



ฟิสิกส์

(กลศาสตร์ : หน่วยของการวัด กฎของการเคลื่อนที่ การเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรง ทฤษฎีสัมพัทธภาพ)

กลศาสตร์

$$m \frac{d}{dt} v = f$$

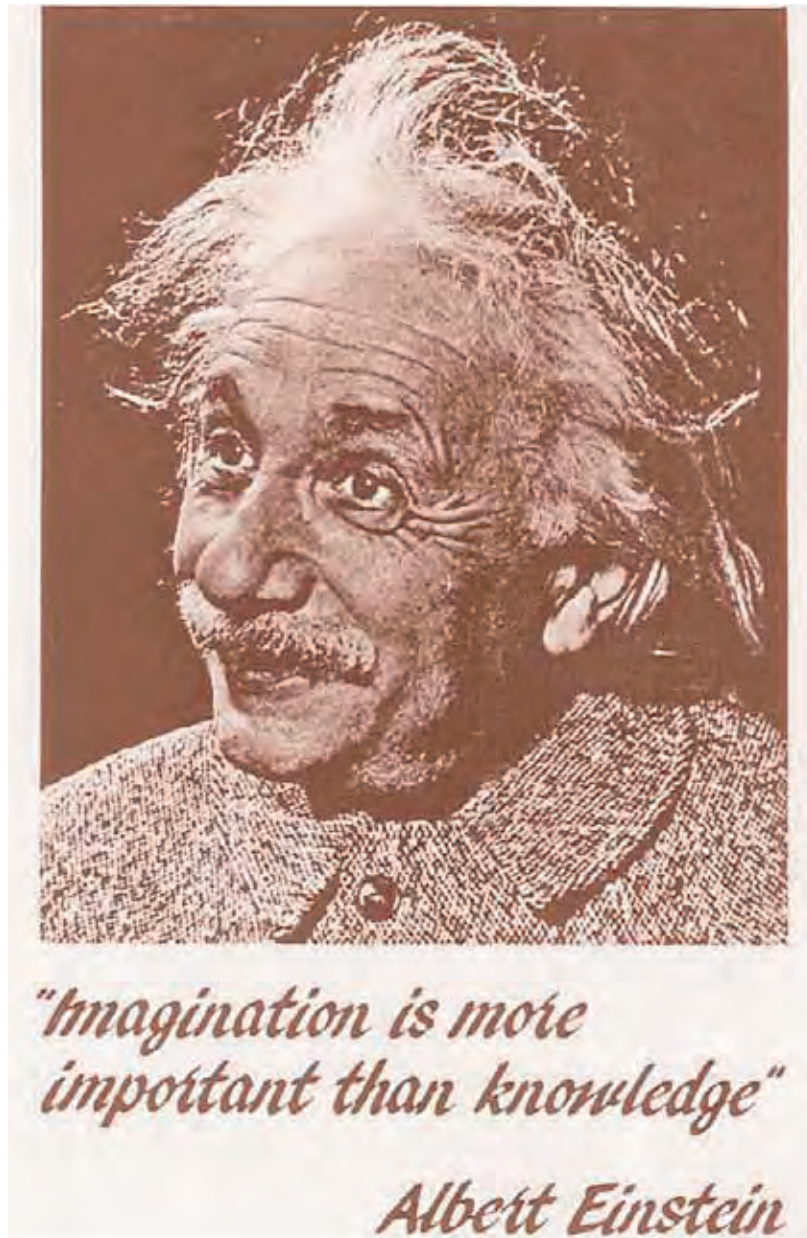
$$f_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

$$E = mc^2$$

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

ฟิสิกส์

(กลศาสตร์ : หน่วยของการวัด กฎของการเคลื่อนที่ การเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรง ทฤษฎีสัมพัทธภาพ)



โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.



**มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา
ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา
กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)**

ความเป็นมา

ประเทศไทยส่งนักเรียนเข้าแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งแรกในปี พ.ศ. 2532 ที่ประเทศเยอรมนี โดยความร่วมมือระหว่างสมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ และสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา (พระยศในขณะนั้น) ได้พระราชทานเงินส่วนพระองค์จำนวนหนึ่งเพื่อเป็นค่าใช้จ่าย

การคัดเลือกนักเรียนเพื่อไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 30 สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดคณะกรรมการมหาวิทยาลัยจำนวนหนึ่งมาช่วยฝึกอบรมรวมเป็นเวลาประมาณสองเดือน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเพิ่มเติมครอบคลุมหลักสูตรที่จะใช้แข่งขัน ซึ่งอยู่ในระดับชั้นปีที่ 1-2 ของมหาวิทยาลัย จากผลสำเร็จในปีแรก ทำให้รัฐบาลเห็นความสำคัญจึงได้จัดสรรงบประมาณให้กับโครงการนี้ผ่านสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2533 เป็นต้นมา สมทบกับเงินพระราชทานเป็นรายปีจากสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เพื่อสนับสนุนการส่งนักเรียนไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ 5 สาขา จนถึงปัจจุบันรวม 14 ปี นักเรียนไทยได้ทำชื่อเสียงได้เหรียญทองรวม 17 เหรียญ เหรียญเงิน 53 เหรียญ เหรียญทองแดง 93 เหรียญ และเกียรติคุณประกาศ 35 ราย รวมทั้งสิ้น 198 รางวัล จากจำนวนนักเรียนที่ส่งไปแข่งขัน 276 คน (72%)

อย่างไรก็ตาม จากการที่ประเทศไทยดำเนินการจัดส่งนักเรียนเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ โอลิมปิกระหว่างประเทศ ตั้งแต่ พ.ศ.2532 จนถึงปัจจุบัน ทำให้เห็นว่ามาตรฐานการศึกษาด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของไทยยังต่ำกว่ามาตรฐานสากล การเตรียมตัวของนักเรียนยังใช้เวลาน้อยเกินไป

เพื่อให้การส่งเสริมและสนับสนุน โครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นสมเด็จพระเจ้า พี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ จึงมีพระดำริให้จัดตั้งมูลนิธิ สอวน. และได้รับอนุมัติจากกระทรวงมหาดไทยเมื่อวันที่ 12 ตุลาคม 2542 โดยมีวัตถุประสงค์หลัก 2 ประการ

วัตถุประสงค์

1. ส่งเสริมให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายทั่วประเทศที่มีความสามารถทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มีโอกาสได้รับการพัฒนาศักยภาพทางด้านคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ฟิสิกส์ และชีววิทยา ตามความถนัดทั้งด้านทฤษฎีและทักษะด้านปฏิบัติ ให้สามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ โดยจัดให้มีศูนย์อบรมทั่วประเทศเป็นการเพิ่มเวลาฝึกอบรม เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความพร้อมที่จะเข้ารับการคัดเลือกไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศให้ได้ผลดียิ่งขึ้น ตามพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ องค์ประธานมูลนิธิ สอวน.
2. เพื่อนำประสบการณ์ที่ได้จากการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ศึกษาของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าระดับสากล

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.) ได้ร่วมมือกับคณาจารย์มหาวิทยาลัยของรัฐ 20 แห่ง และกระทรวงศึกษาธิการ ดำเนินการจัดตั้งศูนย์ สอวน. ในภูมิภาค 12 ศูนย์ และในกรุงเทพฯ 1 ศูนย์ (5 โรงเรียน) เพื่อพัฒนาศักยภาพทางปัญญาของนักเรียนที่มีความพร้อมในด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์จากทั่วประเทศ เพื่อให้นักเรียนได้มีความรู้ความสามารถเทียบเท่ามาตรฐานสากล และพร้อมที่จะสอบคัดเลือกเป็นผู้แทนประเทศไทยไปร่วมการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศในสาขาวิชาต่างๆ ได้ และเพื่อขยายผลจากประสบการณ์ที่ได้เข้าแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าสากล

ในการอบรมนักเรียนของศูนย์ สอวน. มูลนิธิ สอวน. ได้พิจารณาเห็นว่าตำราที่มีความสมบูรณ์ของเนื้อหาตามหลักสูตรของ สอวน. จะช่วยพัฒนาศักยภาพของนักเรียนในศูนย์ สอวน. ให้สูงขึ้นได้ นอกจากนั้นตำราเรียนในวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสมบูรณ์ถูกต้องยังขาดแคลน นักเรียนและครูสามารถนำตำราที่พัฒนาขึ้นมาไปใช้เป็นหนังสืออ้างอิงประกอบการเรียนการสอนได้อีกด้วย มูลนิธิ สอวน. จึงได้มี “โครงการจัดทำตำราส่งเสริมพัฒนาศักยภาพของนักเรียนด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์” ขึ้น เพื่อผลิตตำราคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ที่มีเนื้อหาหลักสูตรตามมาตรฐานสากล โดยมีวัตถุประสงค์

1. เพื่อเป็นที่ระลึกในมหามงคลสมัยที่สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ ทรงเจริญพระชนมายุ 80 พรรษา ซึ่งพระองค์ทรงมีพระมหากรุณาธิคุณต่อโครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศและทรงสนับสนุนการดำเนินงานเพื่อพัฒนามาตรฐานการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยอย่างหาที่สุดมิได้

2. เพื่อผลิตหนังสือคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายถึงระดับชั้นปีที่ 1 ของคณะวิทยาศาสตร์ในมหาวิทยาลัยให้มีคุณภาพเทียบเท่าสากล เรียบเรียงโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัยของรัฐที่มีประสบการณ์สูงและที่มีส่วนรวมในการฝึกอบรมนักเรียนในค่าย สอวน. ค่าย สสวท. และควบคุมนักเรียนไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ เนื้อหาในหนังสือเน้นกระบวนการคิดแบบวิทยาศาสตร์ เพื่อฝึกฝนให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนทั้งในเชิงทฤษฎีและประยุกต์ได้โดยจัดพิมพ์บนกระดาษอาร์ตอย่างดีและมีภาพสีประกอบคำบรรยาย

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายในการผลิตตำราคณิตศาสตร์ รวม 5 เล่ม คอมพิวเตอร์ 3 เล่ม เคมี 3 เล่ม ชีววิทยา 5 เล่ม และฟิสิกส์ 3 เล่ม โดยหนังสือชุดแรกจะนำขึ้นทูลเกล้าถวายในวันที่ 6 มิถุนายน 2547 ซึ่งเป็นวันประชุมสามัญประจำปี พ.ศ. 2547 ของคณะกรรมการบริหาร และสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เสด็จเป็นองค์ประธานที่ประชุม ส่วนที่เหลือคาดว่าจะจัดพิมพ์ให้แล้วเสร็จภายในปี พ.ศ. 2547 นี้ นอกจากนั้นคณะกรรมการโครงการผลิตตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายจะผลิตตำราที่มีคุณภาพสูงนี้ในระดับมัธยมศึกษาต้น โดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัย เพื่อวางรากฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพื่อสร้างแรงบันดาลใจและความสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์แก่เยาวชนอีกด้วย หากได้รับความอนุเคราะห์ช่วยเหลือด้านงบประมาณจากภาครัฐและเอกชน

คณะจัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์หวังว่าโครงการตำราคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. จะมีส่วนร่วมในการปฏิรูปการเรียนรู้และยกระดับมาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้เทียบเท่ากับระดับสากลเพื่อสนองพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์

*คำขอบคุณ : คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ ขอขอบคุณพิพิธภัณฑน์ Deutsche Museum, Munich ที่อนุญาตให้ประธานคณะกรรมการฯ เข้าถ่ายภาพในพิพิธภัณฑน์ เพื่อนำมาเผยแพร่

คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

คณะกรรมการที่ปรึกษา

- | | |
|---|------------------------|
| 1. ศาสตราจารย์ นายแพทย์ จรัส สุวรรณเวลา | รองประธานมูลนิธิ สอวน. |
| 2. รองศาสตราจารย์ ดร.กำจัด มงคลกุล | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 3. ดร. คุณหญิงกษมา วรวรรณ ณ อยุธยา | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 4. รองศาสตราจารย์ ดร. คุณหญิงสุมณฑา พรหมบุญ | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 5. นายเชาว์ อรรถมานะ (อดีต) | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 6. นายสมนึก พิมลเสถียร | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 7. นายสุนทร อรุณานนท์ชัย | กรรมการมูลนิธิฯ |
| 8. รองศาสตราจารย์บุญรักษา สุนทรธรรม | กรรมการมูลนิธิฯ |

คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ

- | | |
|--|------------------------------------|
| 1. ศาสตราจารย์ศักดิ์ ศิริพันธุ์ (ราชบัณฑิต) เลขานุการมูลนิธิ สอวน. | ประธาน |
| 2. รองศาสตราจารย์เย็นใจ สมวิเชียร | รองประธาน |
| 3. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั่นนัม | กรรมการ (วิชาคณิตศาสตร์) |
| 4. รองศาสตราจารย์ยืน ภู่วรรณ | กรรมการ (วิชาคอมพิวเตอร์) |
| 5. รองศาสตราจารย์ ดร. พินิติ รตะนานุกูล | กรรมการ (วิชาเคมี) |
| 6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ์ | กรรมการ (วิชาฟิสิกส์) |
| 7. ศาสตราจารย์อักษร ศรีเปล่ง | กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทพืช) |
| 8. รองศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ ยศยิ่งยวด | กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทสัตว์) |

คณะผู้เขียนวิชาฟิสิกส์

- | | |
|--|---------------------|
| 1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ์ | ประธานคณะอนุกรรมการ |
| 2. รองศาสตราจารย์สุวรรณ คูสำราญ | อนุกรรมการ |

คำนำ

ตำราที่จัดทำขึ้นนี้ เหมาะสำหรับนักเรียนและผู้สนใจที่ต้องการพัฒนาศักยภาพของตนเองทางฟิสิกส์ให้ได้ระดับมาตรฐานของมัธยมศึกษานานาชาติ เพราะนอกจากมีเนื้อหาวิชาฟิสิกส์ที่สูงกว่าระดับโรงเรียนปกติแล้ว ยังมีเนื้อหาทางด้านคณิตศาสตร์ที่จำเป็นสำหรับวิชาฟิสิกส์ด้วย

เนื้อหาในหนังสือนี้ เน้นกระบวนการคิด โดยวางรากฐานบนกฎที่เป็นหัวใจของวิชาและพัฒนาไปสู่หลักการที่จะเป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหาในเชิงทฤษฎีปฏิบัติและในเชิงประยุกต์

ผู้ที่เริ่มศึกษาวิชานี้จริงจังก็น่าจะเป็นครั้งแรก ควรจะตั้งต้นจากบทแรกมุ่งสู่บทท้าย ๆ ตามลำดับ ส่วนผู้ที่คุ้นเคยกับวิชาคณิตศาสตร์มากแล้วอาจข้ามบทที่ 1 ไปได้

การพิมพ์ครั้งนี้ได้แก้ไขสิ่งผิดพลาดที่ได้รับแจ้งจากนักเรียนโครงการสอวน. โครงการโอลิมปิกวิชาการ รวมทั้งผู้อ่านอื่น ๆ และได้เปลี่ยนแปลงหน้าปกใหม่เป็นสมการที่เป็นศูนย์กลางของวิชา

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ

B.Sc.(Queensland),M.Sc.,Ph.D. (Birmingham)

ผู้เขียน

ISBN : 978-616-8242-07-0

สงวนลิขสิทธิ์

จัดพิมพ์โดย มูลนิธิ สอวน.

พิมพ์ครั้งที่ 7 พ.ศ. 2563 (2020)

พิมพ์แก้ไขและจัดทำหน้าปก : นายปณต นพทศพร นักศึกษาปริญญาเอก มหาวิทยาลัยมหิดล

พิมพ์ที่ บริษัท ด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด

แยกสี / เฟลท เอ็นอาร์ ฟิล์ม

ผู้จัดจำหน่าย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330

CALL CENTER โทร. 0-2255-4433 <http://www.chulabook.com>

ร้านค้า ติดต่อแผนกขายส่ง สาขาหัวหมาก โทร. 0-2374-1374-5 โทรสาร 0-2374-1377

บทหน้า		หน้า
บทหน้า		1
บทที่ 1	คณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์ขั้นต้น	3
	1.1 แคลคูลัสของตัวแปรอิสระตัวเดียว	4
	1.1.1 อนุพันธ์	4
	1.1.2 อินทิกรัล	7
	1.1.3 อนุกรมอนันต์	12
	1.2 แคลคูลัสของตัวแปรอิสระหลายตัว	13
	1.3 เวกเตอร์	17
	1.3.1 ปริมาตรเวกเตอร์ที่จำเป็น	18
	1.3.2 การดำเนินการ (operations) ที่เกี่ยวกับเวกเตอร์	18
บทที่ 2	หน่วยของการวัดและความแม่นยำของการทดลอง	27
	2.1 การวิเคราะห์เชิงโดเมนชันส์	28
	2.2 หน่วย	30
	2.3 ความคลาดเคลื่อนของการวัด	31
	2.3.1 ข้อตกลงเกี่ยวกับความหมายของคำบางคำ	32
	2.3.2 การรายงานค่าที่วัดได้พร้อมความมีนัยสำคัญ	33
	2.3.3 การวิเคราะห์หาค่าความคลาดเคลื่อนของการวัด	36
บทที่ 3	กฎของการเคลื่อนที่	41
	3.1 สสาร สเตช เวลา การเคลื่อนที่	42
	3.2 ระบบอ้างอิง	42
	3.3 กฎการเคลื่อนที่	44
	3.3.1 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่หนึ่ง - กฎของความเฉื่อย	45
	3.3.2 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สอง - กฎของแรง	46
	3.3.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สาม - กฎของแรงกิริยา-ปฏิกิริยา	47
	แบบฝึกหัด	48
บทที่ 4	การบรรยายการเคลื่อนที่	51
	4.1 การเคลื่อนที่เชิงเส้นในหนึ่งมิติ (การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง)	52
	4.1.1 ความเร็วและอัตราเร็ว	52
	4.1.2 ความเร่งและอัตราเร่ง	54
	4.2 การเคลื่อนที่เชิงเส้นในสองและสามมิติ	58
	4.3 การเคลื่อนที่แบบหมุนในระนาบ	62
	4.3.1 การเคลื่อนที่แบบหมุนด้วยอัตราเร็วคงที่ในแนววงกลม	62
	4.3.2 การเคลื่อนที่แบบหมุนด้วยอัตราเร็วไม่คงที่ในแนววงกลม	66
	4.3.3 การเคลื่อนที่แบบหมุน ในแนวที่ไม่จำเป็นต้องเป็นวงกลม	67
	4.4 การเคลื่อนที่แบบหมุนในสเปซสามมิติของอนุภาคเดียว	69
	4.5 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์	70
	แบบฝึกหัด	74
บทที่ 5	การเคลื่อนที่ภายใต้อิทธิพลของแรงสำหรับระบบที่มี 1 อนุภาค	79
	5.1 การเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติภายใต้แรงคงที่	80
	5.2 การเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติภายใต้แรงไม่คงที่	83
	5.2.1 กรณีที่แรงเป็นฟังก์ชันของเวลา	83
	5.2.2 กรณีที่แรงเป็นฟังก์ชันของความเร็ว	84
	5.2.3 กรณีที่แรงเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง	85
	5.2.4 แรงโน้มถ่วง	88
	5.2.5 แรงสปริง แรงที่เป็นปฏิภาคโดยตรงกับการกระจัด	91
	5.2.6 แรงคล การคล โมเมนตัม	96

5.3	การเคลื่อนที่ใน 2 มิติ (ในระนาบ)	99
5.3.1	การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์ (projectile) เหนือพื้นระดับ	100
5.3.2	การเคลื่อนที่ของโปรเจกไทล์เมื่อคำนึงถึงแรงต้านโดยอากาศ	102
5.3.3	การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไทล์เหนือพื้นเอียง	104
5.3.4	การเคลื่อนที่ของดาวเทียมรอบโลกในกรณีที่วงโคจรเป็นวงกลม	107
5.3.5	การเคลื่อนที่ของดาวเทียมรอบโลก ดาวเคราะห์กับอุกกาบาตและดาวหาง รอบดวงอาทิตย์ในกรณีที่วงโคจรไม่เป็นวงกลม	111
5.3.6	ระบบอ้างอิงที่หมุนรอบตัวเอง	120
	แบบฝึกหัด	123
บทที่ 6	ระบบที่มีมากกว่า 1 อนุภาค	125
6.1	ระบบ 2 อนุภาคในหนึ่งมิติ	126
6.1.1	หลักการอนุรักษ์โมเมนตัมเชิงเส้น	128
6.1.2	พลังงานจลน์ของศูนย์กลางมวล	129
6.1.3	พลังงานศักย์ของระบบ	130
6.1.4	ระบบอ้างอิงที่มีศูนย์กลางมวลเป็นจุดกำเนิด	132
6.2	การชนกันในระบบ 2 อนุภาคในหนึ่งมิติ	134
6.3	การสั่นแบบฮาร์มอนิกอย่างง่ายของระบบ 2 อนุภาคในหนึ่งมิติ	142
6.4	ระบบ 2 อนุภาคในสามมิติ	146
6.4.1	การเคลื่อนที่เชิงเส้นของระบบ 2 อนุภาคในสามมิติ	146
6.4.2	การชนกันในระบบ 2 อนุภาคในสามมิติ	151
6.4.3	การเคลื่อนที่แบบหมุนของระบบ 2 อนุภาคในสามมิติ	158
6.5	ระบบ N อนุภาคในสามมิติ	174
6.5.1	การเคลื่อนที่เชิงเส้นของระบบ N อนุภาคในสามมิติ	175
6.5.2	การเคลื่อนที่แบบหมุนของระบบ N อนุภาค	179
6.5.3	การเคลื่อนที่แบบหมุนของระบบ N อนุภาคที่แข็งแกร่ง	180
6.5.4	พลังงานจลน์ของการหมุนของระบบวัตถุแข็งเกร็ง	191
6.5.5	ผลของการทำงานโดยแรงภายนอก ต่อพลังงานของระบบวัตถุแข็งเกร็ง	192
6.5.6	แรงเสียดทานระหว่างผิวของแข็งแข็ง	194
6.5.7	สมการของการเคลื่อนที่ของของแข็ง	198
6.5.8	การขับเคลื่อนแบบจรวด	219
6.5.9	ของแข็งภายใต้สภาวะสมดุลสถิต	224
6.5.10	สภาวะไร้น้ำหนัก	230
	แบบฝึกหัด	234
บทที่ 7	ทฤษฎีสัมพัทธภาพ	239
7.1	กำเนิดของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ	240
7.2	สมมูลฐานของทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ	244
7.3	การหาสมการการแปลงสเปซ-เวลาใหม่	245
7.4	ผลที่ตามมาของการแปลงสเปซ-เวลาแบบลอเรนตซ์	248
7.5	การแปลงความเร็วและความเร่ง	253
7.6	การแก้ไขกลศาสตร์ของนิวตัน	254
7.7	งานเชิงสัมพัทธภาพ	257
7.8	$E = mc^2$	258
7.9	ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์เชิงสัมพัทธภาพของแสง	259
7.10	การผนวกสัมพัทธภาพพิเศษกับทฤษฎีควอนตัม	261
7.11	การเดินทางระหว่างดวงดาว เคาปรมาณบนโลก ในดวงอาทิตย์ และอื่น ๆ	261
7.12	ปรากฏการณ์ดอปเพลอร์เชิงสัมพัทธภาพของแสง	259
	แบบฝึกหัด	264
	หนังสืออ้างอิง	266
	ภาคผนวก ก. หลักสูตรการแข่งขันฟิสิกส์โอลิมปิกระหว่างประเทศ	267
	ภาคผนวก ข. ข้อสอบแข่งขันฟิสิกส์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งที่ 34	271
	ภาคผนวก ค. ข้อสอบแข่งขันฟิสิกส์โอลิมปิกระดับเอเชียครั้งที่ 4	293
	ภาคผนวก ง. หน่วยและค่าคงที่ทางฟิสิกส์	303
	ภาคผนวก จ. คำตอบสำหรับแบบฝึกหัดท้ายบท	311
	ดัชนี	319

ฟิสิกส์ (physics) มาจากคำในภาษากรีก ฟิสิกอส (physikos) ซึ่งหมายถึงธรรมชาติ เราเคยเรียกวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับปรากฏการณ์ธรรมชาติว่า วิชาปรัชญาธรรมชาติ (natural philosophy) คำนี้ผสมคำที่มีรากศัพท์ในภาษาละติน คือคำว่า natural ซึ่งก็หมายถึงธรรมชาติ กับคำที่มีรากศัพท์ในภาษากรีก คือคำว่า philosophy ซึ่งหมายถึงความรู้ คำว่า science มาจากภาษาละตินก็หมายถึงความรู้เช่นกัน

ในปัจจุบันเราอาจกล่าวว่าวิชาฟิสิกส์ศึกษาเกี่ยวกับ **สสาร** (matter) **พลังงาน** (energy) **การเคลื่อนที่** (motion) **อันตรกิริยา** (interaction) ระหว่างสสารกับพลังงานซึ่งทั้งหมดนี้เกิดขึ้นและดำเนินไปใน **สเปซ** (space) และใน **เวลา** (time)

ในขั้นต้นเราอาจแบ่งวิชาฟิสิกส์ออกเป็นหลายสาขาวิชาเพื่อความสะดวกในการเรียนรู้ เช่นการแบ่งออกเป็น กลศาสตร์ (mechanics) เสียง (sound) ความร้อน (heat) แสง (light) ไฟฟ้า (electricity) แม่เหล็ก (magnetism) และอื่น ๆ เป็นต้น

สำหรับแต่ละสาขาของฟิสิกส์เราอาจแบ่งการศึกษาวิเคราะห์ออกเป็นสองแนวทางได้แก่ การวิเคราะห์เชิงทฤษฎี กับการศึกษาโดยการทดลองในห้องทดลองหรือไม่ก็ศึกษาจากการสังเกตปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติ สองแนวทางนี้เสริมกันและกันนำไปสู่ความก้าวหน้า

ผู้ที่ประกอบอาชีพโดยการศึกษาค้นคว้าทางฟิสิกส์เรียกว่านักฟิสิกส์ (physicist) นักฟิสิกส์ที่ทำงานหนักไปทางด้านการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีเรียกว่านักฟิสิกส์เชิงทฤษฎี (theoretical physicist) ส่วนนักฟิสิกส์ที่ทำงานหนักไปทางด้านการทดลองหรือการสังเกตปรากฏการณ์ที่เกิดขึ้นในธรรมชาติแทนในห้องทดลองเรียกว่านักฟิสิกส์เชิงทดลอง (experimental physicist) นักฟิสิกส์บางคนเก่งทั้งสองแบบ

บางครั้งเราแบ่งนักฟิสิกส์ตามสาขาย่อยที่เขาเชี่ยวชาญ เช่น นักฟิสิกส์ดาราศาสตร์ (astro-physicist) ซึ่งเชี่ยวชาญทางด้านฟิสิกส์ของเทหวัตถุ (astrophysics) นักฟิสิกส์นิวเคลียร์ (nuclear physicist) ซึ่งเชี่ยวชาญทางด้านฟิสิกส์ของนิวเคลียสของอะตอม ผู้ที่เชี่ยวชาญด้านการประยุกต์หลักการทางฟิสิกส์ให้เกิดประโยชน์ในทางการแพทย์เรียกว่า นักฟิสิกส์การแพทย์ (medical physicist) เป็นต้น นักฟิสิกส์ในแต่ละสาขาย่อยนี้ก็ยังอาจถูกจำแนกต่อออกเป็นทางด้านทฤษฎีกับทางด้านทดลองอีกด้วย

นักฟิสิกส์เชิงทฤษฎีควรมีความสามารถในการจินตนาการเพื่อสร้างทฤษฎีจากข้อมูลเท่าที่มีในขณะนั้น และควรมีความสามารถในการใช้เทคนิคต่างๆทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายปรากฏการณ์ที่รู้แล้ว และทำนายปรากฏการณ์ที่เรายังไม่รู้ ทฤษฎีที่อธิบายได้ดีและทำนายได้แม่นยำเป็นทฤษฎีที่ดี นักฟิสิกส์เชิงการทดลองควรมีความสามารถในการคิดเพื่อทำการวัดปริมาณต่างๆทางฟิสิกส์และทำการวัดปริมาณนั้นได้อย่างแม่นยำโดยอุปกรณ์ที่มีใช้ในยุคนั้นๆ ความสามารถในการวัดเป็นสิ่งที่เกิดได้จากประสบการณ์และการฝึกฝนอันยาวนานเท่านั้น เราใช้ผลการทดลองเป็นตัวตัดสินว่าทฤษฎีถูกต้องหรือผิดหรือว่าต้องดัดแปลงไปในแนวทางใด เราอาจสรุปว่าการทดลองมักอิงทฤษฎี และทฤษฎีมักอิงการทดลอง

นักฟิสิกส์ที่ดีต้องรอบรู้ทุกอย่างในวิชาฟิสิกส์ ผู้ที่มีความถนัดทางด้านการใช้เทคนิคต่างๆทางคณิตศาสตร์จะสามารถฝึกฝนเป็นนักฟิสิกส์เชิงทฤษฎีที่ดีได้ ส่วนผู้ที่มีความถนัดทางด้านการใช้อุปกรณ์และช่างสังเกตในรายละเอียดที่ซ่อนเร้นจะสามารถฝึกเป็นนักฟิสิกส์เชิงการทดลองที่ดีได้

ในการวิเคราะห์ปรากฏการณ์ทางฟิสิกส์โดยทั่วไป เรามักต้องเชื่อมโยงปริมาณหนึ่งเข้ากับปริมาณอื่นและติดตามการเปลี่ยนแปลงของปริมาณเหล่านั้นในขณะที่ปรากฏการณ์ดำเนินไป การบรรยายปรากฏการณ์ในเชิงคำพูดมักทำได้ลำบากและไม่สะดวกเท่ากับการบรรยายในเชิงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ เราอาจกล่าวว่าคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือของนักฟิสิกส์ ทำนองเดียวกับที่ ค้อน สว่าน ขวาน เลื่อย ฯลฯ เป็นเครื่องมือของช่างสร้างบ้าน ค้อน สว่าน ขวาน เลื่อย เหล่านั้นไม่ใช่ส่วนของบ้าน คณิตศาสตร์ก็ไม่ใช่ส่วนของฟิสิกส์ เพียงแต่ช่วยนักฟิสิกส์ในกระบวนการคิดเท่านั้น นักฟิสิกส์ใช้คณิตศาสตร์ทุกสาขาเพื่อการนี้

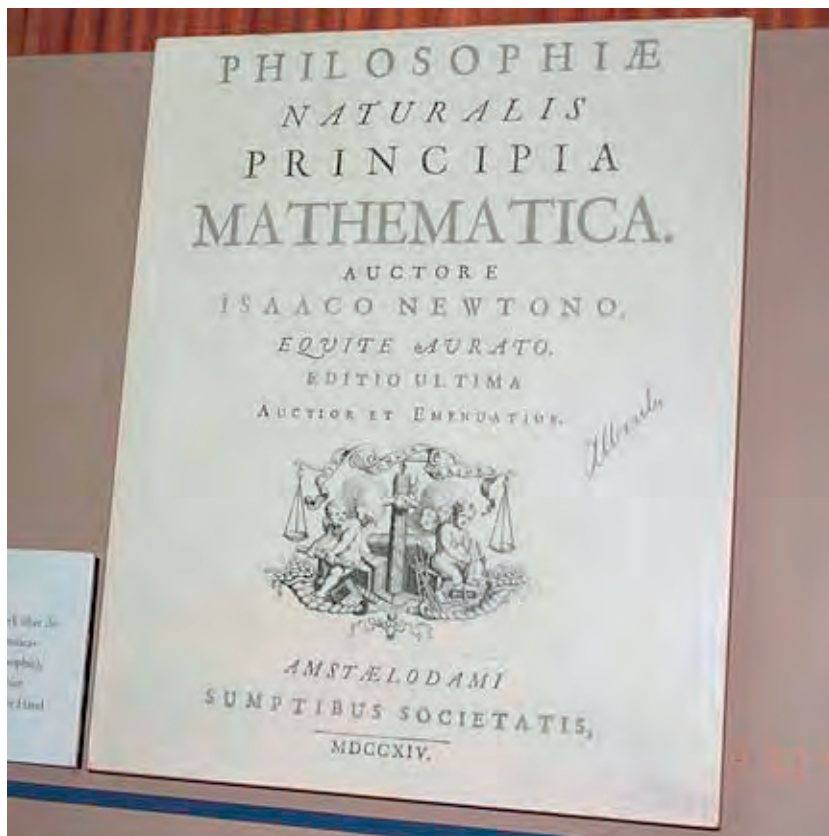
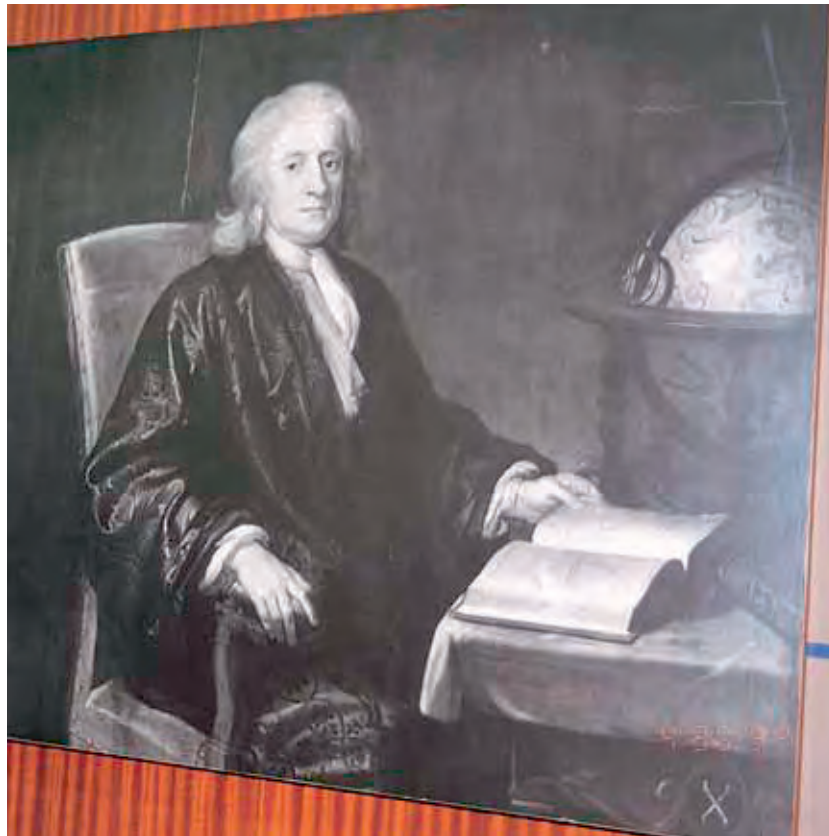
ในการเริ่มเรียนฟิสิกส์ขั้นต้น ผู้เรียนควรมีความรู้คณิตศาสตร์พอสมควรในสาขาเรขาคณิต (geometry) พีชคณิต (algebra) ตรีโกณมิติ (trigonometry) เวกเตอร์ (vectors) และแคลคูลัส (calculus) วิชาเวกเตอร์กับวิชาแคลคูลัสถูกคิดขึ้นมาโดยเฉพาะเพื่อใช้ในฟิสิกส์และเกิดขึ้นโดยนักฟิสิกส์ แต่ทุกวันนี้วิชาเหล่านี้ถูกใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์สาขาอื่นๆด้วย

นักฟิสิกส์ที่เรียนสูงขึ้นไปจะพบกับความจำเป็นที่จะต้องเรียนรู้คณิตศาสตร์สาขาอื่นๆอีกมากมาย ที่มีความเหมาะสมเฉพาะทางกับฟิสิกส์สาขาต่างๆเกือบเป็นแบบคู่ใครคู่มัน การที่จะรู้ว่าวิธีการแบบไหนเหมาะสมกับเรื่องใดนั้นจะได้มาจากการฝึกฝนและประสบการณ์ ไม่มีใครให้สูตรสำเร็จได้

เมื่อมองในภาพรวม เราอาจจำแนกวิชาฟิสิกส์ออกเป็นสาขาหลักที่นักฟิสิกส์ทุกคนต้องเรียนรู้ 5 สาขาคือ

1. กลศาสตร์ดั้งเดิม (Classical Mechanics)
2. อุณหพลศาสตร์ดั้งเดิม (Classical Thermodynamics)
3. ทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้า (Theory of Electromagnetics)
4. ทฤษฎีสัมพัทธภาพ (Theory of Relativity)
5. ทฤษฎีควอนตัม (The Quantum Theory)

สำหรับสาขาลิขีย่อยทั้งหลายในวิชาฟิสิกส์นั้นต่างกิ่งกษออกไปจากสาขาหลักเหล่านี้ทั้งสิ้น รวมทั้งอาจมีศาสตร์สาขาอื่น ๆ นอกเหนือไปจากฟิสิกส์มาผสมด้วย



บทที่ 1

คณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์ขั้นต้น

เซอร์ ไอแซค นิวตัน
(Sir Isaac Newton, 1642 – 1727)



บ้านเกิดของนิวตัน เมืองวูลสทอร์ป (Woolsthorpe)
แคว้นลินคอล์นเชอร์ (Lincolnshire) ประเทศอังกฤษ



ห้องนั่งเล่นในบ้านพัก
ของนิวตันในกรุงลอนดอน
(สังเกตเก้าอี้ที่นิวตันนั่ง)

จุดสำคัญของคณิตศาสตร์สำหรับฟิสิกส์อยู่ที่การวิเคราะห์อัตราการแปรผันระหว่างตัวแปร จำนวนตัวแปรอาจเป็นคู่หนึ่ง หรืออาจเป็นหลายๆตัวแปรก็ได้ ปรากฏการณ์ในฟิสิกส์และศาสตร์สาขาอื่นๆมักจะบรรยายได้ด้วยการบอกถึงเปลี่ยนแปลงของตัวแปรหนึ่งว่าเปลี่ยนแปลงไปกับการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรอื่นอย่างไร เช่น ตำแหน่งของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปกับเวลาอย่างไร พลังงานของวัตถุขึ้นอยู่กับตำแหน่งวัตถุอย่างไร สนามแม่เหล็กเปลี่ยนแปลงกับเวลาอย่างไร เป็นต้น จักรวาลเปลี่ยนแปลงตลอดเวลาและเราเชื่อว่าเป็นไปตามกฎของธรรมชาติ นักวิทยาศาสตร์ทำการศึกษาวิจัยทั้งทางทฤษฎีและทางการทดลองและสังเกตจากธรรมชาติเองเพื่อหาว่ากฎเกณฑ์ของธรรมชาติเป็นอย่างไร วิชาคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือที่สำคัญมากอย่างหนึ่งสำหรับการวิเคราะห์กฎเกณฑ์ดังกล่าว

1.1 แคลคูลัสของตัวแปรอิสระตัวเดียว (calculus of a single variable)

แคลคูลัสเปิดทางให้เราสามารถวิเคราะห์ติดตามปรากฏการณ์ได้อย่างละเอียดแบบ “จุดต่อจุด” การรู้ได้แบบจุดต่อจุดเป็นการรู้ที่ละเอียดที่สุด ท่านเซอร์ ไอแซค นิวตัน (Sir Isaac Newton) ชาวอังกฤษเป็นผู้คิดค้นวิธีการของแคลคูลัสและวิธีการนี้ช่วยในการค้นพบกฎการโน้มถ่วง ทั้งนี้โดยการวิเคราะห์หาจากกฎของเคปเลอร์ (Johannes Kepler) เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์ซึ่งเคปเลอร์ค้นพบอีกต่อหนึ่งจากข้อมูลทางดาราศาสตร์ที่รวบรวมไว้โดยบราห์ (Tycho Brahe)

1.1.1 อนุพันธ์ (derivative)

เราอาจเริ่มวิชาแคลคูลัสโดยพิจารณาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปร y กับ x ซึ่งเรามักเขียนเชิงสัญลักษณ์เป็น

$$y = f(x)$$

เราสนใจปริมาณ
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ซึ่งหมายถึง อัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x ในกรณีที่การเปลี่ยนแปลงของ x นั้นมีค่าน้อยมากจนไม่มีค่าใดน้อยกว่าได้ นั่นคือการเปลี่ยนแปลงที่แทบพูดได้ว่าจากจุดหนึ่งไปจุดติดกันเลย

สัญลักษณ์ที่ใช้แทน $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ มีมากมายหลายรูปแบบแล้วแต่ใครชอบ รูปแบบที่นิยมมากที่สุดน่าจะเป็น $\frac{d}{dx}y$ และเราจะใช้รูปแบบนี้ เราอาจกล่าว ณ จุดนี้ว่าคำจำกัดความข้างล่างนี้เป็นหัวใจของแคลคูลัส

$$\frac{d}{dx}y \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \dots\dots\dots(1.1)$$

คำจำกัดความของ **อนุพันธ์ (derivative)** $\frac{d}{dx}y$ ดังกล่าวทำให้เกิดผลที่ตามมาซึ่งสามารถพิสูจน์ได้คือ

ก. $\frac{d}{dx}(cy) = c \frac{d}{dx}y$, เมื่อ c เป็นค่าคงที่

ข. $\frac{d}{dx}(y_1 + y_2) = \frac{d}{dx}y_1 + \frac{d}{dx}y_2$

ค. $\frac{d}{dx}(y_1 y_2) = y_1 \frac{d}{dx}y_2 + y_2 \frac{d}{dx}y_1$

ง. $\frac{d}{dx}y = \frac{1}{\left(\frac{d}{dy}x\right)}$

จ. $\frac{d}{dx}y = \left(\frac{d}{du}y\right)\left(\frac{d}{dx}u\right)$ เมื่อ $y = y(u)$ และ $u = u(x)$

จากคำจำกัดความของ $\frac{d}{dx}y$ และผลที่ตามมาเหล่านี้เราสามารถสร้างตารางของสูตรมาตรฐานสำหรับหาอนุพันธ์ที่ควรจำและนำไปใช้ได้ทันที จำนวนสูตรมาตรฐานมาน้อยเพียงใดนั้นขึ้นกับความจำเป็นของแต่ละปัญหาข้างล่างนี้เป็นตัวอย่างของสูตรมาตรฐานที่น่าจดจำ

ตาราง 1.1 สูตรมาตรฐานสำหรับหาอนุพันธ์

1. $\frac{d}{dx}c = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่

2. $\frac{d}{dx}x = 1$

3. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

4. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828.....$

5. $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$, $\ln x \equiv \log_e x$

6. $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

7. $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

$$8. \quad \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$9. \quad \frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10. \quad \frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \sinh x \equiv \frac{e^{+x} - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x \equiv \frac{e^{+x} + e^{-x}}{2}$$

$$11. \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$$

$$12. \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arcsinh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$13. \quad \frac{d}{dx} \operatorname{arccosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

ตัว e เป็นตัวเลขหนึ่งที่สำคัญมากทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ โดยเฉพาะในฟิสิกส์ซึ่งใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือ เรามักอ้างถึง e ว่าเป็นฐานของลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm) เลขนี้มีที่มาได้มากมายหลายทาง ในที่นี้เราจะแสดงที่มาของมันในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $y = a^x$ ซึ่ง a เป็นค่าคงที่ การทำตรงไปตรงมาตามคำจำกัดความของ $\frac{d}{dx} y$ จะเห็นว่ายาก แต่เราสามารถหลีกเลี่ยงได้โดยการใช้ลอการิทึมดังนี้

$$\text{จาก } y = a^x \text{ สามารถเขียนได้เป็น } \log_a y = x$$

$$\text{ซึ่ง} \quad \log_a (y + \Delta y) = x + \Delta x$$

$$\text{นำทั้งสองสมการข้างต้นมาลบกันจะได้} \quad \log_a \left(1 + \frac{\Delta y}{y} \right) = \Delta x = \frac{\Delta x}{\Delta y} \Delta y = \frac{\Delta x}{\Delta y} y \frac{\Delta y}{y}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{y} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\log_a \left(1 + \frac{\Delta y}{y} \right)^{\frac{y}{\Delta y}} \right] = \frac{1}{y} \log_a \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad \frac{d}{dy} x = \frac{1}{y} \log_a e, \quad e \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad \dots\dots\dots(1.2)$$

$$\text{แล้วใช้} \quad \frac{d}{dx} y = \frac{1}{\left(\frac{d}{dy} x \right)}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{d}{dx} a^x = a^x \log_e a = a^x \ln a; \quad \ln a \equiv \log_e a$$

และสำหรับกรณีพิเศษที่ $a \equiv e$ นั้น จะได้ $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

ส่วนค่าของ e เป็นตัวเลขนั้นอาจหาได้ด้วยการกระจายตามทฤษฎีบทไบนอมิเยล (Binomial Theorem) เช่น

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1!} \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \frac{n-1}{n} \frac{n-2}{n} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots \quad \dots\dots\dots(1.3) \\ &\approx 2.718281828459045235\dots\end{aligned}$$

เราเลือกเขียน $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ เป็นสูตรมาตรฐานในตารางที่ 1.1 ก็เพราะว่ารูปนี้จำง่ายกว่า $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$ และรูปหลังนี้ก็สามารถหาได้ทันทีจากรูปแรก

ฟังก์ชัน e^x มีสมบัติที่น่าสนใจที่ค่าอนุพันธ์ของมันเท่ากับค่าฟังก์ชันเอง สมบัตินี้ทำให้เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ที่มีสมบัติคล้ายคลึงกับพวกฟังก์ชัน $\sin x, \cos x$ ฯลฯ คือสร้างพวกฟังก์ชันไฮเพอโบลิก (hyperbolic functions) ดังจะเห็นได้ในรายการที่ 10-13 ของตาราง 1.1 นั้น

1.1.2 อินทิกรัล (integral)

มาถึงจุดนี้เราจะสังเกตได้ว่าที่ว่าแคลคูลัสถูกคิดขึ้นในตอนแรกเพื่อกลศาสตร์นั้นเป็นมาอย่างไร กฎการเคลื่อนที่ข้อสองของนิวตัน กล่าวว่า มวลคูณกับอัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเท่ากับแรง จึงเขียนในภาษาแคลคูลัสได้เป็น

$$m \frac{d}{dt}v = f$$

ซึ่งในที่นี้ $v = \frac{d}{dt}x$, x แทนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ในเวลา t

ในกรณีที่ตรงไปตรงมาที่สุด f เป็นฟังก์ชันของเวลา t และคำถามที่ปรากฏขึ้นในใจทันทีก็คือ v จะเป็นฟังก์ชันรูปใดของ t การตอบคำถามนี้ที่แท้ก็เป็นการย้อนทางการหาอนุพันธ์ และวิธีการย้อนทางนี้เป็นแขนงหนึ่งที่สำคัญมากในแคลคูลัสและสาระสำคัญของเรื่องนี้ปรากฏอยู่ในการพยายามตอบปัญหาข้างล่างนี้:

ให้ $y(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งเราไม่ทราบว่ารูปร่างเป็นอย่างไร แต่เราทราบเพียงว่าอนุพันธ์ของมันคือ $\frac{d}{dx}y = g(x)$ ซึ่งในที่นี้เรารู้รูปร่างของ $g(x)$ จากข้อกำหนดนี้เราอยากหารูปของฟังก์ชัน $y(x)$ ว่าเป็นรูปใด?

ในแคลคูลัสเรากลับกันเขียนประโยคที่ยาวนี้เป็นประโยคสัญลักษณ์ดังนี้

$$y(x) \equiv \int g(x) dx = ? \quad \dots\dots\dots(1.4)$$

หรือสั้นลงไปอีกว่า $\int g(x) dx = ?$

ทุกครั้งที่เราเห็นสัญลักษณ์ $\int g(x) dx$ เราควรตระหนักทันทีว่ามันแทนฟังก์ชันหนึ่งซึ่งมีอนุพันธ์เป็น $g(x)$ ดังนั้นเราจะเห็นทันทีว่าสมการข้างล่างนี้เป็นจริงเสมอ

$$\frac{d}{dx} \int g(x) dx = g(x) \quad \dots\dots\dots(1.5)$$

สมการที่สำคัญสมการนี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อ **ทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส (the fundamental theorem of calculus)** เราสามารถใช้ทฤษฎีบทนี้กับสูตรมาตรฐานในตารางที่ 1.1 แล้วสร้างตารางขึ้นมาเพื่อช่วยในการหาค่า $\int g(x) dx$ สำหรับ $g(x)$ ต่างๆซึ่งเราจะทำในขั้นต่อไป แต่ก่อนอื่นเราควรศึกษาผลที่ตามมาจากทฤษฎีบทนี้ก่อน เช่นเดียวกับที่เราเคยศึกษาผลที่ตามมาจากการจำกัดความของ $\frac{d}{dx} y$ ในเรื่องการหาอนุพันธ์

พิจารณา $\frac{d}{dx} \int c g(x) dx = c g(x)$ โดย c เป็นค่าคงที่

$$\begin{aligned} &= c \frac{d}{dx} \int g(x) dx \\ &= \frac{d}{dx} [c \int g(x) dx] \end{aligned}$$

จะเห็นทันทีว่า $\int c g(x) dx = c \int g(x) dx$

$$\begin{aligned} \text{หรือพิจารณา } \frac{d}{dx} \int [g_1(x) + g_2(x)] dx &= g_1(x) + g_2(x) \\ &= \frac{d}{dx} \int g_1(x) dx + \frac{d}{dx} \int g_2(x) dx \\ &= \frac{d}{dx} [\int g_1(x) dx + \int g_2(x) dx] \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\int [g_1(x) + g_2(x)] dx = \int g_1(x) dx + \int g_2(x) dx$

เราสามารถพิจารณากรณีอื่นๆอีก และได้ผลที่ตามมาที่สำคัญจากทฤษฎีบทพื้นฐานของแคลคูลัส และรวบรวมไว้ดังข้างล่างนี้

$$\text{ก.} \quad \int c g(x) dx = c \int g(x) dx$$

$$\text{ข.} \quad \int [g_1(x) + g_2(x)] dx = \int g_1(x) dx + \int g_2(x) dx$$

$$\text{ค.} \quad \int g(x) dx = \int g(x) \left(\frac{d}{du} x \right) du$$

$$\text{ง.} \quad \int g_1(x) \left(\frac{d}{dx} g_2(x) \right) dx = g_1(x) g_2(x) - \int g_2(x) \left(\frac{d}{dx} g_1(x) \right) dx$$

ทั้งหมดนี้เป็นผลที่ตามมาที่สำคัญซึ่งเราจะใช้เสมอ แต่ก่อนที่จะสร้างตารางเพื่อหารูป **อินทิกรัล (integral)** $\int g(x) dx$ ขอให้สังเกตจุดสำคัญอีกจุดหนึ่งอันเนื่องมาจากความที่ $\frac{d}{dx} c = 0$ เราจะเห็นว่า

$$\frac{d}{dx} [\int g(x) dx + c] = \frac{d}{dx} \int g(x) dx \quad \dots\dots\dots(1.6)$$

ซึ่งบ่งว่าในการหาค่า $\int g(x) dx$ ออกมานั้น เราสามารถได้ $y(x)$ ออกมาดังค่าเดิมเกือบทุกอย่างยกเว้นแต่ค่าคงที่เดียวเท่านั้น นั่นคือแทนที่เราจะตอบว่า $y(x) = \int g(x) dx$ เราต้องตอบว่า $y(x) = \int g(x) dx + c$ ซึ่งค่า c นี้เป็นค่าคงที่ที่เรา还不知道และอาจให้ค่าเป็นอะไรก็ได้ (arbitrary constant) ซึ่งเราสามารถรู้ค่าที่แน่นอนของมันได้เมื่อมีการกำหนดเงื่อนไขตั้งต้น (**initial conditions**) เช่น $y=b$ เมื่อ $x=a$ เป็นต้น เราสามารถสร้างตาราง 1.2 สำหรับหารูป “อินทิกรัล” โดยพิจารณาตาราง 1.1 ร่วมกับผลที่ตามมาในข้อ ก. ข. ค. และ ง. ข้างต้นได้ดังต่อไปนี้

ตาราง 1.2 สูตรมาตรฐานสำหรับหาอินทิกรัล

$$1. \quad \int 1 dx = x + c$$

$$2. \quad \int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$3. \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$4. \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$5. \quad \int e^x dx = e^x + c$$

$$6. \quad \int \cos x dx = \sin x + c$$

$$7. \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

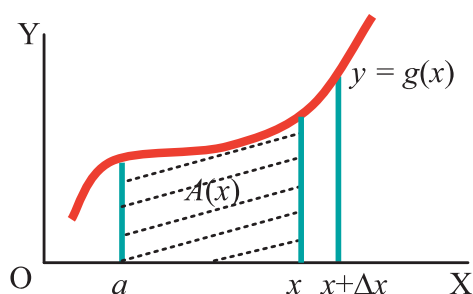
$$8. \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$$

$$9. \quad \int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

$$10. \quad \int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

$$11. \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \, dx = \operatorname{arcsinh} x + c$$

$$12. \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \, dx = \operatorname{arccosh} x + c$$



รูป 1.1 การหาพื้นที่ใต้กราฟ

อินทิกรัล $\int g(x) \, dx$ ที่กล่าวมาแล้วนั้นเป็น**อินทิกรัลที่ยังไม่กำหนดขอบเขต (indefinite integrals)** ขอบเขตที่ว่านี้หมายถึงอะไร? ก่อนจะตอบคำถามนี้เราควรไปมองสมบัติสำคัญมากอันหนึ่งของอินทิกรัล สมบัติที่ว่านี้เกี่ยวข้องกับพื้นที่ใต้กราฟ $g(x)$ พิจารณารูป 1.1 เราต้องการหาพื้นที่เรเงา $A(x)$ ว่านี้เป็นฟังก์ชันรูปใดของ x จะเห็นว่าถ้าเราเรเงาเลยไปถึงตำแหน่ง $x + \Delta x$ พื้นที่เรเงาจะเพิ่มขึ้นอีกนิดหน่อยเท่ากับ $\Delta A \approx g(x) \Delta x$ การประมาณนี้จะแม่นยำเมื่อ Δx มีค่าน้อยมากจนไม่มีอะไรน้อยกว่า (แต่ไม่เป็นศูนย์) นั่นคือ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = g(x)$$

หรือเขียนเป็น

$$\frac{d}{dx} A(x) = g(x) \quad \dots\dots\dots(1.7)$$

ซึ่งย่อหมายความว่า

$$A(x) = \int g(x) \, dx + c \quad \dots\dots\dots(1.8)$$

ค่า c หาได้จากเงื่อนไขที่ว่านี้ $A(a) = 0$

มาถึงจุดนี้เราจะเห็นความจำเป็นที่ต้องพิถีพิถันในการใช้ตัวแปรในสัญลักษณ์ เราอาจใส่เงื่อนไข $A(a) = 0$ ลงไปโดยเขียนว่านี้

$$A(a) = \left[\int g(x) dx \right]_{x=a} + c = 0$$

นั่นคือ

$$c = - \left[\int g(x) dx \right]_{x=a}$$

เราตกลงกันเขียนวงเล็บสี่เหลี่ยมสุดท้ายนี้ใหม่เพื่อความสะดวกและกะทัดรัดเป็น $\int_a^x g(x) dx$ หรืออาจเป็น $\int_a^x g(\zeta) d\zeta$ ก็ได้ หรือยิ่งดีไปกว่านี้อีกก็คือเขียนเป็น $\int_a^x g(\zeta) d\zeta$ หรือ $\int_a^x g(\zeta) d\zeta$ ก็ได้ (ในบทความเช่นนี้เรามักเรียกตัวแปร เช่น ζ ว่า **ตัวแปรดัมมี่ (dummy variable)** ดังนั้นเราควรเขียนเป็น

$$A(x) = \int_a^x g(\zeta) d\zeta - \int_a^a g(\zeta) d\zeta \quad \dots\dots\dots(1.9)$$

แต่เรายังขอยกข้อมือของสมการนี้ให้กะทัดรัดยิ่งขึ้นอีกโดยตกลงกันเขียนเป็น

$$\int_a^x g(\zeta) d\zeta = \int_a^x g(\zeta) d\zeta - \int_a^a g(\zeta) d\zeta \quad \dots\dots\dots(1.10)$$

ได้เป็น $A(x) = \int_a^x g(\zeta) d\zeta$ หรืออาจเขียนเป็น $A(x) = \int_a^x g(x) dx$ ก็ได้

อินทิกรัลรูปสุดท้ายนี้เป็นแบบที่เราเรียกจำเพาะเจาะจงว่า **อินทิกรัลที่กำหนดขอบเขต (definite integrals)**

พื้นที่ใต้กราฟ $g(x)$ นี้อาจหาในทางเรขาคณิตก็ได้ โดยแบ่งพื้นที่ $A(x)$ ออกเป็นแท่งๆ แต่ละแท่งกว้าง Δx_i ซึ่ง i แทนตำแหน่งของแท่งจาก $x=a$ ไปจนสุดขอบด้านขวา และเพื่อให้แม่นยำเราต้องใช้ Δx_i ซึ่งมีขนาดน้อยไปหาศูนย์ (แต่ไม่เท่ากับศูนย์) ดังนั้นในทางเรขาคณิตจะได้ว่า

$$A(x) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=a}^x g(x_i) \Delta x_i$$

หรือย่อว่า

$$A(x) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_a^x g(x_i) \Delta x_i$$

$$\text{นั่นย่อหมายความว่า} \quad \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_a^x g(x_i) \Delta x_i = \int_a^x g(x) dx \quad \dots\dots\dots(1.11)$$

ผลข้างต้นนี้สำคัญและมีประโยชน์มากในฟิสิกส์ นักฟิสิกส์ทุกคนควรรู้และใช้ได้เหมือนกับว่าเกิดมาด้วยกัน

ปัญหาในทางฟิสิกส์และศาสตร์อื่นๆ ในชีวิตจริงมักซับซ้อนและซับซ้อนกว่าที่เราคิด แต่เราก็โชคดีที่โดยประมาณแล้วธรรมชาติยอมให้เราทำการประมาณได้ค่อนข้างแม่นยำด้วยวิธีการที่ค่อนข้างหยาบด้วยซ้ำไป คณิตศาสตร์ที่ใช้จึงไม่ยุ่งยากในระดับนั้น