $A_{x(2)}$ จึงไม่ใช่แรงกิริยาและแรงปฏิกิริยาซึ่งกันและกัน แต่เป็นแรงที่

หมวด A กระทำกับชิ้นส่วนทั้งสองตามลำดับ หากวิเคราะห์ให้ลึกลงไปจะพบว่าผลรวมของ $A_{x(1)}$ และ $A_{x(2)}$ จะมีค่าเท่ากับ A_x ในรูป 1.7 ทำนองเดียวกันผลรวมของแรง $A_{y(1)}$ และ $A_{y(2)}$ ก็มีค่าเท่ากับแรง A_y ในแผนภาพวัตถุอิสระของโครงสร้างรวมเช่นกัน



รูป 1.8 แผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วนต่าง ๆ

จะเห็นว่าการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระเป็นขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์ภาระที่กระทำกับโครงสร้างทางวิศวกรรม แผนภาพวัตถุอิสระที่ดีจะต้องแสดงภาระที่กระทำกับระบบที่พิจารณาอย่างครบถ้วน การเขียนแผนภาพวัตถุอิสระที่แสดงภาระไม่ครบหรือแสดงภาระเกินจำนวนที่จำเป็นทำให้เกิดความยุ่งยากในการวิเคราะห์หาแรงที่ไม่ทราบค่า ซึ่งอาจส่งผลให้ได้ค่าที่คลาดเคลื่อนไปจากความเป็นจริง ในการแก้ปัญหาหนึ่ง ๆ อาจจะต้องเขียนแผนภาพวัตถุอิสระหลายรูป สิ่งสำคัญที่ต้องพึงระลึกถึงเสมอในการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระแต่ละรูปคือจะต้องระบุระบบที่กำลังพิจารณา แล้วจึงวิเคราะห์ว่ามีภาระอะไรกระทำกับระบบบ้าง แผนภาพวัตถุอิสระที่สมบูรณ์จะช่วยให้การหาภาระภายในและพฤติกรรมของโครงสร้างที่รับภาระภายนอกเป็นไปอย่างถูกต้องและแม่นยำ

1.3 สมดุลของวัตถุแข็งเกร็งและวัตถุเปลี่ยนรูปได้ (Equilibrium of rigid and deformation bodies)

หลังจากเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของระบบที่สนใจ ขั้นตอนต่อไปในการวิเคราะห์โครงสร้างทางวิศวกรรม คือ การใช้หลักการสมดุลของภาระในการหาค่าภาระต่าง ๆ โดยเฉพาะภาระปฏิกิริยาจากระบบรองรับ ในส่วนแรกของหัวข้อนี้เป็นการทบทวนเงื่อนไขสมดุลของวัตถุแข็งเกร็ง ซึ่งเป็นหัวข้อหลักในวิชาสถิตยศาสตร์ หลังจากนั้นจะนำแนวคิดสมดุลของวัตถุแข็งเกร็งมาใช้กับวัตถุเปลี่ยนรูปได้ในการหาภาระภายนอกที่กระทำกับระบบที่สนใจ

จากสถิตยศาสตร์ วัตถุแข็งเกร็งจะอยู่ในภาวะสมดุลได้ก็ต่อเมื่อภาระลัพธ์ที่กระทำกับระบบมีค่าเป็นศูนย์ กล่าวคือ

$$\boxed{\Sigma \vec{F} = \vec{0}} \quad (1.1)$$

และ $\boxed{\Sigma \vec{M}_O = \vec{0}} \quad (1.2)$

สมการ (1.1) แสดงผลรวมของแรงที่กระทำกับระบบจะต้องมีค่าเป็นศูนย์ ส่วนสมการ (1.2) แสดงผลรวมของโมเมนต์ของแรงภายนอกที่กระทำกับระบบรอบจุด O จะต้องมีค่าเป็นศูนย์เพื่อให้ระบบอยู่ในสภาพสมดุล จุด O เป็นจุดใด ๆ ซึ่งอาจจะอยู่บนวัตถุที่พิจารณาหรืออยู่นอกวัตถุที่พิจารณาก็ได้ ในการวิเคราะห์โครงสร้างหนึ่ง ๆ การหาแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ทำได้โดยการพิจารณาขนาดของแรงลัพธ์ในแกน x, y และ z หรือพิจารณาโมเมนต์ลัพธ์รอบแกน x, y และ z แทนการหาแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ในรูปของเวกเตอร์ ดังนั้นเงื่อนไขในสมการ (1.1) และ (1.2) อาจเขียนแทนด้วย

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (1.3)$$

และ $\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (1.4)$

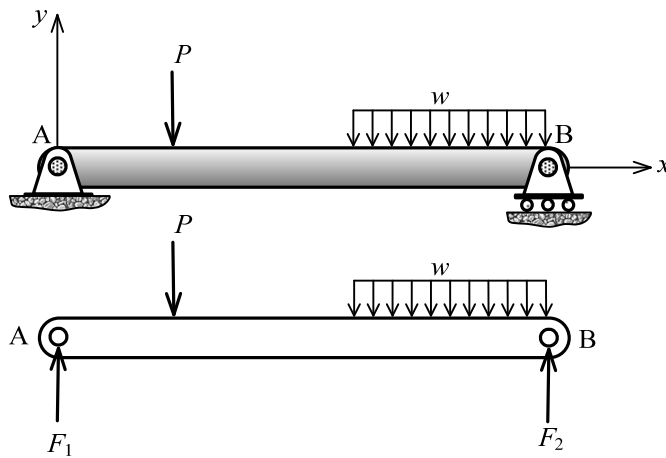
ตามลำดับ นั่นคือวัตถุหรือโครงสร้างทางวิศวกรรมจะอยู่ในภาวะสมดุลก็ต่อเมื่อผลรวมของแรงในแนวแกน x, y และ z และผลรวมของโมเมนต์ของแรงรอบแกน x, y และ z มีค่าเป็นศูนย์

สำหรับปัญหาหลาย ๆ ปัญหาที่พบในงานวิศวกรรมลักษณะของแรงภายนอกที่กระทำกับระบบจะมีลักษณะเป็นแรงในระนาบเดียว ดังเช่นตัวอย่างคานที่แสดงในรูป 1.9 จากแผนภาพวัตถุอิสระของคาน AB ซึ่งมีการรองรับแบบโรลเลอร์ที่ปลาย B จะเห็นว่าแรงทั้งหมด ทั้งแรงรวมศูนย์ (concentrated force) F_1, F_2 และ P หรือแรงกระจาย (distributed force) w มีการวางตัวอยู่ในระนาบ

เดียว คือ ระนาบ x - y ในกรณีนี้สมการสมดุลจะมีลักษณะง่ายขึ้น กล่าวคือ สมการสมดุล (1.3) และ (1.4) จะลดรูปเป็น

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (1.5)$$

เท่านั้น เนื่องจากไม่มีแรงในแนวแกน z ทำให้ไม่ต้องพิจารณาแรงในแนวแกน z รวมทั้งโมเมนต์ของแรงรอบแกน x และแกน y ในตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นถึงการประยุกต์ใช้สมการสมดุลและแผนภาพวัตถุอิสระในการหาภาระภายนอกที่ไม่ทราบค่า



รูป 1.9 คานรับภาระในระนาบเดียว

ตัวอย่าง 1.3 จากแผนภาพวัตถุอิสระแสดงในรูป 1.7 จงหาแรงปฏิกิริยาที่กระทำกับโครงสร้างทั้งหมดพร้อมทั้งหาแรงปฏิกิริยาที่กระทำกับชิ้นส่วนทุก ๆ ชิ้น

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระในรูป 1.7 โครงสร้างดังกล่าวจะอยู่ในภาวะสมดุลก็ต่อเมื่อแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ของแรงมีค่าเป็นศูนย์ตามสมการ (1.5) ดังนั้น จะสามารถเขียนสมการสมดุลได้ว่า

$$[\Sigma F_x = 0]; \quad A_x + E_x = 0 \quad (ก)$$

$$[\Sigma F_y = 0]; \quad A_y - 12 = 0 \quad (ข)$$

$$[\Sigma M_A = 0]; \quad 2.4E_x - 3.6(12) = 0 \quad (ค)$$

สมการ (ก) และ (ข) เป็นสมการสมดุลแรงในแนวแกน x และ y ตามลำดับ ส่วนสมการ (ค) เป็นผลรวมของโมเมนต์ของแรงรอบจุด A เมื่อแก้สมการทั้งสามจะได้ค่าแรง $A_x = -18 \text{ kN}$, $A_y = 12 \text{ kN}$

และ $E_x = 18 \text{ kN}$ แรง A_x ที่ได้จากสมการสมดุลมีค่าเป็นลบแสดงว่าแรง A_x มีทิศชี้ไปทางซ้าย ซึ่งตรงข้ามกับทิศที่แสดงในรูป 1.7 ส่วนแรง A_y และ E_x มีค่าเป็นบวกแสดงว่าแรงมีทิศทางตามที่แสดงในรูป 1.7

ส่วนแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นบนชิ้นส่วนต่าง ๆ สามารถหาได้จากการพิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วนแต่ละชิ้นร่วมกับการใช้สมการสมดุล พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วน ABC ในรูป 1.8 (ก) สามารถเขียนสมการสมดุลของแรงและโมเมนต์ของแรงได้ ดังนี้

$$[\Sigma F_x = 0]; \quad BD \cos \theta + A_{x(1)} = 0 \quad (\text{ง})$$

$$[\Sigma F_y = 0]; \quad A_{y(1)} + BD \sin \theta - 12 = 0 \quad (\text{จ})$$

$$[\Sigma M_B = 0]; \quad A_{y(1)}(1.8) + 12(1.8) = 0 \quad (\text{ฉ})$$

เมื่อพิจารณารูปร่างของโครงสร้างพบว่า θ มีค่าเท่ากับ 33.69° ดังนั้นสมการ (ง) ถึง (ฉ) จึงเป็นระบบสมการเชิงเส้นจำนวนสามสมการ โดยมีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า 3 ตัวแปร สามารถหาค่าแรงต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$A_{x(1)} = -36 \text{ kN}, \quad A_{y(1)} = -12 \text{ kN} \quad \text{และ} \quad BD = 43.27 \text{ kN} \quad \text{ตอบ}$$

แรงที่กระทำกับชิ้นส่วน BD ที่ตำแหน่ง B และ D มีค่าเท่ากับแรง BD ที่กระทำบนชิ้นงาน ABC ดังนั้นจึงไม่จำเป็นต้องตั้งสมการสมดุลเพื่อหาแรงปฏิกิริยาสำหรับชิ้นงาน BD สำหรับแรงปฏิกิริยาบนชิ้นส่วน ADE สามารถหาได้โดยการพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ของแรงเช่นเดียวกับชิ้นส่วน ABC สมการสมดุลเขียนได้ ดังนี้

$$[\Sigma F_x = 0]; \quad A_{x(2)} + E_x - BD \cos \theta = 0 \quad (\text{ช})$$

$$[\Sigma F_y = 0]; \quad A_{y(2)} - BD \sin \theta = 0 \quad (\text{ซ})$$

$$[\Sigma M_D = 0]; \quad A_{x(2)}(1.2) - E_x(1.2) = 0 \quad (\text{ญ})$$

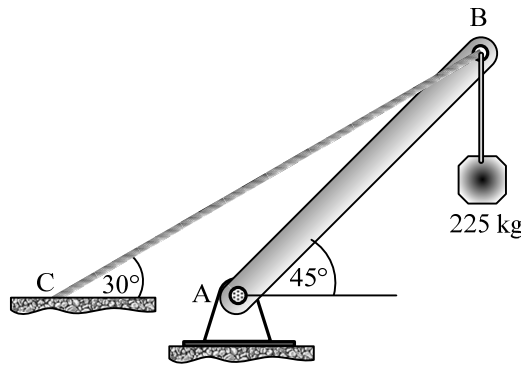
เมื่อแก้ระบบสมการ (ช) ถึง (ญ) โดยพิจารณาให้ $BD = 43.27 \text{ kN}$ และ $\theta = 33.69^\circ$ จะได้

$$A_{x(2)} = 18 \text{ kN}, \quad A_{y(2)} = 24 \text{ kN} \quad \text{และ} \quad E_x = 18 \text{ kN} \quad \text{ตอบ}$$

จะเห็นว่าแรงปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นที่จุดรองรับต่าง ๆ สามารถหาได้โดยการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระของระบบที่สนใจแล้วใช้สมการสมดุลของแรงและสมดุลของโมเมนต์ สำหรับปัญหาในตัวอย่างนี้มีข้อสังเกตเพิ่มเติมอีกว่า เมื่อรวมแรงปฏิกิริยาที่ตำแหน่ง A บนชิ้นส่วน ABC และ ADE จะได้ว่าแรงในแนวนอนมีค่าเท่ากับ $A_{x(1)} + A_{x(2)} = -36 + 18 = -18 \text{ kN}$ ส่วนแรงในแนวตั้งมีค่าเท่ากับ $A_{y(1)} + A_{y(2)} = -12 + 24 = 12 \text{ kN}$ ซึ่งแรงรวมในแนวตั้ง -18 kN และแรงรวมในแนวนอน 12 kN ก็คือ

แรง A_x และ A_y ที่หมุด A กระทำกับโครงสร้างรวมที่แสดงในรูป 1.7 ดังนั้นการประยุกต์ใช้สมการสมดุลของแรงและโมเมนต์จะต้องพิจารณาให้ชัดเจนว่าระบบที่สนใจคืออะไร และแรงที่ได้จากสมการสมดุลคือแรงอะไร

ตัวอย่าง 1.4 เสาสมำเสมอ AB มวล 45 kg รองรับด้วยหมุดที่ปลาย A ดังแสดงในรูป 1.10 มีเคเบิล BC ยึดอยู่ที่ปลาย B และมีมวลขนาด 225 kg แขนงอยู่ที่ตำแหน่ง B จงหาแรงดึงในเส้นเคเบิล และแรงปฏิกิริยาที่หมุด A เมื่อระบบทั้งหมดอยู่ในสภาวะสมดุล



รูป 1.10 โครงสร้างสำหรับตัวอย่าง 1.4

วิธีทำ แผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วน AB สามารถเขียนได้ดังแสดงในรูป 1.11 แรง mg เป็นแรงจากมวลขนาด 225 kg ที่แขวนอยู่ที่ตำแหน่ง B ส่วนแรง Mg เป็นแรงจากน้ำหนักของเสา AB จะเห็นว่าแรงที่ไม่รู้ค่าในแผนภาพวัตถุอิสระมีจำนวนสามแรงคือ A_x , A_y และ แรงในเส้นเคเบิล T การหาแรงทั้งสามทำได้โดยพิจารณาสมดุลของแรงและโมเมนต์ ผลรวมของแรงในแนวนอนและแนวตั้งสามารถเขียนได้ ดังนี้

$$[\Sigma F_x = 0]; \quad A_x - T \cos 30^\circ = 0 \quad (\text{ก})$$

$$[\Sigma F_y = 0]; \quad Mg + mg + T \sin 30^\circ - A_y = 0 \quad (\text{ข})$$

สมมติให้ความยาวของเสา AB มีค่าเป็น L สมการผลรวมของโมเมนต์รอบจุด A สามารถเขียนได้ดังนี้

$$[\Sigma M_A = 0]; \quad Mg \left(\frac{L}{2} \cos 45^\circ \right) + mg (L \cos 45^\circ) + T (L \sin 15^\circ) = 0 \quad (\text{ค})$$

จากสมการ (ค) สามารถหาค่า T ได้โดยการแทนค่าน้ำหนักและตัดค่าคงที่ L ออกจากสมการจะได้

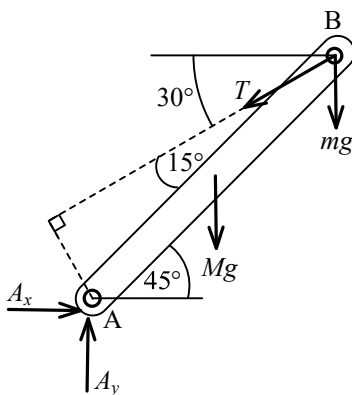
$$45(9.81)\left(\frac{1}{2}\cos 45^\circ\right) + 225(9.81)(\cos 45^\circ) + T(\sin 15^\circ) = 0$$

$$T = 6,633 \text{ N}$$

ตอบ

จากแรงดึงในเส้นเคเบิลที่ทราบค่าสามารถแก้สมการ (ก) และ (ข) เพื่อหาแรงปฏิกิริยา A_x และ A_y ได้ โดย $A_x = 5,745 \text{ N}$ และ $A_y = 5,965 \text{ N}$

ตอบ

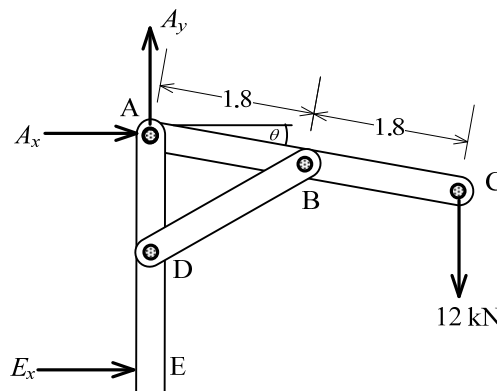


รูป 1.11 แผนภาพวัตถุอิสระของเสา AB

จากตัวอย่างทั้งสองข้างต้นจะเห็นว่า การหาภาระปฏิกิริยาที่ระบบรองรับสามารถทำได้โดยการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระและใช้สมการสมดุลของแรงและโมเมนต์ของแรง ในการวิเคราะห์โดยวิธีการทางสถิตยศาสตร์ดังที่แสดงในตัวอย่าง 1.3 และ 1.4 จะต้องสมมุติให้ชิ้นส่วนทุกชิ้นเป็นวัตถุแข็งเกร็ง ในความเป็นจริงวัตถุที่ใช้ในงานทางวิศวกรรมเป็นวัตถุที่เปลี่ยนรูปได้ ดังนั้น หากจะวิเคราะห์โครงสร้างโดยไม่สมมุติให้ชิ้นส่วนต่างๆ เป็นวัตถุแข็งเกร็งก็สามารถทำได้ แต่ปัญหาจะมีความซับซ้อนมากขึ้น เนื่องจากการพิจารณาให้ชิ้นส่วนใดชิ้นส่วนหนึ่งเป็นวัตถุที่เปลี่ยนรูปได้ ทำให้รูปทรงของโครงสร้างเปลี่ยนไปเมื่อมีภาระมากระทำ ซึ่งจะทำให้ระยะต่างๆ เปลี่ยนไป ส่งผลให้ภาระปฏิกิริยาที่กระทำกับโครงสร้างเปลี่ยนไปด้วย ตัวอย่างเช่น หากวิเคราะห์โครงสร้างในตัวอย่าง 1.2 โดยสมมุติให้ชิ้นส่วน ABC และ ADE เท่านั้นที่เป็นวัตถุแข็งเกร็ง ส่วนชิ้นส่วน BD เป็นวัตถุที่เปลี่ยนรูปได้ เมื่อเขียนแผนภาพวัตถุอิสระจะได้รูปร่างที่แตกต่างไปจากแผนภาพวัตถุอิสระที่แสดงในรูป 1.7 กล่าวคือ ชิ้นส่วน BD จะสั้นลงเพราะชิ้นส่วนนี้รับภาระกด ชิ้นส่วนอีกสองชิ้นจะมี

ความยาวคงเดิมเพราะชิ้นส่วนทั้งสองถูกสมมุติให้เป็นวัตถุแข็งเกร็ง โดยชิ้นส่วน ABC จะหมุนรอบจุด A ในทิศตามเข็มนาฬิกา เนื่องจากจุด B เคลื่อนที่ลงซึ่งเป็นผลมาจากการหดสั้นลงของชิ้นส่วน BC แผนภาพวัตถุอิสระในกรณีที่มีได้สมมุติให้ชิ้นส่วน BD เป็นวัตถุแข็งเกร็งมีลักษณะดังแสดงในรูป 1.12 การที่ชิ้นส่วน ABC หมุนทำให้แรงทั้งระบบที่กระทำกับโครงสร้างเปลี่ยนแปลงไป กล่าวคือเมื่อพิจารณาสมดุลของโมเมนต์ของแรงรอบจุด A จะพบว่าแขนของแรง 12 kN มีค่าน้อยกว่า 3.6 m ซึ่งเป็นแขนของแรงในกรณีที่สมมุติให้ชิ้นส่วนทุกชิ้นเป็นวัตถุแข็งเกร็ง เมื่อแขนของแรงมีระยะสั้นลงทำให้โมเมนต์ของแรงน้อยลงด้วย เมื่อพิจารณาสมดุลของโมเมนต์รอบจุด A จะทำให้ได้แรง E_x ที่มีค่าน้อยลงกว่าที่หาได้ในตัวอย่าง 1.2 ซึ่งส่งผลในแรง A_x มีค่าน้อยลงด้วยเมื่อคิดสมดุลของแรงในแนวนอน การคำนวณหาแรงปฏิกิริยา E_x ในกรณีนี้มีความซับซ้อนและยุ่งยากกว่าที่แสดงในตัวอย่าง 1.2 เนื่องจากจะต้องหาระยะที่ชิ้นส่วน BD หดตัวลงเพื่อหาแขนของแรง 12 kN โดยระยะหดตัวของชิ้นส่วน BD ก็ขึ้นกับแรงในแนวแกน BD ซึ่งขึ้นกับแรง E_x ด้วย จะเห็นว่าไม่สามารถใช้สมการสมดุลของแรงและโมเมนต์ของแรงมาหาหาระปฏิกิริยาได้อย่างตรงไปตรงมาเนื่องจากรูปร่างของโครงสร้างเปลี่ยนไป หากไม่สมมุติให้ชิ้นส่วน ABC และ ADE เป็นวัตถุแข็งเกร็งจะทำให้ปัญหามีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้นอีก เนื่องจากไม่เฉพาะชิ้นส่วน BD เท่านั้นที่หดสั้นลง ความยาวและรูปร่างของชิ้นส่วน ABC และ ADE ก็จะเปลี่ยนไปอีกด้วย ชิ้นส่วนทั้งสองอาจจะยาวขึ้นหรือหดสั้นลงขึ้นกับลักษณะการรับแรง นอกจากนี้ชิ้นส่วนทั้งสองจะโก่งงอเนื่องจากภาระที่ชิ้นส่วนทั้งสองรับเป็นภาระดัด (bending load) ไม่ใช่ภาระในแนวแกนเพียงอย่างเดียวเหมือนกับชิ้นส่วน BD การหาหาระปฏิกิริยาในกรณีนี้มีความซับซ้อนมากขึ้นกว่ากรณีที่สมมุติให้ชิ้นส่วนทั้งสองเป็นวัตถุแข็งเกร็ง

อย่างไรก็ตาม โครงสร้างในงานวิศวกรรมส่วนใหญ่จะถูกออกแบบให้มีค่าความแข็งเกร็ง (stiffness หรือ rigidity) สูง นั่นคือ ระยะยืดหดหรือระยะการโก่งงอของชิ้นส่วนต่าง ๆ มีค่าน้อยมาก



รูป 1.12 แผนภาพวัตถุอิสระกรณีชิ้นส่วน BD เป็นวัตถุเปลี่ยนรูปได้

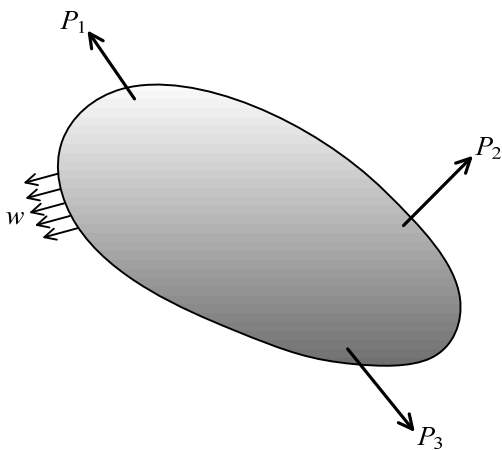
เมื่อเทียบกับขนาดของชิ้นส่วนนั้น ๆ ดังนั้นภาระปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นบนโครงสร้างเมื่อคิดให้ชิ้นส่วนต่าง ๆ เป็นวัตถุที่เปลี่ยนรูปได้ จึงไม่ต่างไปจากภาระปฏิกิริยาเมื่อสมมติให้ชิ้นส่วนต่าง ๆ เป็นวัตถุแข็งเกร็งมากนัก ด้วยเหตุนี้ในการวิเคราะห์สมดุลของวัตถุที่เปลี่ยนรูปได้อาจทำได้โดยพิจารณาให้โครงสร้างทั้งหมดเป็นวัตถุแข็งเกร็ง เพื่อให้สามารถเขียนแผนภาพวัตถุอิสระและใช้สมการสมดุลของแรงและโมเมนต์ได้โดยสะดวก หรืออาจจะกล่าวได้ว่าการหาภาระปฏิกิริยาของวัตถุที่เปลี่ยนรูปได้สามารถทำได้โดยพิจารณาโครงสร้างที่ยังอยู่ในสภาพไม่เปลี่ยนรูป (undeformed configuration)

1.4 ภาระภายใน (Internal load)

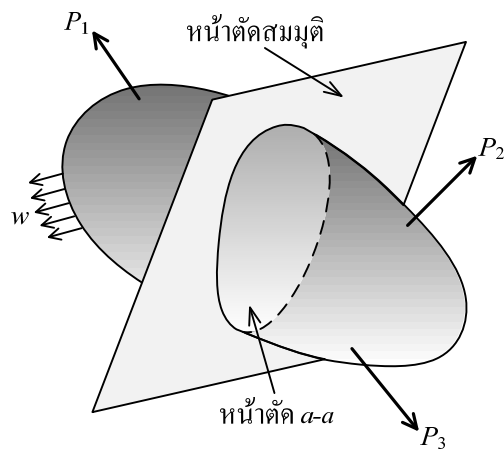
ดังที่กล่าวมาแล้วว่าวิชาสถิตยศาสตร์ หรือกลศาสตร์วิศวกรรมจะสนใจเฉพาะภาระภายนอกที่กระทำกับระบบ ใน 2 หัวข้อที่ผ่านมาเป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับภาระภายนอก จะเห็นว่าภาระภายนอกอาจเป็นภาระที่มากระทำโดยตรง หรืออาจจะเป็นภาระปฏิกิริยาที่เกิดจากระบบรองรับ แรงภายนอกที่มากระทำอาจมีลักษณะเป็นแรงรวมศูนย์ หรือแรงกระจาย อย่างเช่น แรง P และแรง w ที่แสดงในรูป 1.9 แรงลักษณะนี้ไม่ว่าเป็นแรงรวมศูนย์ หรือแรงกระจายอาจรวมเรียกได้เป็นแรงที่ผิว (surface force) เนื่องจากแรงประเภทนี้กระทำที่ผิวของวัตถุโดยตรง การให้ภาระประเภทนี้แก่วัตถุจะต้องมีอุปกรณ์ให้ภาระมาสัมผัสที่ผิวของวัตถุนั้น ๆ แรงอีกประเภทหนึ่งซึ่งกระทำกับทุก ๆ อนุภาคของวัตถุเรียกว่าแรงบนวัตถุ (body force) ตัวอย่างของแรงประเภทนี้ได้แก่น้ำหนัก Mg ที่กระทำกับชิ้นส่วน AB ในตัวอย่าง 1.4 แรงประเภทนี้เป็นแรงที่กระทำกับเนื้อวัตถุทุก ๆ ส่วนใต้ผิวของวัตถุ ไม่เหมือนกับแรงที่ผิวที่กระทำเฉพาะบริเวณที่อุปกรณ์ให้ภาระมาสัมผัสเท่านั้น แรง Mg ในรูป 1.11 เขียนแทนด้วยแรงรวมศูนย์กระทำผ่านจุดเซนทรอยด์ (centroid) ของ AB ในความเป็นจริงแล้วแรง Mg เป็นแรงกระจายที่กระทำที่ทุก ๆ ส่วนของ AB ตัวอย่างของแรงบนวัตถุประเภทอื่นนอกเหนือจากแรงที่เกิดจากแรงโน้มถ่วงของโลกได้แก่แรงจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้า

แรงที่ผิว แรงบนวัตถุ หรือแรงปฏิกิริยาที่ระบบรองรับที่กล่าวมาข้างต้นเป็นภาระภายนอก ยังมีภาระอีกประเภทหนึ่งที่มีความสำคัญในการวิเคราะห์พฤติกรรมทางกลของวัสดุ ภาระดังกล่าวคือภาระภายใน ภาระภายในเป็นภาระที่เกิดขึ้นในเนื้อวัสดุเมื่อมีภาระภายนอกมากระทำ อาจเปรียบได้กับกรณีการใช้มือยกน้ำหนักขนาด 10 kg ขึ้นจากพื้น น้ำหนัก 10 kg นี้เป็นภาระภายนอกที่มากระทำ แต่ผู้ยกจะรู้สึกถึงแรงที่กระทำบริเวณแขนของผู้ยกด้วย ทั้ง ๆ ที่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำโดยตรงบริเวณแขน เหตุที่เป็นเช่นนี้เพราะแรงภายนอกที่กระทำที่มือถูกส่งผ่านเป็นแรงภายในจากมือ

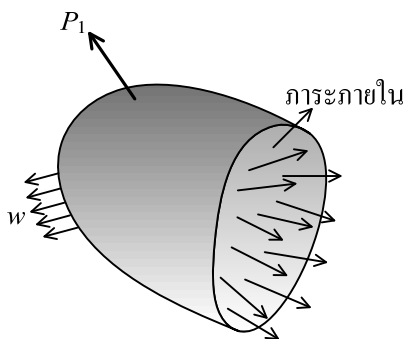
มาสู่แขนและส่วนอื่น ๆ ของร่างกาย การเกิดภาระภายในในชิ้นส่วนทางกลก็มีลักษณะเช่นเดียวกัน พิจารณาวัตถุรูปร่างใด ๆ ดังแสดงในรูปที่ 1.13 (ก) สมมุติให้มีภาระภายนอก P_1, P_2, P_3 และ w กระทำที่ตำแหน่งต่าง ๆ โดยวัตถุดังกล่าวอยู่ในสภาพสมดุล กล่าวคือ ผลรวมของแรงและโมเมนต์มีค่าเป็นศูนย์ การหาแรงภายในทำได้โดยใช้หน้าตัดสมมุติตัดวัตถุที่หน้าตัดที่สนใจออกเป็น 2 ส่วนดังเช่นรูป 1.13 (ข) ซึ่งแสดงการใช้หน้าตัดสมมุติตัดวัตถุผ่านหน้าตัด $a-a$ เมื่อวัตถุถูกแยกออกเป็น 2 ชิ้น พิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วนทางด้านซ้ายมือตามรูป 1.13 (ค) พบว่ามีแรง P_1 และ w กระทำอยู่ที่ผิวของวัตถุ นอกจากนี้ยังมีแรงภายในกระจายอยู่บนหน้าตัดที่ถูกตัด แรงภายในที่ตำแหน่งต่าง ๆ มีขนาดและทิศทางต่าง ๆ กันขึ้นอยู่กับลักษณะของภาระภายนอก จุดหมายหลักอย่างหนึ่งของวิชากลศาสตร์ของวัสดุก็คือการหาขนาดและทิศทางของแรงภายในนี้ ซึ่งจะได้กล่าวถึงโดยละเอียดในบทต่อไป ด้วยหลักการทางสถิติศาสตร์ไม่สามารถหาขนาดและทิศทางของภาระภายในที่ตำแหน่งต่าง ๆ บนหน้าตัดได้ แต่สามารถหาภาระภายในในรูปของภาระลัพธ์ได้ โดยพิจารณาว่าจะต้องมีแรงและโมเมนต์ขนาดเท่าไรและวางตัวในทิศทางใดกระทำบนหน้าตัด $a-a$ เพื่อให้วัตถุที่ตัดแบ่งแล้วอยู่ในสภาพสมดุล ดังนั้น จึงสามารถเขียนแผนภาพวัตถุอิสระใหม่ได้ดังรูป 1.13 (ง) แรงภายในซึ่งเป็นแรงกระจายถูกแทนด้วยแรง $\bar{F}$ และโมเมนต์ $\bar{M}$ กระทำที่จุดเซนทรอยด์ของหน้าตัด $a-a$



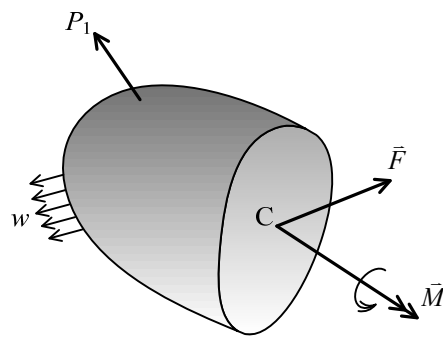
รูป 1.13 (ก) วัตถุรูปร่างใด ๆ ในสภาพสมดุล



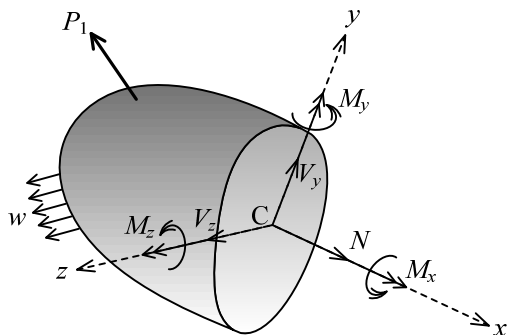
รูป 1.13 (ข) หน้าตัดสมมุติสำหรับตัดวัตถุที่หน้าตัดที่สนใจ $a-a$



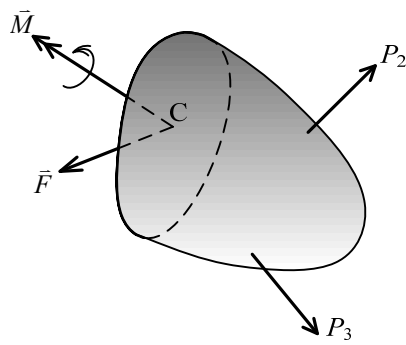
รูป 1.13 (ค) แผนภาพวัตถุอิสระของวัตถุ
ชิ้นส่วนด้านซ้ายที่ถูกตัดแบ่งแล้ว



รูป 1.13 (ง) แผนภาพวัตถุอิสระของวัตถุ
ชิ้นส่วนด้านซ้ายที่แสดงภาระ
ภายในลัทธิ



รูป 1.13 (จ) การแตกแรงและโมเมนต์ภายในให้
อยู่ในแนวแกน x-y-z



รูป 1.13 (ฉ) แผนภาพวัตถุอิสระของชิ้นส่วน
ด้านขวา

การหาขนาดและทิศทางของภาระภายใน $\bar{F}$ และ $\bar{M}$ สามารถทำได้โดยวิธีทางสถิตยศาสตร์ ภาระภายใน $\bar{F}$ และ $\bar{M}$ ซึ่งไม่ทราบทิศทางสามารถเขียนแทนด้วยเวกเตอร์ย่อยในแนวแกน x-y-z ดังแสดงในรูป 1.13 (จ) โดยแรงภายใน $\bar{F}$ สามารถแตกได้เป็นแรงตั้งฉาก N ในแนวแกน x ซึ่งตั้งฉากกับหน้าตัด $a-a$ และแรงเฉือน V_y และ V_z ในแนวแกน y และ z ตามลำดับ ในทำนองเดียวกันโมเมนต์ $\bar{M}$ ก็สามารถแตกออกได้เป็น โมเมนต์บิด (torque) T และ โมเมนต์คด (bending moment) M_y และ M_z แรงตั้งฉาก N อาจชี้ออกจากหน้าตัด $a-a$ หรือชี้เข้าหาหน้าตัดก็ได้ หากแรง N ชี้ออกจากหน้าตัด แรงดังกล่าวก็เป็นแรงดึง ในทางตรงข้ามหากแรง N ชี้เข้าหาหน้าตัดแรงดังกล่าวก็เป็นแรงกด แรงเฉือน V_y และ V_z เป็นแรงที่กระทำในทิศทางสัมผัสกับหน้าตัด ส่วนโมเมนต์บิด T มีแนวโน้มที่จะหมุนหน้าตัด $a-a$ รอบแกน x ตามทิศของลูกศรที่แสดงในรูป ซึ่งสามารถหาได้โดยใช้กฎมือขวา ส่วน

โมเมนต์ M_y และ M_z เป็นโมเมนต์คด มีแนวโน้มที่จะคดหน้าตัด $a-a$ รอบแกน y และ z ตามลำดับ ในบทที่ 7 จะกล่าวถึงวัตถุที่รับโมเมนต์บิดโดยละเอียด ส่วนวัตถุที่รับโมเมนต์คดจะกล่าวถึงต่อไปในบทที่ 8 จากแผนภาพวัตถุอิสระในรูป 1.13 (จ) จะเห็นว่ามีค่าภาระภายในย่อยที่ไม่ทราบค่าอยู่ 6 ค่า เป็นแรง 3 ค่าและโมเมนต์ 3 ค่า การหาค่าภาระที่ไม่ทราบค่าดังกล่าวสามารถทำได้โดยใช้สมการสมดุลในลักษณะเดียวกับการหาค่าแรงปฏิกิริยาจากระบบรองรับตามที่กล่าวถึงในหัวข้อ 1.3 สมการสมดุลที่ใช้คือ

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

จากสมการสมดุล 6 สมการ สามารถหาภาระภายในย่อยที่ไม่ทราบค่าจำนวน 6 ค่าได้ หากรวมภาระภายในย่อยที่ทำให้เข้าด้วยกันก็จะได้แรงภายใน $\bar{F}$ และโมเมนต์ภายใน $\bar{M}$ ตามที่แสดงในรูป 1.13 (ง) จะเห็นว่าภาระภายใน $\bar{F}$ และ $\bar{M}$ ได้มาจากการตัดวัตถุตามรูป 1.13 (ข) แล้วพิจารณาชิ้นส่วนด้านซ้าย อาจกล่าวได้ว่าภาระภายใน $\bar{F}$ และ $\bar{M}$ ที่แสดงในรูป 1.13 (ง) เป็นภาระที่ชิ้นส่วนด้านขวากระทำกับชิ้นส่วนด้านซ้าย แทนที่จะพิจารณาหาค่าภาระภายในจากชิ้นส่วนด้านซ้ายสามารถหาภาระภายในจากชิ้นส่วนด้านขวาโดยใช้แนวคิดเดียวกับการหาจากชิ้นส่วนทางซ้าย รูป 1.13 (ฉ) แสดงแผนภาพวัตถุอิสระของวัตถุด้านขวา ภาระภายในที่ไม่ทราบค่า $\bar{F}$ และ $\bar{M}$ กระทำบนหน้าตัด $a-a$ สามารถหาได้โดยใช้สมการสมดุล 6 สมการ มีข้อสังเกตว่าหน้าตัด $a-a$ บนวัตถุด้านซ้ายและด้านขวาเป็นหน้าตัดเดียวกัน ภาระภายในที่ได้จากการพิจารณาแผนภาพวัตถุอิสระของวัตถุทั้งสองด้านมีค่าเท่ากันแต่จะมีทิศทางตรงกันข้ามเมื่อเขียนบนแผนภาพวัตถุอิสระ เนื่องจากภาระดังกล่าวเป็นภาระกิริยาและภาระปฏิกิริยาซึ่งกันและกัน กล่าวคือ ภาระภายใน $\bar{F}$ และ $\bar{M}$ บนวัตถุด้านซ้ายเป็นแรงที่กระทำโดยวัตถุด้านขวา ในขณะที่วัตถุด้านขวาก็ให้ภาระเดียวกันกระทำกับวัตถุด้านซ้ายด้วย

ภาระภายนอกในโครงสร้างทางวิศวกรรมหลาย ๆ ประเภทมีลักษณะเฉพาะกว่าที่แสดงในรูป 1.13 (ก) กล่าวคือ ภาระภายนอกที่กระทำกับวัตถุมีการวางตัวอยู่ในระนาบระนาบเดียว (in-plane) รูป 1.14 (ก) แสดงวัตถุที่รับภาระในระนาบเดียว วัตถุดังกล่าวรับแรง 4 แรง คือ F_1 , F_2 , F_3 และ F_4 โดยแรงทุก ๆ แรงวางตัวอยู่ในระนาบ $x-y$ ลักษณะของภาระภายในของวัตถุที่รับภาระประเภทนี้จะมีลักษณะซับซ้อนน้อยกว่าวัตถุที่รับภาระนอกที่มีทิศทางใด ๆ การหาภาระภายในที่หน้าตัดใด ๆ สามารถทำได้โดยใช้หน้าตัดสมมุติแบ่งวัตถุออกเป็น 2 ส่วน แล้วเขียนแผนภาพวัตถุอิสระที่มีภาระภายในกระทำบนหน้าตัดที่สนใจดังแสดงในรูป 1.14 (ข) เนื่องจากแรง F_1 และ F_3 วางตัวอยู่บนระนาบเดียว คือ ระนาบ $x-y$ ดังนั้นแรงภายในในทิศ z จึงมีค่าเป็นศูนย์โดยอัตโนมัติ ($V_z = 0$) ดังนั้น