แคลคูลัส 1
Calculus

สุนิดา พุ่มจีน

วังอักษร

107.-

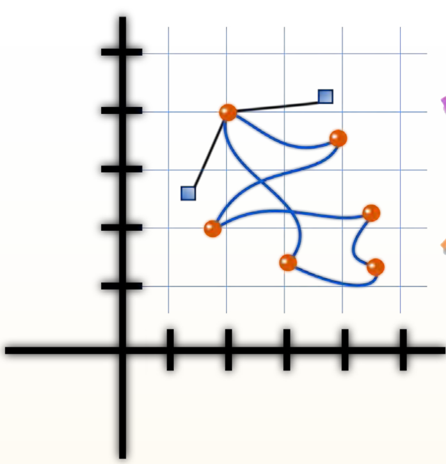
แคลคูลัส 1
(Calculus 1)

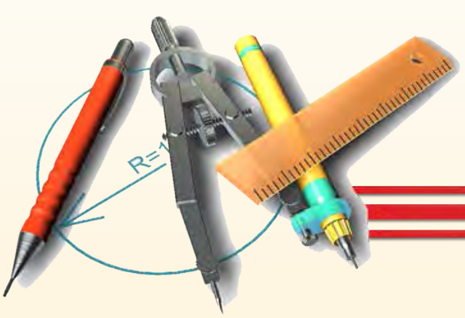
รหัสวิชา 30000-1404

หมวดวิชาสมรรถนะแกนกลาง กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์

หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2563

และใช้ได้กับหลักสูตรปริญญาตรี





เรียบเรียงโดย

สุนิดา พุ่มจีน

แคลคูลัส 1
(Calculus 1)

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาและฝึกทักษะการคิดคำนวณ และการแก้ปัญหาเกี่ยวกับทฤษฎีบททวินามเศษส่วนย่อย ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันอนุพันธ์ ฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัย การประยุกต์ของอนุพันธ์ อินทิกรัล ฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัยอินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

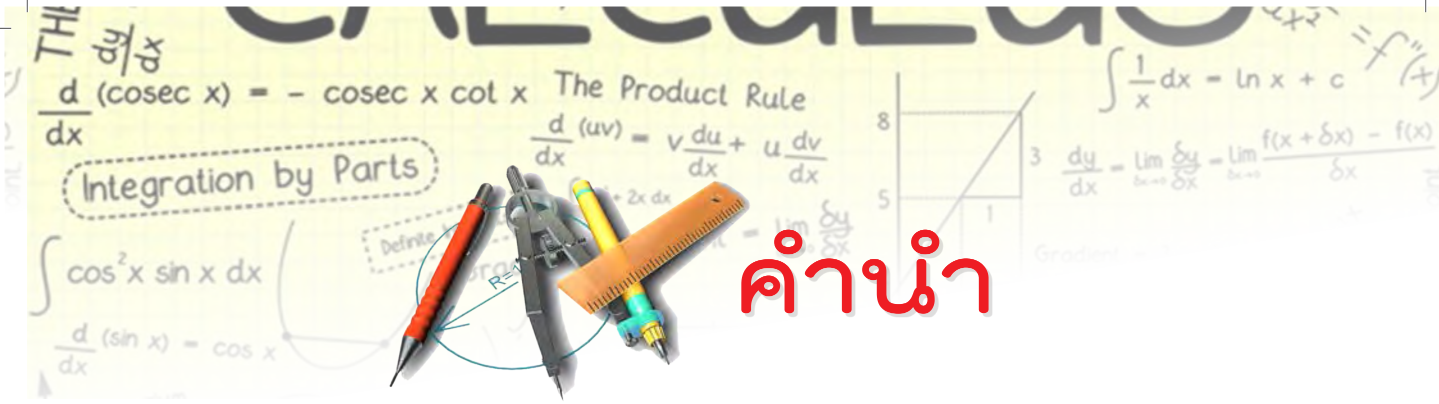
ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ
สุนิดา พุ่มจีน.
แคลคูลัส 1.-- กรุงเทพฯ : วังอักษร, 2563.
268 หน้า.
1. แคลคูลัส. I. ชื่อเรื่อง.
515
ISBN 978-616-495-123-5

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย...

วังอักษร

บริษัทวังอักษร จำกัด
69/3 ถนนอรุณอมรินทร์ แขวงวัดอรุณ เขตบางกอกใหญ่ กรุงเทพฯ 10600
โทร. 0-2472-3293-5 โทรสาร 0-2891-0742 Mobile : 08-8585-1521
Facebook : สำนักพิมพ์ วังอักษร e-Mail : wangaksorn9@gmail.com
http://www.wangaksorn.com ID Line : @wangaksorn

พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2563



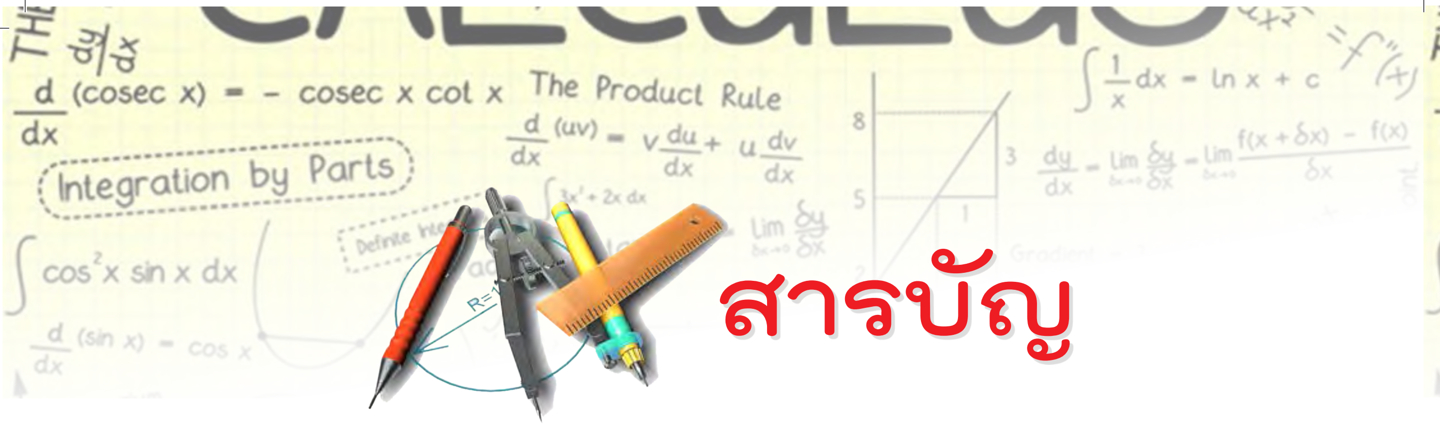
คำนำ

วิชาแคลคูลัส 1 รหัสวิชา **30000-1404** จัดอยู่ในหมวดวิชาสมรรถนะแกนกลาง กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ **ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2563** สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา (สอศ.) กระทรวงศึกษาธิการ ผู้เขียนได้บริหารสาระการเรียนรู้แบ่งเป็น 8 บทเรียน ได้จัดแผนการจัดการเรียนรู้/แผนการสอนที่มุ่งเน้นฐานสมรรถนะ (Competency Based) และการบูรณาการ (Integrated) ตรงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา คำอธิบายรายวิชา ในแต่ละบทเรียนมุ่งให้ความสำคัญส่วนที่เป็นความรู้ ทฤษฎี หลักการ กระบวนการ ตัวอย่าง แบบฝึกปฏิบัติ และคำถามเพื่อการทบทวน เพื่อฝึกทักษะประสบการณ์ เร่งพัฒนาบทบาทของผู้เรียนเป็นผู้จัดการแสวงหาความรู้ (Explorer) เป็นผู้สอนตนเองได้ สร้างองค์ความรู้ใหม่ และบทบาทของผู้สอนเปลี่ยนจากผู้ให้ความรู้มาเป็นผู้จัดการชี้แนะ (Teacher Roles) จัดสิ่งแวดล้อมเอื้ออำนวยต่อความสนใจเรียนรู้ และเป็นผู้ร่วมเรียนรู้ (Co–investigator) จัดห้องเรียนเป็นสถานที่ทำงานร่วมกัน (Learning Context) จัดกลุ่มเรียนรู้ให้รู้จักทำงานร่วมกัน (Grouping) ฝึกความใจกว้าง มุ่งสร้างสรรค์คนรุ่นใหม่ สอนความสามารถที่นำไปทำงานได้ (Competency) สอนความรัก ความเมตตา (Compassion) ความเชื่อมั่น ความซื่อสัตย์ (Trust) เป้าหมายอาชีพอันยังประโยชน์ (Productive Career) และชีวิตที่มีศักดิ์ศรี (Noble Life) เหนือสิ่งอื่นใด เป็นคนดีทั้งกาย วาจา ใจ มีคุณธรรม จรรยาบรรณทางธุรกิจและวิชาชีพ

ส่งเสริมสนับสนุนยุทธศาสตร์การพัฒนาระบบคุณวุฒิวิชาชีพ (Vocational Qualification System) สอดคล้องตามมาตรฐานอาชีพ (Occupational Standard) สร้างภูมิคุ้มกัน เพิ่มขีดความสามารถในการแข่งขันของประเทศ กำลังแรงงาน การพัฒนามาตรฐานการปฏิบัติงานระดับชาติ (National Benchmarking) และการวิเคราะห์หน้าที่การงาน (Functional Analysis) เพื่อให้เกิดผลสำเร็จในภาคธุรกิจ อุตสาหกรรม ทุกสาขาอาชีพ เป็นการเตรียมความพร้อมของผู้เรียนเข้าสู่สนามการแข่งขันในประชาคมอาเซียน

ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ผู้สอน ผู้ประสาทวิชาความรู้ เอกสาร หนังสือที่ใช้ประกอบในการเรียบเรียงไว้ ณ โอกาสนี้

สุนิดา พุ่มจีน



สารบัญ

บทที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objective)

หลังจากศึกษาจบบทเรียนนี้แล้ว นักเรียนมีความสามารถดังนี้

1. นิยามของลิมิต (Limit)
2. ศึกษาทฤษฎีของลิมิตของฟังก์ชัน
3. ยกตัวอย่างการหาลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นอัตราส่วน
4. คำนวณหาค่าของลิมิตอนันต์
5. อธิบายความต่อเนื่องของกราฟ
6. ยกตัวอย่างความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
7. ทวนสอบความต่อเนื่องบนช่วง
8. ยกตัวอย่างทฤษฎีบทเพิ่มเติมเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทที่ 1

ลิมิตของฟังก์ชัน

นิยามของลิมิต (Limit)

กล่าวว่า ถ้าลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a จากทางซ้ายมือ คือ m เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $\lim_{x \to a^-} f(x) = m$ และถ้าลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a จากทางขวามือคือ N เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $\lim_{x \to a^+} f(x) = N$ และถ้าผลที่ได้เมื่อนำมาเปรียบเทียบกันแล้ว $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = m$ แล้วแสดงว่า $\lim_{x \to a} f(x) = m$ หรือถ้า $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$ แล้วแสดงว่า $\lim_{x \to a} f(x) = L$

เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้น ลองพิจารณาฟังก์ชัน f(x) = x + 5 ซึ่งมีโดเมน (x) เป็นเซตของจำนวนจริง ซึ่งจะทำการหาลิมิตของฟังก์ชัน f(x) = x + 5 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 โดยแยกเป็น 2 กรณี คือ เมื่อ x < 1 และ x > 1 โดยพิจารณาเพียงบางช่วงของค่า x เท่านั้น แต่จริง ๆ แล้ว (x) จะมีค่าเท่าไรก็ได้

ตารางที่ 1.1 แสดงค่าของ f(x) = x + 5 เมื่อ x < 1

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999	....
f(x)	5.9	5.99	5.999	5.9999	5.99999	....

จากตารางจะเห็นว่า $\lim_{x \to 1^-} x + 5 = 6$

ตารางที่ 1.2 แสดงค่าของ f(x) = x + 5 เมื่อ x > 1

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001	....
f(x)	6.1	6.01	6.001	6.0001	6.00001	....

จากตารางจะเห็นว่า $\lim\limits_{x \to 1^+} x + 5 = 6$

จากตารางที่ได้ จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 1^-} x + 5 \quad \lim\limits_{x \to 1^+} x + 5 = \lim\limits_{x \to 1} x + 5 = 6$

โดยที่ $x \neq 1$

ทฤษฎีลิมิตของฟังก์ชัน

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันจะสะดวกรวดเร็วขึ้นเมื่อใช้ทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชัน ดังนี้ ใช้ทฤษฎีของลิมิตของฟังก์ชัน

1. $\lim\limits_{x \to a} k = k$ {ลิมิตของค่าคงที่ = ค่าคงที่}

2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = c$

3. $\lim\limits_{x \to a} = f(g(x)) \quad f \lim\limits_{x \to a} g(x) = f(f(a)) = f(c)$

4. $\lim\limits_{z \to a} k\,f(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x) = kc$ {ค่าคงที่สามารถดึงออกจากลิมิตได้}

5. $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)+g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = c + b$

6. $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x)-g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = c - b$

7. $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x).g(x)\right] = \lim\limits_{x \to a} f(x). \lim\limits_{x \to a} g(x) = c.b$

8. $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{c}{b}$ เมื่อ $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

ลิมิตสามารถแจกแจง
$+ - \times \%$ ได้

*หมายเหตุ : ที่ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ไม่ได้เพราะจะทำให้ตัวส่วนเป็น 0 ซึ่งจะทำให้ค่าของ $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]$ จะเท่ากับ Infinity

9. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = c^n$

10. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\frac{m}{n}} = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^{\frac{m}{n}} = c^{\frac{m}{n}}$

11. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{-n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n}$

$= \dfrac{1}{\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n} = \dfrac{1}{c^n}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$

12. $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\frac{-m}{n}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)^{\frac{m}{n}}}$

$= \dfrac{1}{\left[\lim\limits_{x\to a}[f(x)]\right]^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{c^{\frac{m}{n}}}$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$

การหาลิมิตของฟังก์ชันที่ยกกำลัง สามารถหาค่าลิมิตของฟังก์ชันนั้นก่อนแล้วจึงนำมายกกำลังทีหลังได้

13. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{c}$

หมายเหตุ : ถ้า n เป็นเลขคู่ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ต้อง > 0

ถ้า n เป็นเลขคี่ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ = ค่าคงที่ใด ๆ

การหาลิมิตของฟังก์ชันที่ถอดราก สามารถหาลิมิตของฟังก์ชันข้างในรากได้ก่อน แล้วค่อยนำค่าที่ได้มาถอดรากทีหลัง

โดยที่ f(x), g(x) = ฟังก์ชันของ x ใด ๆ

k, a, c = ค่าคงที่ใด ๆ

m, n จำนวนเต็มบวก

f(g(x)) = (fog)(x)

*หมายเหตุ : ทฤษฎีนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ f(x), g(x) สามารถหาลิมิตได้

$$\left\{ \textbf{ให้ } \lim_{x \to a} g(x) = b \right\}$$

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 3} (4x + 5)$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \to 3} (4x + 5) = \lim_{x \to 3} 4x + \lim_{x \to 3} 5$

$= 4(3) + 5$

$= 17$

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 5} (8x + 2x - 4x)$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \to 5} (8x + 2x - 4x) = \lim_{x \to 5} 8x + \lim_{x \to 5} 2x - \lim_{x \to 5} 4x$

$= 8(5) + 2(5) - 4(5)$

$= 40 + 10 - 20$

$= 30$

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 10}\left[\dfrac{4x^2+2x^3+3x}{2x^2+3x^2+8}\right]$

วิธีทำ จาก $\lim_{x\to 10}\left[\dfrac{4x^2+2x^3+3x}{2x^2+3x^2+8}\right] = \dfrac{4(10)^2+2(10)^3+3(10)}{2(10)^2+3(10)^2+8}$

$$= \frac{400+2000+30}{200+300+8}$$

$$= 4.78$$

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 5}\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x}}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x\to 5}\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x}} = \sqrt{\dfrac{(5)^2-2}{2(5)}}$

$$= \sqrt{\frac{23}{10}}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาค่าของ $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt[3]{x+27}}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt[3]{x+27}} = \dfrac{\sqrt{0+4}}{\sqrt[3]{0+27}}$

$$= \frac{2}{3}$$

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + x^4)$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + x^4) = (-2)^3 + (-2)^4$

$$= -8 + 4$$

$$= -4$$

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x^2 + 3}{2x}\right]^4$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x \to 1} \left[\dfrac{x^2 + 3}{2x}\right]^4 = \left[\dfrac{(1)^2 + 3}{2(1)}\right]^4$

$$= 2^4$$

$$= 16$$

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 4} \left[\dfrac{8x}{4 + x}\right]^{-2}$

วิธีทำ จาก $\lim\limits_{x \to 4} \left[\dfrac{8x}{4 + x}\right]^{-2} = \dfrac{1}{\left[\dfrac{8(4)}{4 + 4}\right]^2}$

$$= \frac{1}{4^2}$$

$$= \frac{1}{16}$$

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-5}{|x-5|}$

วิธีทำ จาก $|x-5| = \begin{cases} x-5;\ \text{ถ้า } x-5 \geq 0 \\ -(x-5);\ \text{ถ้า } x-5 < 0 \end{cases}$

ซึ่ง $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-5}{|x-5|} \qquad = \qquad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x-5}{x-5} \quad = \quad 1$

โดยที่ $x-5 > 0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 2^+} + \dfrac{x-5}{|x-5|} = 1$

ตัวอย่างที่ 1.10 ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2;\ \text{ถ้า } x < 3 \\ 9;\ \text{ถ้า } x > 3 \\ 0;\ \text{ถ้า } x = 3 \end{cases}$

จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} x^2 = 9$

$\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 9 = 9$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 9$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$ (หาค่าได้)

ถ้า lim ของฟังก์ชัน f(x) มีค่าเป็น $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty \cdot \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$ เรียกว่ารูปแบบไม่กำหนด จะไม่สามารถหาคำตอบของลิมิตจากทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชันได้ ต้องใช้เทคนิคอื่น ๆ ช่วย โดยที่ค่าลิมิตของฟังก์ชันใน 7 รูปแบบนี้อาจจะมีหรือไม่มีคำตอบก็ได้

การหาลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นอัตราส่วน

ให้ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ คือ ลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นอัตราส่วน

โดยที่ $f(x), g(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ

1. ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} =$ ค่าคงที่ค่าหนึ่ง

ค่าคงที่ค่านั้นจะเป็นคำตอบของ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(a)}{g(a)}$

2. ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$ หรือ $\frac{\infty}{\infty}$

แสดงว่า $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ มีคำตอบที่แน่นอนแต่ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชันในการหาคำตอบได้ โดยวิธีที่เป็นเทคนิคเพิ่มเติมในการหาลิมิตของฟังชั่นที่เป็นอัตราส่วนนั้นมีอยู่ 3 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ใช้วิธีการแยกตัวประกอบของ f(x) หรือ g(x) เพื่อหาแฟคเตอร์ที่สามารถตัดทอนกันได้

เช่น $\lim\limits_{x\to 5}\left[\dfrac{x^2-25}{x-5}\right] = \dfrac{0}{0}$

$\therefore$ แสดงว่าหาค่าได้ ลองแยกตัวประกอบดู

$$\lim_{x\to 5}\frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} = \lim_{x\to 5}(x+5)$$

$$= 10$$

วิธีที่ 2 ใช้การสังยุค (Conjugate) ของตัวเศษหรือตัวส่วน แล้วนำมาคูณทั้งเศษและส่วนของฟังก์ชันเดิม ก่อนจะทำการสังยุค

การสังยุค (Conjugate) จะมีอยู่ด้วยกัน 4 แบบ คือ

สังยุคของ $a+b$ คือ $a-bi \rightarrow (a+b)(a-b) = a^2-b^2$

สังยุคของ $a-b$ คือ $a+b \rightarrow (a-b)(a+b) = a^2-b^2$

สังยุคของ $a+bi$ คือ $a-bi \rightarrow (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$

สังยุคของ $a-bi$ คือ $a+bi \rightarrow (a-bi)(a+bi) = a^2+b^2$

เช่น $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x} = \dfrac{3-3}{0} = \dfrac{0}{0}$

แสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ มีคำตอบโดยที่สังยุค (Conjugate)

ในที่นี้ คือ $\sqrt{x+9}+3$

$\therefore$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}\;\dfrac{x\sqrt{x+9}-3}{x\sqrt{x+9}-3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+9})^2-(3)^2}{x(\sqrt{x+9}+3)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

วิธีที่ 3 เป็นวิธีลัดซึ่งวิธีนี้จะได้คำตอบที่เร็วมาก แต่บางสถาบันอาจจะไม่ให้ใช้วิธีนี้ เพราะฉะนั้น วิธีนี้ถือเป็นวิธีที่ใช้ในการตรวจคำตอบ โดยหลักการมีอยู่ว่าให้หาอนุพันธ์ทั้งเศษและส่วนของฟังก์ชันที่จะหา lim

$\lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ $\therefore \lim_{x \to k} \frac{f(x)}{g(x)}$ มีค่าแน่ ๆ โดยหาจาก

$\lim_{x \to k} \frac{d[f(x)]/dt}{d[g(x)]/dt}$ { diff บน หารด้วย diff ล่าง } และถ้ายังออกมาเป็น $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ อีก ก็ให้ diff บน หารด้วย diff ล่าง ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำตอบที่ไม่ใช่ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

เช่น $\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 8x - 9} \right] = \frac{(1)^3 + 2(1)^2 - 3}{(1)^2 + 8(1) - 9}$

$$= \frac{1+2-3}{1+8-9}$$

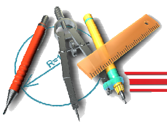
$$= \frac{0}{0}$$

$$\therefore \text{ ใช้วิธีที่ 3 } \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3+2x^2-3}{x^2+8x-9}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{d[x^3+2x^2-3]/dt}{d[x^2+8x-9]/dt}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{3x^3+4x}{2x+8}\right]$$

$$= \frac{3(1)^2+4(1)}{2(1)+8}$$

$$= \frac{7}{10}$$



การหาค่าของลิมิตอนันต์

ความหมายของการหาค่าของลิมิตอนันต์ ก็คือ การหาลิมิตของฟังก์ชัน f(x) เมื่อ $x\to\infty$ หรือ $x\to-\infty$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ หรือ } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

วิธีการหาคำตอบของลิมิตอนันต์ก็ทำเหมือนกับการหาลิมิตของฟังก์ชันธรรมดา เพียงแต่แทนที่ x จะเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่งก็จะเปลี่ยนเข้าใกล้ ∞ แทน โดยที่คำตอบที่ได้ออกมาจะอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$\infty \pm k = \infty$

$-\infty \pm k = -\infty$

$\infty \pm 0 = \infty$

$-\infty \pm 0 = -\infty$

$$k \cdot \infty \begin{cases} = \infty \text{ ; ถ้า k เป็น +} \\ = \infty \text{ ; ถ้า k เป็น -} \end{cases}$$

$$k \cdot (-\infty) \begin{cases} = -\infty \text{ ; ถ้า k เป็น +} \\ = \infty \text{ ; ถ้า k เป็น -} \end{cases}$$

$$\frac{\infty}{k} \begin{cases} = \infty \text{ ; ถ้า k เป็น +} \\ = -\infty \text{ ; ถ้า k เป็น -} \end{cases}$$

$$-\frac{\infty}{k} \begin{cases} = -\infty \text{ ; ถ้า k เป็น +} \\ = \infty \text{ ; ถ้า k เป็น -} \end{cases}$$

$$\frac{k}{\infty} \begin{cases} = 0 \text{ ; ถ้า k เป็น +} \\ = 0 \text{ ; ถ้า k เป็น -} \end{cases}$$

$$\frac{k}{(-\infty)} \begin{cases} = 0 \text{ ; ถ้า k เป็น +} \\ = 0 \text{ ; ถ้า k เป็น -} \end{cases}$$

$$\infty^{m} \begin{cases} = \infty \text{ ; ถ้า m เป็น + และเป็นเลขคู่} \\ = \infty \text{ ; ถ้า m เป็น + และเป็นเลขคี่} \\ = 0 \text{ ; ถ้า m เป็น - และเป็นเลขคู่} \\ = 0 \text{ ; ถ้า m เป็น – และเป็นเลขคี่} \end{cases}$$

$$-\infty^{m} \begin{cases} = \infty \text{ ; ถ้า m เป็น + และเป็นเลขคู่} \\ = -\infty \text{ ; ถ้า m เป็น + และเป็นเลขคี่} \\ = 0 \text{ ; ถ้า m เป็น - และเป็นเลขคู่} \\ = 0 \text{ ; ถ้า m เป็น – และเป็นเลขคี่} \end{cases}$$

โดยที่ k = ค่าคงที่ใด ๆ

m = จำนวนเต็ม