

ได้ผ่านการตรวจประเมินคุณภาพหนังสือเรียนอาชีวศึกษา หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562
ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2563 ครั้งที่ 1 ประกาศลำดับที่ 405



รหัสวิชา 20104-2120

หนังสือเล่มนี้เรียบเรียงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชาและคำอธิบายรายวิชา หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ
พุทธศักราช 2562 ของสำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ

คณิตศาสตร์

Electrical Mathematics ไฟฟ้า

สายันต์ ชื่นอารมย์

87.-

คณิตศาสตร์ไฟฟ้า (Electrical Mathematics)

รหัสวิชา 20104 - 2120

หมวดวิชาสมรรถนะวิชาชีพ กลุ่มสมรรถนะวิชาชีพเลือก
ประเภทวิชาอุตสาหกรรม สาขาวิชาช่างไฟฟ้ากำลัง
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562
สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา (สอศ.) กระทรวงศึกษาธิการ



เรียบเรียงโดย
สายัณต์ ชื่นอารมย์

คณิตศาสตร์ไฟฟ้า

(Electrical Mathematics)

ISBN 978-616-495-069-6

จัดพิมพ์และจัดจำหน่าย โดย...



บริษัท วังอักษร จำกัด

69/3 ถนนอรุณอมรินทร์ แขวงวัดอรุณ เขตบางกอกใหญ่ กรุงเทพฯ 10600

โทร. 0-2472-3293-5 โทรสาร 0-2891-0742 Mobile 08-8585-1521

e-Mail : wangaksorn9@gmail.com Facebook : สำนักพิมพ์ วังอักษร

www.wangaksorn.com

ID Line : @wangaksorn



พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2563 จำนวนที่พิมพ์ 3,000 เล่ม

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537

โดยบริษัทวังอักษร จำกัด ห้ามนำส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ไปทำซ้ำ

ดัดแปลง หรือเผยแพร่ต่อสาธารณชน ไม่ว่ารูปแบบใด ๆ

นอกจากได้รับอนุญาตเป็นลายลักษณ์อักษรล่วงหน้าจากทางบริษัทฯ เท่านั้น

ชื่อและเครื่องหมายการค้าอื่น ๆ ที่อ้างอิงในหนังสือฉบับนี้

เป็นสิทธิโดยชอบด้วยกฎหมายของเจ้าของแต่ละราย

โดยบริษัทวังอักษร จำกัด มิได้อ้างอิงความเป็นเจ้าของแต่อย่างใด

คณิตศาสตร์ไฟฟ้า

(Electrical Mathematics)

รหัสวิชา 20104-2120



จุดประสงค์รายวิชา เพื่อให้

1. เข้าใจกฎและทฤษฎีทางคณิตศาสตร์
2. มีทักษะเกี่ยวกับการนำคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ คำนวณ หาค่าปริมาณทางไฟฟ้า
3. มีเจตคติที่ดีต่ออาชีพ มีกึ๋นสยในการค้นคว้าเพิ่มเติม



สมรรถนะรายวิชา

1. แสดงความรู้ในการหาค่าปริมาณทางเวกเตอร์ และปริมาณทางเมตริกซ์
2. ประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์มาคำนวณ หาค่าปริมาณทางไฟฟ้า



คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาการหาปริมาณทางเวกเตอร์ การหาปริมาณทางเมตริกซ์ เรขาคณิตวิเคราะห์และแคลคูลัสเบื้องต้น เพื่อประยุกต์ใช้หาค่าปริมาณทางไฟฟ้า



ตารางวิเคราะห์สมรรถนะรายวิชา

วิชา คณิตศาสตร์ไฟฟ้า รหัสวิชา 20104 - 2120

ท-ป-น 2-0-2 จำนวน 2 คาบ/สัปดาห์ รวม 36 คาบ

หน่วยที่	สมรรถนะรายวิชา	แสดงความรู้ในการหาค่า ปริมาณทางเวกเตอร์ และ ปริมาณทางเมตริกซ์	ประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ มาคำนวณ หาค่าปริมาณ ทางไฟฟ้า
1. เมตริกซ์		✓	
2. ดีเทอร์มิแนนต์		✓	
3. การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์		✓	
4. การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า		✓	
5. เวกเตอร์		✓	
6. เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น		✓	
7. ลิมิตของฟังก์ชัน		✓	
8. อนุพันธ์ของฟังก์ชัน		✓	✓
9. อินทิกรัลของฟังก์ชัน		✓	✓

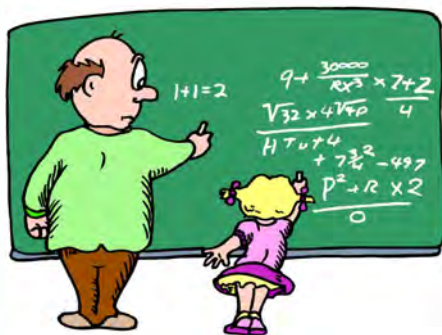


คำนำ

วิชาคณิตศาสตร์ไฟฟ้า รหัสวิชา 20104-2120 จัดอยู่ในหมวดวิชาสมรรถนะวิชาชีพ กลุ่มสมรรถนะวิชาชีพเลือก ประเภทวิชาอุตสาหกรรม สาขาวิชาช่างไฟฟ้ากำลัง ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพ พุทธศักราช 2562 สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา (สอศ.) กระทรวงศึกษาธิการ ผู้เขียนได้บริหารสาระการเรียนรู้แบ่งเป็น 9 บทเรียน ได้จัดแผนการจัดการเรียนรู้/แผนการสอนที่มุ่งเน้นฐานสมรรถนะ (Competency Based) และการบูรณาการ (Integrated) ตรงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา คำอธิบายรายวิชา ในแต่ละบทเรียนมุ่งให้ความสำคัญส่วนที่เป็นความรู้ ทฤษฎี หลักการ กระบวนการ ตัวอย่าง แบบฝึกปฏิบัติ และคำถามเพื่อการทบทวนเพื่อฝึกทักษะประสบการณ์ เร่งพัฒนาบทบาทของผู้เรียนเป็นผู้จัดการแสวงหาความรู้ (Explorer) เป็นผู้สอนตนเองได้ สร้างองค์ความรู้ใหม่ และบทบาทของผู้สอนเปลี่ยนจากผู้ให้ความรู้มาเป็นผู้จัดการชี้แนะ (Teacher Roles) จัดสิ่งแวดล้อมเอื้ออำนวยต่อความสนใจเรียนรู้ และเป็นผู้ร่วมเรียนรู้ (Co-investigator) จัดห้องเรียนเป็นสถานที่ทำงานร่วมกัน (Learning Context) จัดกลุ่มเรียนรู้ให้รู้จักทำงานร่วมกัน (Grouping) ฝึกความใจกว้างมุ่งสร้างสรรค์คนรุ่นใหม่ สอนความสามารถที่นำไปทำงานได้ (Competency) สอนความรัก ความเมตตา (Compassion) ความเชื่อมั่น ความซื่อสัตย์ (Trust) เป้าหมายอาชีพอันยังประโยชน์ (Productive Career) และชีวิตที่มีศักดิ์ศรี (Noble Life) เนือสิ่งอื่นใด เป็นคนดีทั้งกาย วาจา ใจ มีคุณธรรม จรรยาบรรณทางธุรกิจและวิชาชีพ

ส่งเสริมสนับสนุนยุทธศาสตร์การพัฒนาระบบคุณวุฒิวิชาชีพ (Vocational Qualification System) สอดคล้องตามมาตรฐานอาชีพ (Occupational Standard) สร้างภูมิคุ้มกัน เพิ่มขีดความสามารถในการแข่งขันของประเทศ กำลังแรงงาน การพัฒนามาตรฐานการปฏิบัติงานระดับชาติ (National Benchmarking) และการวิเคราะห์หน้าที่การทำงาน (Functional Analysis) เพื่อให้เกิดผลสำเร็จในภาคธุรกิจ อุตสาหกรรม ทุกสาขาอาชีพ เป็นการเตรียมพร้อมเข้าสู่ประชาคมอาเซียน

ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ผู้สอน ผู้ประสาวิชาความรู้ เอกสาร หนังสือที่ใช้ประกอบในการเรียบเรียงไว้ ณ โอกาสนี้



สายัณต์ ชื่นอารมย์

สารบัญ

บทที่ 1 เมตริกซ์	1
ความหมายของเมตริกซ์	2
มิติและสัญลักษณ์เมตริกซ์	2
ชนิดของเมตริกซ์	4
การเท่ากันของเมตริกซ์	6
การบวกและการลบของเมตริกซ์	7
การคูณเมตริกซ์ด้วยค่าคงตัว	9
การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์	11
สมบัติการบวกและการคูณเมตริกซ์	13
เมตริกซ์สลับเปลี่ยน	14
เมตริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ	15
สมบัติของเมตริกซ์ผกผันสำหรับการคูณ	16
แบบฝึกหัดบทที่ 1	17
แบบประเมินผลท้ายบทที่ 1	20
 บทที่ 2 ดีเทอร์มิแนนต์	 23
ความหมายของดีเทอร์มิแนนต์	24
การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์โดยการคูณทแยง	25
การกระจายโคแฟกเตอร์	27
การหาค่าดีเทอร์มิแนนต์ด้วยการกระจายโคแฟกเตอร์	29
แบบฝึกหัดบทที่ 2	32
แบบประเมินผลท้ายบทที่ 2	34
 บทที่ 3 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์	 36
ความหมายระบบสมการเชิงเส้นและสมการเมตริกซ์	37
การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ดีเทอร์มิแนนต์	39
แบบฝึกหัดบทที่ 3	50
แบบประเมินผลท้ายบทที่ 3	52

บทที่ 4 การวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า

54

บทนำ	55
กฎของเคอร์ชอฟฟ์	55
วิธีกระแสไฟฟ้าแบบเมช	59
วิธีแรงดันไฟฟ้าแบบโนด	61
ทฤษฎีเทวินิน	64
ทฤษฎีโน้อร์ตัน	68
แบบฝึกหัดบทที่ 4	72
แบบประเมินผลท้ายบทที่ 4	75

บทที่ 5 เวคเตอร์

79

ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเวคเตอร์	80
การนำค่าคงตัวคูณกับเวคเตอร์	82
การบวกและการลบเวคเตอร์	83
ขนาดเวคเตอร์	86
เวคเตอร์ขนาดหนึ่งหน่วย	87
การประยุกต์เวคเตอร์เพื่อคำนวณหาปริมาณไฟฟ้า	89
วงจร RC อนุกรม	95
แบบฝึกหัดบทที่ 5	101
แบบประเมินผลท้ายบทที่ 5	103

บทที่ 6 เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น

105

การหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุด	106
การหาพิกัดของจุดกึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุด	109
ความชันของเส้นตรง	110
สมการของเส้นตรง	113
สมการของเส้นตรงในรูปแบบทั่วไป	118
การเขียนกราฟและการหาจุดตัดของเส้นตรง	118
ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง	121
แบบฝึกหัดบทที่ 6	123
แบบประเมินผลท้ายบทที่ 6	125

บทที่ 7 ลิขิตของฟังก์ชัน **127**

บทนำ	128
ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับลิขิต	128
ลิขิตไม่จำกัดขอบเขต	130
ทฤษฎีของลิขิต	131
ลิขิตที่อนันต์	134
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	136
แบบฝึกหัดบทที่ 7	139
แบบประเมินผลท้ายบทที่ 7	140

บทที่ 8 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน **143**

บทนำ	144
ความหมายอนุพันธ์	144
การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎสี่ชั้น	145
การหาอนุพันธ์โดยใช้สูตร	148
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต	151
การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่	153
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	155
อนุพันธ์อันดับสูง	156
แบบฝึกหัดบทที่ 8	158
แบบประเมินผลท้ายบทที่ 8	160

บทที่ 9 อินทิกรัลของฟังก์ชัน **163**

ความหมายอินทิกรัล	164
สูตรเบื้องต้นของการอินทิเกรต	165
อินทิกรัลจำกัดเขต	169
การประยุกต์ใช้งานของอินทิกรัล	172
แบบฝึกหัดบทที่ 9	180
แบบประเมินผลท้ายบทที่ 9	182

คำถามเพื่อการทบทวน **185**

คำศัพท์ **190**

บรรณานุกรม **194**



จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (BEHAVIORAL OBJECTIVES)

หลังจากศึกษาจบบทเรียนนี้แล้ว นักเรียนจะมีความสามารถดังนี้

1. อธิบายความหมายเมตริกซ์
2. บอกมิติและสัญลักษณ์เมตริกซ์
3. จำแนกชนิดของเมตริกซ์
4. พิสูจน์การหาค่าตัวแปรจากการเท่ากันของเมตริกซ์
5. วางแผนการบวกและการลบของเมตริกซ์
6. วิเคราะห์การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง
7. แสดงการคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์
8. ระบุคุณสมบัติการบวกและการคูณเมตริกซ์
9. จำแนกสมบัติของเมตริกซ์สลับเปลี่ยน
10. พิสูจน์การหาอินเวอร์สการคูณของเมตริกซ์ผกผัน



บทที่ 1

เมตริกซ์



ความหมายของเมตริกซ์

เมตริกซ์ (Matrix) หมายถึง การนำอักษรพิมพ์เล็กในภาษาอังกฤษ หรือจำนวนตัวเลข มาจัดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก แล้วล้อมรอบด้วย [] หรือ ()

สมาชิกเมตริกซ์ ประกอบด้วยสมาชิกในแนวตั้งกับสมาชิกในแนวนอนซึ่งสมาชิกในแนวตั้ง เรียกว่า **สมาชิกในหลัก (Column)** หรือ **สดมภ์** ส่วนสมาชิกในแนวนอน เรียกว่า **สมาชิกในแถว (Row)** โดยที่ชื่อเมตริกซ์ จะใช้อักษรตัวพิมพ์ใหญ่ในภาษาอังกฤษ เช่น A, B, C เป็นต้น

ตัวอย่างเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

จากตัวอย่างเมตริกซ์ พบว่าสมาชิกในเมตริกซ์มีทั้งหมด 9 ตัว ได้แก่ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 และ 9 สมาชิกในแนวตั้งมี 3 หลัก ซึ่งหลักที่ 1 มีสมาชิกคือ 1, 4, 7 หลักที่ 2 มีสมาชิกคือ 2, 5, 8 และหลักที่ 3 มีสมาชิกคือ 3, 6, 9 สำหรับสมาชิกในแนวนอนมี 3 แถว ซึ่งแถวที่ 1 มีสมาชิกคือ 1, 2, 3 แถวที่ 2 มีสมาชิกคือ 4, 5, 6 และแถวที่ 3 มีสมาชิกคือ 7, 8, 9 เป็นต้น



นิยามและสัญลักษณ์เมตริกซ์

นิยาม เมตริกซ์ที่มี m แถว และ n หลัก เรียกเมตริกซ์นี้ว่า m x n เมตริกซ์ (อ่านว่า เอ็มคูณเอ็นเมตริกซ์)



$[-3]$ เป็น 1×1 เมตริกซ์ มีมิติเป็น 1×1

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$ เป็น 1×2 เมตริกซ์ มีมิติเป็น 1×2

$\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ เป็น 2×2 เมตริกซ์ มีมิติเป็น 2×2

$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ p & q & r & s \end{bmatrix}$ เป็น 2×4 เมตริกซ์ มีมิติเป็น 2×4

ดังนั้น ถ้าเมตริกซ์ A เป็น $m \times n$ เมตริกซ์ มี a_{ij} เป็นสมาชิกเมตริกซ์ A อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j โดยที่ $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$ สามารถเขียนสัญลักษณ์เมตริกซ์ A อย่างย่อ คือ $[a_{ij}]_{m \times n}$ ดังนั้น

$$A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ ให้หาค่าต่อไปนี้

- (1) เมตริกซ์ A มีมิติเท่าไร (2) a_{12} และ a_{23} คือ สมาชิกใด
(3) $(a_{21})(a_{24})$ มีค่าเท่าไร

วิธีทำ

- (1) เมตริกซ์ A มีมิติเป็น 2×4

A เป็นเมตริกซ์ขนาด 2 แถว 4 หลัก จึงมีมิติเป็น 2×4

ตอบ

- (2) a_{12} เป็นสมาชิกเมตริกซ์ A อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 2 $\therefore a_{12} = 1$

a_{23} เป็นสมาชิกเมตริกซ์ A อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 3 $\therefore a_{23} = 7$

ตอบ

- (3) $(a_{21})(a_{24}) = (3)(9) = 27$

ตอบ



ชนิดของเมตริกซ์

การตั้งชื่อเมตริกซ์ เราจะบอกตามลักษณะเมตริกซ์ มีรายละเอียดดังนี้

1. **เมตริกซ์แถว (Row Matrix)** คือ เมตริกซ์ที่มีสมาชิกอยู่เพียง 1 แถว และจะมีกี่หลักก็ได้ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

2. **เมตริกซ์หลัก (Column Matrix)** คือเมตริกซ์ที่มีสมาชิกอยู่เพียง 1 หลัก และจะมีกี่แถวก็ได้

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3. **เมตริกซ์ศูนย์ (Null Matrix)** คือเมตริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย 0 เช่น

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. **เมตริกซ์จัตุรัส (Square Matrix)** คือเมตริกซ์ที่มีสมาชิกในหลัก เท่ากับสมาชิกในแถว เช่น

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

5. **เมตริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)** คือเมตริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก เป็น 1 ทั้งหมด ส่วนสมาชิกที่อยู่ใต้และเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 ทั้งหมด ซึ่งเมตริกซ์เอกลักษณ์ มีสัญลักษณ์ที่ใช้คือ I_n หรือ I เช่น

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



6. เมตริกซ์เชิงสเกลาร์ (Scalar Matrix) คือเมตริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นตัวเลขที่เหมือนกัน ส่วนสมาชิกที่อยู่ใต้และเหนือเส้นทแยงมุมหลัก เป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

7. เมตริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) คือเมตริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นตัวเลขที่ไม่เหมือนกัน และสมาชิกที่อยู่ใต้และเหนือเส้นทแยงมุมหลัก เป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

8. เมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix) คือเมตริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกเหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างจะเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่างอย่างแท้จริง ก็ต่อเมื่อสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ด้วย เช่น

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

9. เมตริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix) คือเมตริกซ์จัตุรัสที่สมาชิกใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$



เมตริกซ์สามเหลี่ยมบนจะเป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบนอย่างแท้จริงก็ต่อเมื่อสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ด้วย เช่น

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



การเท่ากันของเมตริกซ์

นิยาม ให้เมตริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และเมตริกซ์ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน เมตริกซ์ A เท่ากับเมตริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $a_{ij} = b_{ij}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$

จากนิยามพบว่า เมตริกซ์ 2 เมตริกซ์จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีมิติ (ขนาด) เท่ากันและสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกัน มีค่าเท่ากัน

สมบัติการเท่ากันของเมตริกซ์มีดังนี้

1. กฎไตรวิภาค (Trichotomy law)

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน จะได้ $A = B$ หรือ $A \neq B$ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

2. สมบัติการถ่ายทอด (Transitive Property)

ถ้า A, B และ C เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน นั่นคือ ถ้า $A = B$ และ $B = C$ แล้ว จะได้ว่า $A = C$

3. สมบัติการสมมาตร (Symmetric Property)

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน ถ้า $A = B$ แล้ว $B = A$

4. สมบัติการสะท้อน (Reflexive Property)

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใดๆ แล้ว $A = A$

ตัวอย่างที่ 1.2 ให้พิจารณาว่าเมตริกซ์ใดเท่ากันบ้าง

$$\begin{aligned} \text{กำหนด } A &= \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ x-x & 2-3 \end{bmatrix}, & B &= \begin{bmatrix} \sqrt{81} & \sqrt{4} \\ 0 & 4-5 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 3^2 & 1+1 \\ z-z & -1 \end{bmatrix}, & D &= \begin{bmatrix} 3^{-2} & 1+1 \\ 0 & 5-1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



วิธีทำ เขียนเมตริกซ์ A, B, C และ D ใหม่ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A = B = C \neq D$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.3 ให้หาค่า x, y และ z จากสมการ $\begin{bmatrix} x+2 & y-5 \\ z+3 & \sqrt{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ จากสมการ $\begin{bmatrix} x+2 & y-5 \\ z+3 & \sqrt{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$

จากการเท่ากันของเมตริกซ์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} x+2 &= -7, & y-5 &= -7 & \text{และ} & z+3 &= 10 \\ x &= -7-2, & y &= -7+5 & & z &= 10-3 \\ x &= -9, & y &= -2 & & z &= 7 \\ \therefore x &= -9, & y &= -2 & \text{และ} & z &= 7 \end{aligned}$$

ตอบ



การบวกและการลบของเมตริกซ์

นิยาม ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์ โดยที่ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{k \times l}$ ซึ่งเมตริกซ์ A และ B จะบวกหรือลบกันได้ นั่น เมื่อ $m = k$ และ $n = l$

$$\text{โดยที่ } A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \quad \text{ทุก ๆ ค่า } i \text{ และ } j$$

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}] \quad \text{ทุก ๆ ค่า } i \text{ และ } j$$

จากนิยามพบว่า เมตริกซ์ทั้ง 2 เมตริกซ์ จะบวกหรือลบกันได้ นั้น จะต้องมิตีเท่ากันและการบวกหรือการลบกัน ทำได้โดยนำสมาชิกที่อยู่ตำแหน่งเดียวกันมาบวกกันหรือลบกันตามเครื่องหมาย



ตัวอย่างที่ 1.4 ให้หาผลบวกของเมตริกซ์ต่อไปนี้

$$(1) \begin{bmatrix} 6 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$(1) \begin{bmatrix} 6 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติไม่เท่ากันจึงไม่สามารถหาผลบวกของเมตริกซ์ทั้งสองนี้ได้

$$(2) \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+1 & 8+(-1) \\ 0+(-1) & 2+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$$

ตอบ

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1 & 1-2 & 2-3 \\ 2-4 & 4-5 & 6-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.5 ให้หา $A+B$ และ $B-A$ เมื่อกำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$(1) A+B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1 & -1-1 & 0+0 \\ 2+0 & 4+2 & 6-2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A+B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

ตอบ



$$\begin{aligned}
 (2) \quad B - A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1-2 & -1+1 & 0-0 \\ 0-2 & 2-4 & -2-6 \end{bmatrix} \\
 \therefore B - A &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ตอบ



การคูณเมตริกซ์ด้วยค่าคงตัว

การคูณเมตริกซ์ด้วยค่าคงตัว (Constant, c) คือ การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริงใดๆ ที่เรียกว่า สเกลาร์ (Scalar)

นิยาม ให้ A เป็นเมตริกซ์ โดยที่ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วผลคูณของ c กับเมตริกซ์ A คือ $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, n$

จากนิยามพบว่า การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริงก็คือ การคูณกันโดยนำจำนวนจริงคูณกับสมาชิกทุกตำแหน่งของเมตริกซ์

ตัวอย่างที่ 1.6

ให้หา $3A$ และ $-2A$ เมื่อกำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 (1) \quad 3A &= 3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 3(0) & 3(-1) & 3(2) \\ 3(-2) & 3(3) & 3(1) \\ 3(0) & 3(-1) & 3(-2) \end{bmatrix} \\
 \therefore 3A &= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 6 \\ -6 & 9 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ตอบ



$$\begin{aligned}
 (2) \quad -2A &= -2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -2(0) & -2(-1) & -2(2) \\ -2(-2) & -2(3) & -2(1) \\ -2(0) & -2(-1) & -2(-2) \end{bmatrix} \\
 \therefore -2A &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 4 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนด $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

จงหาค่า $\frac{1}{6}A - 2B$ มีค่าเท่าไร

วิธีทำ $\frac{1}{6}A - 2B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2(1) & -2(-2) & -2(3) \\ -2(4) & -2(5) & -2(6) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 & -6 \\ -8 & -10 & -12 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{13}{3} & -6 \\ -\frac{23}{3} & -\frac{19}{2} & -\frac{71}{6} \end{bmatrix} \\
 \therefore \frac{1}{6}A - 2B &= \begin{bmatrix} -2\frac{1}{6} & 4\frac{1}{3} & -6 \\ -7\frac{2}{3} & -9\frac{1}{2} & -11\frac{5}{6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ตอบ



การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

นิยาม ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์โดยที่ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{k \times l}$ เมตริกซ์ A จะคูณกับเมตริกซ์ B ได้ก็ต่อเมื่อ $n = k$ และผลคูณของ AB จะมีขนาด $m \times l$

$$\text{นั่นคือ } AB = C = [c_{ij}]_{m \times l}$$

$$\text{โดยที่ } c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{i3} b_{3j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

สำหรับทุกค่า i และ j เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \dots, l$

จากนิยามพบว่า เมตริกซ์ A จะคูณกับเมตริกซ์ B ได้ต่อเมื่อจำนวนหลักของเมตริกซ์ A จะเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ B และผลคูณที่ได้เป็นเมตริกซ์ C ซึ่งมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของเมตริกซ์ A และจะมีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของเมตริกซ์ B

ตัวอย่างที่ 1.8 ให้พิจารณาว่า เมตริกซ์ 2 เมตริกซ์ ในข้อใดที่คูณกันได้ และถ้าคูณกันได้ ผลคูณจะเป็นเมตริกซ์ที่มีมิติเท่าใด

$$(1) A = [a_{ij}]_{1 \times 2}, \quad B = [b_{ij}]_{1 \times 2}$$

$$(2) A = [a_{ij}]_{2 \times 3}, \quad B = [b_{ij}]_{3 \times 1}$$

$$(3) A = [a_{ij}]_{3 \times 1}, \quad B = [b_{ij}]_{1 \times 2}$$

วิธีทำ

(1) เมตริกซ์ A มีมิติ 1×2 เมตริกซ์ B มีมิติ 1×2 เมตริกซ์ทั้งสองไม่สามารถคูณกันได้

ตอบ

(2) เมตริกซ์ A มีมิติ 2×3 เมตริกซ์ B มีมิติ 3×1 เมตริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้ โดยมีมิติขนาด 2×1

(3) เมตริกซ์ A มีมิติ 3×1 เมตริกซ์ B มีมิติ 1×2 เมตริกซ์ทั้งสองสามารถคูณกันได้ โดยมีมิติขนาด 3×2

ตอบ

ตอบ