



แคลคูลัส 1

Calculus

สุนิดา พุ่มจัน

107.-

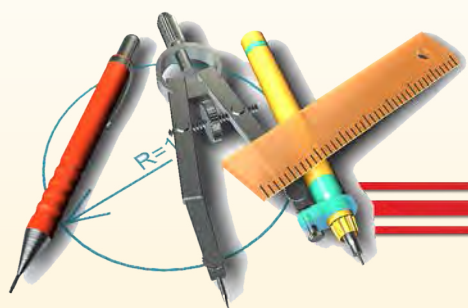
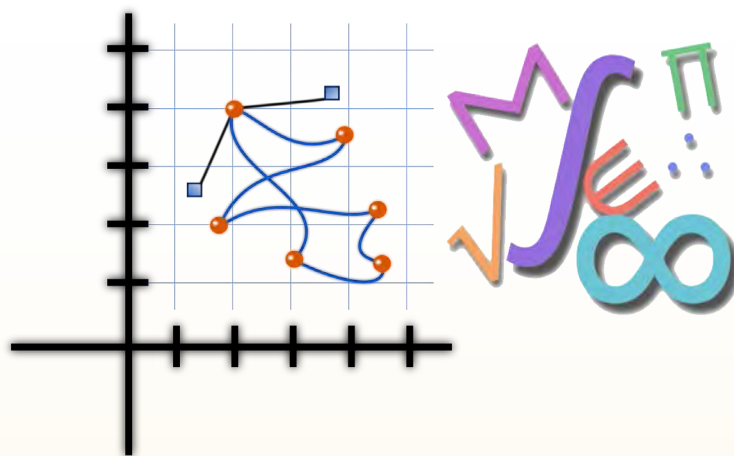
แคลคูลัส

1

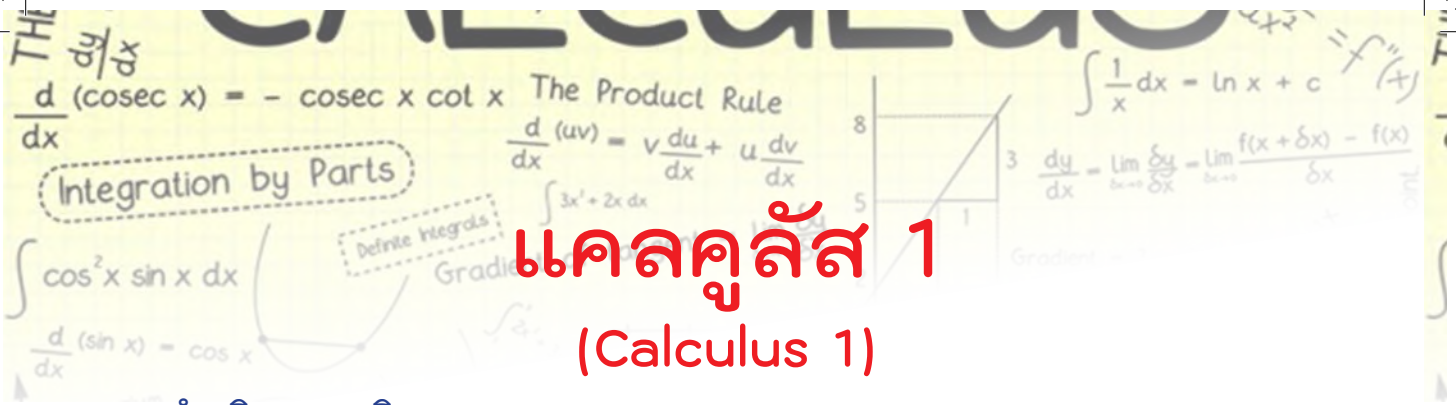
(Calculus 1)

รหัสวิชา 30000-1404

หมวดวิชาสมรรถนะแกนกลาง กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์
หลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2563
และใช้ได้กับหลักสูตรปริญญาตรี



เรียบเรียงโดย
สุนิดา พุ่มจิ้น



แคลคูลัส 1 (Calculus 1)

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาและฝึกทักษะการคิดคำนวณ และการแก้ปัญหาเกี่ยวกับทฤษฎีบททวินามเศษส่วนย่อย ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันอนุพันธ์ ฟังก์ชันพีชคณิต และฟังก์ชันอดิศัย การประยุกต์ของอนุพันธ์ อินทิกรัล ฟังก์ชันพีชคณิตและฟังก์ชันอดิศัยอินทิกรัลจำกัดเขตและการประยุกต์ และการประยุกต์ใช้ในงานอาชีพ

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของสำนักหอสมุดแห่งชาติ

สุนิดา พุ่มจิ้น.

แคลคูลัส 1.-- กรุงเทพฯ : วังอักษร, 2563.

268 หน้า.

1. แคลคูลัส. I. ชื่อเรื่อง.

515

ISBN 978-616-495-123-5

จัดพิมพ์และจำหน่ายโดย...



วัง อักษร

บริษัทวังอักษร จำกัด

69/3 ถนนอรุณอมรินทร์ แขวงวัดอรุณ เขตบางกอกใหญ่ กรุงเทพฯ 10600

โทร. 0-2472-3293-5 โทรสาร 0-2891-0742 Mobile : 08-8585-1521

Facebook : สำนักพิมพ์ วังอักษร

e-Mail : wangaksorn9@gmail.com

<http://www.wangaksorn.com>

ID Line : @wangaksorn



พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2563

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2537

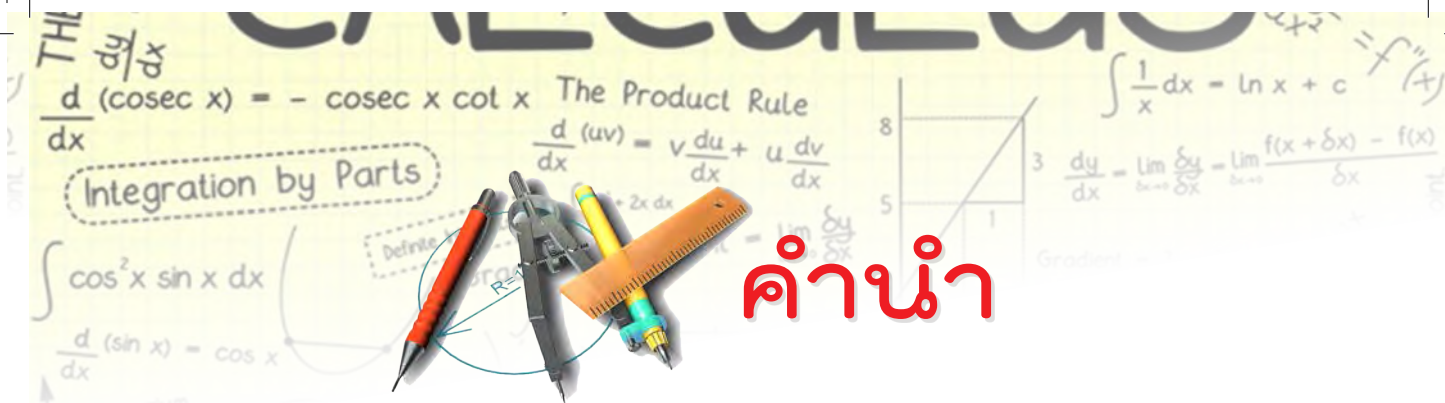
โดยบริษัทวังอักษร จำกัด ห้ามนำส่วนใดส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้ไปทำซ้ำ ดัดแปลง หรือเผยแพร่ต่อสาธารณชน ไม่ว่ารูปแบบใดๆ นอกจากได้รับอนุญาต

เป็นลายลักษณ์อักษรล่วงหน้าจากทางบริษัทฯ เท่านั้น

ชื่อและเครื่องหมายการค้าอื่นๆ ที่อ้างอิงในหนังสือฉบับนี้

เป็นสิทธิโดยชอบด้วยกฎหมายของเจ้าของแต่ละราย

โดยบริษัทวังอักษร จำกัด มิได้อ้างความเป็นเจ้าของแต่อย่างใด

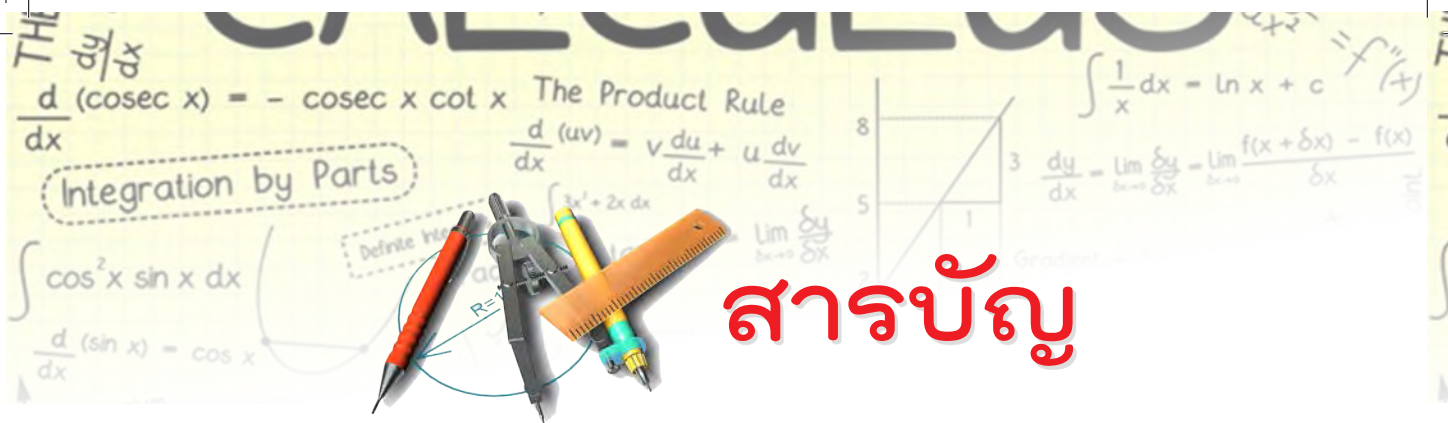


วิชาแคลคูลัส 1 รหัสวิชา 30000-1404 จัดอยู่ในหมวดวิชาสมรรถนะแกนกลาง กลุ่มวิชาคณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง พุทธศักราช 2563 สำนักงานคณะกรรมการการอาชีวศึกษา (สอศ.) กระทรวงศึกษาธิการ ผู้เขียนได้บริหารสาระการเรียนรู้แบ่งเป็น 8 บทเรียน ได้จัดแผนการจัดการเรียนรู้/แผนการสอนที่มุ่งเน้นฐานสมรรถนะ (Competency Based) และการบูรณาการ (Integrated) ตรงตามจุดประสงค์รายวิชา สมรรถนะรายวิชา คำอธิบายรายวิชา ในแต่ละบทเรียนมุ่งให้ความสำคัญส่วนที่เป็นความรู้ ทฤษฎี หลักการ กระบวนการ ตัวอย่าง แบบฝึกปฏิบัติ และคำถามเพื่อการทบทวน เพื่อฝึกทักษะประสบการณ์ เร่งพัฒนาบทบาทของผู้เรียนเป็นผู้จัดการแสวงหาความรู้ (Explorer) เป็นผู้สอนตนเองได้ สร้างองค์ความรู้ใหม่ และบทบาทของผู้สอนเปลี่ยนจากผู้ให้ความรู้มาเป็นผู้จัดการชี้แนะ (Teacher Roles) จัดสิ่งแวดล้อมเอื้ออำนวยต่อความสนใจเรียนรู้ และเป็นผู้ร่วมเรียนรู้ (Co-investigator) จัดห้องเรียนเป็นสถานที่ทำงานร่วมกัน (Learning Context) จัดกลุ่มเรียนรู้ให้รู้จักทำงานร่วมกัน (Grouping) ฝึกความใจกว้าง มุ่งสร้างสรรค์คนรุ่นใหม่ สอนความสามารถที่นำไปทำงานได้ (Competency) สอนความรัก ความเมตตา (Compassion) ความเชื่อมั่น ความซื่อสัตย์ (Trust) เป้าหมายอาชีพอันยังประโยชน์ (Productive Career) และชีวิตที่มีศักดิ์ศรี (Noble Life) เหนือสิ่งอื่นใด เป็นคนดีทั้งกาย วาจา ใจ มีคุณธรรม จรรยาบรรณทางธุรกิจและวิชาชีพ

ส่งเสริมสนับสนุนยุทธศาสตร์การพัฒนาระบบคุณวุฒิวิชาชีพ (Vocational Qualification System) สอดคล้องตามมาตรฐานอาชีพ (Occupational Standard) สร้างภูมิคุ้มกัน เพิ่มขีดความสามารถในการแข่งขันของประเทศ กำลังแรงงาน การพัฒนามาตรฐานการปฏิบัติงานระดับชาติ (National Benchmarking) และการวิเคราะห์หน้าที่การงาน (Functional Analysis) เพื่อให้เกิดผลสำเร็จในภาคธุรกิจ อุตสาหกรรม ทุกสาขาอาชีพ เป็นการเตรียมความพร้อมของผู้เรียนเข้าสู่สนามการแข่งขันในประชาคมอาเซียน

ขอขอบพระคุณท่านอาจารย์ผู้สอน ผู้ประสพวิชาความรู้ เอกสาร หนังสือที่ใช้ประกอบในการเรียบเรียงไว้ ณ โอกาสนี้

สุนิดา พุ่มจิ้น



สารบัญ

บทที่ 1 ลิมิตของฟังก์ชัน

นิยามของลิมิต (Limit)	1
ทฤษฎีของลิมิตของฟังก์ชัน	2
การหาลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นอัตราส่วน	3
การหาค่าของลิมิตอนันต์	9
ความต่อเนื่องของกราฟ	12
ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of Functions)	25
ความต่อเนื่องบนช่วง (Continuity on an Interval)	26
ทฤษฎีบทเพิ่มเติมเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน	28
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	30
	39

บทที่ 2 อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

นิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชันใด ๆ	42
การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎสี่ขั้น (Four Steps Rule or General Rule)	43
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต	43
การหาอนุพันธ์ของอันดับสูง	49
การหาอนุพันธ์โดยใช้กฎลูกโซ่	59
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย	64
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	68
	74

บทที่ 3 อนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัย **76**

การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	77
การหาอนุพันธ์ของอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	81
การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและลอการิทึม	87
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	94

บทที่ 4 การประยุกต์ของอนุพันธ์ **96**

ความเร็วและความเร่ง (Velocity and Acceleration)	97
ความชันของเส้นโค้งสมการเส้นสัมผัส และเส้นแนวตั้งฉาก	104
การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน	109
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	117

บทที่ 5 ค่าเชิงอนุพันธ์ **119**

นิยามของค่าเชิงอนุพันธ์	120
การหาค่าโดยประมาณโดยใช้ดิฟเฟอเรนเชียล	123
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	127

บทที่ 6 อินทิกรัลของฟังก์ชัน **128**

นิยามอินทิกรัลของฟังก์ชัน	129
การหาอินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิต	130
การหาอินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	140
การหาอินทิกรัลของอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ	149
การหาอินทิกรัลของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล	155

เทคนิคการอินทิเกรต	159
การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Integration by Trigonometric Substitutions)	160
การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Part)	178
การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Part) โดยใช้วิธีลัด	188
การอินทิเกรตโดยการทำให้เป็นเศษส่วนย่อย (Integration by Partial Fraction)	191
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	206

บทที่ 7 อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral) 210

นิยามของอินทิกรัลจำกัดเขต	211
สมบัติของอินทิกรัลจำกัดเขต (Properties of Definite Integrals)	212
หลักการหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $f(x) dx$	213
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	221

บทที่ 8 การประยุกต์ทางเรขาคณิตของอินทิกรัลจำกัดเขต 223

การหาพื้นที่ในระนาบ (Plane Areas)	224
การหาปริมาตรของรูปทรงตันที่เกิดจากการหมุนพื้นที่	242
แบบทดสอบและกิจกรรมการฝึกทักษะ	254

บรรณานุกรม

บทที่



1

ลิมิตของฟังก์ชัน

จุดประสงค์เชิงพฤติกรรม (Behavioral Objective)

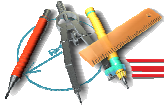
หลังจากศึกษาจบบทเรียนนี้แล้ว นักเรียนมีความสามารถดังนี้

1. นิยามของลิมิต (Limit)
2. ศึกษาทฤษฎีของลิมิตของฟังก์ชัน
3. ยกตัวอย่างการหาลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นอัตราส่วน
4. คำนวณหาค่าของลิมิตอนันต์
5. อธิบายความต่อเนื่องของกราฟ
6. ยกตัวอย่างความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
7. ทวนสอบความต่อเนื่องบนช่วง
8. ยกตัวอย่างทฤษฎีบทเพิ่มเติมเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชัน



บทที่ 1

ลิมิตของฟังก์ชัน



นิยามของลิมิต (Limit)

กล่าวว่า ถ้าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จากทางซ้ายมือ คือ m เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = m$ และถ้าลิมิตของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จากทางขวามือคือ N เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้เป็น $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = N$ และถ้าผลที่ได้เมื่อนำมาเปรียบเทียบกันแล้ว $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = m$ แล้วแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m$ หรือถ้า $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ แล้วแสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

เพื่อให้เกิดความเข้าใจมากขึ้น ลองพิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = x + 5$ ซึ่งมีโดเมน (x) เป็นเซตของจำนวนจริง ซึ่งจะทำให้การหาลิมิตของฟังก์ชัน $f(x) = x + 5$ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 1 โดยแยกเป็น 2 กรณี คือ เมื่อ $x < 1$ และ $x > 1$ โดยพิจารณาเพียงบางช่วงของค่า x เท่านั้น แต่จริงๆ แล้ว (x) จะมีค่าเท่าไรก็ได้

ตารางที่ 1.1 แสดงค่าของ $f(x) = x + 5$ เมื่อ $x < 1$

x	0.9	0.99	0.999	0.9999	0.99999
$f(x)$	5.9	5.99	5.999	5.9999	5.99999

จากตารางจะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} x + 5 = 6$

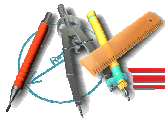
ตารางที่ 1.2 แสดงค่าของ $f(x) = x + 5$ เมื่อ $x > 1$

x	1.1	1.01	1.001	1.0001	1.00001
$f(x)$	6.1	6.01	6.001	6.0001	6.00001

จากตารางจะเห็นว่า $\lim_{x \rightarrow 1^+} x + 5 = 6$

จากตารางที่ได้ จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 1^-} x + 5 = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 5 = \lim_{x \rightarrow 1} x + 5 = 6$

โดยที่ $x \neq 1$



ทฤษฎีลิมิตของฟังก์ชัน

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชันจะสะดวกเร็วขึ้นเมื่อใช้ทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชัน ดังนี้
ใช้ทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชัน

1. $\lim_{x \rightarrow a} k = k$ {ลิมิตของค่าคงที่ = ค่าคงที่}

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = c$

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(f(a)) = f(c)$

4. $\lim_{z \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kc$ {ค่าคงที่สามารถดึงออกจากลิมิตได้}

5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c + b$

6. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c - b$

7. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c \cdot b$

8. $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{c}{b}$ เมื่อ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$

ลิมิตสามารถแจกแจง
+ - x % ได้

*หมายเหตุ : ที่ $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ไม่ได้เพราะจะทำให้ตัวส่วนเป็น 0 ซึ่งจะทำให้ค่าของ

$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$ จะเท่ากับ Infinity

$$9. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = c^n$$

$$10. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{m}{n}} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{\frac{m}{n}} = c^{\frac{m}{n}}$$

$$11. \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{-n} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n}$$

$$= \frac{1}{\left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n} = \frac{1}{c^n} \quad \text{เมื่อ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$$

$$12. \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{\frac{m}{n}}}$$

$$= \frac{1}{\left[\lim_{x \rightarrow a} [f(x)] \right]^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{c^{\frac{m}{n}}} \quad \text{เมื่อ } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$$

$$13. \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{c}$$

หมายเหตุ : ถ้า n เป็นเลขคู่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ต้อง > 0

ถ้า n เป็นเลขคี่ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$ ค่าคงที่ใด ๆ

การหาลิมิตของฟังก์ชันที่ยกกำลัง
สามารถหาลิมิตของฟังก์ชันนั้น
ก่อนแล้วจึงนำมายกกำลังทีหลังได้

การหาลิมิตของฟังก์ชันที่ถอดราก
สามารถหาลิมิตของฟังก์ชันข้างใน
รากได้ก่อน แล้วค่อยนำค่าที่ได้มา
ถอดรากทีหลัง

โดยที่ $f(x), g(x) =$ ฟังก์ชันของ x ใด ๆ

$k, a, c =$ ค่าคงที่ใด ๆ

m, n จำนวนเต็มบวก

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x)$$

*หมายเหตุ : ทฤษฎีนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $f(x), g(x)$ สามารถหาลิมิตได้

$$\left\{ \text{ให้ } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b \right\}$$

ตัวอย่างที่ 1.1 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} (4x + 5)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก } \lim_{x \rightarrow 3} (4x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 3} 4x + \lim_{x \rightarrow 3} 5 \\ &= 4(3) + 5 \\ &= 17 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 5} (8x + 2x - 4x)$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad \text{จาก } \lim_{x \rightarrow 5} (8x + 2x - 4x) &= \lim_{x \rightarrow 5} 8x + \lim_{x \rightarrow 5} 2x - \lim_{x \rightarrow 5} 4x \\ &= 8(5) + 2(5) - 4(5) \\ &= 40 + 10 - 20 \\ &= 30 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 1.3 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 10} \left[\frac{4x^2 + 2x^3 + 3x}{2x^2 + 3x^2 + 8} \right]$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \rightarrow 10} \left[\frac{4x^2 + 2x^3 + 3x}{2x^2 + 3x^2 + 8} \right] = \frac{4(10)^2 + 2(10)^3 + 3(10)}{2(10)^2 + 3(10)^2 + 8}$

$$= \frac{400 + 2000 + 30}{200 + 300 + 8}$$

$$= 4.78$$

ตัวอย่างที่ 1.4 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x^2 - 2}{2x}}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x^2 - 2}{2x}} = \sqrt{\frac{(5)^2 - 2}{2(5)}}$

$$= \sqrt{\frac{23}{10}}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt[3]{x + 27}}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt[3]{x + 27}} = \frac{\sqrt{0 + 4}}{\sqrt[3]{0 + 27}}$

$$= \frac{2}{3}$$

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + x^4)$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + x^4) = (-2)^3 + (-2)^4$

$$= -8 + 4$$

$$= -4$$

ตัวอย่างที่ 1.7 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 + 3}{2x} \right]^4$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 + 3}{2x} \right]^4 = \left[\frac{(1)^2 + 3}{2(1)} \right]^4$

$$= 2^4$$

$$= 16$$

ตัวอย่างที่ 1.8 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{8x}{4+x} \right]^{-2}$

วิธีทำ จาก $\lim_{x \rightarrow 4} \left[\frac{8x}{4+x} \right]^{-2} = \frac{1}{\left[\frac{8(4)}{4+4} \right]^2}$

$$= \frac{1}{4^2}$$

$$= \frac{1}{16}$$

ตัวอย่างที่ 1.9 จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-5}{|x-5|}$

วิธีทำ จาก $|x-5| = \begin{cases} x-5; & \text{ถ้า } x-5 \geq 0 \\ -(x-5); & \text{ถ้า } x-5 < 0 \end{cases}$

$$\text{ซึ่ง } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-5}{|x-5|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-5}{x-5} = 1$$

โดยที่ $x-5 > 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-5}{|x-5|} = 1$$

ตัวอย่างที่ 1.10 ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2; & \text{ถ้า } x < 3 \\ 9; & \text{ถ้า } x > 3 \\ 0; & \text{ถ้า } x = 3 \end{cases}$

จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ และ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 = 9$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 9 = 9$$

เนื่องจาก $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 9$ (หาค่าได้)

ถ้า \lim ของฟังก์ชัน $f(x)$ มีค่าเป็น $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty \cdot \infty, \infty^0, 0^0, 1^\infty$ เรียกว่ารูปแบบ

ไม่กำหนด จะไม่สามารถหาคำตอบของลิมิตจากทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชันได้ ต้องใช้เทคนิคอื่น ๆ ช่วย โดยที่ค่าลิมิตของฟังก์ชันใน 7 รูปแบบนี้อาจจะมีหรือไม่มีคำตอบก็ได้



การหาลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นอัตราส่วน

ให้ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ คือ ลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นอัตราส่วน

โดยที่ $f(x), g(x)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ

$$1. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \text{ค่าคงที่ค่าหนึ่ง}$$

ค่าคงที่ค่าหนึ่งจะเป็นคำตอบของ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$2. \text{ ถ้า } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \text{ หรือ } \frac{\infty}{\infty}$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ มีคำตอบที่แน่นอนแต่ไม่สามารถใช้ทฤษฎีบทของลิมิตของฟังก์ชัน

ในการหาคำตอบได้ โดยวิธีที่เป็นเทคนิคเพิ่มเติมในการหาลิมิตของฟังก์ชันที่เป็นอัตราส่วนนั้นมีอยู่ 3 วิธี คือ

วิธีที่ 1 ใช้วิธีการแยกตัวประกอบของ $f(x)$ หรือ $g(x)$ เพื่อหาแฟกเตอร์ที่สามารถตัดทอนกันได้

$$\text{เช่น } \lim_{x \rightarrow 5} \left[\frac{x^2 - 25}{x - 5} \right] = \frac{0}{0}$$

\therefore แสดงว่าหาค่าได้ ลองแยกตัวประกอบดู

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-5)} &= \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) \\ &= 10 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 ใช้การสังยุค (Conjugate) ของตัวเศษหรือตัวส่วน แล้วนำมาคูณทั้งเศษและส่วนของฟังก์ชันเดิม ก่อนจะทำการสังยุค

การสังยุค (Conjugate) จะมีอยู่ด้วยกัน 4 แบบ คือ

$$\text{สังยุคของ } a + b \text{ คือ } a - bi \rightarrow (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\text{สังยุคของ } a - b \text{ คือ } a + b \rightarrow (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\text{สังยุคของ } a + bi \text{ คือ } a - bi \rightarrow (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

$$\text{สังยุคของ } a - bi \text{ คือ } a + bi \rightarrow (a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2$$

$$\text{เช่น } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} = \frac{3-3}{0} = \frac{0}{0}$$

แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$ มีคำตอบโดยที่สังยุค (Conjugate)

ในที่นี้ คือ $\sqrt{x+9} + 3$

$$\therefore \text{ จะได้ว่า } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} \frac{x\sqrt{x+9} - 3}{x\sqrt{x+9} - 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9})^2 - (3)^2}{x(\sqrt{x+9} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 9 - 9}{x(\sqrt{x + 9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

วิธีที่ 3 เป็นวิธีลัดซึ่งวิธีนี้จะได้คำตอบที่เร็วมาก แต่บางสถาบันอาจจะไม่ให้ใช้วิธีนี้ เพราะฉะนั้น วิธีนี้ถือเป็นวิธีที่ใช้ในการตรวจคำตอบ โดยหลักการมีอยู่ว่าให้หาอนุพันธ์ทั้งเศษและส่วนของฟังก์ชันที่จะหา \lim

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \quad \therefore \lim_{x \rightarrow k} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ มีค่าแน่ ๆ โดยหาจาก}$$

$$\lim_{x \rightarrow k} \frac{d[f(x)]/dt}{d[g(x)]/dt} \quad \{ \text{diff บนหารด้วย diff ล่าง} \} \text{ และถ้ายังออกมาเป็น } \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \text{ อีก ก็ให้}$$

diff บนหารด้วย diff ล่าง ไปเรื่อย ๆ จนกว่าจะได้คำตอบที่ไม่ใช่ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

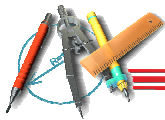
เช่น

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 8x - 9} \right] = \frac{(1)^3 + 2(1)^2 - 3}{(1)^2 + 8(1) - 9}$$

$$= \frac{1 + 2 - 3}{1 + 8 - 9}$$

$$= \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{ใช้วิธีที่ 3 } \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2 + 8x - 9} \right] &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{d[x^3 + 2x^2 - 3]/dt}{d[x^2 + 8x - 9]/dt} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{3x^2 + 4x}{2x + 8} \right] \\
&= \frac{3(1)^2 + 4(1)}{2(1) + 8} \\
&= \frac{7}{10}
\end{aligned}$$



การหาค่าของลิมิตอนันต์

ความหมายของการหาค่าของลิมิตอนันต์ ก็คือ การหาลิมิตของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $x \rightarrow \infty$ หรือ $x \rightarrow -\infty$ เขียนเป็นสัญลักษณ์ได้ว่า

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ หรือ } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

วิธีการหาค่าตอบของลิมิตอนันต์ก็ทำเหมือนกับการหาลิมิตของฟังก์ชันธรรมดา เพียงแต่แทนที่ x จะเข้าใกล้ค่าคงที่ค่าหนึ่งก็จะเปลี่ยนเข้าใกล้ ∞ แทน โดยที่คำตอบที่ได้ออกมาจะอยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$\infty \pm k = \infty$$

$$-\infty \pm k = -\infty$$

$$\infty \pm 0 = \infty$$

$$-\infty \pm 0 = -\infty$$

$$k \cdot \infty \begin{cases} = \infty; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } + \\ = \infty; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } - \end{cases}$$

$$k \cdot (-\infty) \begin{cases} = -\infty; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } + \\ = \infty; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } - \end{cases}$$

$$\frac{\infty}{k} \begin{cases} = \infty; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } + \\ = -\infty; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } - \end{cases}$$

$$-\frac{\infty}{k} \begin{cases} = -\infty; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } + \\ = \infty; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } - \end{cases}$$

$$\frac{k}{\infty} \begin{cases} = 0; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } + \\ = 0; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } - \end{cases}$$

$$\frac{k}{(-\infty)} \begin{cases} = 0; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } + \\ = 0; \text{ ถ้า } k \text{ เป็น } - \end{cases}$$

$$\infty^m \begin{cases} = \infty; \text{ ถ้า } m \text{ เป็น } + \text{ และเป็นเลขคู่} \\ = \infty; \text{ ถ้า } m \text{ เป็น } + \text{ และเป็นเลขคี่} \\ = 0; \text{ ถ้า } m \text{ เป็น } - \text{ และเป็นเลขคู่} \\ = 0; \text{ ถ้า } m \text{ เป็น } - \text{ และเป็นเลขคี่} \end{cases}$$

$$-\infty^m \begin{cases} = \infty; \text{ ถ้า } m \text{ เป็น } + \text{ และเป็นเลขคู่} \\ = -\infty; \text{ ถ้า } m \text{ เป็น } + \text{ และเป็นเลขคี่} \\ = 0; \text{ ถ้า } m \text{ เป็น } - \text{ และเป็นเลขคู่} \\ = 0; \text{ ถ้า } m \text{ เป็น } - \text{ และเป็นเลขคี่} \end{cases}$$

โดยที่ k = ค่าคงที่ใดๆ

m = จำนวนเต็ม