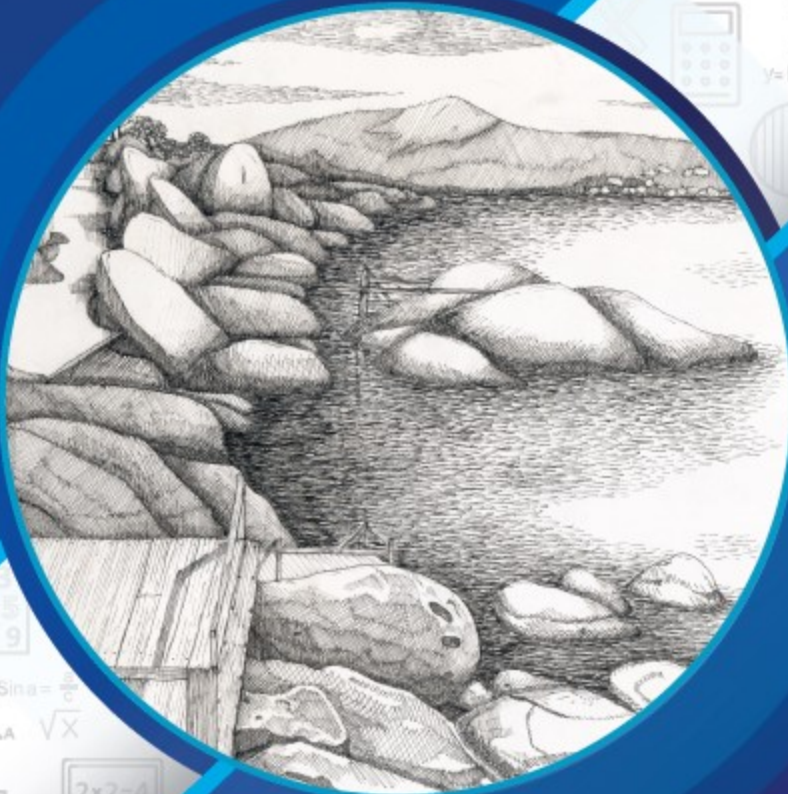


# แคลคูลัส

สำหรับธุรกิจและการบัญชี

Calculus for Business and Accountancy



กัปวัลย์ สันติวิภาณนท์  
รตน์นันท์ บุญเคสื้อบ

**แคลคูลัสสำหรับธุรกิจและการบัญชี**

ทิพวัลย์ สันติวิภาณนท์

รตินันท์ บุญเคลือบ

จัดพิมพ์โดย รตินันท์ บุญเคลือบ

พิมพ์ครั้งที่ 1 สิงหาคม พ.ศ. 2565  
สงวนลิขสิทธิ์

ISBN (E-book) 978-616-593-766-5

คุณงามความดีแลคุณานุประโยชน์ทั้งหลายอันเกิดจากหนังสือเล่มนี้ ขออุทิศทั้งลี้้นนั้น แต่

รองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี

น้อง และ เพื่อน ผู้จะอยู่ในใจของพวกเราตราบนานเท่านาน

## คำนำ

หนังสือแคลคูลัสสำหรับธุรกิจและการบัญชี (Calculus for business and accountancy) เป็นหนังสือที่ใช้ประกอบการเรียนการสอนรายวิชา 2301119 แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ สำหรับนิสิตคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี สาขาการบัญชี จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ซึ่งเป็นรายวิชา 4 หน่วยกิต เนื้อหาในเล่มประกอบด้วยแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์เบื้องต้น คณิตศาสตร์ในการเงินเบื้องต้น ลิมิต ความต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชันพื้นฐาน อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง การวิเคราะห์ค่าสุดขีด ปริพันธ์และเทคนิคการหาปริพันธ์ ตลอดจนปริพันธ์ไม่ตรงแบบของฟังก์ชันของตัวแปรเดียว อีกทั้งยังครอบคลุมอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของหลายตัวแปร ปัญหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันของสองตัวแปร สมการเชิงอนุพันธ์และสมการเชิงผลต่างเบื้องต้น ซึ่งเน้นการประยุกต์ในเชิงธุรกิจและเศรษฐศาสตร์ เช่น การวิเคราะห์เส้นความพอใจเท่ากันเพื่อให้ได้ความพอใจสูงสุด ความยืดหยุ่น การหารายได้สูงสุด การหาต้นทุนต่ำสุด การวิเคราะห์การผลิตโดยหลักว่าด้วยจำนวนหน่วยสุดท้าย ผลกระทบจากการเก็บภาษี การเปรียบเทียบอัตราการเปลี่ยนแปลง ส่วนเกินผู้บริโภคและส่วนเกินผู้ผลิต สินค้าที่ใช้ทดแทนกันและสินค้าที่ใช้ประกอบกัน ฟังก์ชันการผลิต การกำหนดราคาในหลายตลาด ตลอดจนสมการเชิงผลต่างที่ปรากฏในปัญหาทางคณิตศาสตร์การเงิน

นอกจากนี้เนื้อหาส่วนหนึ่งของหนังสือเล่มนี้เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันของตัวแปรเดียว ยังเหมาะกับการนำไปสอนรายวิชา 2301115 แคลคูลัสสำหรับธุรกิจ 1 สำหรับนิสิตคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชี สาขาอื่นๆ อีกด้วย คณะผู้เรียบเรียงเนื้อหาในหนังสือเล่มนี้ประกอบด้วย รองศาสตราจารย์ ทิพวัลย์ สันติวิธานนท์ และรองศาสตราจารย์ ดร.รตินันท์ บุญเคลือบ ผู้มีประสบการณ์การสอนรายวิชาแคลคูลัส และรายวิชาแคลคูลัสสำหรับธุรกิจให้กับนิสิตของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัยมาเป็นเวลานาน เราได้รวบรวม เรียบเรียง ปรับปรุง ตลอดจนเพิ่มเติมเนื้อหาจากหนังสือแคลคูลัสสำหรับธุรกิจ 1 ของศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี และแคลคูลัสสำหรับธุรกิจ 2 ของศาสตราจารย์ ดร.กฤษณะ เนียมมณี และรองศาสตราจารย์ ยุวรีย์ พันธุ์กล้า คณะผู้เรียบเรียงขอแสดงความขอบพระคุณอาจารย์ทั้งสองท่านมา ณ ที่นี้ด้วย นอกจากนี้ยังได้รับความกรุณาจากนิสิตเก่าของภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย อีกหลายรุ่น ได้แก่ ดร.นพดล กำนิจอุย นายอนุสรณ์ จันทรช่วย นายพิรพงศ์ ปัญญาสกุลวงศ์ และ ดร.อำพล ดวงแป้น ที่ช่วยพิมพ์ยกร่างหนังสือเล่มนี้ขึ้นมา อีกทั้งคณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ทุกท่านที่กรุณาใช้หนังสือเล่มนี้ตั้งแต่ยังเป็นเอกสารประกอบการสอนและให้คำแนะนำตลอดจนชี้ข้อผิดพลาดจนเอกสารนั้นกลายเป็นหนังสือเล่มนี้ คณะผู้เรียบเรียงขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี และนายณภวิชัย ญาณไพศาล ผู้ช่วยคณาจารย์สูงชันอักษรและบรรณาธิการหนังสือเล่มนี้ทั้งในแง่เนื้อหาและความถูกต้องสุดท้ายที่ลืมไม่ได้คือกำลังใจจากบุคคลรอบข้าง และภาพหน้าปกโดย นายณวิน สุเมธกิจกร

คณะผู้เรียบเรียงหวังเป็นอย่างยิ่งว่า หนังสือแคลคูลัสสำหรับธุรกิจและการบัญชี เล่มนี้จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนสำหรับนิสิต นักศึกษา นักเรียน และอาจารย์ผู้สอนในทุกสถาบัน หากมีข้อผิดพลาดประการใด คณะผู้เรียบเรียงขออภัยและขอน้อมรับฟังข้อวิพากษ์วิจารณ์ รวมทั้งพร้อมจะชี้แจงหรือแก้ไขให้ถูกต้องสมบูรณ์มากยิ่งขึ้น

ทิพวัลย์ สันติวิธานนท์

รตินันท์ บุญเคลือบ

# สารบัญ

|                                                             |    |
|-------------------------------------------------------------|----|
| สารบัญ                                                      | 1  |
| 1 แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์                                    | 7  |
| 1.1 บทนำ                                                    | 7  |
| 1.2 แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์                                  | 7  |
| 1.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง                                     | 13 |
| 1.4 ฟังก์ชันลอการิทึม                                       | 15 |
| 1.5 สรุปสาระประจําบท                                        | 19 |
| 2 คณิตศาสตร์ในการเงิน                                       | 21 |
| 2.1 บทนำ                                                    | 21 |
| 2.2 ลำดับของจำนวนจริง                                       | 21 |
| 2.3 อนุกรมของจำนวนจริง                                      | 24 |
| 2.4 ดอกเบี้ย                                                | 24 |
| 2.4.1 ดอกเบี้ยเชิงเดียว                                     | 25 |
| 2.4.2 ดอกเบี้ยทบต้น                                         | 28 |
| 2.4.3 ดอกเบี้ยทบต้นแบบต่อเนื่อง                             | 37 |
| 2.5 คํารายปี                                                | 43 |
| 2.5.1 เงินรวมจากคํารายปีที่คิดดอกเบี้ยทบต้น                 | 43 |
| 2.5.2 เงินต้นหรือเงินปัจจุบันจากคํารายปีที่คิดดอกเบี้ยทบต้น | 46 |
| 2.6 สรุปสาระประจําบท                                        | 53 |

|          |                                                  |            |
|----------|--------------------------------------------------|------------|
| 2.7      | แบบฝึกหัดท้ายบท                                  | 54         |
| <b>3</b> | <b>ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน</b>          | <b>57</b>  |
| 3.1      | บทนำ                                             | 57         |
| 3.2      | ความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน                      | 57         |
| 3.3      | ทฤษฎีบทลิมิต                                     | 61         |
| 3.4      | ลิมิตค่าอนันต์และลิมิตที่ค่าอนันต์               | 66         |
| 3.5      | ตัวอย่างลิมิตที่เกี่ยวข้องกับธุรกิจ              | 71         |
| 3.6      | ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน                         | 73         |
| 3.7      | สรุปสาระประจำบท                                  | 81         |
| 3.8      | แบบฝึกหัดท้ายบท                                  | 82         |
| <b>4</b> | <b>อนุพันธ์ของฟังก์ชัน</b>                       | <b>85</b>  |
| 4.1      | บทนำ                                             | 85         |
| 4.2      | ความหมายของอนุพันธ์                              | 85         |
| 4.3      | ความสัมพันธ์ระหว่างความต่อเนื่องและการมีอนุพันธ์ | 89         |
| 4.4      | สูตรการหาอนุพันธ์ และอนุพันธ์บนช่วง              | 92         |
| 4.5      | กฎลูกโซ่                                         | 97         |
| 4.6      | อนุพันธ์อันดับสูง                                | 103        |
| 4.7      | การหาอนุพันธ์โดยปริยาย                           | 106        |
| 4.8      | การประยุกต์ใช้อนุพันธ์ของฟังก์ชัน                | 109        |
| 4.8.1    | การวิเคราะห์เส้นความพอใจเท่ากันและเส้นงบประมาณ   | 109        |
| 4.8.2    | ความยืดหยุ่น                                     | 114        |
| 4.9      | สรุปสาระประจำบท                                  | 120        |
| 4.10     | แบบฝึกหัดท้ายบท                                  | 121        |
| <b>5</b> | <b>การวิเคราะห์ค่าสุดขีด</b>                     | <b>123</b> |
| 5.1      | บทนำ                                             | 123        |
| 5.2      | ค่าสุดขีด                                        | 123        |
| 5.3      | ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับอนุพันธ์และการประยุกต์     | 133        |
| 5.3.1    | ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสำหรับอนุพันธ์                   | 133        |
| 5.3.2    | ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด                       | 134        |
| 5.3.3    | การหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์                           | 139        |
| 5.4      | ความเว้าของเส้นโค้งและการเขียนกราฟของเส้นโค้ง    | 142        |
| 5.4.1    | ความเว้าของเส้นโค้ง                              | 142        |
| 5.4.2    | การเขียนกราฟของเส้นโค้ง                          | 145        |

|          |                                                                                       |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.5      | การหารายได้สูงสุดและต้นทุนการผลิตต่ำสุด . . . . .                                     | 150        |
| 5.6      | การวิเคราะห์การผลิตโดยหลักกว่าด้วยจำนวนหน่วยสุดท้าย . . . . .                         | 154        |
| 5.7      | ผลกระทบจากการเก็บภาษี . . . . .                                                       | 157        |
| 5.7.1    | ผลกระทบจากการเก็บภาษีต่อดุลยภาพของตลาด . . . . .                                      | 157        |
| 5.7.2    | การเก็บภาษีที่ทำให้เกิดรายได้สูงสุดต่อผู้เก็บภาษี . . . . .                           | 158        |
| 5.7.3    | ผลกระทบจากการเก็บภาษีต่อรายได้ของผู้ผลิต . . . . .                                    | 159        |
| 5.8      | สรุปสาระประจําบท . . . . .                                                            | 162        |
| 5.9      | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                                                             | 163        |
| <b>6</b> | <b>อนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง</b>                             | <b>167</b> |
| 6.1      | บทนํ้า . . . . .                                                                      | 167        |
| 6.2      | สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง . . . . .                 | 167        |
| 6.2.1    | สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม . . . . .                                       | 167        |
| 6.2.2    | สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเลขชี้กำลัง . . . . .                                     | 173        |
| 6.3      | ตัวอย่างทางธุรกิจของฟังก์ชันเลขชี้กำลังและฟังก์ชันลอการิทึม . . . . .                 | 177        |
| 6.3.1    | การหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด . . . . .                                                  | 177        |
| 6.3.2    | การเปรียบเทียบอัตราการเปลี่ยนแปลง . . . . .                                           | 180        |
| 6.3.3    | เส้นความพอใจเท่ากันที่อยู่ในรูปฟังก์ชันลอการิทึม . . . . .                            | 183        |
| 6.4      | รูปแบบไม่กำหนดและกฎของโลปีตาล . . . . .                                               | 185        |
| 6.5      | สรุปสาระประจําบท . . . . .                                                            | 193        |
| 6.6      | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                                                             | 194        |
| <b>7</b> | <b>ปริพันธ์</b>                                                                       | <b>197</b> |
| 7.1      | บทนํ้า . . . . .                                                                      | 197        |
| 7.2      | ปฏิยานุพันธ์และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต . . . . .                                         | 197        |
| 7.3      | การอินทิเกรตโดยการเปลี่ยนตัวแปร . . . . .                                             | 204        |
| 7.4      | อินทิกรัลจำกัดเขต . . . . .                                                           | 208        |
| 7.4.1    | ความหมายของอินทิกรัลจำกัดเขต . . . . .                                                | 208        |
| 7.4.2    | ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอินทิกรัลจำกัดเขต . . . . .                                           | 212        |
| 7.5      | การอินทิเกรตฟังก์ชันเลขชี้กำลังและการอินทิเกรตที่อยู่ในรูปฟังก์ชันลอการิทึม . . . . . | 218        |
| 7.5.1    | การอินทิเกรตฟังก์ชันเลขชี้กำลัง . . . . .                                             | 218        |
| 7.5.2    | การอินทิเกรตที่อยู่ในรูปฟังก์ชันลอการิทึม . . . . .                                   | 220        |
| 7.6      | พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง . . . . .                                                      | 224        |
| 7.7      | ส่วนเกินผู้บริโภคและส่วนเกินผู้ผลิต . . . . .                                         | 237        |
| 7.7.1    | ส่วนเกินผู้บริโภค . . . . .                                                           | 237        |
| 7.7.2    | ส่วนเกินผู้ผลิต . . . . .                                                             | 239        |

|           |                                                        |            |
|-----------|--------------------------------------------------------|------------|
| 7.8       | สรุปสาระประจำบท . . . . .                              | 242        |
| 7.9       | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                              | 243        |
| <b>8</b>  | <b>เทคนิคการอินทิเกรต . . . . .</b>                    | <b>247</b> |
| 8.1       | บทนำ . . . . .                                         | 247        |
| 8.2       | การอินทิเกรตทีละส่วน . . . . .                         | 247        |
| 8.3       | การอินทิเกรตโดยการแยกเศษส่วนย่อย . . . . .             | 253        |
| 8.4       | สรุปสาระประจำบท . . . . .                              | 261        |
| 8.5       | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                              | 262        |
| <b>9</b>  | <b>ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ . . . . .</b>                     | <b>263</b> |
| 9.1       | บทนำ . . . . .                                         | 263        |
| 9.2       | อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่หนึ่ง . . . . .               | 263        |
| 9.3       | อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดที่สอง . . . . .                 | 269        |
| 9.4       | อินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดผสม . . . . .                    | 273        |
| 9.5       | การประยุกต์อินทิกรัลไม่ตรงแบบ . . . . .                | 275        |
| 9.5.1     | การหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ไม่มีขอบเขต . . . . .      | 275        |
| 9.5.2     | ตัวอย่างปัญหาทางธุรกิจ . . . . .                       | 278        |
| 9.6       | สรุปสาระประจำบท . . . . .                              | 281        |
| 9.7       | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                              | 282        |
| <b>10</b> | <b>ฟังก์ชันของหลายตัวแปร . . . . .</b>                 | <b>283</b> |
| 10.1      | บทนำ . . . . .                                         | 283        |
| 10.2      | ฟังก์ชันของหลายตัวแปร . . . . .                        | 283        |
| 10.3      | อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันของสองตัวแปร . . . . .          | 288        |
| 10.4      | กฎลูกโซ่ . . . . .                                     | 292        |
| 10.5      | อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย . . . . .     | 297        |
| 10.6      | อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง . . . . .                        | 300        |
| 10.7      | ค่าเชิงอนุพันธ์รวม . . . . .                           | 303        |
| 10.8      | สินค้าที่ใช้ทดแทนกันและสินค้าที่ใช้ประกอบกัน . . . . . | 306        |
| 10.9      | ฟังก์ชันการผลิต . . . . .                              | 310        |
| 10.9.1    | ผลิตภัณฑ์เฉลี่ยและผลิตภัณฑ์หน่วยสุดท้าย . . . . .      | 312        |
| 10.9.2    | เส้นแสดงผลผลิตเท่ากันและอัตราทดแทนทางเทคนิค . . . . .  | 314        |
| 10.10     | สรุปสาระประจำบท . . . . .                              | 319        |
| 10.11     | แบบฝึกหัดท้ายบท . . . . .                              | 321        |

|                                                                                                                 |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>11 ปัญหาค่าสุดขีดของฟังก์ชันของสองตัวแปร</b>                                                                 | <b>323</b> |
| 11.1 บทนำ                                                                                                       | 323        |
| 11.2 ค่าสุดขีดของฟังก์ชันของสองตัวแปร                                                                           | 323        |
| 11.3 ค่าสุดขีดของฟังก์ชันของสองตัวแปรภายใต้เงื่อนไขบังคับ                                                       | 333        |
| 11.3.1 วิธีของลากรองจ์                                                                                          | 333        |
| 11.3.2 วิธีแบบคุห์น-ทักเกอร์                                                                                    | 336        |
| 11.4 การหารายได้สูงสุดและต้นทุนการผลิตต่ำสุด                                                                    | 338        |
| 11.5 การกำหนดราคาสินค้าในหลายตลาด                                                                               | 342        |
| 11.6 การแสวงหาความพอใจสูงสุด                                                                                    | 345        |
| 11.7 สรุปสาระประจำบท                                                                                            | 347        |
| 11.8 แบบฝึกหัดท้ายบท                                                                                            | 348        |
| <b>12 สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น</b>                                                                            | <b>351</b> |
| 12.1 บทนำ                                                                                                       | 351        |
| 12.2 สมการเชิงอนุพันธ์                                                                                          | 351        |
| 12.3 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกตัวแปรได้                                                                           | 353        |
| 12.4 สมการเอกพันธ์                                                                                              | 356        |
| 12.5 สมการเชิงผลต่าง                                                                                            | 360        |
| 12.6 การประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์                                                                               | 365        |
| 12.6.1 สมการเชิงอนุพันธ์ในรูป $f'(t) = kf(t)$ โดยที่ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา $t$ และ $k$ เป็นค่าคงตัว | 366        |
| 12.6.2 แบบจำลองทางธุรกิจที่อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์                                                           | 368        |
| 12.7 การประยุกต์สมการเชิงผลต่าง                                                                                 | 373        |
| 12.8 สรุปสาระประจำบท                                                                                            | 379        |
| 12.9 แบบฝึกหัดท้ายบท                                                                                            | 380        |
| <b>บรรณานุกรม</b>                                                                                               | <b>383</b> |



บทที่

1

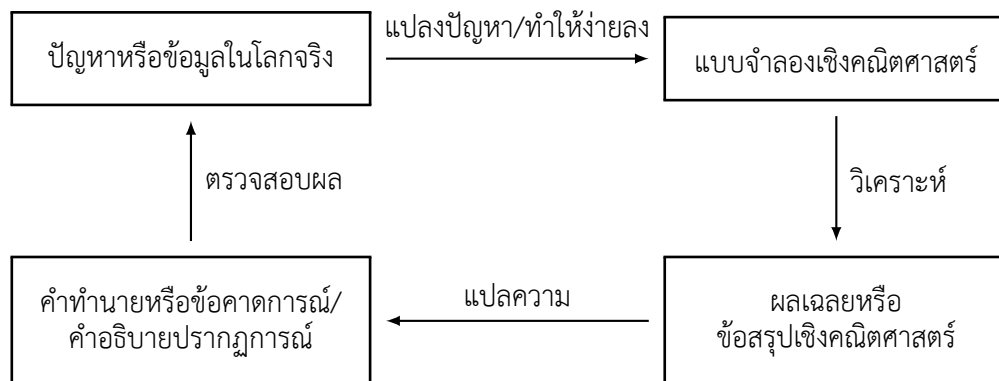
## แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Models)

### 1.1 บทนำ

ปัญหาต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับธุรกิจ การเงิน เศรษฐศาสตร์ หรือแม้แต่สังคมศาสตร์ มักมีความยุ่งยากซับซ้อน และมีปัจจัยหรือตัวแปรต่าง ๆ เข้ามาเกี่ยวข้องมากมาย อีกทั้งมีการใช้ภาษา และคำศัพท์ต่าง ๆ ในบริบทของปัญหาแตกต่างกันไปตามสาขาวิชาที่ปัญหานั้น ๆ เกี่ยวข้อง อย่างไรก็ตามหากสามารถเปลี่ยนปัญหาเหล่านี้ให้เป็นภาษาทางคณิตศาสตร์ ปัญหาทั้งหลายที่ดูแตกต่างกัน อาจกลายเป็นปัญหาในกลุ่มเดียวกัน และใช้องค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ประเภทเดียวกันมาแก้ปัญหาอย่างเป็นขั้นตอนได้

### 1.2 แบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Models)

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญในการแปลงปัญหาในโลกจริงให้เป็นแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ และใช้ทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่มีอยู่ หรือสร้างสรรค์ทฤษฎีบทใหม่ ๆ ขึ้นมาใช้ในการวิเคราะห์หาข้อสรุป หรือผลเฉลยของปัญหาเพื่อนำไปสู่การแปลความหมายของข้อสรุปหรือผลเฉลยนั้น ๆ ในบริบทที่ต่างกันไป ข้อสรุปหรือผลเฉลยที่ได้รับการแปลความแล้วนั้นจะใช้ทำนาย หรือคาดการณ์เหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้น และนำไปสู่การตรวจสอบผลการคาดการณ์นั้น ๆ กับเหตุการณ์ในโลกจริงเพื่อปรับปรุงแบบจำลองให้เหมาะสมยิ่งขึ้น ขั้นตอนการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์จากปัญหาในโลกจริงดังที่กล่าวมาข้างต้น สามารถอธิบายได้โดยแผนภาพต่อไปนี้



รูปที่ 1.1: แผนภาพแสดงขั้นตอนการแก้ปัญหาในโลกจริงโดยการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์

เครื่องมือทางคณิตศาสตร์ชิ้นหนึ่งที่สำคัญในการแปลงปัญหาให้เป็นแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์คือ ฟังก์ชัน

**บทนิยาม 1.2.1 ฟังก์ชัน (function)** คือ การจับคู่ระหว่างสมาชิกในเซต  $A$  และ เซต  $B$  ภายใต้กฎเกณฑ์บางอย่าง โดยมีเงื่อนไขว่าสมาชิกแต่ละตัวในเซต  $A$  จะจับคู่กับสมาชิกในเซต  $B$  ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ถ้ากฎเกณฑ์ข้างต้น เรียกว่า  $f$  จะใช้สัญลักษณ์  $f: A \rightarrow B$  แทน  $f$  เป็นฟังก์ชันจากเซต  $A$  ไปยังเซต  $B$  โดยเรียกเซต  $A$  ว่าเป็น โดเมน (domain) ของ  $f$  ( $\text{Dom}(f)$ ) และเรียกเซตของสมาชิกในเซต  $B$  ที่มีสมาชิกในเซต  $A$  มาจับคู่ด้วยว่า พิสัย (range) ของ  $f$  ( $\text{Ran}(f)$ )

นอกจากนี้หาก  $x \in A$  จับคู่กับ  $y \in B$  ด้วยฟังก์ชัน  $f$  จะเขียนแทนด้วย  $(x, y) \in f$  เมื่อ  $y = f(x)$  หรือเขียนสั้น ๆ เป็น  $y = f(x)$

**ตัวอย่าง 1.1** (i) ฟังก์ชัน  $f(x) = x^2$  มี  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  และ  $\text{Ran}(f) = \{0\} \cup \mathbb{R}^+$

(ii) ฟังก์ชัน  $g(x) = 3x + 4$  มี  $\text{Dom}(g) = \mathbb{R}$  และ  $\text{Ran}(g) = \mathbb{R}$  □

จากตัวอย่างข้างต้น  $f(x) = x^2$  ส่ง  $-2 \in \mathbb{R}$  ไปจับคู่กับ  $4 \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$  และ  $f$  ส่ง  $2 \in \mathbb{R}$  ไปจับคู่กับ  $4 \in \{0\} \cup \mathbb{R}^+$  จะเห็นว่า  $-2$  และ  $2$  จะจับคู่กับ  $4$  เพียงตัวเดียวเท่านั้น  $-2$  และ  $2$  ไม่ได้จับคู่กับสมาชิกตัวอื่น ๆ ใน  $\text{Ran}(f)$  อีกเลย ด้วยเหตุผลเดียวกันสมาชิก  $x$  อื่น ๆ ใน  $\text{Dom}(f)$  จับคู่กับ  $y$  เพียงตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้น  $f$  ในตัวอย่าง 1.1(i) จึงสอดคล้องเงื่อนไขการเป็นฟังก์ชันใน บทนิยาม 1.2.1 ในทำนองเดียวกัน  $g$  เป็นฟังก์ชัน เพราะส่ง  $x \in \mathbb{R}$  ไปจับคู่กับ  $3x + 4$  เพียงตัวเดียวเท่านั้น ยิ่งกว่าไปนั้น สมาชิก  $y$  แต่ละตัวใน  $\text{Ran}(g)$  จะจับคู่กับ  $x$  เพียงตัวเดียวเท่านั้นด้วย นั่นคือ  $x = \frac{y-4}{3}$  ในกรณีเช่นนี้จะกล่าวว่า  $g$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (1-1)

**บทนิยาม 1.2.2** ฟังก์ชัน  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือ ฟังก์ชัน 1-1 (one-to-one function) บน  $\text{Dom}(f)$  ถ้า  $f(x_1) \neq f(x_2)$  เมื่อ  $x_1 \neq x_2$  ทุก  $x_1, x_2 \in \text{Dom}(f)$

**ตัวอย่าง 1.2** ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(i)  $f(x) = x^3$

(ii)  $g(x) = \sqrt{x}$

(iii)  $h(x) = \frac{1}{2}x + 3$  ☐

**ตัวอย่าง 1.3** ฟังก์ชัน  $f(x) = x^2$  ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบน  $\mathbb{R}$

เพราะ  $-2 \neq 2$  แต่  $f(-2) = 4 = f(2)$  ☐

ต่อไปเราจะให้ตัวอย่างฟังก์ชันที่สำคัญ ซึ่งจะพบมากในตัวอย่างการประยุกต์ต่าง ๆ

**ตัวอย่าง 1.4** (i) ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) อยู่ในรูป

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนนับหรือศูนย์ และ  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0$  เป็นจำนวนจริง

ถ้า  $n = 0$  จะเรียกว่า ฟังก์ชันคงตัว (constant function) และถ้า  $n = 1$  จะเรียกว่า ฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function)

(ii) ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function) อยู่ในรูป  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  เมื่อ  $P(x)$  และ  $Q(x)$  เป็นฟังก์ชันพหุนามที่  $Q(x) \neq 0$

(iii) ฟังก์ชันค่าสัมบูรณ์ (absolute value function) อยู่ในรูป  $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ x & ; x \geq 0 \end{cases}$

(iv) ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function) อยู่ในรูป  $f(x) = a^x$  เมื่อ  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  และ  $x \in \mathbb{R}$

(v) ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function) อยู่ในรูป  $f(x) = \log_a x$  เมื่อ  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  และ  $x > 0$  ☐

สำหรับฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึมจะได้กล่าวถึงโดยละเอียดในหัวข้อถัดไป

**ตัวอย่าง 1.5** ในการผลิตสบู่อชนิดหนึ่งไม่ว่าจะกี่ก้อนก็ตาม ต้องซื้อเครื่องจักรในราคา 100,000 บาท โดยวัตถุดิบในการผลิตมีมูลค่า 15 บาทต่อก้อน จะได้ว่าถ้าต้องการผลิตสบู่อ  $x$  ก้อน จะต้องใช้ต้นทุนในการผลิต  $C(x)$  บาท เมื่อ  $C(x) = \text{ราคาเครื่องจักร} + \text{ราคาวัตถุดิบ} = 100000 + 15x$  บาท ☐

**ตัวอย่าง 1.6** ในการคิดค่าบริการโทรศัพท์มือถือเครือข่ายหนึ่ง กำหนดค่าบริการเหมาจ่าย 599 บาทต่อเดือนในกรณีที่ใช้โทรศัพท์ไม่เกิน 400 นาที และสำหรับนาทีที่เกิน 400 ขึ้นไปจะคิดอัตรานาทีละ 1 บาท 50 สตางค์ (ไม่ปัดเศษของนาที) จะได้ว่าถ้าให้  $t$  เป็นเวลาในหน่วยนาทีทั้งหมดที่ใช้โทรศัพท์มือถือในหนึ่งเดือน แล้วค่าบริการ  $f(t)$  ที่ต้องจ่ายในหนึ่งเดือน จะอยู่ในรูป

$$f(t) = \begin{cases} 599 & ; 0 \leq t \leq 400 \\ 599 + 1.5(t - 400) & ; t > 400 \end{cases}$$

เรียก ฟังก์ชันลักษณะเช่นนี้ว่าฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง (piecewise-defined function) □

**ชวนคิด** ในความเป็นจริงบริษัทที่ให้บริการเครือข่ายจะคิดค่าบริการของนาที โดยคิดเศษของนาทีเป็นหนึ่งนาที ดังนั้นค่าบริการที่ต้องจ่ายในหนึ่งเดือนจะอยู่ในรูปใด

ในการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์โดยอาศัยฟังก์ชันอาจมีการสร้างฟังก์ชันใหม่ขึ้นจากฟังก์ชันเดิมดังเช่นบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 1.2.3** พีชคณิตของฟังก์ชัน (algebra of functions) คือ การดำเนินการ  $+$ ,  $-$ ,  $\times$  และ  $\div$  ระหว่างฟังก์ชันสองฟังก์ชัน นิยามโดย ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชัน

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ เมื่อ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \text{ เมื่อ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \text{ เมื่อ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ เมื่อ } x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \text{ และ } g(x) \neq 0$$

**ตัวอย่าง 1.7** ตัวอย่างของฟังก์ชันที่ใช้ในทางธุรกิจและเศรษฐศาสตร์ ซึ่งฟังก์ชันบางฟังก์ชันสร้างขึ้นโดยอาศัยพีชคณิตของฟังก์ชันอื่น ๆ ที่นิยามมาก่อนหน้า

- (i) ฟังก์ชันอุปสงค์ (demand function)  $D(x)$  สำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง คือ ราคาขาย  $p = D(x)$  ของสินค้าแต่ละชิ้นถ้าต้องการขายสินค้าทั้งสิ้น  $x$  ชิ้น
- (ii) ฟังก์ชันอุปทาน (supply function)  $S(x)$  สำหรับสินค้าชนิดหนึ่ง คือ ราคาต่อหน่วย  $p = S(x)$  ที่ผู้ผลิตเต็มใจจะผลิตสินค้า  $x$  ชิ้นออกสู่ตลาด
- (iii) ฟังก์ชันรายได้ (revenue function)  $R(x)$  จากการขายสินค้า  $x$  ชิ้นคำนวณจาก

$$R(x) = \text{จำนวนสินค้าที่ขาย} \times \text{ราคาสินค้าต่อชิ้น} = x \cdot p$$

- (iv) ฟังก์ชันต้นทุน (cost function)  $C(x)$  คือ ต้นทุนที่ใช้ในการผลิตสินค้า  $x$  ชิ้น

- (v) ฟังก์ชันกำไร (profit function)  $P(x)$  คือ กำไรที่ได้จากการขายสินค้า  $x$  ชิ้น สามารถคำนวณได้จาก

$$\begin{aligned} P(x) &= \text{ฟังก์ชันรายได้} - \text{ฟังก์ชันต้นทุน} \\ &= R(x) - C(x) \\ &= x \cdot p - C(x) \end{aligned}$$

- (vi) ฟังก์ชันต้นทุนเฉลี่ย (average cost function)  $AC(x) = \frac{C(x)}{x}$   
 ฟังก์ชันรายได้เฉลี่ย (average revenue function)  $AR(x) = \frac{R(x)}{x}$  และ  
 ฟังก์ชันกำไรเฉลี่ย (average profit function)  $AP(x) = \frac{P(x)}{x}$  □

**ชวนคิด** ฟังก์ชันอุปสงค์และฟังก์ชันอุปทานมีความสัมพันธ์กันหรือไม่อย่างไร

**ตัวอย่าง 1.8** จากตัวอย่าง 1.5 หากขายสบู่ดังกล่าวก้อนละ 25 บาท จะได้ว่าสบู่จำนวน  $x$  ก้อน ทำรายได้ให้แก่บริษัท  $R(x) = 25x$  บาท และทำกำไรให้แก่บริษัท

$$P(x) = 25x - (100000 + 15x) = 10x - 100000$$
 □

**ชวนคิด** ในภาวะเช่นนี้บริษัทต้องขายสบู่ให้ได้อย่างน้อยกี่ก้อนจึงจะถือว่าได้กำไรอย่างแท้จริง

**ตัวอย่าง 1.9** จากการศึกษาพบว่าผู้บริโภคจะซื้อสินค้า  $x$  หน่วย (พันชิ้น) เมื่อราคาต่อหน่วยอยู่ในรูป  $p(x) = -0.27x + 51$  พันบาท และ ต้นทุนในการผลิตสินค้าชนิดนี้  $x$  หน่วย (พันชิ้น) อยู่ในรูป  $C(x) = 2.23x^2 + 3.5x + 85$  พันบาท จะได้ว่า

- (i) ต้นทุนเฉลี่ยในการผลิตสินค้า 5,000 ชิ้น เท่ากับ

$$\frac{C(5)}{5} = \frac{2.23(5)^2 + 3.5(5) + 85}{5} = 31.65 \text{ พันบาทต่อพันชิ้น} = 31,650 \text{ บาทต่อพันชิ้น}$$

- (ii) รายได้อยู่ในรูป  $R(x) = x \cdot p(x) = -0.27x^2 + 51x$  พันบาท และ กำไรอยู่ในรูป  
 $P(x) = (-0.27x^2 + 51x) - (2.23x^2 + 3.5x + 85) = -2.5x^2 + 47.5x - 85$  พันบาท

- (iii) สังเกตว่า  $P(x) = -2.5x^2 + 47.5x - 85 = -2.5(x-2)(x-17)$   
 ดังนั้น  $P(x) > 0$  ก็ต่อเมื่อ  $2 < x < 17$  นั่นคือบริษัทจะได้กำไรอย่างแท้จริงเมื่อขายสินค้าได้ระหว่าง 2,000 และ 17,000 ชิ้น □

**ชวนคิด** ในภาวะเช่นนี้กำไรสูงสุดที่บริษัทได้รับเป็นเท่าใด

นอกจากฟังก์ชันของฟังก์ชันแล้ว ยังมีการดำเนินการของฟังก์ชันอีกรูปแบบหนึ่ง ที่สร้างฟังก์ชันใหม่ขึ้นจากฟังก์ชันเดิมที่ได้นิยามไว้ ดังบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 1.2.4** กำหนดให้  $f(u)$  และ  $g(x)$  เป็นฟังก์ชัน  
จะได้ว่าฟังก์ชันประกอบ (composite function)  $f(g(x))$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ที่คำนวณโดยแทน  $u = g(x)$  ลงใน  $u$  ที่อยู่ในสูตรของ  $f(u)$

**ตัวอย่าง 1.10** หากทราบว่าอัตราแลกเปลี่ยนเงินตราอยู่ที่ 1 เหรียญสหรัฐ ต่อ 30.05 บาท จะได้ว่าสำหรับเงิน  $u$  บาท จะแลกเปลี่ยนเป็น  $f(u) = \frac{u}{30.05}$  เหรียญสหรัฐ ดังนั้นจากตัวอย่าง 1.5 จะได้ว่านักลงทุนชาวสหรัฐอเมริกาต้องเตรียมเงินทุนสำหรับผลิตสบู่อจำนวน  $x$  ก้อนในรูป

$$C_{US} = f(C(x)) = f(100000 + 15x) = \frac{100000 + 15x}{30.05} \text{ เหรียญสหรัฐ} \quad \square$$

ต่อมาหากพิจารณาเฉพาะฟังก์ชัน  $f: A \rightarrow B$  ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า สามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ได้จากฟังก์ชันเดิมด้วยการกลับทิศทางการจับคู่ โดยสลับบทบาทให้ตัวหน้าเป็นสมาชิกในเซต  $B$  และตัวหลังเป็นสมาชิกในเซต  $A$  ที่เคยจับคู่กันด้วยฟังก์ชัน  $f$  มาก่อน จะทำให้เกิดฟังก์ชันใหม่ ดังบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม 1.2.5** สมมติให้  $f: A \rightarrow B$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นิยามฟังก์ชันผกผัน (inverse function)  $f^{-1}$  โดย

$$f^{-1}(a) = b \text{ ถ้า } f(b) = a$$

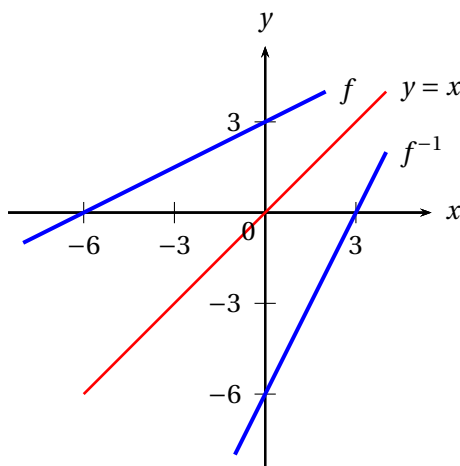
ดังนั้น  $\text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f)$  และ  $\text{Ran}(f^{-1}) = A = \text{Dom}(f)$

**ชวนคิด** เหตุใด  $f^{-1}$  จึงเป็นฟังก์ชัน

**ตัวอย่าง 1.11** ฟังก์ชัน  $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ที่มี  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$  และ  $\text{Ran}(f) = \mathbb{R}$  จะได้ว่า จาก

$$\begin{aligned} y &= f(x) = \frac{1}{2}x + 3 \\ y - 3 &= \frac{1}{2}x \\ x &= 2y - 6 \end{aligned}$$

นั่นคือ  $x = f^{-1}(y) = 2y - 6$  หรือ  $f^{-1}(x) = 2x - 6$

รูปที่ 1.2: กราฟของฟังก์ชัน  $f$  และ  $f^{-1}$  ในตัวอย่าง 1.11

**หมายเหตุ** จากบทนิยามของฟังก์ชันผกผัน ทำให้ได้ว่า

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x \quad \text{ทุก } x \in \text{Dom}(f)$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y \quad \text{ทุก } y \in \text{Dom}(f^{-1}) = \text{Ran}(f)$$

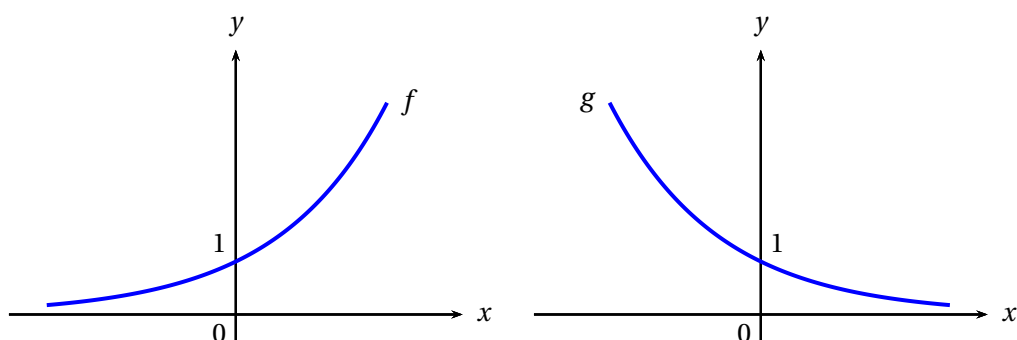
ซึ่งสมบัติทั้งสองนี้มีประโยชน์อย่างยิ่งในการแก้สมการและอสมการ

### 1.3 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (Exponential Function)

**บทนิยาม 1.3.1** ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ที่  $a \neq 1$  จะเรียกฟังก์ชัน  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ที่กำหนดโดย  $f(x) = a^x$  ว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential function) ทั้งนี้จะเรียก  $a$  ว่าฐาน (base) และเรียก  $x$  ว่าเลขชี้กำลัง (exponent)

**หมายเหตุ** หาก  $a = e$  ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะที่มีค่าประมาณ 2.718 แล้วจะเรียก  $f(x) = e^x$  ว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังฐานธรรมชาติ

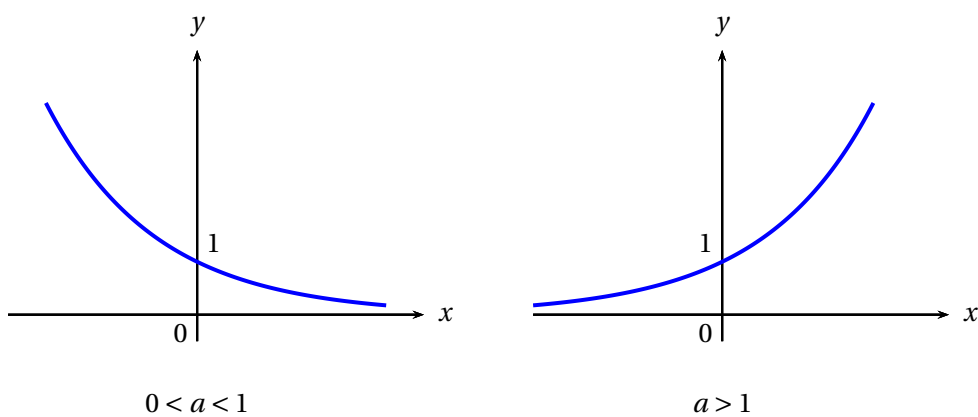
**ตัวอย่าง 1.12**  $f(x) = 2^x$  และ  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง ที่มีกราฟดังรูปต่อไปนี้



□

**ชวนคิด**เหตุใด  $a$  จึงต้องเป็นจำนวนจริงบวกและ  $a \neq 1$ **สมบัติที่สำคัญ**

1. กราฟของฟังก์ชันเลขชี้กำลังแบ่งเป็น 2 ลักษณะโดยใช้อู่ฐานเป็นเกณฑ์



2. จากกราฟจะได้ว่าฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น  $\mathbb{R}$  มีพิสัยเป็น  $(0, \infty)$  และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งทำให้ได้ว่า  $a^x = a^y$  ก็ต่อเมื่อ  $x = y$
3. ในกรณีที่  $0 < a < 1$  ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ  $a^x < a^y$  ก็ต่อเมื่อ  $x > y$   
 ในกรณีที่  $a > 1$  ฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ  $a^x < a^y$  ก็ต่อเมื่อ  $x < y$

**ทฤษฎีบท 1.3.2** ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ซึ่ง  $a \neq 1$  จะได้ว่า สำหรับจำนวนจริง  $x$  และ  $y$  ใด ๆ

$$1. a^0 = 1$$

$$2. a^{x+y} = a^x \cdot a^y$$

$$3. a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$4. a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$5. (a^x)^y = a^{xy}$$

**ตัวอย่าง 1.13** จงหาค่า  $x$  ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ  $\frac{2^{3x} \cdot 2^2}{2^{x-1}} = 16$

**วิธีทำ.** จาก  $2^{2x+3} = 2^{(3x+2)-(x-1)} = \frac{2^{3x} \cdot 2^2}{2^{x-1}} = 16 = 2^4$

จะได้ว่า  $2x+3=4$

นั่นคือ  $x = \frac{1}{2}$  เป็นค่า  $x$  ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการข้างต้น □

## 1.4 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function)

**บทนิยาม 1.4.1** ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวกที่  $a \neq 1$  และ  $f(x) = a^x$  เป็นฟังก์ชันเลขชี้กำลัง จะเรียก  $g(x) = f^{-1}(x)$  ว่าฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic function) กำหนดโดย  $g(x) = \log_a x$  นั่นคือ

$$a^y = x \text{ ก็ต่อเมื่อ } y = \log_a x$$

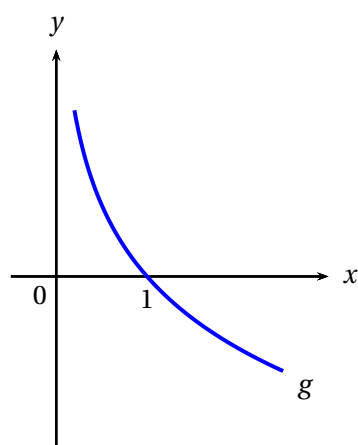
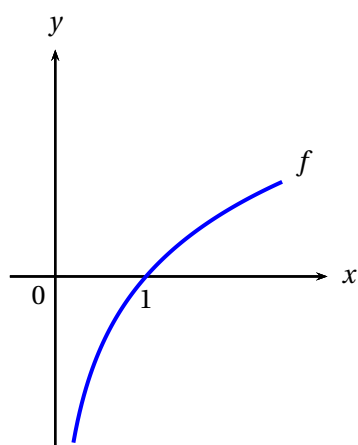
โดยเรียก  $a$  ว่าฐาน และ  $x$  ว่าเลขหลังลอการิทึม

**หมายเหตุ**

(i) หาก  $a = 10$  จะเขียน  $\log x$  แทน  $\log_{10} x$  และเรียกว่า ลอการิทึมสามัญ (common logarithm)

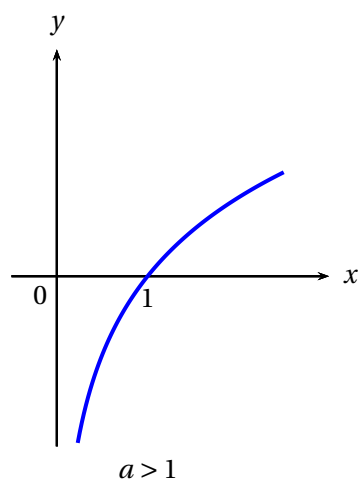
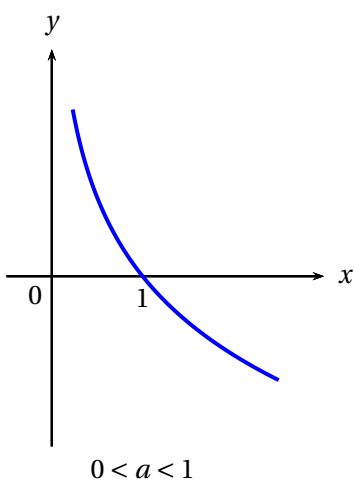
(ii) หาก  $a = e$  จะเขียน  $\ln x$  แทน  $\log_e x$  และเรียกว่า ลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm)

**ตัวอย่าง 1.14**  $f(x) = \log_3 x$  และ  $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$  เป็นฟังก์ชันลอการิทึม ที่มีกราฟดังรูปต่อไปนี้



### สมบัติที่สำคัญ

1. กราฟของฟังก์ชันลอการิทึม แบ่งเป็น 2 ลักษณะ โดยใช้ฐานเป็นเกณฑ์



2. จากกราฟจะได้ว่าฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น  $(0, \infty)$  มีพิสัยเป็น  $\mathbb{R}$  และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งทำให้ได้ว่า  $\log_a x = \log_a y$  ก็ต่อเมื่อ  $x = y$  และ  $x > 0$  และ  $y > 0$
3. ในกรณีที่  $0 < a < 1$  ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันลด นั่นคือ

$$\log_a x < \log_a y \text{ ก็ต่อเมื่อ } x > y > 0$$

ในกรณีที่  $a > 1$  ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันเพิ่ม นั่นคือ

$$\log_a x < \log_a y \text{ ก็ต่อเมื่อ } 0 < x < y$$

**ทฤษฎีบท 1.4.2** ให้  $a$  เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ที่  $a \neq 1$  จะได้ว่า สำหรับจำนวนจริงบวก  $x$  และ  $y$  ใด ๆ

$$1. \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log x}{\log a} \text{ เมื่อ } b \text{ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ที่ } b \neq 1$$

$$2. \log_a 1 = 0$$

$$3. \log_a a = 1$$

$$4. \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$5. \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$6. \log_a(x^r) = r \log_a x \text{ เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ}$$

$$7. \log_{a^r}(x) = \frac{1}{r} \log_a x \text{ เมื่อ } r \text{ เป็นจำนวนจริงใด ๆ}$$

$$8. \log_a(a^x) = x$$

$$9. a^{\log_a x} = x$$

**หมายเหตุ** ทฤษฎีบท 1.4.2 ข้อ 8 ยังคงเป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง  $x$

**ตัวอย่าง 1.15** จงหาค่า  $x$  ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ  $e^{x^2+3x} \cdot e^{\ln 2} = 2$

**วิธีทำ.** จาก  $2e^{x^2+3x} = e^{x^2+3x} \cdot e^{\ln 2} = 2$

$$\text{จะได้ว่า } e^{x^2+3x} = 1 = e^0$$

$$\text{ดังนั้น } x(x+3) = x^2+3x = 0$$

นั่นคือ  $x = 0$  หรือ  $-3$  เป็นค่า  $x$  ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการดังกล่าว □

**ตัวอย่าง 1.16** จงหาค่า  $x$  ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ  $\log(x^2+5x-4) - \log(x+2) = 1$

**วิธีทำ.** จาก  $\log\left(\frac{x^2+5x-4}{x+2}\right) = \log(x^2+5x-4) - \log(x+2) = 1$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{x^2+5x-4}{x+2} = 10$$

$$\text{ดังนั้น } x^2+5x-4 = 10x+20 \text{ หรือ } (x-8)(x+3) = x^2-5x-24 = 0$$

$$\text{จะได้ว่า } x = 8 \text{ หรือ } -3$$

แต่เมื่อแทนค่า  $x = -3$  ลงใน  $x+2$  จะได้  $-1$  ซึ่งทำให้  $\log(x+2)$  ไม่นิยาม

จึงได้ว่า  $x = 8$  เป็นค่า  $x$  เพียงค่าเดียวที่สอดคล้องสมการดังกล่าว □

**ตัวอย่าง 1.17** ยอดจำหน่ายสินค้า  $S(x)$  หน่วย (พันบาท) มีความสัมพันธ์กับโฆษณา  $x$  หน่วย (พันบาท) ดังสมการต่อไปนี้

$$S(x) = 200 + 4\ln(3x - 2)$$

- (i) จงหายอดจำหน่ายสินค้าเมื่อลงโฆษณาไปเป็นจำนวน 2,500 บาท
- (ii) เมื่อใช้งบโฆษณา 21,500 บาท กับ 35,000 บาท จะทำให้ยอดจำหน่ายสินค้าต่างกันเท่าไร

**วิธีทำ.** (i) หากลงโฆษณาเป็นเงิน 2,500 บาท จะได้ว่า  $x = 2.5$  ทำให้ยอดจำหน่ายสินค้าเป็น

$$S(2.5) = 200 + 4\ln(3 \times 2.5 - 2)$$

$$\approx 206.81899$$

นั่นคือยอดจำหน่ายสินค้าเป็น 206,818.99 บาท เมื่อลงโฆษณาไปเป็นจำนวนเงิน 2,500 บาท

- (ii) เมื่อใช้งบโฆษณา 21,500 บาท และ 35,000 บาท จะได้ยอดจำหน่ายสินค้าเป็น  $S(21.5)$  และ  $S(35)$  พันบาท ตามลำดับ ดังนั้นผลต่างของยอดขายจะเป็น

$$S(35) - S(21.5) = (200 + 4\ln(3 \times 35 - 2)) - (200 + 4\ln(3 \times 21.5 - 2))$$

$$\approx 1.99825$$

นั่นคือยอดขายต่างกัน 1,998.25 บาท

□

**ตัวอย่าง 1.18** ฟังก์ชันอุปสงค์ของสินค้าชนิดหนึ่งกำหนดโดย  $p(x) = 3e^{2-0.5x}$  เมื่อ  $x$  คือ จำนวนสินค้า (กิโลกรัม) และ  $p$  คือ ราคาสินค้าต่อกิโลกรัม (บาท)

- (i) จงเขียนจำนวนสินค้า ( $x$ ) ในรูปของราคาต่อกิโลกรัม ( $p$ )
- (ii) จงหาความต้องการสินค้าของผู้บริโภค เมื่อสินค้ามีราคากิโลกรัมละ 6 บาท

**วิธีทำ.** (i) จาก  $p(x) = 3e^{2-0.5x}$  จะได้ว่า

$$e^{2-0.5x} = \frac{p}{3}$$

$$2 - 0.5x = \ln\left(\frac{p}{3}\right)$$

$$x = \frac{2 - \ln\left(\frac{p}{3}\right)}{0.5} = 4 - 2\ln\left(\frac{p}{3}\right)$$

- (ii) หากสินค้านี้อีก 6 บาท จะได้โดย (i) ว่าความต้องการสินค้าของผู้บริโภค คือ

$$x = 4 - 2\ln\left(\frac{6}{3}\right) \approx 2.61 \text{ กิโลกรัม}$$

□

## 1.5 สรุปสาระประจำบท

ในบทนี้ได้กล่าวถึงการสร้างแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์จากสถานการณ์ในโลกจริงอย่างง่าย โดยอาศัยฟังก์ชัน นอกจากนี้ยังได้แนะนำฟังก์ชันพื้นฐานต่าง ๆ เช่น ฟังก์ชันพหุนาม ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และฟังก์ชันลอการิทึม ซึ่งเป็นฟังก์ชันสำคัญในการศึกษาแคลคูลัสต่อไป ยิ่งไปกว่านั้นยังได้ยกตัวอย่างฟังก์ชันที่ใช้ในทางเศรษฐศาสตร์และธุรกิจ จากตัวอย่างเหล่านั้น จะเห็นได้ว่า การวิเคราะห์เชิงคณิตศาสตร์ช่วยให้สามารถวางแผนการผลิตหรือการจำหน่ายเพื่อให้มีประสิทธิภาพสูงสุดตามต้องการได้



## คณิตศาสตร์ในการเงิน (Mathematics in Finance)

### 2.1 บทนำ

ในบทที่ 1 ได้มีการทบทวนความรู้พื้นฐานเรื่องฟังก์ชันที่สำคัญต่าง ๆ รวมถึงการนำเสนอตัวอย่างในเรื่องแบบจำลองเชิงคณิตศาสตร์ ซึ่งทำให้เห็นถึงความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์ในการนำไปแก้ไขปัญหาในโลกจริง ในบทที่ 2 นี้ จะแนะนำการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในทางการเงิน โดยเริ่มต้นจากการทบทวนความรู้เรื่องลำดับและอนุกรมของจำนวนจริง ซึ่งเป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญสำหรับหัวข้อคณิตศาสตร์ในการเงิน (Mathematics in Finance) จากนั้นจะกล่าวถึงการคำนวณหาดอกเบี้ยในรูปแบบต่าง ๆ ค่าเงินปัจจุบัน และค่ารายปีตามลำดับ

เนื้อหาเรื่องลำดับและอนุกรมของจำนวนจริงในสองหัวข้อต่อไปนี้จะนำเสนอเฉพาะส่วนที่ใช้เป็นพื้นฐานสำหรับหัวข้อคณิตศาสตร์ในการเงินเท่านั้น รายละเอียดในสองหัวข้อนี้ ผู้สนใจสามารถศึกษาได้จากหนังสือแคลคูลัสเล่มอื่น ๆ รวมถึงหนังสืออ้างอิงที่ได้ให้ไว้ท้ายหนังสือเล่มนี้

### 2.2 ลำดับของจำนวนจริง (Sequences of Real Numbers)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาเรื่องลำดับของจำนวนจริง โดยเฉพาะลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต เริ่มต้นจากจำนวนจริงต่อไปนี้

$$1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2}, 1 + 4\sqrt{2}$$

หากพิจารณาจำนวนจริงทั้ง 4 จำนวน โดยคำนึงถึงลำดับของการเขียนจำนวนจริงเหล่านั้นด้วยแล้ว จะเรียกชุดของจำนวนจริงข้างต้นว่า ลำดับของจำนวนจริงที่มีความยาวสี่ ต่อมาพิจารณาชุดของ