คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์

Computer Mathematics

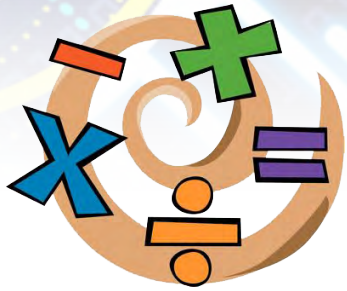
ทศพร พูลเจริญ

วังอักษร

113.-

คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์
(Computer Mathematics)

รหัสวิชา 30900-0010



รายวิชาปรับพื้นฐานวิชาชีพ
ประเภทวิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร
สาขาวิชาคอมพิวเตอร์โปรแกรมเมอร์
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2563
สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา (สอศ.) กระทรวงศึกษาธิการ

เรียบเรียงโดย
ทศพร พูลเจริญ

คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์
(Computer Mathematics)

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

ทศพร พูลเจริญ.
คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์.--กรุงเทพฯ : วังอักษร, 2563.
208 หน้า.
1. คอมพิวเตอร์--คณิตศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง.
004.0151
ISBN 978-616-495-138-9

จัดพิมพ์และจัดจำหน่ายโดย

บริษัทวังอักษร จำกัด
69/3 ถนนอรุณอมรินทร์ แขวงวัดอรุณ เขตบางกอกใหญ่ กรุงเทพฯ 10600
โทร. 0-2472-3293-5 โทรสาร 0-2891-0742 Mobile : 08-8585-1521
e-mail : wangaksorn9@gmail.com Facebook : สำนักพิมพ์ วังอักษร
www.wangaksorn.com ID Line. : @wangaksorn

พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2563

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537

โดยบริษัทวังอักษร จำกัด ห้ามนำส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้
ไปทำซ้ำ ดัดแปลงหรือเผยแพร่ต่อสาธารณชน ไม่ว่ารูปแบบใด ๆ
นอกจากได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรล่วงหน้าจากทางบริษัทฯ เท่านั้น
ชื่อและเครื่องหมายการค้าอื่น ๆ ที่อ้างอิงในหนังสือฉบับนี้
เป็นสิทธิโดยชอบด้วยกฎหมายของเจ้าของแต่ละราย
โดยบริษัทวังอักษร จำกัด มิได้อ้างความเป็นเจ้าของแต่อย่างใด

คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์
(Computer Mathematics)
รหัสวิชา 30900-0010

จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

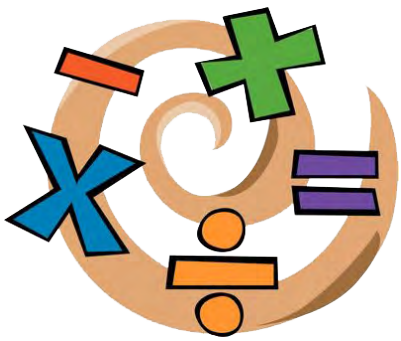
1. เข้าใจเกี่ยวกับคณิตศาสตร์สำหรับการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์
2. สามารถคำนวณทางคณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์
3. มีคุณธรรม จริยธรรม และเจตคติที่ดีในการใช้คณิตศาสตร์พิวเตอร์

จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

1. แสดงความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์สำหรับการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์

จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

ศึกษาเกี่ยวกับวิวัฒนาการของระบบจำนวนและความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์ ระบบเลขฐาน ตรรกศาสตร์เบื้องต้น พีชคณิตบูลีน ทฤษฎีเมตริกซ์



ตารางวิเคราะห์สมรรถนะรายวิชา

วิชา คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์ รหัสวิชา 30900-0010

ท-ป-น 2-0-2 จำนวน 2 คาบ/สัปดาห์ รวม 36 คาบ

หน่วยที่ / สมรรถนะ	แสดงความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์สำหรับการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์
1. วิวัฒนาการของระบบจำนวน	✓
2. ความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์และคอมพิวเตอร์กับเลขฐาน	✓
3. ระบบเลขฐาน	✓
4. ปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ของเลขฐานต่าง ๆ	✓
5. หลักการคำนวณเครื่องคอมพิวเตอร์	✓
6. ตรรกศาสตร์และพีชคณิตบูลีน	✓
7. พีชคณิตเชิงเส้น	✓
8. ทฤษฎีเมตริกซ์	✓

คำนำ

วิชาคณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์ รหัสวิชา **30900-0010** จัดอยู่ในรายวิชาปรับพื้นฐานวิชาชีพ ประเภทวิชาเทคโนโลยีสารสนเทศและการสื่อสาร สาขาวิชาคอมพิวเตอร์โปรแกรมเมอร์ **ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2563** สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา (สอศ.) กระทรวงศึกษาธิการ ผู้เขียนได้บริหารสาระการเรียนรู้แบ่งเป็น 8 บทเรียน ได้จัดแผนการจัดการเรียนรู้/แผนการสอนที่มุ่งเน้นฐานสมรรถนะ (Competency Based) และการบูรณาการ (Integrated) ตรงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา คำอธิบายรายวิชา ในแต่ละบทเรียนมุ่งให้ความสำคัญส่วนที่เป็นความรู้ ทฤษฎี หลักการ กระบวนการ ตัวอย่าง แบบฝึกปฏิบัติ และคำถามเพื่อการทบทวน เพื่อฝึกทักษะประสบการณ์ เร่งพัฒนาบทบาทของผู้เรียนเป็นผู้จัดการแสวงหาความรู้ (Explorer) เป็นผู้สอนตนเองได้สร้างองค์ความรู้ใหม่ และบทบาทของผู้สอนเปลี่ยนจากผู้ให้ความรู้มาเป็นผู้ชี้แนะ (Teacher Roles) จัดสิ่งแวดล้อมเอื้ออำนวยต่อความสนใจเรียนรู้และเป็นผู้ร่วมเรียนรู้ (Co - investigator) จัดห้องเรียนเป็นสถานที่ทำงานร่วมกัน (Learning Context) จัดกลุ่มเรียนรู้ให้รู้จักทำงานร่วมกัน (Grouping) ฝึกความใจกว้าง มุ่งสร้างสรรค์คนรุ่นใหม่ สอนความสามารถที่นำไปทำงานได้ (Competency) สอนความรักความเมตตา (Compassion)ความเชื่อมั่นความซื่อสัตย์ (Trust) เป้าหมายอาชีพอันยังประโยชน์ (Productive Career) และชีวิตที่มีศักดิ์ศรี (Noble Life) เหนือสิ่งอื่นใด เป็นคนดี ทั้งกาย วาจา ใจ มีคุณธรรม จรรยาบรรณทางธุรกิจและวิชาชีพ

ส่งเสริมสนับสนุนยุทธศาสตร์พัฒนาระบบคุณวุฒิวิชาชีพ (Vacational Qualification System) สอดคล้อง ตามมาตรฐานอาชีพ (Occupational Standard) สร้างภูมิคุ้มกัน เพิ่มขีดความสามารถในการแข่งขันของประเทศ กำลังแรงงาน การพัฒนามาตรฐานการปฏิบัติงานระดับชาติ (National Benchmarking) และการวิเคราะห์หน้าที่การงาน (Functional Analysis) เพื่อให้เกิดผลสำเร็จในภาคธุรกิจ อุตสาหกรรม ทุกสาขาอาชีพ เป็นการเตรียมความพร้อมเข้าสู่ประชาคมอาเซียน

ทศพร พูลเจริญ

สารบัญ

บทที่ 1 วิวัฒนาการของระบบจำนวน **1**

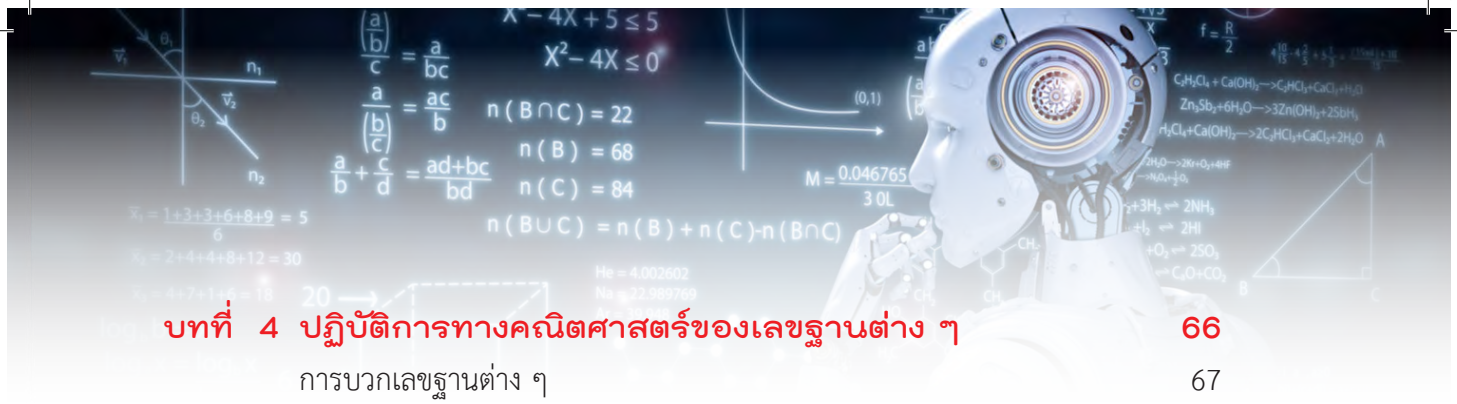
วิวัฒนาการของระบบจำนวนและตัวเลข 2
ความหมายของจำนวนและตัวเลข 3
โครงสร้างของระบบจำนวนจริง 7
จำนวนธรรมชาติ 8
จำนวนเต็ม 9
จำนวนตรรกยะ 11
จำนวนอตรรกยะ 15
จำนวนจริง 17
แบบทดสอบและกิจกรรมฝึกทักษะ 22

บทที่ 2 ความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์และคอมพิวเตอร์กับเลขฐาน **26**

ความสัมพันธ์ระหว่างคณิตศาสตร์กับการทำงานของเครื่องคอมพิวเตอร์ 27
การนับเลขในระบบเลขฐานสิบ 27
การนับเลขในระบบเลขฐานสอง 29
ระบบตัวเลขฐานสองกับระบบดิจิตอลในเครื่องคอมพิวเตอร์ 30
คอมพิวเตอร์กับเลขฐาน 31
แบบทดสอบและกิจกรรมฝึกทักษะ 38

บทที่ 3 ระบบเลขฐาน **41**

ระบบเลขฐานต่าง ๆ 42
การแปลงเลขฐานต่าง ๆ ให้เป็นเลขฐาน 10 49
การแปลงเลขฐานต่าง ๆ ที่ไม่ใช่เลขฐาน 10 55
การแปลงเลขฐาน 8 ให้เป็นเลขฐาน 16 และแปลงเลขฐาน 16 ให้เป็นเลขฐาน 8 59
แบบทดสอบและกิจกรรมฝึกทักษะ 61



บทที่ 4 ปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ของเลขฐานต่าง ๆ **66**

การบวกเลขฐานต่าง ๆ 67

การลบเลขฐานต่าง ๆ 72

การคูณเลขฐานต่าง ๆ 76

การหารเลขฐานต่าง ๆ 81

แบบทดสอบและกิจกรรมฝึกทักษะ 93

บทที่ 5 หลักการคำนวณเครื่องคอมพิวเตอร์ **96**

การคำนวณในระบบคอมพิวเตอร์ 97

ลำดับการทำงานของตัวดำเนินการ 100

โมดูลัส 101

ส่วนเติมเต็ม 102

แบบทดสอบและกิจกรรมฝึกทักษะ 104

บทที่ 6 ตรรกศาสตร์และพีชคณิตบูลีน **106**

ตรรกศาสตร์เบื้องต้น 107

พีชคณิตบูลีนและเครื่องหมายทางเลขคณิต 116

แอนด์ (AND) 117

ออร์ (OR) 117

น็อต (NOT) 118

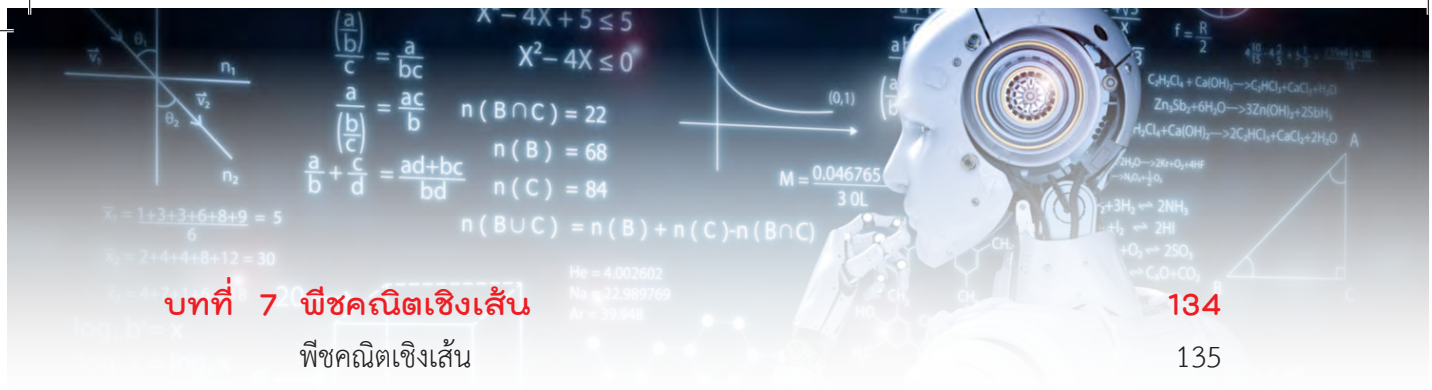
เทอมและนิพจน์ 118

ฟังก์ชัน 118

เกตพื้นฐาน 121

การเขียนนิพจน์ลอจิกจากผังวงจรลอจิก 126

แบบทดสอบและกิจกรรมฝึกทักษะ 128



บทที่ 7 พีชคณิตเชิงเส้น 134

พีชคณิตเชิงเส้น 135

ความหมายของสมการ 135

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 135

การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว 135

สมการเชิงเส้นสองตัวแปร 139

แบบทดสอบและกิจกรรมฝึกทักษะ 142

บทที่ 8 ทฤษฎีเมตริกซ์ 145

ความหมายและรูปแบบทั่วไปของเมตริกซ์ 146

เมตริกซ์ชนิดต่าง ๆ 151

การเท่ากันของเมตริกซ์ 152

การทรานสโพสของเมตริกซ์ 153

การบวกเมตริกซ์ 154

คุณสมบัติการบวกเมตริกซ์ 155

การลบเมตริกซ์ 156

การคูณเมตริกซ์ด้วยสเกลาร์ 157

การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์ 159

ดีเทอร์มิแนนต์ 163

คุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ 166

ไมเนอร์ 168

โคแฟกเตอร์ 169

แอดจอยต์ของเมตริกซ์ A 171

อินเวิร์สของเมตริกซ์ A 172

แบบทดสอบและกิจกรรมฝึกทักษะ 184

คำศัพท์คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์ 195

บรรณานุกรม 198

บทที่ 1

วิวัฒนาการของระบบจำนวน

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objectives)

หลังจากศึกษาจบบทเรียนนี้แล้ว นักศึกษาจะมีความสามารถดังนี้

1. อธิบายวิวัฒนาการของระบบจำนวนและตัวเลข
2. บอกความหมายของจำนวนและตัวเลข
3. บอกโครงสร้างของระบบจำนวนจริง
4. จำแนกจำนวนธรรมชาติออกจากจำนวนเต็ม
5. อธิบายจำนวนเต็มที่นำมาใช้คำนวณทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์
6. บอกความหมายจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ
7. จำแนกจำนวนตรรกยะออกจากจำนวนอตรรกยะ
8. บอกสมบัติของจำนวนจริงที่นำมาใช้กับสมการและอสมการ

บทที่ 1
วิวัฒนาการของระบบจำนวน

วิวัฒนาการของระบบจำนวนและตัวเลข

มนุษย์สมัยดึกดำบรรพ์ มีความรู้สึกเกี่ยวกับการได้มาของสิ่งของในปริมาณที่มากหรือน้อยแตกต่างกัน เช่น จำนวนสัตว์ที่ถูกล่าเป็นอาหารมีจำนวนเท่าใด หรือ จำนวนสมาชิกในเผ่าของตัวเองมีปริมาณมากหรือน้อยอย่างไร เป็นต้น ซึ่งมนุษย์ในสมัยยุคดึกดำบรรพ์นี้ ใช้สัญลักษณ์แทนจำนวนดังนี้ คือใช้ | (ขีดแนวตั้ง) หรือ - (ขีดแนวนอน) แทน 1 (หนึ่ง) ใช้ || หรือ = แทน 2 ใช้ ||| หรือ ≡ แทน 3 เป็นต้น

ยุคต่อมา มนุษย์มีการรวมกันเป็นกลุ่มใหญ่และใช้ภาษาติดต่อสื่อสารกันมากขึ้น ทำให้ระบบจำนวนมีการพัฒนาขึ้น (เนื่องจากมีแนวคิดและจัดการระบบมากขึ้น) ซึ่งสมัยชาวบาบิโลเนีย กรีก โรมันและอียิปต์ (3,400 ปีก่อนคริสต์ศักราช) ได้มีการพัฒนาระบบตัวเลขไฮโรกลิฟิกส์ (Hieroglyphics) ของชาวอียิปต์โบราณที่บันทึกไว้ในหลักหิน นั่นคือใช้ | (ขีดตรงแนวตั้ง) แทนจำนวน 1 (หนึ่ง) ใช้ ∩ แทนจำนวน 10 ฯลฯ นอกจากนี้ชาวบาบิโลเนียได้บันทึกตัวเลขลงบนแผ่นดินเหนียวแล้วนำไปอบเก็บไว้เป็นหลักฐาน (มีมาก่อนคริสต์ศักราช 3,000 ปี) เป็นการเขียนตัวเลขแบบคูนีฟอร์ม (Cuneiform) เช่น ใช้สัญลักษณ์เขี้ยวเสือ ▽ แทน 1 และใช้ ▽ แทน 10 เป็นต้น

ต่อมาคริสต์ศตวรรษที่ 3 ชาวกรีกโบราณได้พัฒนาระบบตัวเลขแอตทิก (Attic) ที่ร่วมกลุ่มอย่างเป็นระบบ และพัฒนามาเป็นระบบเลขโรมันที่รู้จักกันในปัจจุบัน นั่นคือใช้ | แทน 1, V แทน 5, X แทน 10, L แทน 50, C แทน 100, D แทน 500 และ M แทน 1,000

อย่างไรก็ตาม ตัวเลขฮินดู - อารบิก เริ่มมีบันทึกและสันนิษฐานเกี่ยวกับตัวเลขของชาวฮินดูในสมัยพระเจ้าอโศกมหาราช (250 ปีก่อนคริสต์ศักราช) แล้วเข้าไปเผยแพร่ในอาหรับ ซึ่งนักคณิตศาสตร์ชาวเปอร์เซียร์ชื่ออัลคอวาริซมี (Al-Khowarizmi) จึงได้อธิบายถึงตัวเลขฮินดูอย่างสมบูรณ์แบบในปีคริสต์ศักราช 825

จากนั้นจึงได้พัฒนาเป็นตัวเลขฮินดู - อารบิกที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบัน คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, และ 9 ทำให้มีบทบาทเกี่ยวข้องในชีวิตประจำวัน ได้แก่ การคำนวณทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ การแลกเปลี่ยนซื้อขาย และการสื่อสารที่ครอบคลุมทั่วทุกมุมโลก เป็นต้น

ความหมายของจำนวนและตัวเลข

จำนวนและตัวเลขมีความเกี่ยวข้องกันโดยจำนวนจะต้องมาก่อนตัวเลขเสมอ

- **จำนวน (Number)** หมายถึง ปริมาณที่แสดงถึงความมากกว่า น้อยกว่า หรือเท่ากัน โดยอาจนำมาใช้เปรียบเทียบปริมาณ มนุษย์จึงมีการคิดค้นสัญลักษณ์ขึ้นมา เพื่อใช้กำกับในการนับที่เป็นหลักสากลและมีมาตรฐานเดียวกัน

- **ตัวเลข (Numeral)** คือ สัญลักษณ์ที่มนุษย์คิดค้นขึ้นที่ใช้แทนจำนวนใดจำนวนหนึ่ง ซึ่งในแต่ละชนชาติ ต่างภาษา ต่างวัฒนธรรม ก็มีการคิดค้นตัวเลขขึ้นมาใช้ โดยมีสัญลักษณ์แตกต่างกัน เช่น

ระบบตัวเลขแบบอียิปต์

ระบบตัวเลขแบบอียิปต์จะเป็นการใช้รูปภาพแทนตัวเลข เช่น

สัญลักษณ์		แทนจำนวน
	(กิ่งไม้)	หนึ่ง
	(กระดูกส้นเท้า)	สิบ
	(ขดเชือก)	ร้อย
	(ดอกบัว)	พัน
	(นิ้วชี้)	หมื่น
	(ปลา)	แสน
	(คนตกใจ)	ล้าน

ระบบตัวเลขแบบจีน

ระบบตัวเลขแบบจีนจะเป็นการใช้ตัวอักษรจีนแทนตัวเลข เช่น

ตัวเลขจีน

ชาวจีนมีสัญลักษณ์สิบสองตัวที่ใช้เขียนแทนจำนวน

สัญลักษณ์	แทนจำนวน	สัญลักษณ์	แทนจำนวน
一	หนึ่ง	七	เจ็ด
二	สอง	八	แปด
三	สาม	九	เก้า
四	สี่	十	สิบ
五	ห้า	百	ร้อย
六	หก	千	พัน

ระบบตัวเลขแบบโรมัน

ตัวเลขโรมัน เป็นระบบตัวเลขที่ใช้ในโรมโบราณ เลขโรมันถือเป็น **ระบบเลขไม่มีหลัก** หมายความว่า ไม่ว่าจะเขียนตัวเลขแต่ละตัวไว้ ณ ตำแหน่งใดของค่าตัวเลขนั้นจะมีค่าคงที่เสมอ เช่น

I	หรือ i	มีค่าเท่ากับ	1	L	หรือ l	มีค่าเท่ากับ	50
V	หรือ v	มีค่าเท่ากับ	5	C	หรือ c	มีค่าเท่ากับ	100
X	หรือ x	มีค่าเท่ากับ	1	D	หรือ d	มีค่าเท่ากับ	500
				M	หรือ m	มีค่าเท่ากับ	1,000

การเขียนเลขโรมัน

การเขียนเลขโรมัน สามารถเขียนแทนเฉพาะจำนวนเต็มบวกเท่านั้น เนื่องจากในสมัยก่อนโรมยังไม่มีสัญลักษณ์แทนเลขศูนย์หรือเลขทศนิยม โดยให้เขียนจากสัญลักษณ์ที่มีค่ามากแล้วลดหลั่นกันไปยังสัญลักษณ์ที่มีค่าน้อย เช่น

M C CC XX V	มีค่าเท่ากับ	1,000 + 300 + 20 + 5 = 1,325
MMM D LX VII	มีค่าเท่ากับ	3,000 + 500 + 60 + 7 = 3,567

ตัวอย่างการแทนค่าด้วยเลขโรมัน

เลขอารบิก	เลขโรมัน	เลขอารบิก	เลขโรมัน	เลขอารบิก	เลขโรมัน
1	I	20	XX	400	CD
2	II	30	XXX	500	D
3	III	40	XL	600	DC
4	IV	50	L	700	DCC
5	V	60	LX	800	DCCC
6	VI	70	LXX	900	CM
7	VII	80	LXXX	1000	M
8	VIII	90	XC	4000	$\overline{IV}$
9	IX	100	C	5000	$\overline{V}$
10	X	200	CC	10000	$\overline{X}$

ระบบตัวเลขแบบฮินดูอารบิก

ระบบฮินดูอารบิกเป็นระบบตัวเลขที่มีการนำมาใช้ในปัจจุบัน โดยเป็นระบบที่ใช้เลขฐาน 10 มีเลขโดดที่ใช้ด้วยกันจำนวน 10 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 โดยที่ค่าของตัวเลขมีค่าขึ้นอยู่กับตำแหน่ง

เช่น ตัวเลข 653 คือ

3 อยู่ในตำแหน่งที่ 1 มีค่า 3
5 อยู่ในตำแหน่งที่ 2 มีค่าเท่ากับ 50
6 อยู่ในตำแหน่งที่ 3 มีค่าเท่ากับ 600

ระบบตัวเลข เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่แสดงถึงจำนวนต่าง ๆ ระบบเลขแต่ละระบบมีจำนวนตัวเลขที่ใช้เหมือนกับชื่อของระบบตัวเลขนั้น และมีฐานของจำนวนเลขตามชื่อของมัน เช่น เลขฐานสอง เลขฐานแปด เลขฐานสิบ เลขฐานสิบหก

- **ระบบเลขฐานสอง** เป็นเลขฐานที่ประกอบด้วยตัวเลข 2 ตัว คือ 0 และ 1 ซึ่งเลข 0 กับ 1 เป็นเลขที่นิยมใช้กับคอมพิวเตอร์ในการประมวลผลการทำงาน การเก็บข้อมูล หรือโปรแกรมที่เกี่ยวข้องกับสถานะทางไฟฟ้า
- **ระบบเลขฐานแปด** เป็นเลขฐานที่ประกอบด้วยเลข 8 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 รวมแปดตัว

• **ระบบเลขฐานสิบ** เป็นเลขฐานที่ประกอบด้วยเลข 10 ตัว คือ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ซึ่งเลขฐานสิบ เป็นเลขฐานที่มนุษย์ทั่วไปสามารถเข้าใจได้ง่ายมากที่สุด เพราะว่าเป็นตัวเลขที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน

• **ระบบเลขฐานสิบหก** เป็นเลขฐานที่ประกอบด้วยเลข 10 ตัวและตัวอักษร 6 ตัว คือ อตัวเลข 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, และตัวอักษร คือ A แทน 10, B แทน 11, C แทน 12, D แทน 13, E แทน 14, F แทน 15 ซึ่งรวมกันแล้วได้ 16 ตัว

เลขฐานสิบ	เลขฐานสอง	เลขฐานแปด	เลขฐานสิบหก
0	0000	0	0
1	0001	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	a
11	1011	13	b
12	1100	14	c
13	1101	15	d
14	1110	16	e
15	1111	17	f
16	10000	20	10

ระบบเลขฐานสิบ

ในการเขียนตัวเลขในระบบตัวเลขฐานสิบ เช่น 5,678 ความหมายดังนี้

5,678 = (5 × 1,000) + (6 × 100) + (7 × 10) + (8 × 1) เรากล่าวว่า

8 อยู่ในตำแหน่งที่ 1 เรียกว่า หลักหน่วย หรือ แปด

7 อยู่ในตำแหน่งที่ 2 เรียกว่า หลักสิบ หรือ เจ็ดสิบ

6 อยู่ในตำแหน่งที่ 3 เรียกว่า หลักร้อย หรือ หกร้อย

5 อยู่ในตำแหน่งที่ 4 เรียกว่า หลักพัน หรือ ห้าพัน

ดังนั้น 5,678 อ่านเป็น ห้าพันหกร้อยเจ็ดสิบแปด

ตำแหน่งที่ 1 หลักหน่วย มีค่าประจำตำแหน่งเป็น 1

ตำแหน่งที่ 2 หลักสิบ มีค่าประจำตำแหน่งเป็น 10

ตำแหน่งที่ 3 หลักร้อย มีค่าประจำตำแหน่งเป็น 10 x 10 หรือ 102

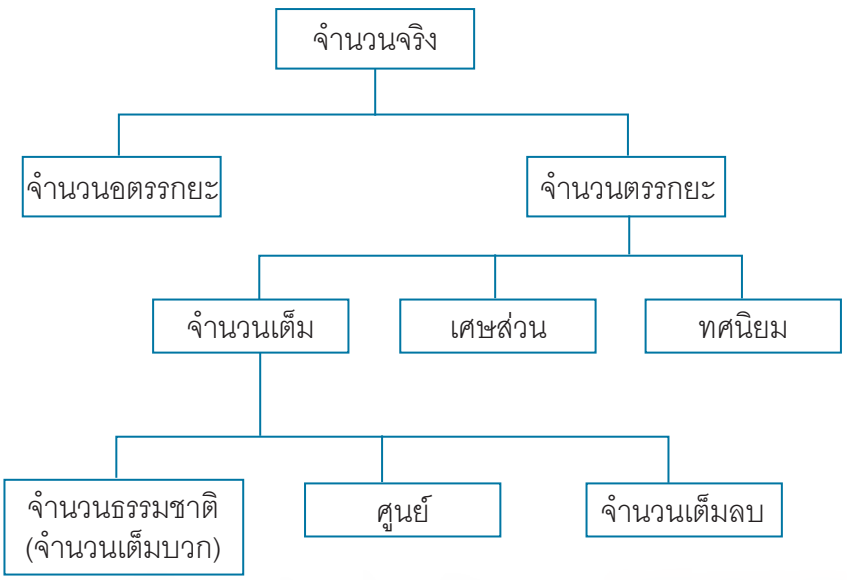
ตำแหน่งที่ 4 หลักพัน มีค่าประจำตำแหน่งเป็น 10 x 10 x 10 หรือ 103

ตำแหน่งที่ 5 หลักหมื่น มีค่าประจำตำแหน่งเป็น 10 x 10 x 10 x 10 หรือ 104

ตำแหน่งที่ 6 หลักแสน มีค่าประจำตำแหน่งเป็น 10 x 10 x 10 x 10 x 10 หรือ 105

ตำแหน่งที่ 7 หลักล้าน มีค่าประจำตำแหน่งเป็น 10 x 10 x 10 x 10 x 10 x 10 หรือ 106

โครงสร้างของระบบจำนวนจริง



รูปที่ 1.1 โครงสร้างของระบบจำนวนจริง

จากรูปที่ 1.1 แสดงโครงสร้างของระบบจำนวนจริงประกอบด้วย จำนวนตรรกยะกับจำนวนอตรรยะ ซึ่งจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนเต็มที่อยู่ในรูปของเศษส่วน $\frac{a}{b}$ เมื่อ $b \neq 0$ โดยผลลัพธ์อาจเป็นจำนวนเต็มหรือไม่เป็นจำนวนเต็มก็ได้ ขณะที่จำนวนอตรรกยะจะไม่ใช่จำนวนตรรกยะ นั่นคือเป็นจำนวนที่ไม่สามารถเขียนเศษส่วนในรูป $\frac{a}{b}$; $(b \neq 0)$ ได้ เช่น $\sqrt{2} = 1.41421...$ หรือ $\pi = 3.14159...$ อย่างนี้ เป็นต้น

จำนวนธรรมชาติ

จำนวนธรรมชาติ (Natural Number) คือ จำนวนนับที่มนุษย์ใช้นับสิ่งของที่มีอยู่ โดยจำนวนที่ใช้ในการนับคือ 1, 2, 3... จำนวนดังกล่าวสามารถสร้างให้เป็นระบบได้ด้วยการบวก การลบ การคูณ และการหาร ซึ่งเซตของจำนวนนับเขียนแทนด้วย $N = \{1, 2, 3...\}$

สมบัติการบวกและการคูณของจำนวนนับ

กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนธรรมชาติใด ๆ

1. สมบัติการปิด (Closure Laws)

การบวก a + b เป็นจำนวนธรรมชาติด้วย

การคูณ a. b เป็นจำนวนธรรมชาติด้วย

เช่น 2, 5 เป็นจำนวนนับ จะได้ 2 + 5 = 7 (เป็นจำนวนนับ)

และ 2 x 5 = 10 (เป็นจำนวนนับ) เป็นต้น

2. สมบัติการจัดหมู่ (Associative Laws)

การบวก (a + b) + c = a + (b + c)

การคูณ (a. b).c = a.(b.c)

เช่น 1, 2, 3 เป็นจำนวนนับจะได้ (1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)

และ (1 x 2) x 3 = 1 x (2 x 3) เป็นต้น

3. สมบัติการสลับที่ (Commutative Laws)

การบวก a + b = b + a เช่น 2 + 3 = 3 + 2

การคูณ a.b = b.a เช่น 4 x 9 = 9 x 4 เป็นต้น

4. เอกลักษณ์ (Identity)

จำนวนที่เป็นเอกลักษณ์ คือ จำนวนที่กระทำกับจำนวนใด ๆ แล้วผลการกระทำจะเท่ากับจำนวนนั้น

การบวก จำนวนนับจะไม่มีเอกลักษณ์ในการบวก

การคูณ เอกลักษณ์ของการคูณคือ 1

สำหรับ a เป็นจำนวนนับใด ๆ จะได้ a.1 = 1.a เช่น b เป็นจำนวนนับ จะได้ 6 x 1 = 1 x 6 เป็นต้น

5. สมบัติการแจกแจง (Distributive Laws)

จะได้a.(b + c) = (a.b) + (a.c)

หรือ (b + c).a = (a.b) + (a.c)

เช่น 2 x (3 + 5) = (2) (3) + (2) (5)

(3 + 5) (2) = (3) (2) + (5) (2)

สมบัติการลบและการหารของจำนวนนับ

1. สมบัติการลบ

1.1 จะกำหนดการลบโดยอาศัยคุณสมบัติการบวก ซึ่งการลบเป็นการกระทำที่ตรงกันข้ามกับการบวกในจำนวนนับ

1.2 กำหนด a, b, c เป็นจำนวนนับ โดยที่ a - b = c หมายถึง b ถูกลบออกจาก a และจะเป็นไปได้เมื่อมีจำนวน c ทำให้ a = c + b เช่น กำหนด a, b, c เป็น 9, 5 และ 4 สมมติ 9 - 5 = ? และจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ 9 - 5 = 4 ซึ่งเลข 4 เป็นจำนวนนับที่มารองรับผลจากการลบครั้งนี้

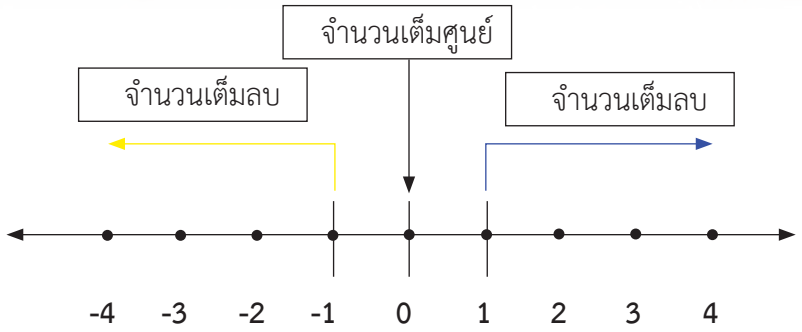
2. สมบัติการหาร

2.1 จะกำหนดการหารโดยอาศัยคุณสมบัติของการคูณซึ่งคุณสมบัติการหารเป็นการกระทำตรงข้ามกับการคูณในจำนวนนับ

2.2 กำหนด a, b, c เป็นจำนวนนับ สมมติให้ a ÷ b = c หมายความว่า การหารของ $\frac{a}{b}$ จะเป็นได้เมื่อ c ในจำนวนนับต้องมารองรับผลของการหารที่ทำให้ bc = a เช่น 8 x 2 = ? และจะเป็นไปได้เมื่อ c มีค่าเท่ากับ 4 ที่ทำให้ $\frac{8}{2}$ = 4 และ 8 = 2 x 4 ด้วย ดังนั้น ผลการหารของ 8 ด้วย 2 จึงมีค่าเท่ากับ 4 เป็นต้น

จำนวนเต็ม

เมื่อมนุษย์มีความเจริญมากขึ้น ก็มีการติดต่อซื้อขายหรือแลกเปลี่ยนกันซับซ้อนมากขึ้น จำนวนธรรมชาติจึงไม่สามารถแก้ปัญหาได้ นักคณิตศาสตร์จึงคิดค้นเลขศูนย์และจำนวนเต็มลบขึ้นมา แล้วเปลี่ยนจำนวนธรรมชาติให้เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งรูปที่ 1.2 แสดงจำนวนเต็มลบ ศูนย์ และจำนวนเต็มบวกหมายถึงส่วนประกอบของจำนวนเต็ม (Integer Number)



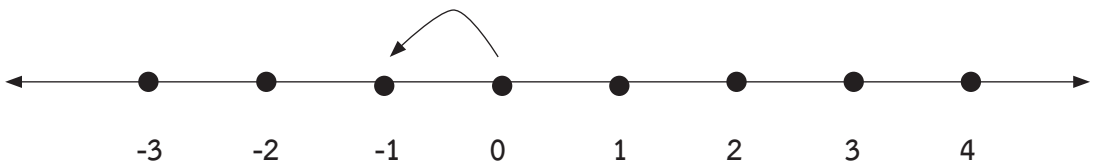
รูปที่ 1.2 เส้นจำนวนแสดงจำนวนเต็มลบ ศูนย์ และจำนวนเต็มบวก

จำนวนเต็มบวก ได้แก่ จำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า 0 ขึ้นไป ได้แก่ 1,2,3 ... ไปเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด จำนวนเต็มบวกอาจเรียกได้อีกชื่อว่า **"จำนวนนับ"**

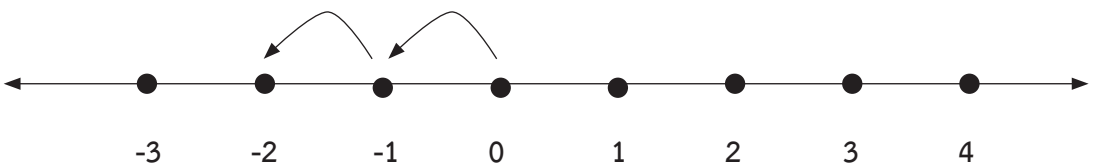
จำนวนเต็มศูนย์ ได้แก่ 0 (0 ไม่ใช่จำนวนนับ เนื่องจากเราไม่สามารถกล่าวได้ว่ามีนักศึกษาลงทะเบียนจำนวน 0 คน แต่ศูนย์ก็ไม่ได้หมายความว่า "ไม่มี" เสมอไป เช่น เมื่อกล่าวถึงอุณหภูมิ เพราะทำให้ทราบและเกิดความรู้สึกขณะอุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียสได้)

จำนวนเต็มลบ ได้แก่ จำนวนที่อยู่ตรงข้ามกับจำนวนเต็มบวกบนเส้นจำนวนเดียวกัน หรือก็คือจำนวนที่ติดลบนั้นเอง ได้แก่ -1, -2, -3... ไปเรื่อย ๆ

– จำนวนที่อยู่ทางซ้ายของ 0 เป็นระยะทาง 1 หน่วย (1 ช่อง) เขียนแทนด้วย -1 อ่านว่า "ลบหนึ่ง"



– จำนวนที่อยู่ทางซ้ายของ 0 เป็นระยะทาง 2 หน่วย (2 ช่อง) เขียนแทนด้วย -2 อ่านว่า "ลบสอง"



ดังนั้น จึงสามารถสรุปได้ว่าจำนวนบนเส้นจำนวน “จำนวนที่อยู่ซ้ายมือจะมีค่าน้อยกว่าจำนวนที่อยู่ทางขวาเสมอ”

สมบัติของจำนวนเต็ม

ระบบจำนวนเต็มมีสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณเช่นเดียวกับจำนวนธรรมชาติ ดังที่ได้กล่าวมา คือ มีสมบัติการปิด สมบัติการจัดหมู่ สมบัติการสลับที่ สมบัติการแจกแจง และยังมีสมบัติเพิ่มเติม ดังนี้

1. สมบัติอินเวิร์ส (Inverse)

การบวก ถ้ากำหนด a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะมีจำนวนเต็มเพียง 1 จำนวน คือ “-a” ที่ทำให้ a + (-a) = 0 = (-a) + a ซึ่งจะเรียก “-a” เป็นอินเวิร์ส (ผกผัน) การบวกของ a เช่น 8 + (-8) = 0 = (-8) + 8 เป็นต้น

การคูณ จำนวนเต็มไม่มีสมบัติอินเวิร์ส

2. เอกลักษณ์ (Identity)

การบวก เอกลักษณ์คือ 0 สำหรับ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ จะได้ a + o = a = 0 + a เช่น 6 + 0 = 6 = 0 + 6 หรือ -7 + 0 = -7 = 0 + (-7) เป็นต้น

การคูณ เอกลักษณ์คือ 1 เช่นเดียวกับจำนวนนับ (จำนวนธรรมชาติ)

จำนวนตรรกยะ

จำนวนตรรกยะ (Rational Number) หมายถึง จำนวนที่เขียนในรูปเศษส่วน โดยตัวส่วนจะไม่เท่ากับศูนย์ ขณะที่ตัวเศษและตัวส่วนจะต้องเป็นจำนวนเต็ม ผลลัพธ์ของเศษส่วนดังกล่าวอาจเป็นจำนวนเต็มหรือไม่เป็นจำนวนเต็มก็ได้ เราถือว่าเป็นจำนวนตรรกยะเหมือนกัน

เช่น $\frac{10}{2} = 5$; เป็นจำนวนเต็ม

$\frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 0.2$; ไม่ใช่จำนวนเต็ม เป็นต้น

สำหรับเศษส่วนสามารถทำให้อยู่ในรูปของทศนิยมได้ เช่น $\frac{3}{10} = 0.3$ หรือ $\frac{2}{6} = 0.333.....$ ซึ่งเป็นทศนิยมซ้ำมี 2 ชนิดคือ ทศนิยมซ้ำแบบรู้จบ (Terminating Decimal) กับทศนิยมซ้ำแบบไม่รู้จบ (Recurring Decimal)