

DRIVING RANGE OF VECTOR ANALYSIS

ทฤษฎีและตัวอย่างโจทย์

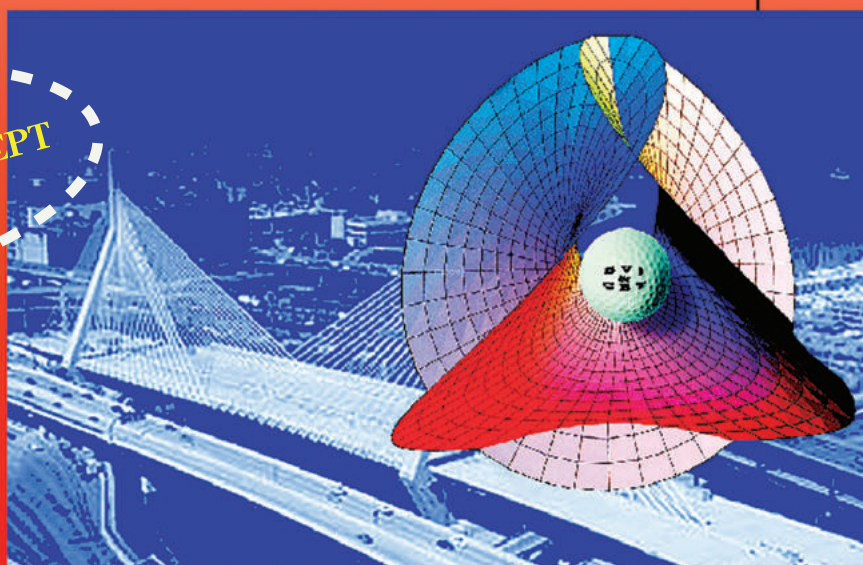
THEORY AND PROBLEMS

คณิตศาสตร์

วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์

MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENTISTS

FREE!
CALCULUS CONCEPT
MAPS



การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์

VECTOR ANALYSIS AND INFINITE SERIES

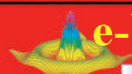
- ✓ สรุปสูตรนิยาม ทฤษฎี และตัวประกอบ
- ✓ 345 ตัวอย่างโจทย์พร้อมเฉลยโดยละเอียด
- ✓ 1424 โจทย์ปัญหาพร้อมคำตอบ
- ✓ 220 กราฟโดยโปรแกรม Mathcad & Mathematica & Maple

รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร แววจริญ

รองศาสตราจารย์ ดร. ชนศักดิ์ ป้ายเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ



ประวัติผู้แต่ง



รองศาสตราจารย์ ศรีบุตร นวเจริญ



รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง

การศึกษา

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม นสว.บางเขน
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)

- กศ.บ. (คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม นสว.พิษณุโลก
- วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย (นักเรียนทุน U.D.C.)
- ค.ด. (อุดมศึกษา), Cognate : สถิติ-วิจัย, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ประสบการณ์

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ

- หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์
- รองคณบดีฝ่ายวิชาการ, ฝ่ายพัฒนา, ฝ่ายกิจการนักศึกษา
- รองอธิการบดีฝ่ายวิชาการ

ปัจจุบัน

- ดำรงตำแหน่งรองศาสตราจารย์ ระดับ 9 ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ (มจพ.)

ผลงานตำราวิชาการร่วมกัน

- SERIES 1 อนุพันธ์และการประยุกต์
- SERIES 2 อินทิกรัลและการประยุกต์
- SERIES 3 แคลคูลัสหลายตัวแปร
- SERIES 4 การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์

- SERIES 5 สมการเชิงอนุพันธ์ 1
- SERIES 6 สมการเชิงอนุพันธ์ 2 และการแปลงลาปลาซ
- SERIES 7 เรขาคณิตวิเคราะห์และการเขียนกราฟ 2 มิติ, 3 มิติ
- SERIES 8 เมตริกซ์และพีชคณิตเชิงเส้น

ผลงานวิจัย

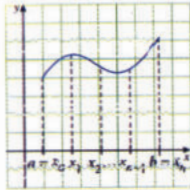
- สื่อการเรียนการสอนสำหรับวิชาแคลคูลัส และเรขาคณิตวิเคราะห์ใน 3 มิติ
- Computer-assisted instruction (CAI) in Calculus
- สื่อการเรียนการสอนสำหรับ ปริพันธ์ของฟังก์ชัน 1: ความหมายของปริพันธ์จำกัดเขต ปริยานุพันธ์และปริพันธ์ไม่จำกัดเขต
- Adomian Decomposition Method for Solving a Non-Linear Shallow Water Tsunami Model of Coupled Partial Differential Equations

- Elliptic Number และเส้นรอบวงของวงรี
- Elliptic Number and Approximation Function
- การทดสอบการรู้เข้าของอนุกรมโดยใช้คอมพิวเตอร์
- The Development of The Prerequisite Model in Basic Mathematics Course for Science and Technology Undergraduate Curricular by Using Concept Maps
- การใช้คอมพิวเตอร์สร้างฟังก์ชันไมโครสโคป

การเปรียบเทียบทฤษฎีอินทิกรัล Integral Theorem

อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integral)

$$\int_a^b f(x) dx$$



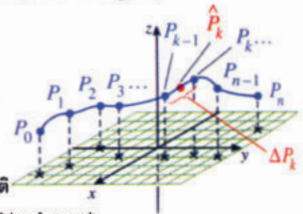
แบ่งช่วงบนแกน x

Fundamental Theorem of Calculus

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad \text{เมื่อ} \quad \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

อินทิกรัลเชิงเส้น (Line Integral)

$$\int_C f(x, y, z) dx$$



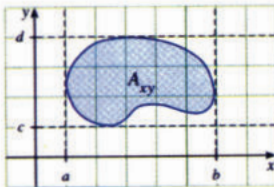
แบ่งช่วงบนเส้นโค้งใน 3 มิติ

Fundamental Theorem for Line Integrals

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = f(Q) - f(P) \quad \text{เมื่อ} \quad \nabla f = \vec{F}$$

อินทิกรัลสองชั้น (Double Integral)

$$\iint_R f(x, y) dA$$

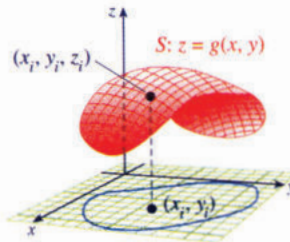


แบ่งบริเวณ R เป็น mn เซลล์ในระนาบ xy

อินทิกรัลเชิงพื้นผิว (Surface Integral)

$$\iint_S F(x, y, z) dS = \iint_{R_{xy}} F(x, y, z) \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dA_{xy}$$

เมื่อ $z = g(x, y)$



$S: z = g(x, y)$ แบ่งผิวโค้ง S ออกเป็นส่วนเล็กๆ ds ซึ่งมีภาพฉายบนระนาบ xy เป็น dA

ทฤษฎีของกรีนและบทขยายไปยัง 3 มิติ

Green's Theorem and Its Generalization to Three Dimensions

แบบตั้งฉาก (Normal Form)

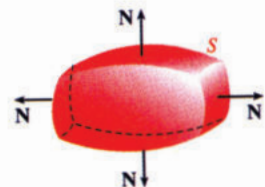
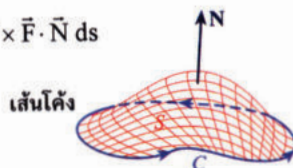
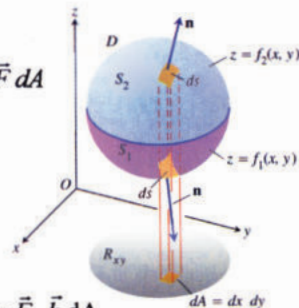
$$\text{Green's theorem: } \oint_C \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA = \iint_R \nabla \cdot \vec{F} dA$$

$$\text{Divergence Theorem: } \iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} ds = \iiint_D \nabla \cdot \vec{F} dV$$

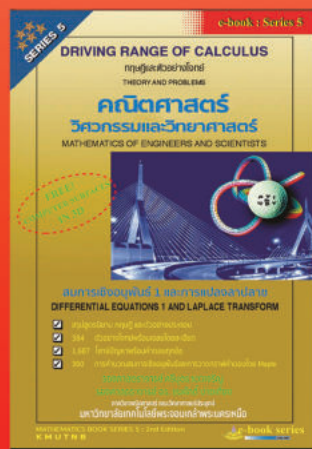
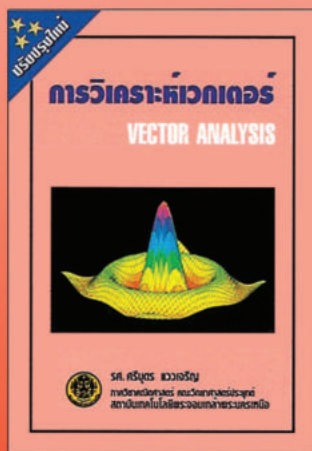
แบบสัมผัส (Tangent Form)

$$\text{Green's theorem: } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA = \iint_R \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{k} dA$$

$$\text{Stokes's theorem: } \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{N} ds$$



ผลงานของอาจารย์ผู้เขียนทั้งสองท่าน



SERIES 1,2,3 และ 7 เหมาะสำหรับนิสิต นักศึกษา ปีที่ 1
SERIES 4,5,6 และ 8 เหมาะสำหรับนิสิต นักศึกษา ปีที่ 2

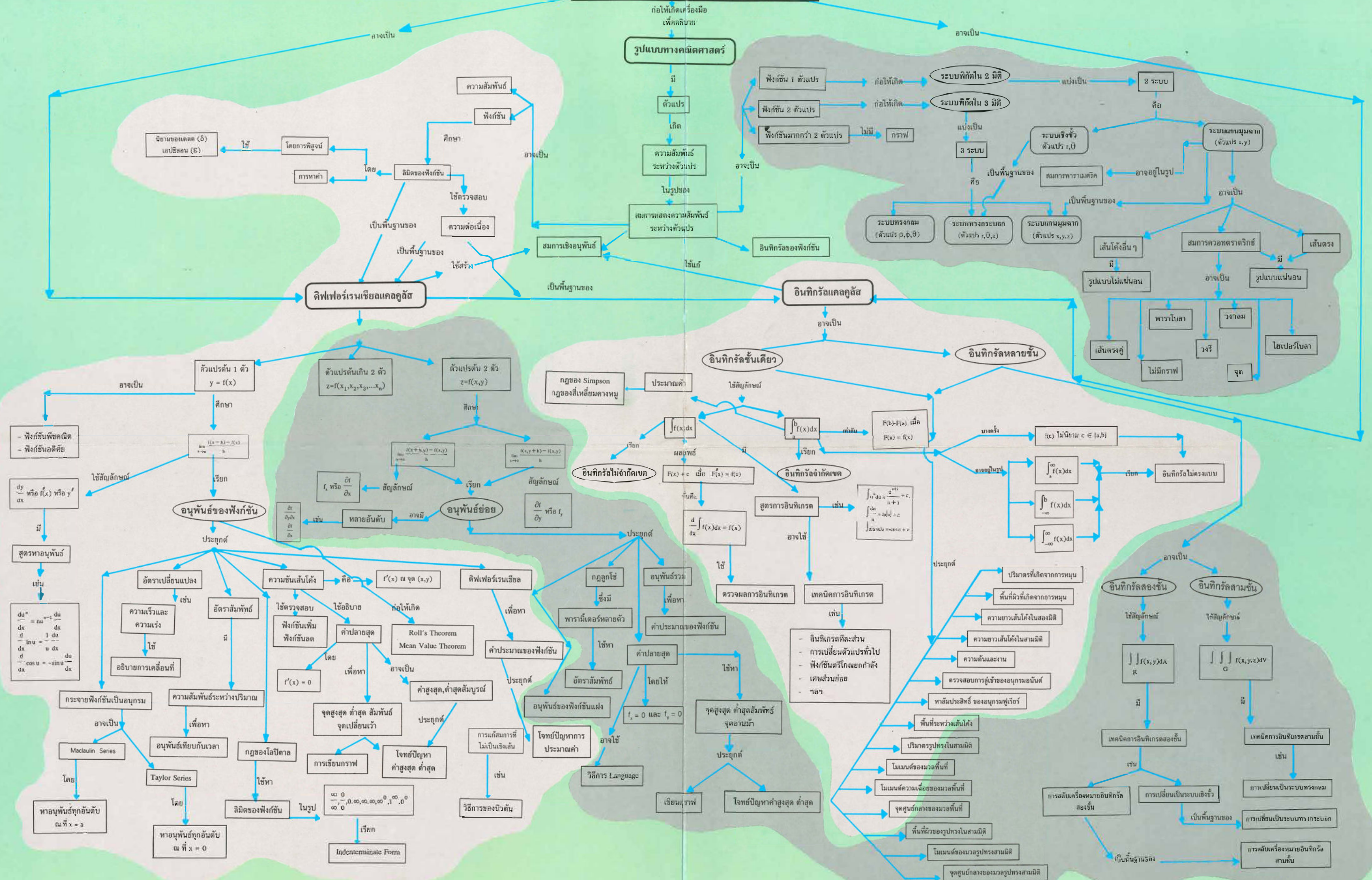
ISBN: 978-616-593-329-2

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย ตาม พ.ร.บ. ลิขสิทธิ์ พ.ศ. 2521

ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

<http://www.kmutnb.ac.th>





สูตรอนุพันธ์
(TABLE OF DERIVATIVES)

1. $\frac{d}{dx} c = 0$, c เป็นค่าคงที่
2. $\frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx} u^a = au^{a-1} \frac{du}{dx}$
3. $\frac{d}{dx} (u \pm v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
4. $\frac{d}{dx} (uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$
6. $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$, $y = f(u)$, $u = g(x)$
7. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$
8. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$
9. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$
10. $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$
11. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$
12. $\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \frac{du}{dx}$
13. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$
14. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$
15. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
16. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
17. $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
18. $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$
19. $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
20. $\frac{d}{du} \csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
21. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$
22. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \log_a e} \frac{du}{dx}$
23. $\frac{d}{dx} \sinh u = \cosh u \frac{du}{dx}$
24. $\frac{d}{dx} \cosh u = \sinh u \frac{du}{dx}$
25. $\frac{d}{dx} \tanh u = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$
26. $\frac{d}{dx} \coth u = -\operatorname{csc}^2 u \frac{du}{dx}$
27. $\frac{d}{dx} \operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx}$
28. $\frac{d}{dx} \operatorname{csc} h u = -\operatorname{csc} h u \coth u \frac{du}{dx}$
29. $\frac{d}{dx} \sinh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$
30. $\frac{d}{dx} \cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$
31. $\frac{d}{dx} \tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$

สูตรทั่วไป
(GENERAL FORMULAS)

1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
2. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$, c เป็นค่าคงที่
3. $\int u dv = uv - \int v du$ (IBP)

สูตรที่จำเป็น
(ESSENTIAL FORMULAS)

1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C$
3. $\int e^u du = e^u + C$
4. $\int \sin u du = -\cos u + C$
5. $\int \cos u du = \sin u + C$
6. $\int \tan u du = \ln |\sec u| + C$
7. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$
8. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
9. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$
11. $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + C$
12. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + C$

สูตรที่มีประโยชน์
(USEFUL FORMULAS)

13. $\int \cot u du = \ln |\sin u| + C$
14. $\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C$
15. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$
16. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
18. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
19. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
20. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
21. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
22. $\int \csc h^2 u du = -\coth u + C$
23. $\int \sec h u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
24. $\int \csc h u \coth u du = -\operatorname{csc} h u + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
(FORMS CONTAINING TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

84. $\int \sin^2 u du = \frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4} + C$
85. $\int \cos^2 u du = \frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} + C$
86. $\int \tan^2 u du = \tan u - u + C$
87. $\int \cot^2 u du = -\cot u - u + C$
88. $\int \sec^3 u du = \frac{1}{2} \sec u \tan u + \frac{1}{2} \ln |\sec u + \tan u| + C$
89. $\int \csc^3 u du = -\frac{1}{2} \csc u \cot u + \frac{1}{2} \ln |\csc u - \cot u| + C$
90. $\int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du$
91. $\int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$
92. $\int \tan^n u du = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} u - \frac{1}{n-2} \int \tan^{n-2} u du$
93. $\int \cot^n u du = -\frac{1}{n-1} \cot^{n-1} u - \frac{1}{n-2} \int \cot^{n-2} u du$
94. $\int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du$
95. $\int \csc^n u du = -\frac{1}{n-1} \cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du$
96. $\int \sin m u \sin n u du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} - \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m \neq \pm n$
97. $\int \cos m u \cos n u du = \frac{\sin(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m \neq \pm n$
98. $\int \sin m u \cos n u du = -\frac{\cos(m+n)u}{2(m+n)} + \frac{\cos(m-n)u}{2(m-n)} + C$, $m \neq \pm n$
99. $\int \sin u du = -\cos u + C$
100. $\int \cos u du = \sin u + C$

25. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{u}{a} + C$, $a > 0$
26. $\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b} \ln |a+bu| + C$
27. $\int \frac{du}{a+bu} = \frac{1}{b} \ln |a+bu| + C$
28. $\int \frac{u du}{a+bu} = \frac{1}{b^2} (a+bu - a \ln |a+bu|) + C$
29. $\int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2} \ln |a+bu| + C$
30. $\int \frac{u^2 du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3} \left(a+bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln |a+bu| \right) + C$
31. $\int \frac{u du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^2(a+bu)} + \frac{1}{b^2} \ln |a+bu| + C$
32. $\int \frac{u du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au} + \frac{b}{a^2} \ln |a+bu| + C$
33. $\int (a+bu)^n du = \frac{(a+bu)^{n+1}}{b(n+1)} + C$, $n \neq -1, -2$
34. $\int \frac{u du}{(a+bu)(c+du)} = \frac{1}{bc-ad} \left(-\frac{a}{b} \ln |a+bu| + \frac{c}{d} \ln |c+du| \right) + C$, $bc-ad \neq 0$
35. $\int \frac{u du}{(a+bu)^2(c+du)} = \frac{1}{bc-ad} \left(\frac{a}{b(a+bu)} + \frac{c}{bc-ad} \ln |a+bu| \right) + C$, $bc-ad \neq 0$
36. $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C$
37. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$
38. $\int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{du}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} \right)$, $n \neq 1$
39. $\int \frac{du}{(u^2-a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(-\frac{u}{(u^2-a^2)^{n-1}} - (2n-3) \int \frac{du}{(u^2-a^2)^{n-1}} \right)$, $n \neq 1$

อินทิกรัลของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
(FORMS CONTAINING INVERSE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS)

106. $\int \sin^{-1} u du = u \sin^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$
107. $\int \cos^{-1} u du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$
108. $\int \tan^{-1} u du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) + C$
109. $\int \sin^{-1} u du = \frac{2u-1}{4} \sin^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
110. $\int \cos^{-1} u du = \frac{2u-1}{4} \cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$
111. $\int \tan^{-1} u du = \frac{u^2+1}{2} \tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$
112. $\int u^a \sin^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \sin^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
113. $\int u^a \cos^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1} du}{\sqrt{1-u^2}} \right)$, $n \neq -1$
114. $\int u^a \tan^{-1} u du = \frac{1}{n+1} \left(u^{n+1} \tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1} du}{1+u^2} \right)$, $n \neq -1$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a+bu}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a+bu}$)

40. $\int \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{15b^3} (3bu-2a)(a+bu)^{3/2} + C$
41. $\int u^a \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{b(2n+3)} \left[u^a(a+bu)^{3/2} - na \int u^{a-1} \sqrt{a+bu} du \right]$
42. $\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2} (bu-2a)\sqrt{a+bu} + C$
43. $\int \frac{u^2 du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3} (8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu} + C$
44. $\int \frac{u du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^2-a-bu}{b(2n+1)} - \frac{2na}{b(2n+1)} \int \frac{u^{n-1} du}{\sqrt{a+bu}}$
45. $\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bu} + \sqrt{a}}{\sqrt{a+bu} - \sqrt{a}} \right| + C, a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, a < 0 \end{cases}$
46. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)} \int \frac{du}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}}$
47. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$
48. $\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u} + \frac{b}{2} \int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{u^2 \pm a^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{u^2 \pm a^2}$)

49. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
50. $\int u \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{3} (u^2 \pm a^2)^{3/2} + C$
51. $\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{u}{8} (2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8} \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$
52. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} du = \sqrt{u^2 \pm a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} \right| + C$
53. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + a \sec^{-1} \left| \frac{u}{a} \right| + C$

อินทิกรัลของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม
(EXPONENTIAL AND LOGARITHMIC FORMS)

115. $\int u^a e^u du = \frac{1}{a+1} (u^{a+1} e^u + C)$
116. $\int u^a e^{au} du = \frac{1}{a} u^a e^{au} - \frac{n}{a} \int u^{a-1} e^{au} du$
117. $\int \frac{e^u}{u} du = -\frac{e^u}{(n-1)u^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^u}{u^{n-1}} du$
118. $\int \ln u du = u \ln u - u + C$
119. $\int (\ln u)^n du = u(\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} du$
120. $\int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{n+1} \left(\ln u - \frac{1}{n+1} \right) + C$
121. $\int \frac{(\ln u)^n}{u} du = \frac{(\ln u)^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$
122. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln |\ln u| + C$
123. $\int u^m (\ln u)^n du = \frac{u^{m+1} (\ln u)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int u^m (\ln u)^{n-1} du$
124. $\int \frac{u^m}{(\ln u)^n} du = -\frac{u^{m+1}}{(n-1)(\ln u)^{n-1}} + \frac{m+1}{n-1} \int \frac{u^m}{(\ln u)^{n-1}} du$
125. $\int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$
126. $\int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$

อินทิกรัลของไฮเพอร์โบลิกฟังก์ชัน
(FORMS CONTAINING HYPERBOLIC FUNCTIONS)

127. $\int \sinh u du = \cosh u + C$
128. $\int \cosh u du = \sinh u + C$
129. $\int \tanh u du = \ln |\cosh u| + C$

อินทิกรัลที่มีเทอม $\sqrt{a^2-u^2}$
(FORMS CONTAINING $\sqrt{a^2-u^2}$)

62. $\int \sqrt{a^2-u^2} du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
63. $\int u^2 \sqrt{a^2-u^2} du = \frac{u}{8} (2u^2-a^2) \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
64. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} du = \sqrt{a^2-u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2-u^2}}{u} \right| + C$
65. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
66. $\int \frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}} du = -\frac{u}{2} \sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{u}{a} + C$
67. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2-u^2}}{u} \right| + C$
68. $\int \frac{du}{u^2 \sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2 u} + C$

130. $\int \coth u du = \ln |\sinh u| + C$
131. $\int \operatorname{sech} u du = \tan^{-1}(\sinh u) + C$
132. $\int \csc h u du = \ln \left| \tanh \frac{u}{2} \right| + C$
133. $\int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$
134. $\int \csc h^2 u du = -\coth u + C$
135. $\int \sec h u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$
136. $\int \csc h u \coth u du = -\csc h u + C$
137. $\int \sinh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} - \frac{u}{2} + C$
138. $\int \cosh^2 u du = \frac{\sinh 2u}{4} + \frac{u}{2} + C$
139. $\int \tanh^2 u du = u - \tanh u + C$
140. $\int \coth^2 u du = u - \coth u + C$
141. $\int \sinh u du = \cosh u - \sinh u + C$
142. $\int \cosh u du = \sinh u - \cosh u + C$
143. $\int u^a \sinh u du = u^a \cosh u - n \int u^{a-1} \cosh u du$
144. $\int u^a \cosh u du = u^a \sinh u - n \int u^{a-1} \sinh u du$

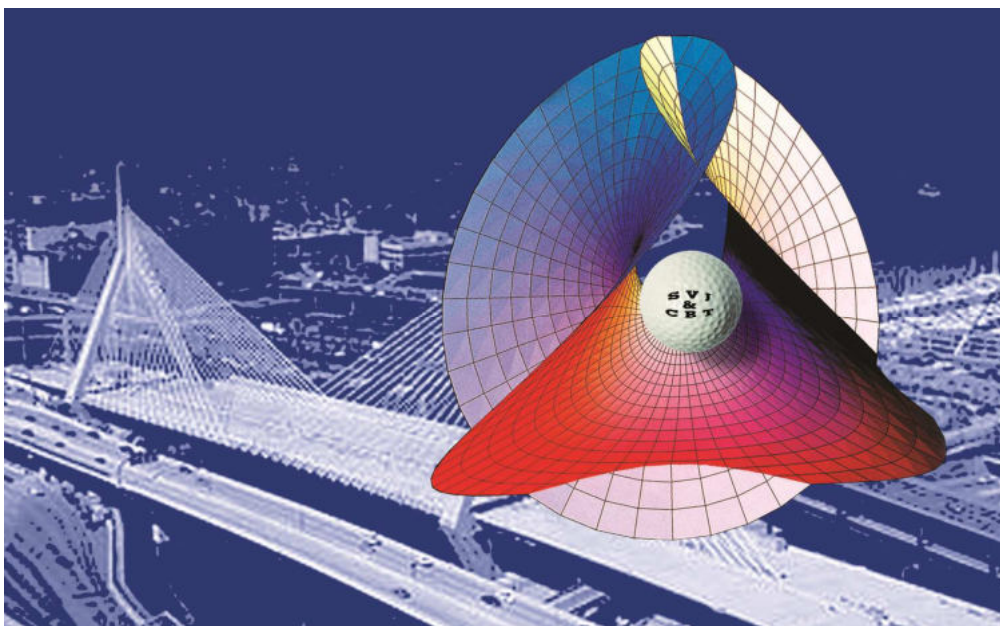
อินทิกรัลที่มีเทอม $(a+be^{mu})^{-1}$
(FORMS CONTAINING $(a+be^{mu})^{-1}$)

145. $\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) = x - \ln(1+e^x) + C$
146. $\int \frac{dx}{a+be^{mx}} = \frac{1}{am} [ma - \ln(a+be^{mx})] + C$
147. $\int \frac{e^{mx}}{a+be^{mx}} dx = \frac{1}{mb} \ln(a+be^{mx}) + C$



คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์
(MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENTISTS)

การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์
VECTOR ANALYSIS AND INFINITE SERIES



รวบรวมและเรียบเรียงโดย

รศ. ศรีบุตร แวเวริญ

รศ.ดร. ชนศักดิ์ บำยเที่ยง

ภาควิชาคณิตศาสตร์

คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

ราคา 299 บาท (7.99 USD)

คณิตศาสตร์สำหรับวิศวกรรมและวิทยาศาสตร์
MATHEMATICS OF ENGINEERS AND SCIENCES

การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์
VECTOR ANALYSIS AND INFINITE SERIES

ISBN 974-89995-4-8 สำหรับหนังสือ Series 4
ISBN (e-book) 978-616-593-329-2 สำหรับ e-books การวิเคราะห์เวกเตอร์
และอนุกรมอนันต์

สงวนลิขสิทธิ์ในประเทศไทย พ.ร.บ.ลิขสิทธิ์ พศ. 2521
ห้ามลอกเลียนไม่ว่าส่วนหนึ่งส่วนใดของหนังสือเล่มนี้ นอกจากได้รับอนุญาต

วันวางจำหน่าย : 10-06-2022 ขนาดไฟล์ : 102 MB
จำนวนหน้า : 524 หน้า ประเทศ : THAILAND
ประเภทไฟล์ : PDF ภาษา : Thai

ออกแบบปกและ Artwork ทินพัฒน์ แวเจริญ ภาควิชาสถิติประยุกต์
คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

จัดทำโดย

รศ.ศรีบุตร แวเจริญ และ รศ.ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง
ซื้อหนังสือ e-book:Series 4 เล่มนี้

ราคา 299 บาท (7.99 USD)

การสั่งซื้อ ebook series 4 สามารถติดต่อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาฯทุกสาขา			
รศ. ศรีบุตร แวเจริญ		รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง	
Tel.	081-904-1608	Tel.	081-908-5090
ID Line	sribudh	ID Line	mala0928
E-mail :	swr@kmitnb.ac.th	E-mail :	chanasak.b@op.kmitnb.ac.th

คำนำ

การเรียนรู้แคลคูลัสกับการเล่นกีฬามีลักษณะคล้ายกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งกีฬากอล์ฟ ซึ่งผู้เขียนอยากนำทั้งสองสิ่งมาหล่อหลอมเข้าด้วยกัน เพื่อให้บัณฑิต นักศึกษาและผู้สนใจในวิชาแคลคูลัสได้มองภาพในอนาคตได้เห็นชัดเจนยิ่งขึ้น โดยนำกีฬากอล์ฟมาอธิบายเปรียบเทียบ หนังสือเล่มนี้ได้ตั้งชื่อว่า “สนามฝึกซ้อมวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์” (Driving Range of Analytic Geometry) เช่นเดียวกับกีฬากอล์ฟซึ่งมี สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range of Golf) ก่อนที่จะเข้าสนามฝึกซ้อมคงต้องศึกษานิยาม ทฤษฎี และคุณสมบัติต่าง ๆ จากห้องเรียนจนเข้าใจดีพอแล้วจึงนำหนังสือเล่มนี้มาฝึกฝนให้เกิดความเข้าใจได้ดียิ่งขึ้น

หนังสือเล่มนี้ได้ใช้เทคโนโลยีสมัยใหม่ มาช่วยทำให้รูปแบบของหนังสือทางคณิตศาสตร์ให้ดูมีคุณค่ายิ่ง โดยใช้โปรแกรม **Equations** บน **Windows 98** โดยเฉพาะการเขียนกราฟโดยโปรแกรม **Mathcad** **MapleV** และ **Mathematica** ซึ่งทำให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ สามารถมองเห็นโจทย์ปัญหานั้น ๆ ได้เป็นรูปธรรมและเป็นสัดส่วนตรงกับความเป็นจริงมากขึ้น โดยเฉพาะเส้นตรงใน 3 มิติ เส้นโค้งใน 3 มิติ และผิวโค้งใน 3 มิติ ซึ่งมีความยุ่งยากในการวาดกราฟ

เรขาคณิตวิเคราะห์เป็นวิชาที่สำคัญวิชาหนึ่งในการศึกษาวิชาแคลคูลัสและเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพัฒนานำไปใช้ประยุกต์ในสาขาวิชาต่าง ๆ ของนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร ก่อนที่จะนำไปประยุกต์ใช้ได้ดี บัณฑิต นักศึกษา จำเป็นต้องศึกษาวิชาพื้นฐานให้เข้าใจอย่างถ่องแท้ก่อน จากประสบการณ์ด้านการสอนมาประมาณ 20 ปี ในสถาบันแห่งนี้ และเป็นอาจารย์พิเศษมหาวิทยาลัยอีกหลายแห่ง พบเห็นปัญหาที่บัณฑิต นักศึกษา ไม่สามารถทำความเข้าใจกับโจทย์ปัญหาซึ่งมีหลากหลายได้ จึงได้รวบรวมเขียนออกมาเป็น **แผนที่แคลคูลัสพื้นฐาน** (Calculus Concept Maps) และ**แผนที่อนุกรม** (Series Concept Maps) ตามที่ได้นำเสนอในปกหลังด้านในของหนังสือเล่มนี้นั้น ผู้เขียนได้แบ่งเนื้อหาออกเป็น SERIES ได้ทั้งหมด 7 SERIES โดยแต่ละ SERIES จะมีความสัมพันธ์กันเกี่ยวข้องกันอยู่ตลอดเวลา ดังนั้น การศึกษาวิชาแคลคูลัสจำเป็นต้องมีพื้นฐานของคณิตศาสตร์ SERIES ต้น ๆ อยู่ด้วย

ทางด้านกีฬากอล์ฟนั้น เราแบ่งไฟท์ออกเป็น 3 ไฟท์เรียงลำดับตามความสามารถได้ดังนี้ คือ ไฟท์ C มือใหม่ (Beginner), ไฟท์ B มือสมัครเล่น (Amateur) , ไฟท์ A มืออาชีพ (Professional) การเล่นกอล์ฟนั้น ในการออกรอบ 1 รอบ หรือตีจนครบ 18 หลุมนั้น ต้องใช้ความอดทน ความพยายาม มีจิตใจที่มุ่งมั่น ผู้เล่นต้องคิดแก้ปัญหาด้วยตัวเองบนพื้นฐานของประสบการณ์ที่มีอยู่ เมื่อถึงจุดหนึ่งผู้เล่นที่มีพื้นฐานและการฝึกซ้อมดีพอ ผู้เล่นจะสามารถแก้ปัญหาเฉพาะหน้าได้เสมอ โดยที่ผู้เล่นจะต้องนำปัจจัยหลาย ๆ อย่างที่สะสมไว้นามาช่วยในการคิดแก้ปัญหา

ในวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ก็เช่นเดียวกัน เป็นวิชาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ในหลายๆด้านมาประกอบกัน เพื่อช่วยในการคิดแก้ปัญหา ผู้เขียนจึงได้เขียนปูพื้นตั้งแต่เริ่มต้น ตั้งแต่ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแต่เจาะลึกลงไปในแต่ละเรื่องมากกว่าเดิม นักศึกษาที่พื้นฐานยังไม่ดีพอจึงเปรียบเสมือนนักกอล์ฟมือใหม่ ต้องฝึกทำโจทย์ในตั้งแต่ต้นในเรื่องพื้นฐานจนเกิดความเข้าใจก่อนจึงจะเริ่มศึกษาในเนื้อหาของวิชาเรขาคณิตวิเคราะห์ได้ เมื่อผู้เรียนฝึกซ้อมจนเข้าใจแล้วจึงจะถือได้ว่าอยู่ในระดับมือสมัครเล่น และนักศึกษาจะต้องทำการฝึกฝนต่อไปอีกจนเกิดความเข้าใจ จึงจะถือว่านักศึกษาจัดอยู่ในขั้นระดับมืออาชีพ จึงจะสามารถศึกษาในขั้นประยุกต์ได้ ในตำราชุดนี้เปรียบเสมือนสนามฝึกซ้อม มีโจทย์ตัวอย่างมากมายเพียงพอที่จะทำให้นักศึกษาพัฒนาตนเองอยู่ในขั้นมืออาชีพได้อย่างสบาย

ในหนังสือประกอบการเรียน ebook SERIES 4 เล่มที่ปรับปรุงใหม่นี้ ได้รวบรวมสรุป นิยาม ทฤษฎี และโจทย์ตัวอย่างประกอบกว่า 345 ข้อ พร้อมโจทย์ปัญหาอีกกว่า 1,424 ข้อ ให้นิสิต นักศึกษา ได้ฝึกทบทวนเนื้อหา และทดลองทำแบบฝึกหัดในลักษณะต่างๆ ให้เกิดความรู้ความเข้าใจในทฤษฎีให้ถ่องแท้ อันจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญในการเรียนการสอน และการทำงานได้อย่างมีประสิทธิภาพในอนาคต ถ้าจะให้หนังสือเล่มนี้เปรียบเทียบกับกีฬาการกอล์ฟ ผู้เขียนตั้งใจจะให้เป็นอย่างเดียวกับ สนามฝึกซ้อมกอล์ฟ (Driving Range) ถ้าใครเข้าสนามฝึกซ้อมมากก็จะทำให้พัฒนาดีขึ้นและจะส่งผลให้นิสิตและนักศึกษาเข้าสู่สนามสอบกลางภาค (Midterm) และการสอบปลายภาค (Final) ด้วยความมั่นใจ เช่นเดียวกับนักกอล์ฟที่มีความพร้อม และมีความเชื่อมั่นที่ลงสนามแข่งขัน และได้รับรางวัลให้กับตนเองในที่สุด

ผู้เขียนขอกราบขอบพระคุณครูทุกท่าน ตั้งแต่ระดับประถมจนถึงระดับมหาวิทยาลัย ที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้ และขอกราบขอบพระคุณทุกท่าน ที่ได้ให้การสนับสนุนหนังสือ e-book:Series 1,2,3,4,...และ 8 ขอขอบคุณเพื่อนร่วมงานทุกคนที่คอยให้การสนับสนุน และให้กำลังใจโดยตลอด และขอใจ คุณบุปผา จิตรโสม ลูกศิษย์ที่ทุ่มเทช่วยพิมพ์ต้นฉบับบทที่1- บทที่3และนาย ทินพัฒน์ แวเจริญ ลูกชายที่ทุ่มเทช่วยพิมพ์ต้นฉบับบทที่4-บทที่5 พร้อมเฉลยคำตอบทุกข้อ ให้เป็นอย่างดี และสำคัญที่สุดขอขอบคุณภรรยาและลูกๆของผู้เขียนทั้งสอง : คุณยุพิน แวเจริญ ลูกแพรวและลูกเพชร คุณวงศ์เดือน บ่ายเที่ยง ลูกต๋มและลูกต๊ ที่ได้ให้กำลังใจในการเขียนมาโดยตลอดและเป็นผู้ที่อยู่เบื้องหลังความสำเร็จในการเขียนตำราทั้ง 8 เล่ม

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือประกอบการเรียนเล่มนี้ คงจะเป็นประโยชน์ต่อนิสิต นักศึกษา ในสถาบันอุดมศึกษาต่างๆบ้างตามสมควร หากพบข้อบกพร่องที่ควรแก้ไขในหนังสือเล่มนี้ กรุณาเสนอแนะให้ผู้เขียนทราบด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง

คุณความดีทั้งหลายทั้งปวง ขอมอบให้บิดา-มารดา คุณครูทุกท่านของผู้เขียนทั้งสอง



รศ. ศรีบุตร แวเจริญ



รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง

คำนิยม

ท่านผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ทุกท่าน ผมได้ติดตามวิถีคิดและการทำหนังสือ Series 1-8 ของอาจารย์ทั้งสองท่าน คือ รศ. ศรีบุต ราวเจริญ และ รศ. ดร. ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง มาโดยตลอด ซึ่งได้จัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ SERIES ออกมาแล้ว 8 เล่มรวมทั้งปรับปรุงหนังสือคณิตศาสตร์ Series 1-8 มาโดยตลอด หนังสือคณิตศาสตร์ เล่มนี้เป็นการปรับปรุงหนังสือ Series 4 ให้อยู่ในรูปแบบ **e-book:Series 4** การวิเคราะห์แวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ มีการนำเอาโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Maple มาช่วยวาดกราฟและคำนวณคำตอบของปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ให้นักศึกษาได้ตรวจคำตอบอีกด้วย ทำให้การเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์สามารถทำความเข้าใจได้ง่ายขึ้น ผมเองตอนที่เป็นักเรียน/นักศึกษาเวลาทำการบ้านคณิตศาสตร์ต้องทำให้ได้คำตอบและต้องถูกต้องแต่มั่นใจว่าคำตอบที่ถูกต้องนั้นในสมัยก่อน ต้องตรวจสอบที่ท้ายเล่มเท่านั้น

ในปัจจุบันวิวัฒนาการทางคอมพิวเตอร์มีมากขึ้น ท่านอาจารย์ทั้งสองท่านก็มิยอมให้การเรียนรู้ด้านคณิตศาสตร์เป็นแบบเดิมหรือย่ำอยู่กับที่ ได้พัฒนาการเรียนรู้โดยการนำโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแสดงวิธีทำและหาคำตอบ และได้สอดแทรกการแก้ปัญหาโดยโปรแกรมสำเร็จรูปในหนังสือเล่มนี้ด้วย

ผมเองได้เห็น ความบากบั่น ความพยายามของอาจารย์ทั้งสองท่าน ที่พยายามช่วยให้การเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นเรื่องที่ไม่ยุ่งยากอีกต่อไป และในฐานะของผู้บริหารคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ต้องขอขอบคุณและ อยากให้มีหนังสือแบบนี้มากขึ้นในหลายสาขาวิชาของคณะเพื่อให้นักเรียนในวิชาของคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์สามารถทำให้นักศึกษาหรือผู้อ่านได้เข้าใจในเนื้อหาของวิชานั้นอย่างดี

ขอบคุณครับ



รองศาสตราจารย์ ดร. วิตนนท์ จารุโรจน์กิริติ
คณบดีคณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์

แถมฟรี

e-book:Series 4 เล่มนี้ ผู้เขียนได้มอบแผ่นพับขนาด A3 รูป4สีสวยงามจำนวน

2 แผ่นที่จะเป็นประโยชน์กับนักศึกษาวิชา CALCULAS and ANALYTIC GEOMETRY เป็นอย่างดี

1. CALCULUS CONCEPT MAPS
2. FORMULA TABLES OF DERIVATIVES AND INTEGRALS

คำนิยม

ท่านผู้อ่านหนังสือ **e-book:Series 4** การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ เล่มนี้ทุกท่าน
ผมเป็นคนที่ใกล้ชิดและเห็นการทำงาน แนวความคิดและการทำหนังสือของรองศาสตราจารย์ ศรีบุตร
แววจริญ และ รองศาสตราจารย์ ดร.ชนศักดิ์ บ้ายเที่ยง มาโดยตลอด ท่านทั้งสองได้เขียนหนังสือ
คณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ (**e-book:Series 1- 8**) ออกมาแล้ว 8 เล่มอย่างต่อเนื่องและมี
การปรับปรุงเนื้อหาใหม่ในหนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ทั้ง 8 เล่ม โดยมีการเพิ่มเติม
รูปภาพประกอบโจทย์ปัญหาให้เห็นเป็นรูปธรรมและนำเอาโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ Maple
และ Mathcad มาช่วยในการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์เพื่อให้ผู้อ่านหนังสือเล่มนี้ได้เห็นปัญหาโจทย์
เป็นรูปธรรมยิ่งขึ้น

ผมเห็นความมุ่งมั่น และความตั้งใจของอาจารย์ทั้งสองท่าน คือ ความสำเร็จที่ยิ่งใหม่ที่จะช่วย
ประเทศไทยแก้ปัญหาการขาดแคลนหนังสือคณิตศาสตร์ที่ทันสมัยเหมือนต่างประเทศ จากจุดเริ่มต้น
ดังกล่าว ท่านตั้งใจจะทำหนังสือเพื่อลูกศิษย์ นิสิต นักศึกษาและผู้สนใจในวิชาแคลคูลัสและเรขาคณิต
วิเคราะห์ ทำให้หนังสือไม่เพียงใช้เรียนในชั้นเรียนแต่กลับใช้เรียนเสมือนศึกษาบนเว็บที่มีรูปภาพ
คำอธิบายและโปรแกรมครบทุกส่วน ทำให้ผู้เรียนขยายวงกว้างจากนักเรียนในชั้นเรียน สู่นักเรียนนอกชั้น
เรียนหลายสาขาอาชีพ ตอบสนองต่อยุทธศาสตร์ การพัฒนาประเทศด้านการพัฒนาทรัพยากรมนุษย์
เกิดการเรียนรู้ที่สนับสนุนต่อสังคม การมีการเรียนรู้อย่างต่อเนื่องตลอดชีวิต และนิสิต นักศึกษาจะได้ก้าว
เข้าสู่สังคมอาเซียนได้เป็นอย่างดี

นับเป็นภารกิจของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ ที่ต้องผลิตหนังสือและตำรา
วิชาการเป็นบริการความรู้แก่สังคม ตามปรัชญาของมหาวิทยาลัยที่ว่า “พัฒนาคน พัฒนาวิทยาศาสตร์และ
เทคโนโลยี” และในฐานะของผู้บริหารภาควิชาคณิตศาสตร์ ต้องขอขอบคุณอาจารย์ทั้งสองท่านที่ปรับปรุง
หนังสือคณิตศาสตร์วิศวกรรมและวิทยาศาสตร์ เรื่อง การวิเคราะห์เวกเตอร์และอนุกรมอนันต์ **e-
book:Series 4** เล่มนี้ ก็นับเป็นบริการด้านสติปัญญาอีกเล่มหนึ่งที่ ภาควิชาคณิตศาสตร์ภูมิใจมอบ
ให้แก่สังคม และประเทศไทย

ขอบคุณครับ

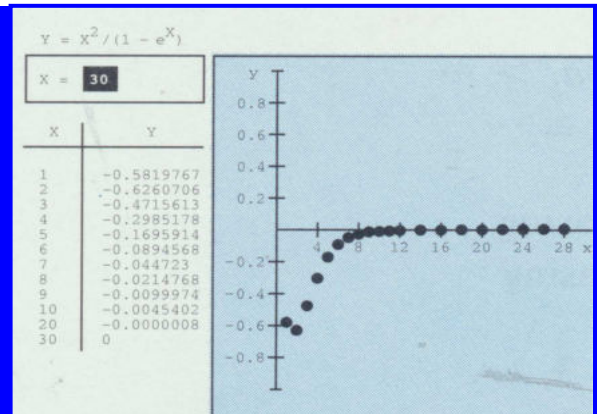


รองศาสตราจารย์ ดร.เสนอ คุณประเสริฐ
หัวหน้าภาควิชาคณิตศาสตร์

สารบัญ Series 4

บทที่ 1

อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

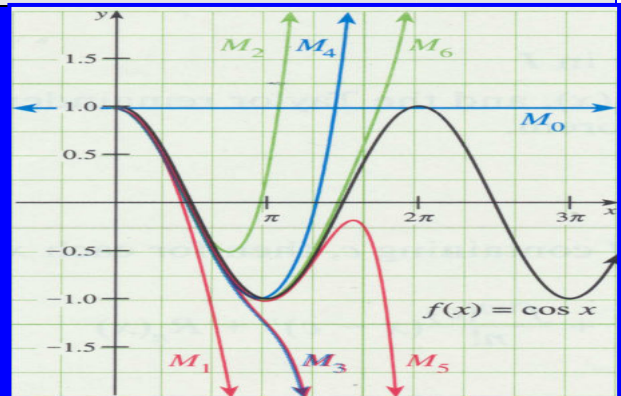


1.1 ลำดับอนันต์ (Infinite Sequence)

1.2 อนุกรมอนันต์ (Infinite Series)

บทที่ 2

อนุกรมยกกำลัง (Power Series)



2.1 การลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง

(Convergence of Power Series)

2.2 การทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง

(Test of Convergence of Power Series)

2.3 อนุกรมเทเลอร์และอนุกรมแมคลอริน

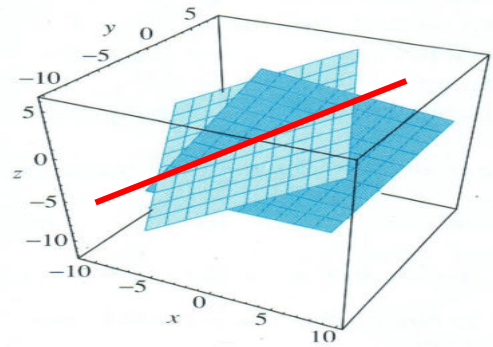
(Taylor Series and Maclaulin Series)

2.4 การประยุกต์ของอนุกรมยกกำลัง

(Application of Power Serie s)

บทที่ 3

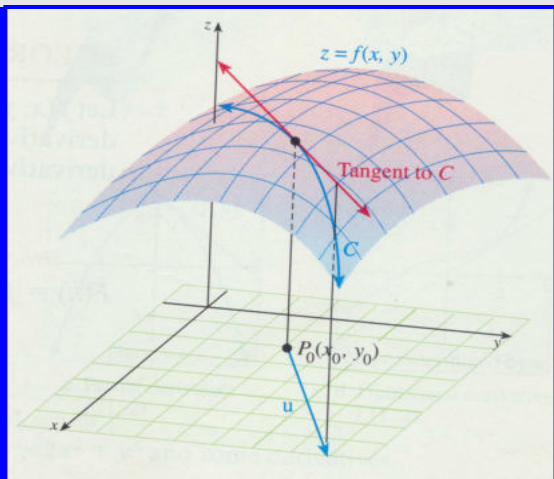
เวกเตอร์ใน 3 มิติ และ 2 มิติ (Vector in Plane and Space)



- 3.1 เวกเตอร์ในระบบแกนมุมฉาก
(Rectangular Coordinate System)
- 3.2 เส้นตรงและระนาบใน 3 มิติ
(Line and Plane in Space)

บทที่ 4

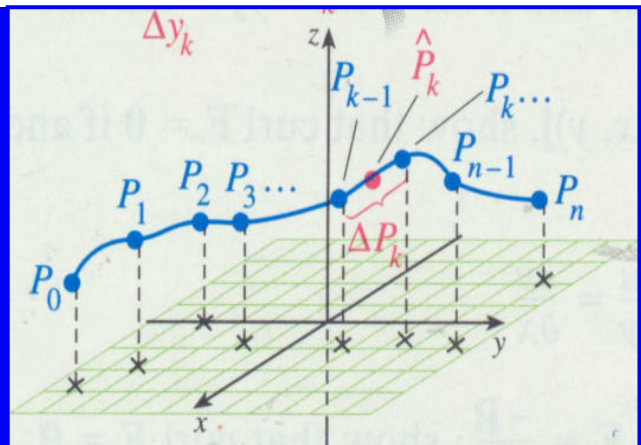
เวกเตอร์แคลคูลัส (Calculus of Vector)



- 4.1 อนุพันธ์และอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงเวกเตอร์
(Derivatives and Integrals of Vector Function)
- 4.2 เวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วย
(Unit Tangent and Unit Normal)
- 4.3 ความโค้ง (Curvature)
- 4.4 อนุพันธ์ระบุทิศทาง แกรเดียนต์
(Directional Derivatives and Gradient)

บทที่ 5

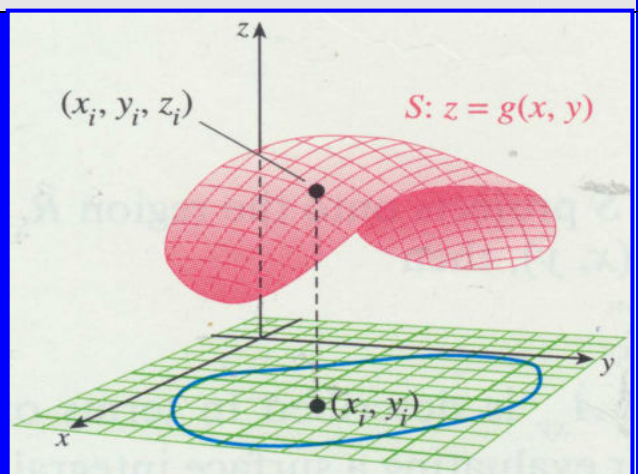
อินทิกรัลเชิงผิวโค้ง (Surface Integral)



- 4.1 อินทิกรัลตามเส้น
(Line Integral)
- 4.2 ความเป็นอิสระของวิถี
(Independence of Path)
- 4.3 ทฤษฎีของกรีนในระนาบ
(Green Theorem in Plane)
- 4.4 อินทิกรัลเชิงผิวโค้ง
(Surface Integral)
- 4.5 ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์
(Divergence Theorem)
- 4.6 ทฤษฎีของสโตคส์ (Stokes's Theorem)

เฉลย

เฉลยแบบฝึกหัดทุกข้อ
บรรณานุกรม



บทที่ 1

อนุกรมอนันต์

(Infinite Series)



คอลิน แมคอริน

(Colin Maclaurin)

ค.ศ. 1698 – 1746

ประเทศ สกอตแลนด์

ประวัติการศึกษาและการทำงาน

แมคลอรินเข้าศึกษาที่มหาวิทยาลัย Glasgow เมื่ออายุได้ 11 ปี ได้รับปริญญาโท เมื่ออายุ 15 ปี และรับตำแหน่งสาขาคณิตศาสตร์ของ Marischal College ที่ Aberdeen เมื่ออายุได้ 19 ปี พิมพ์ผลงานสำคัญชิ้นแรกเมื่ออายุ 21 ปี รับตำแหน่งเป็นผู้ช่วยศาสตราจารย์ที่มหาวิทยาลัย Edingrug เมื่ออายุ 27 ปี และต่อมาได้รับตำแหน่งเป็นศาสตราจารย์ที่สถาบันแห่งนี้

ผลงาน

1. Geometria Organica (1719)
2. Treatise of Fluxions (2 Vols., 1742)
3. Maclaurin's Series

โจทย์ตัวอย่างเกี่ยวกับอนุกรมเรขาคณิตและอนุกรม P

ตัวอย่าง 1.5

จงพิจารณาว่า อนุกรมเรขาคณิตต่อไปนี้ลู่เข้าหรือไม่ และถ้าลู่เข้าจงหาผลรวมของอนุกรมด้วย

$$1. \quad 1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^k$$

$$2. \quad 1 + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{4}\right)^k$$

$$3. \quad \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^5 + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k$$

$$4. \quad \ln 3 + (\ln 3)^2 + (\ln 3)^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (\ln 3)^k$$

$$5. \quad \sin 4 + (\sin 4)^2 + (\sin 4)^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (\sin 4)^k$$

วิธีทำ

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$-1 < r < 1$$

1. $r = -\frac{2}{3}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้า $(-1 < r < 1)$

$$1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5} \quad \left(a = 1, r = -\frac{2}{3}\right)$$



2. $r = \frac{\pi}{4}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้า

$$1 + \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{4 - \pi} \quad \left(a = 1, r = \frac{\pi}{4}\right)$$



3. $r = \frac{4}{5}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ลู่เข้า

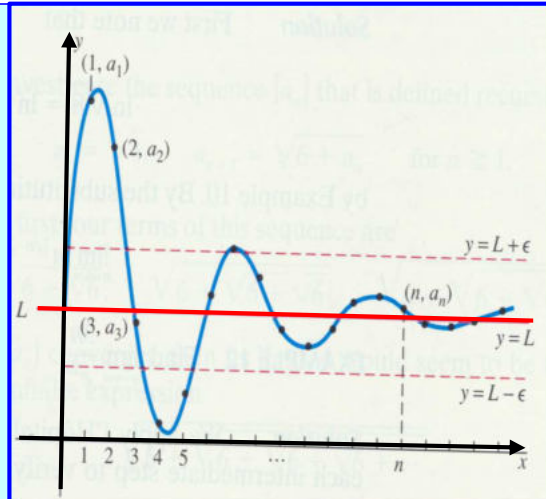
$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^5 + \dots = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left[1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \dots \right]$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{4}{5}} \right)$$

$$= \frac{16}{5} \quad \text{เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า}$$



1.3 การตรวจสอบการ ลู่เข้าของอนุกรม (The Test of Convergent Series)



ในการตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรม อาจทำได้หลายวิธี แบ่งออกเป็นลักษณะใหญ่ คือ

1. การหาผลรวมโดยตรง โดยการหา $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ (S_∞)
2. การใช้ทฤษฎีในการทดสอบ

นอกจากนี้เรายังสามารถใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ช่วยในการตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมได้อีกทางหนึ่งด้วย

ต่อไปนี้จะเป็ทฤษฎีในการตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรมทั้งหมด

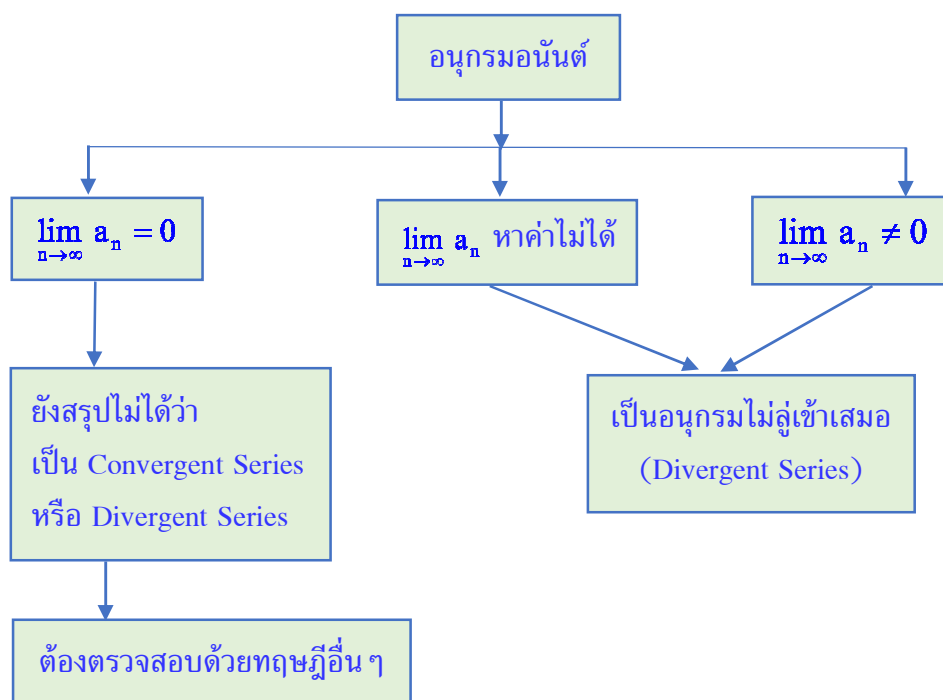
1.3.1 การตรวจสอบการไม่ลู่เข้าโดยเทอมที่ n (The n^{th} Test for divergence)

ทฤษฎี 1.9

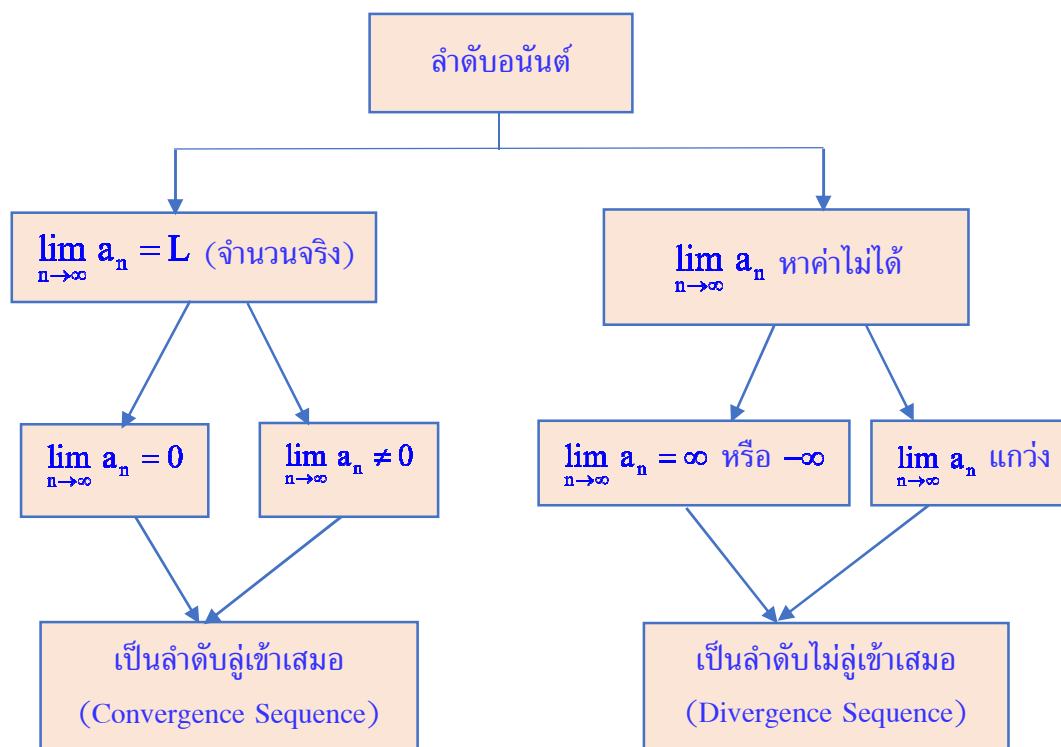
Divergent Test
ทฤษฎีใช้กับอนุกรม
ทุกแบบไม่ว่าจะเป็น
บวกหรือบวกลบ
สลับกัน

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรม ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ หรือ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ หาค่าไม่ได้
แล้วจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า (Divergent Series)

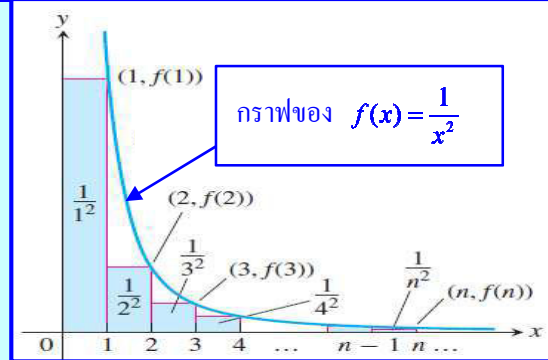
จากทฤษฎีบทสามารถอธิบายด้วยแผนภาพต่อไปนี้



บางคนอาจมีความสับสนในเรื่อง การลู่เข้าของอนุกรมกับการลู่เข้าของลำดับ เราจะเขียนแผนภาพเกี่ยวกับลำดับ เพื่อประกอบความเข้าใจ ดังนี้



1.3.2 การตรวจสอบการลู่เข้า โดยใช้การอินทิเกรต (Integral Test)



ทฤษฎี 1.10

Integral test
ทฤษฎีนี้ได้เฉพาะ
อนุกรมที่ทุกเทอม
เป็นบวกเท่านั้น
ห้ามใช้กับอนุกรม
สลับเป็นอันขาด

ให้ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่เป็นบวก (Positive Term) ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง
และลดลง (Decreasing function) ทุก ๆ $x \geq k$ (k จำนวนเต็มบวก) แล้ว เราจะได้ว่า
 $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ กับ $\int_k^{\infty} f(x) dx$ จะมีคุณสมบัติการลู่เข้าที่เหมือนกัน กล่าวคือ ถ้าลู่เข้า
(Converge) ก็จะมีลู่เข้าเหมือนกันทั้งคู่ ถ้าไม่ลู่เข้า (Diverge) ก็จะไม่ลู่เข้า

ข้อควรระวัง

$$\int_k^{\infty} f(x) dx \neq \sum_{n=k}^{\infty} a_n$$

1.3.3 การตรวจสอบการลู่เข้า โดยการเปรียบเทียบ (Comparison Test)

ทฤษฎี 1.11

Comparison Test
ทฤษฎีนี้ใช้กับ
อนุกรมที่ทุกเทอม
เป็นบวกหรือเป็น
ศูนย์เท่านั้น
 $\sum c_n$ ควรจะ
ตรวจสอบการลู่เข้า
ได้ง่าย มักเป็น
อนุกรมเรขาคณิต
หรืออนุกรม P
สังเกตได้ง่ายว่า ลู่
เข้าหรือไม่โดยดูจาก
ค่า r หรือค่า p

กำหนดให้ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ทุกเทอมไม่ติดลบ (Nonnegative terms) ถ้ามี
อนุกรม $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ ซึ่งเป็นอนุกรมที่ทุกเทอมไม่ติดลบ อีกอนุกรมหนึ่ง (ซึ่งควรจรรู้ก่อนแล้ว
ว่าเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหรือไม่) แล้วเราจะได้ว่า

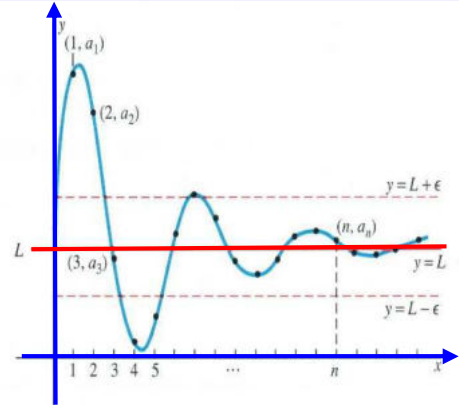
1. ถ้า $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า (Converge) และ $a_n \leq c_n$ ทุก $n \geq k$

แล้ว $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้า (Converge) ด้วย

2. ถ้า $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ เป็นอนุกรมไม่ลู่เข้า (Diverge) และ $a_n \geq c_n$ ทุก $n \geq k$

แล้ว $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ จะเป็นอนุกรมที่ไม่ลู่เข้า (Diverge) ด้วย

1.3.4 การตรวจสอบการลู่เข้า โดยการเปรียบเทียบลิมิต (Limit Comparison Test)



ทฤษฎี 1.12

Limit Comparison Test

ทฤษฎีนี้ใช้สำหรับ
อนุกรมที่ทุกเทอม
เป็นบวกทั้งหมด

$\sum_{n=k}^{\infty} b_n$
มักจะเป็นอนุกรม
เรขาคณิตหรือ
อนุกรม P
เนื่องจากตรวจสอบ
การลู่เข้าได้ง่าย

กำหนดให้ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมที่ทุกเทอมเป็นบวก (Positive Terms) ถ้ามี $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ ซึ่งเป็นอนุกรมที่ทุกเทอมเป็นบวกเช่นกัน (ซึ่งควรจรรู้ก่อนแล้วว่าเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหรือไม่) แล้ว จะได้ว่า

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0$ แล้ว $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ จะมีคุณสมบัติในการลู่เข้าที่เหมือนกัน กล่าวคือ ลู่เข้า (Converge) เหมือนกัน หรือ ไม่ลู่เข้า (Diverge) เหมือนกัน
2. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ เป็น อนุกรมที่ลู่เข้า (Converge) แล้ว $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ จะ ลู่เข้า (Converge) ด้วย
3. ถ้า $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ และ $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ เป็น อนุกรมที่ไม่ลู่เข้า (Diverge) แล้ว $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ จะ ไม่ลู่เข้า (Diverge) ด้วย

1.3.5 การตรวจสอบการลู่เข้าโดยดูจากอัตราส่วน (Ratio Test)

ทฤษฎี 1.13

Ratio Test
ทฤษฎีนี้ได้กับ
อนุกรมทุกประเภท
ไม่ว่าจะเป็น
อนุกรมบวกหรือ
อนุกรมสลับ

กำหนดให้ $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมทั่วไป โดยที่ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$ จะได้ว่า

1. ถ้า $\rho < 1$ แล้ว $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ จะเป็น อนุกรมที่ลู่เข้า (Converge)
2. ถ้า $\rho > 1$ แล้ว $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ จะเป็น อนุกรมที่ไม่ลู่เข้า (Diverge)
3. ถ้า $\rho = 1$ สรุปไม่ได้ (Inconclusive)

บทที่ 2

อนุกรมยกกำลัง (Power Series)



บรูค เทย์เลอร์
(Brook Taylor)

ค.ศ. 1685 – 1731

ประเทศ อังกฤษ

ประวัติการศึกษาและการทำงาน

เทย์เลอร์เกิดที่ Norton ประเทศอังกฤษ
ท่านศึกษาที่ St. John's College มหาวิทยาลัย
Cambridge ในปี ค.ศ. 1712 ท่านได้รับเลือก
ให้เป็นสมาชิกของ Royal Society

ผลงาน

1. Taylor's Series (1715)
2. Approximate Solution of Equations (1717)
3. Theory of Perspective

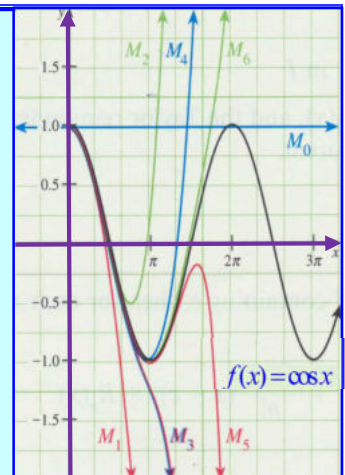
2.1 ช่วงแห่งการลู่เข้า (Interval of Convergence)

$$M_0(x) = 1,$$

$$M_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2!},$$

$$M_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

$$M_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!},$$



นิยาม 2.1

Power Series

อนุกรมยกกำลังรอบ $x = 0$ คืออนุกรมที่อยู่ในรูปของ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

อนุกรมยกกำลังรอบ $x = a$ คืออนุกรมที่อยู่ในรูปของ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \dots + c_n (x-a)^n + \dots$$

เรียก a ว่าศูนย์กลาง (Center) โดยที่ $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ เป็นค่าคงที่

นิยาม 2.2

Interval of Convergence

เซตของจุดบนช่วงจำกัดช่วง ช่วงหนึ่ง (Finite Interval) ที่ทำให้อนุกรมยกกำลังเป็นอนุกรมที่ลู่เข้า (Converge) เรียก ช่วงจำกัดนี้ว่า ช่วงของการลู่เข้า (Interval of Convergence)

ช่วงจำกัดอาจจะเป็นช่วงเปิด ช่วงปิด หรือช่วงครึ่งเปิดครึ่งปิด (a, b) , $[a, b]$, $(a, b]$ หรือ $[a, b)$ ก็ได้

นิยาม 2.3

Radius of Convergence

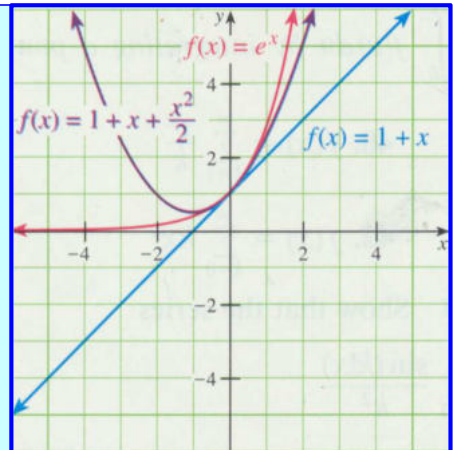
ถ้า R เป็นจำนวนที่ทำให้อนุกรมยกกำลังเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ ทุกๆ x ถ้า $|x-a| < R$ และ $a+R$ เป็นขีดจำกัดบนที่น้อยที่สุด (The Least Upper Bound)

เราจะเรียก R ว่า รัศมีของการลู่เข้า (Radius of Convergence)

ถ้าอนุกรมยกกำลังลู่เข้าอย่างสมบูรณ์ทุกๆค่าของ x เราจะกล่าวว่า ช่วงแห่งการลู่เข้าไม่จำกัด ($R = \infty$)

ถ้าอนุกรมยกกำลังลู่เข้าเฉพาะที่ $x = a$ เท่านั้น เราจะกล่าวว่า ช่วงแห่งการลู่เข้า คือ 0

2.3 อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมแมคคลอริน (Taylor and Maclaurin Series)



นิยาม 2.4

Maclaurin Series

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ ณ ที่จุด $x=0$ เราจะเรียกอนุกรมที่อยู่ในรูปของ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \dots$$

ว่า อนุกรมแมคคลอริน (Maclaurin Series)

นิยาม 2.5

Taylor Series

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับ ณ ที่จุด $x=a$ เราจะเรียกอนุกรมที่อยู่ในรูปของ

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \dots$$

ว่า อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

ทฤษฎี 2.5

Taylor Formulas

กำหนดให้ f มีอนุพันธ์ทุกอันดับบนช่วงเปิด I ซึ่งมี $a \in I$ แล้วสำหรับจำนวนเต็มบวก n และ $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{n!} (x-a)^n + R_n(x)$$

เมื่อ $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$ สำหรับ C บางตัวบนช่วง (a, x) เราเรียก $R_n(x)$ ว่า

Remainder of Order n หรือ Error Term

โจทย์ตัวอย่างเกี่ยวกับการหาช่วงการลู่เข้าของอนุกรมยกกำลัง

ตัวอย่าง 2.1

จงหาช่วงการลู่เข้าของอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

$$\sum ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

เมื่อ

$$-1 < x < 1$$

ถ้าใช้ Ratio Test
ต้องทดสอบ ณ ที่
 $\rho = 1$ ด้วย

วิธีทำ 1 เนื่องจากเป็นอนุกรมเรขาคณิต $r = x$

ซึ่งจะลู่เข้าเมื่อ $|x| < 1$ หรือ $-1 < x < 1$

ดังนั้น ช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $-1 < x < 1$

ในกรณีนี้ เราสามารถบอกผลรวมนั้นได้ด้วยว่า

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1$$

วิธีทำ 2 ใช้ Ratio Test , $a_n = x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| = \rho$$

โดย Ratio Test อนุกรมจะลู่เข้า เมื่อ $\rho < 1$

ดังนั้น $|x| < 1$ หรือ $-1 < x < 1$

ในกรณีที่ $\rho = 1$ จะได้ $|x| = 1$ หรือ $x = \pm 1$

ถ้า $x = 1$ จะได้ อนุกรมมีรูปเป็น $1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = \infty$ ไม่ลู่เข้า

ถ้า $x = -1$ จะได้ อนุกรมมีรูปเป็น $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ ไม่ลู่เข้า (แกว่ง)

จึงสรุปได้ว่า ช่วงแห่งการลู่เข้า คือ $-1 < x < 1$

วิธีทำ 3 ใช้ Root Test , $a_n = x^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x^n|} = |x| = \rho$$

โดย Root Test อนุกรมจะลู่เข้า เมื่อ $\rho < 1$ เช่นเดียวกันกับ Ratio Test

นั่นคือ $|x| < 1$ หรือ $-1 < x < 1$ สำหรับ $\rho = 1$ ก็ทำเช่นเดียวกับ

Ratio Test ในวิธีที่ 2

จึงสรุปได้ว่า ช่วงแห่งการลู่เข้า คือ $-1 < x < 1$



ตัวอย่าง 2.5

ข้อนี้ใช้ Ratio Test

สะดวกกว่า

Root Test

เนื่องจากต้องใช้กฎ

ของโลปีตาลหาค่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$|x^2| = |x^2|$$

$$= x^2$$

$$\text{เพราะ } x^2 = 0$$



-1 1

กฎของ Leibnitz
สำหรับอนุกรมสลับ

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n-1} = 0$$

$$2. \frac{1}{2n+1} < \frac{1}{2n-1}$$

div conv div



-1 1

จงหาช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

วิธีทำ ใช้ Ratio Test , $a_n = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1} \frac{2n-1}{(-1)^{n-1} x^{2n-1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)x^2 \frac{2n-1}{2n+1} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| (-1)x^2 \frac{\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)} \right| \\ &= |x^2| = x^2 = \rho \end{aligned}$$

ให้ $\rho < 1$ จะได้ $x^2 < 1$

$$x^2 - 1 < 0$$

$$(x-1)(x+1) < 0$$

ดังนั้น $-1 < x < 1$

ให้ $\rho = 1$ จะได้ $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, -1$

ถ้า $x = 1$ จะได้อนุกรมมีรูปเป็น $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$

เป็นอนุกรมลู่เข้า ตามกฎของ Leibnitz

ถ้า $x = -1$ จะได้อนุกรมมีรูปเป็น $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \dots$

เป็นอนุกรมสลับเช่นเดียวกัน และจะ ลู่เข้า ตามกฎของ Leibnitz

จึงสรุปได้ว่า ช่วงของการลู่เข้าของอนุกรม คือ $-1 \leq x \leq 1$



โจทย์ตัวอย่างเกี่ยวกับอนุกรม Maclaurin และ Taylor

ตัวอย่าง 2.12

จงหาอนุกรม Taylor ของ $f(x) = \frac{1}{x}$ ณ ที่ $a=2$ และจงหาช่วงแห่งการลู่เข้า ที่ทำให้อนุกรมดังกล่าวลู่เข้า $\frac{1}{x}$

วิธีทำ จากสูตรอนุกรม Taylor จะได้ว่า อนุกรมมีรูปเป็น

$$f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \dots$$

จะต้องหาค่า $f(2)$, $f'(2)$, $f''(2)$, ...

$$f(x) = x^{-1}, \quad f(2) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -x^{-2}, \quad f'(2) = -2^{-2}$$

$$f''(x) = 2!x^{-3}, \quad f''(2) = 2!x^{-3}$$

$$f'''(x) = -(3!)x^{-4}, \quad f'''(2) = -(3!)2^{-4}$$

$\vdots$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}, \quad f^{(n)}(2) = (-1)^n n! 2^{-(n+1)}$$

จะได้ อนุกรมมีรูปเป็น

$$\frac{1}{2} - 2^{-2}(x-2) + \frac{2!2^{-3}}{2!}(x-2)^2 - \frac{(3!)2^{-4}}{3!}(x-2)^3 + \dots + \frac{(-1)^n n! 2^{-(n+1)}}{n!}(x-2)^n + \dots$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + \dots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \dots$$

อนุกรมเรขาคณิตลู่เข้าเมื่อ $|r| < 1$
มีผลรวมเป็น $\frac{a}{1-r}$

หาช่วงแห่งการลู่เข้า

เนื่องจากอนุกรมดังกล่าวเป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่ง $r = -\frac{(x-2)}{2}$

$$\text{จะลู่เข้า เมื่อ } \left| -\frac{(x-2)}{2} \right| < 1 \Rightarrow |x-2| < 2$$

$$\Rightarrow 0 < x < 4$$

$$\text{โดยมีผลรวมเท่ากับ } \frac{1/2}{1+(x-2)/2} = \frac{1}{2+(x-2)} = \frac{1}{x}$$

แสดงว่า อนุกรม Taylor ดังกล่าว ลู่เข้าหา $\frac{1}{x}$ เมื่อ $0 < x < 4$



บทที่ 3

เวกเตอร์ใน 2 มิติและ 3 มิติ VECTOR IN PLANE AND SPACE



เรอเน เดส์การ์ตส์ (Rene Descartes)

ค.ศ. 1596 – 1650 ประเทศ ฝรั่งเศส

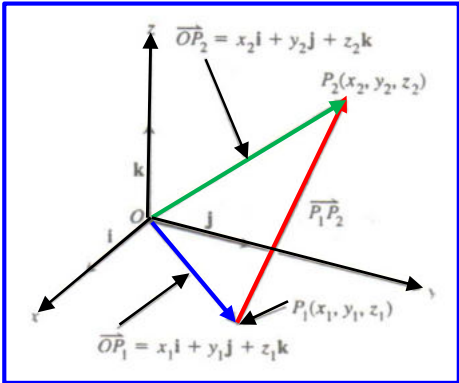
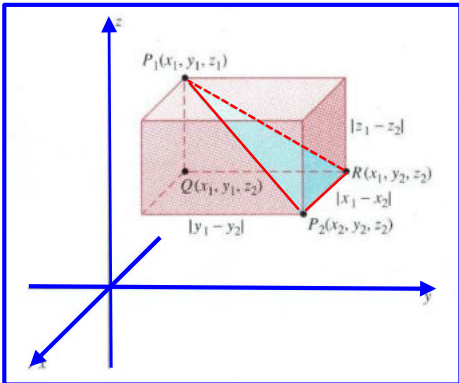
ประวัติการศึกษาและการทำงาน

ท่านเกิดใกล้เมือง Tours เมื่ออายุ 8 ปี ได้เข้าศึกษาในโรงเรียนของคณะสงฆ์เยซูอิต ท่านริเริ่มแนวคิดใหม่ทางปรัชญาโดยอาศัยตรรกศาสตร์ และสมมติฐานจำนวนน้อยที่สุดที่จะเป็นไปได้ ท่านได้กล่าวข้อความพื้นฐานทางปรัชญาของท่านที่ว่า “ฉันคิด ดังนั้นจึงมีฉัน” (Cogito Cega Sum) ท่านเป็นทหารของ Elector of Bohemia และกล่าวกันว่าท่านเกิดแนวคิดครั้งแรกเกี่ยวกับการใช้วิธีการพีชคณิตกับเรขาคณิตในคืนหนึ่งของปี ค.ศ. 1619 ขณะอยู่ประจำทำใกล้แม่น้ำ Danube

ระหว่างปี 1682 ถึง 1649 ท่านพำนักอยู่ที่ประเทศเนเธอร์แลนด์ และในปี ค.ศ. 1649 ท่านไปสอนคณิตศาสตร์ให้กับราชินี Christina แห่งสวีเดน พระราชินีพระองค์นี้นิยมศึกษาในปราสาทที่หนาวเย็นในตอนเช้า เดส์การ์ตส์ซึ่งเคยชินกับการนอนตื่นสาย ทนอากาศหนาวเหน็บไม่ไหว สิ้นชีวิตในปี ค.ศ. 1650

ผลงาน

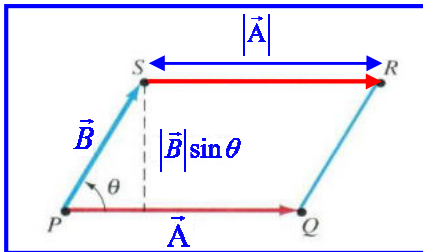
ท่านและแฟร์มาต์เป็นผู้ริเริ่มเรขาคณิตวิเคราะห์ หนังสือของท่านเกี่ยวกับคณิตศาสตร์มีเพียงเล่มเดียว คือ La geometric ซึ่งเป็นภาคผนวกของหนังสือ Discours de la methode pour bien conduire as raison et verite dans les sciences ซึ่งเป็นหนังสือเกี่ยวกับปรัชญา ภาคผนวกเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์นี้ มีการใช้ Descartes' Rule of Sign ด้วย

	17. การบวก ลบ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เวกเตอร์ใน 3 มิติ ถ้า $\vec{A} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ และ $\vec{B} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ $\vec{A} + \vec{B} = (x_1 + x_2)\hat{i} + (y_1 + y_2)\hat{j} + (z_1 + z_2)\hat{k}$ $\vec{A} - \vec{B} = (x_1 - x_2)\hat{i} + (y_1 - y_2)\hat{j} + (z_1 - z_2)\hat{k}$ $c\vec{A} = (cx_1)\hat{i} + (cy_1)\hat{j} + (cz_1)\hat{k} \quad , \quad c \text{ เป็นสเกลาร์}$ 18. เวกเตอร์ระหว่างจุด 2 จุด เวกเตอร์จากจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ไปยัง $P_2(x_2, y_2, z_2)$ คือ $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$ $ \overrightarrow{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ 19. ขนาดของเวกเตอร์ $ a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
	 ก.  ข. รูป 3.14
	20. ขนาดและทิศทาง (Magnitude and Direction) ถ้า $\vec{A} \neq 0$ แล้ว $\frac{\vec{A}}{ \vec{A} }$ คือ Unit Vector ในทิศทางของ $\vec{A}$ เราจะเขียนได้ว่า $\vec{A} = \vec{A} \frac{\vec{A}}{ \vec{A} }$

30. พื้นที่และปริมาตร (Area and Volume)

พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมี $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นด้านประกอบ คือ

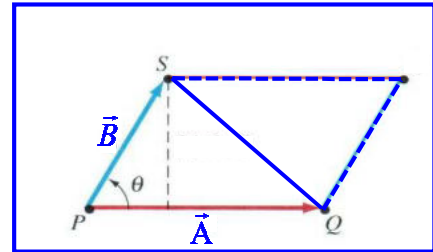
$$A = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$



พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน $= |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$

ก

รูปที่ 3.21



$$A = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$$

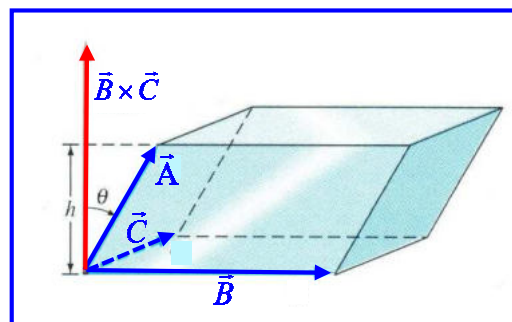
ข

31. ปริมาตรรูปทรงขนาน (Parallelepiped) ที่มี $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นด้านประกอบ คือ

$$V = |(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $\vec{A} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{B} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$, $\vec{C} = x_3\hat{i} + y_3\hat{j} + z_3\hat{k}$

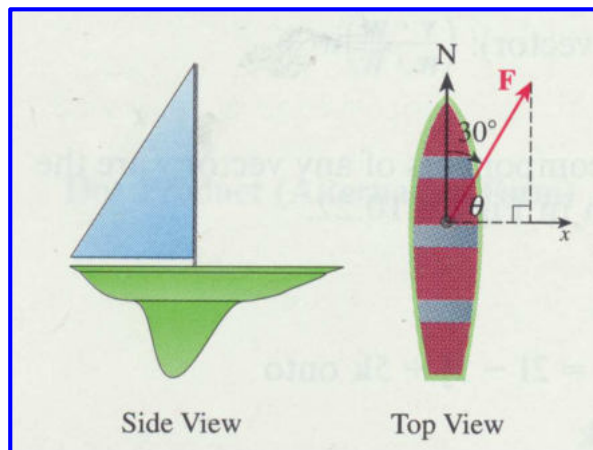
$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = (\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A} = (\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}$$



ปริมาตรของรูปทรงขนาน $= |(\vec{B} \times \vec{C}) \cdot \vec{A}|$

รูปที่ 3.22

ตัวอย่าง 3.24	สมมติว่าลมพัดด้วยแรง $\vec{F}$ ด้วยขนาด 500 ปอนด์ ในทิศของ $N 30^\circ E$ ในขณะที่แล่นเรือใบ จงหางานที่ลมทำให้เรือเคลื่อนที่ไปในทางทิศเหนือ เป็นระยะ 100 ฟุต (ใช้หน่วยของงานเป็น ฟุต-ปอนด์)
	วิธีทำ ดังนั้น $\vec{F} = 500$ ทิศทางและระยะ คือ $\vec{PQ} = 100\hat{j}$, $\vec{PQ} = 100$ ฟุต ดังนั้น $\vec{F} = 500 \cos 60^\circ \hat{i} + 500 \sin 60^\circ \hat{j}$ $= 250\hat{i} + 250\sqrt{3}\hat{j}$ จะได้งานเท่ากับ $\vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{PQ} = 100(250\sqrt{3})$ $= 25,000\sqrt{3}$ ฟุต-ปอนด์

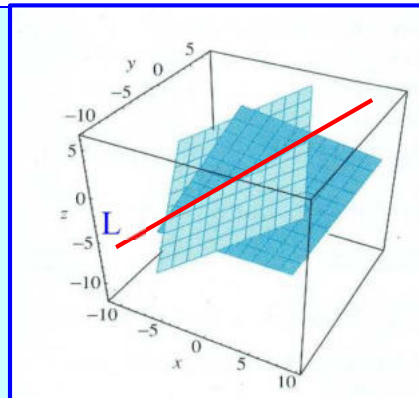


รูป 3.37

ตัวอย่าง 3.25	จงหางานที่เกิดจากแรง $\vec{F} = 5\hat{k}$ นิวตัน ที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นตรงจากจุดกำเนิดไปยังจุด $(1,1,1)$ ระยะเป็นเมตร
	วิธีทำ เคลื่อนที่ไปตามแนวเวกเตอร์ $\vec{PQ} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ เป็นระยะทาง $\vec{PQ} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ จะได้งาน $W = \vec{F} \cdot \vec{PQ} = (5\hat{k}) \cdot (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ $= 5$ นิวตัน



3.2 เส้นตรงและระนาบใน 3 มิติ (Line and in Space)



เส้นตรงใน
3 มิติ

สมการเส้นตรงใน 3 มิติ ในรูปของสมการเวกเตอร์ (Vector Equation) ที่ผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{V}$ มีสมการเป็น รูป 3.47

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{V}, \quad -\infty < t < \infty \quad \text{เมื่อ } P(x, y, z) \text{ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง}$$

Vector Equation
Form

สมการเส้นตรงใน 3 มิติ ในรูปของสมการพารามेटริก (Parametric Equations) ซึ่งผ่านจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และขนานกับ $\vec{V} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ มีสมการเป็น

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad -\infty < t < \infty$$

Parametric Form

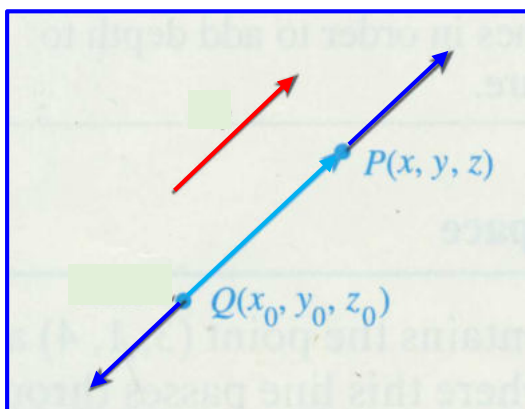
เรียก a, b, c ว่าจำนวนซึ่งกำหนดทิศทาง (Direction Numer) ของเส้นตรง

Direction Number
of Line

สมการเส้นตรงใน 3 มิติ ในรูปแบบสมมาตร (Symmetric Form) ที่ผ่านจุด (x_0, y_0, z_0) และขนานกับ $\vec{V} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ มีสมการเป็น

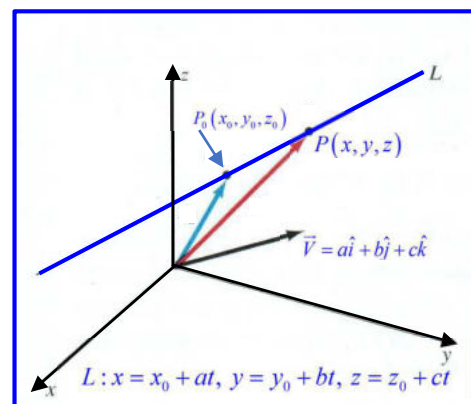
$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \quad a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$$

Symmetric Form



ก.

รูป 3.47



ข.

โจทย์ตัวอย่างเส้นตรงและระนาบใน 3 มิติ

ตัวอย่าง 3.37

Parametric
Symmetric Form
of line

จะหาสมการ
เส้นตรงได้ต้องรู้จุด
ผ่านกับ Vector ที่
ขนานกับมัน

จงหาสมการเส้นตรงในรูปของ Parametric ที่ผ่านจุด $(3,1,4)$ และขนานกับเวกเตอร์ $\vec{V} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ และจงหาจุดที่เส้นตรงตัดกับระนาบพิกัด (Co-ordinate Plane) ทั้งสามและเขียนกราฟด้วย

วิธีทำ 1. ที่ผ่านจุด (x_0, y_0, z_0) และขนานกับ $\vec{V} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

มีสมการเป็น $x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct$

ในที่นี้ $(x_0, y_0, z_0) = (3, 1, 4)$ และ $a = -1, b = 1, c = -2$

ดังนั้นสมการเส้นตรง คือ

$$x = 3 - t, y = 1 + t, z = 4 - 2t \quad (\text{Parametric})$$

หรือ

$$\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-4}{-2} \quad (\text{Symmetric})$$

หาจุดจุดตัดบนระนาบ xy ให้ $z = 0$ จะได้

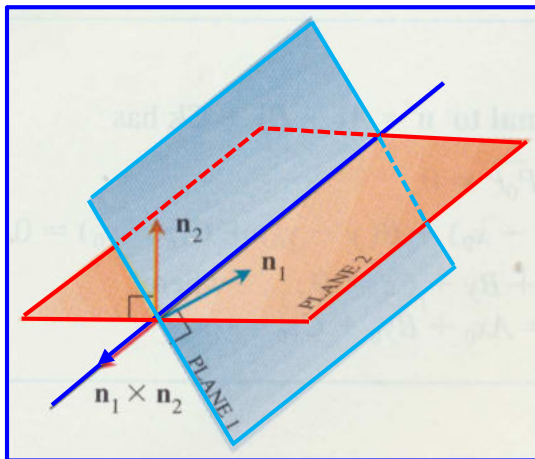
$$0 = 4 - 2t, t = 2$$

ถ้า $t = 2$ แล้ว $x = 3 - 2 = 1$ และ $y = 1 + 2 = 3$

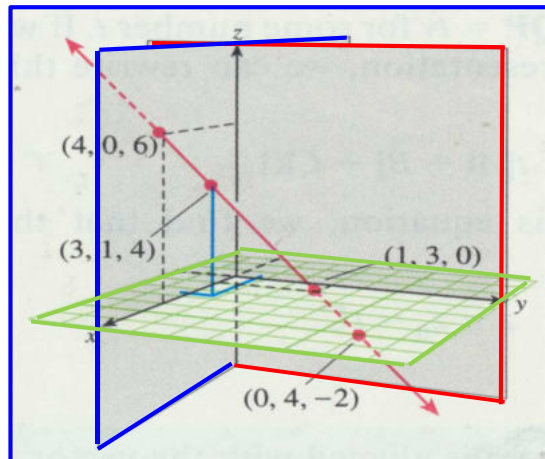
ดังนั้นเส้นตรงตัดระนาบ xy ที่จุด $(1, 3, 0)$

ในทำนองเดียวกัน จะตัดกับระนาบ $xz (y=0)$ ที่จุด $(4, 0, 6)$

และตัดกับระนาบ $yz (x=0)$ ที่จุด $(0, 4, -2)$ ดูรูป 3.57



รูป 3.56



รูป 3.57



บทที่ 4

แคลคูลัสเชิงเวกเตอร์

VECTOR CALCULUS

คาร์ล ฟรีดริค เกาส์ (Carl Fridrich Gauss)

ค.ศ. 1777 – 1855 ประเทศ เยอรมนี

ประวัติการทำงาน

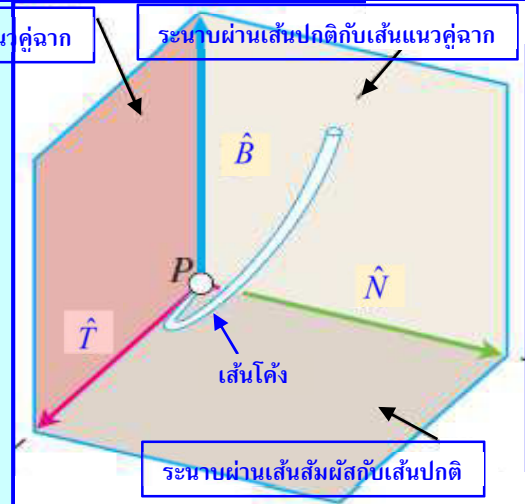
เกาส์เกิดที่ Brunswick ทางตอนเหนือของประเทศเยอรมนี บิดาเป็นชาวสวนและช่างปูนซึ่งไม่มีทั้งความสามารถและความพอใจที่จะพัฒนาความสามารถทางคณิตศาสตร์ของบุตร เกาส์แสดงความสามารถในทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่เยาว์วัย เมื่ออายุ 3 ปี ท่านค้นพบข้อผิดพลาดในบัญชีจ่ายเงินของบิดา เมื่ออายุ 10 ปีท่านสามารถหาผลบวกของ $1+2+3+\dots+100$ โดยสังเกตว่า $100+1 = 101$, $99+2 = 101$, $98+3 = 101$ ฯลฯ ซึ่งมีทั้งหมด 50 คู่ ดังนั้นคำตอบคือ 50×101 หรือ 5050 ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่สูงยิ่งของท่านนี้ทำให้ได้รับการสนับสนุนจากบุคคลต่าง ๆ ในแถบบ้านเกิดของท่าน Duke of Brunswick ได้สนับสนุนให้ท่านศึกษาที่วิทยาลัย Caroline ใน Brunswick (1792–1795) และที่มหาวิทยาลัย Gottingen (1795–1798) ต่อมาท่านศึกษาระดับปริญญาเอกที่มหาวิทยาลัย Helmstadt

ในปี 1807 ท่านได้รับแต่งตั้งเป็นศาสตราจารย์สาขาคณิตศาสตร์และผู้อำนวยการหอดูดาวที่ Gottingen และทำงานที่นั่นจนถึงแก่กรรม

ผลงาน

1. Disquisitiones Arithmeticae (1798) เป็นหนังสือรากฐานที่สำคัญยิ่งในทฤษฎีจำนวนสมัยใหม่ ท่านได้พัฒนา Congruence พิสูจน์ Fundamental Theorem of Arithmetic
2. วิทยานิพนธ์ปริญาเอก (1799) มีการพิสูจน์ Fundamental Theorem of Algebra (สมการโพลิโนเมียลที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะมีรากเป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อย 1 ราก) ได้มีการใช้ระบบจำนวนเชิงซ้อนและเรขาคณิตในระนาบเชิงซ้อน
3. Method of Least Square
4. Hypergeometric Series (1812)
5. Disquisitiones Arithmeticae Corcorum circa Sierfocoes Cirvas (1827) เกี่ยวกับ Intrinsic Differential Geometry
6. Biquadratic Residur (1831) พัฒนาจำนวนเชิงซ้อนในเชิงพีชคณิตของคู่อันดับของจำนวนจริง พัฒนา Gaussian integers
7. พัฒนา Potential Theory ให้เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ (1839) พัฒนา Divergence Theorem และ Dirichlet's Principle
8. พัฒนาเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด

4.2 เวกเตอร์สัมผัสและ เวกเตอร์ตั้งฉาก (Tangent Vector And Normal Vector)



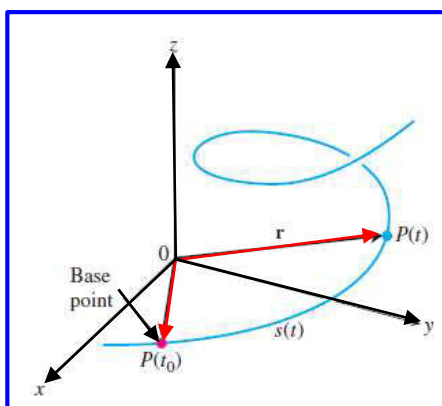
ถ้าให้ $\vec{r}(t)$ เป็นเส้นโค้งซึ่งมี t เป็นตัวแปรเสริม (Parameter) ให้ P_0 เป็นจุดบนเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$ ณ ที่ $t = t_0$ แล้วเราจะได้ว่า

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t=t_0} = \vec{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

และจะเรียก $\vec{r}'(t)$ ว่า เวกเตอร์สัมผัส (Tangent Vector) ของเส้นโค้ง ณ ที่จุด $t = t_0$ และจะเรียก

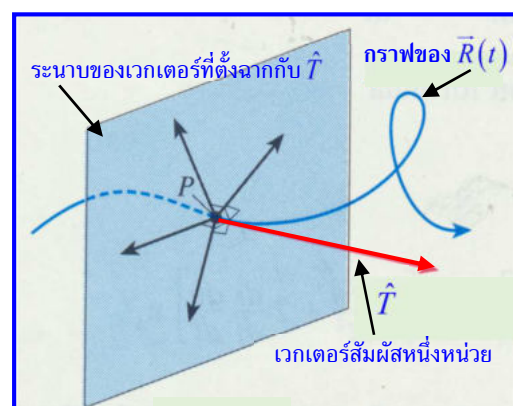
$$\hat{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \quad \dots\dots\dots(4.1)$$

ว่าเป็นเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย (Unit Tangent Vector) ของเส้นโค้ง $\vec{r}(t)$ ณ จุด t ใดๆ ดังรูป 4.35

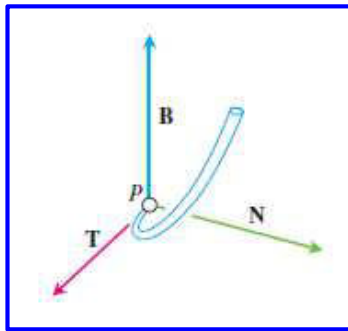


ก.

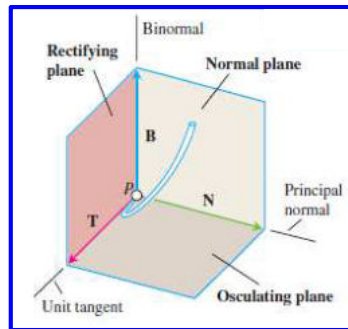
รูป 4.35



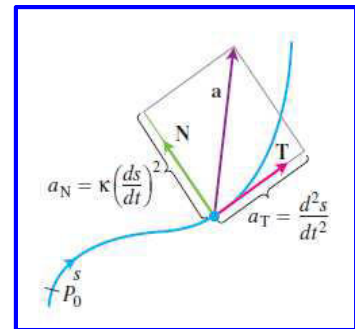
ข.



รูป 4.43 ก.



ข.



ค.

Tangent และ Normal Component ของ ความเร่ง

ถ้าให้ $\vec{a} = a_T \hat{T} + a_N \hat{N}$

แล้วจะได้

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d}{dt} \|\vec{R}'(t)\|$$

Tangential Component

และ

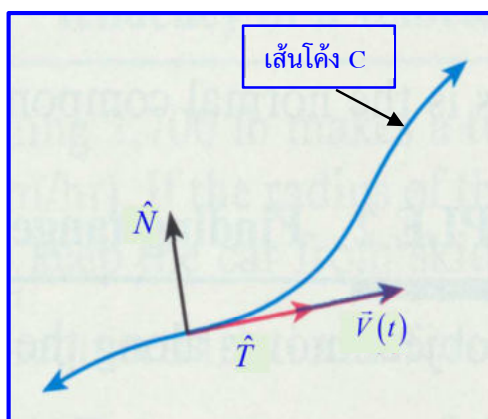
$$a_N = k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = k \|\vec{R}'(t)\|^2$$

Normal component

และ

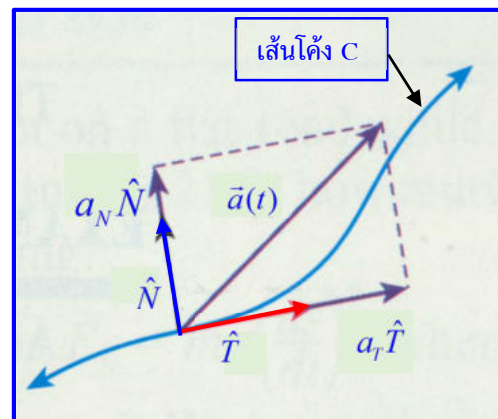
$$|a_N| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - a_T^2} k$$

รูป 4.44



ก.

รูป 4.44



ข.

ตัวอย่าง 4.31

จงหา เวกเตอร์สัมผัสและเวกเตอร์ปกติขนาดหนึ่งหน่วย $\hat{T}$, $\hat{N}$ ของเส้นโค้ง

$$\vec{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\hat{i} + (\sin t - t \cos t)\hat{j}, \quad t > 0 \quad \text{มีกราฟดังรูป 4.45}$$

วิธีทำ อนุพันธ์ของ $\vec{R}(t)$ เทียบกับ t เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\begin{aligned}\vec{R}'(t) &= (-\sin t + \sin t + t \cos t)\hat{i} + (\cos t - \cos t + t \sin t)\hat{j} \\ &= (t \cos t)\hat{i} + (t \sin t)\hat{j}\end{aligned}$$

ซึ่งมีขนาด

$$\begin{aligned}\|\vec{R}'(t)\| &= \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} = \sqrt{t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} \\ &= \sqrt{t^2} = |t| = t\end{aligned}$$

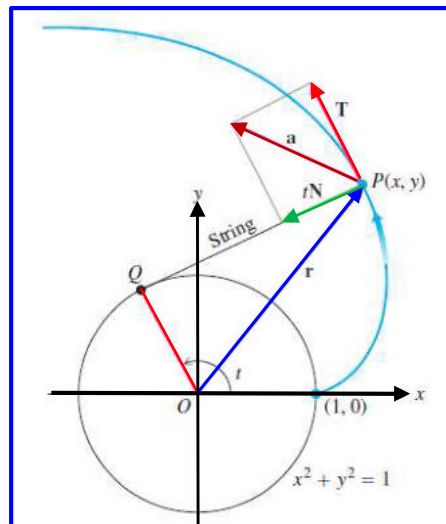
$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \hat{T}(t) &= \frac{\vec{R}'(t)}{\|\vec{R}'(t)\|} = \frac{(t \cos t)\hat{i} + (t \sin t)\hat{j}}{t} \\ &= (\cos t)\hat{i} + (\sin t)\hat{j}\end{aligned}$$

หาเวกเตอร์ปกติขนาดหนึ่งหน่วย $\hat{N}$ เริ่มด้วยหาอนุพันธ์ของ $\hat{T}(t)$ เทียบกับ t ; $\hat{T}'(t)$

$$\text{จะได้ } \hat{T}'(t) = (-\sin t)\hat{i} + (\cos t)\hat{j}$$

$$\text{และ } \|\hat{T}'(t)\| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{N}(t) = \frac{\hat{T}'(t)}{\|\hat{T}'(t)\|} = (-\sin t)\hat{i} + (\cos t)\hat{j} \quad \square$$



$$\vec{R}(t) = (\cos t + t \sin t)\hat{i} + (\sin t - t \cos t)\hat{j}, \quad t > 0$$

รูป 4.45

ตัวอย่าง 4.39

จงหาความยาวของเส้นโค้งเกลียวกลม (Circular helix)

กำหนดโดย $\vec{R}(t) = (3\cos t)\hat{i} + (3\sin t)\hat{j} + 4t\hat{k}$

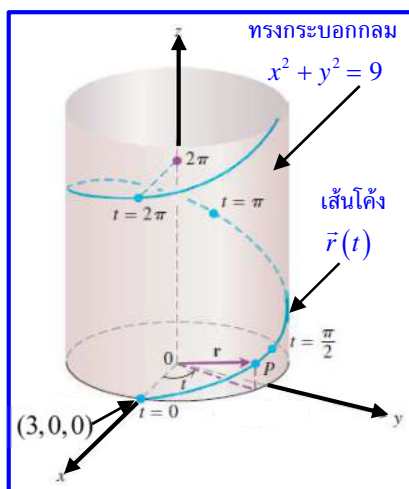
สำหรับ $0 \leq t \leq 2\pi$ มีกราฟดังแสดงในรูป 4.48

วิธีทำ ในที่นี้ $x(t) = 3\cos t$, $y(t) = 3\sin t$ และ $z(t) = 4t$

ดังนั้น $x'(t) = -3\sin t$, $y'(t) = 3\cos t$ และ $z'(t) = 4$

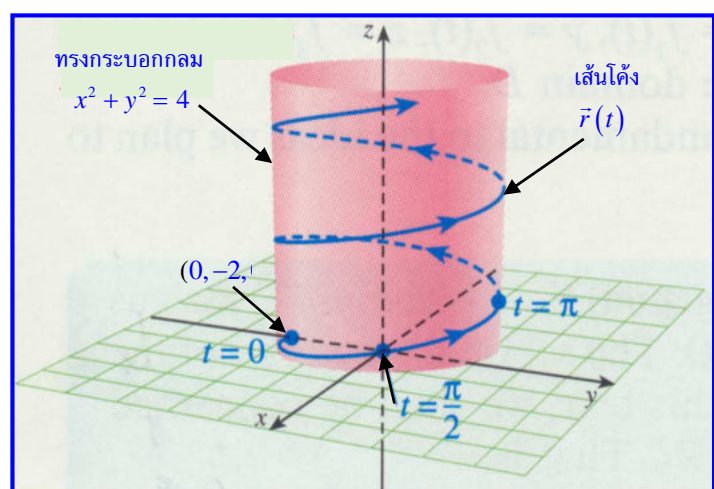
จากทฤษฎี 4.11 จะได้ ความยาวเส้นโค้งเกลียวกลมเป็น

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + 4^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t) + 16} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 5 dt = 10\pi \end{aligned}$$



$$\vec{R}(t) = (3\cos t)\hat{i} + (3\sin t)\hat{j} + (4t)\hat{k}$$

ก.



$$\vec{R}(t) = (2\sin t)\hat{i} - (2\cos t)\hat{j} + (3t)\hat{k}$$

รูป 4.48

ข.

ตัวอย่าง 4.86

จงหาสมการของระนาบสัมผัสและเส้นปกติของพื้นผิว

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 9 = 0 \quad (\text{พาราโบลอยด์}) \quad \text{ที่จุด } P_0(1, 2, 4)$$

วิธีทำ พื้นผิวพาราโบลอยด์มีกราฟดังแสดงในรูป 5.79

ระนาบสัมผัส คือ ระนาบที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเกรเดียนของ f ที่ $P_0(1, 2, 4)$

เกรเดียนของ f คือ

$$\nabla f(x, y, z) = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + \hat{k}$$

$$\text{ที่จุด } P_0(1, 2, 4) \quad , \quad \nabla f(1, 2, 4) = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$$

เพราะฉะนั้น สมการระนาบสัมผัสผ่านจุด $P_0(1, 2, 4)$ และ

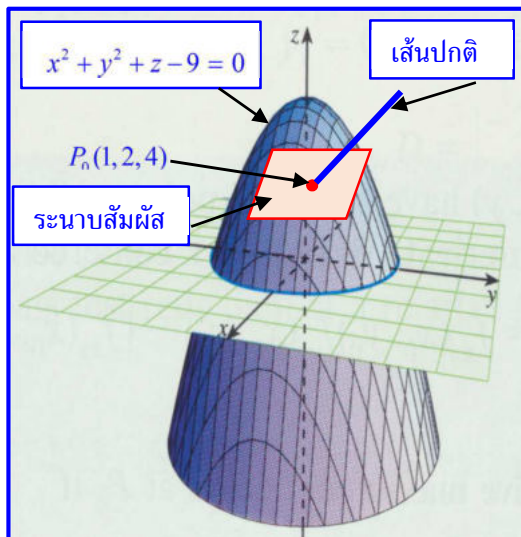
มีเวกเตอร์ปกติ $\nabla f(1, 2, 4) = 2\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$ คือ

$$2(x-1) + 4(y-2) + 1(z-4) = 0$$

$$\text{หรือ} \quad 2x + 4y + z = 14$$

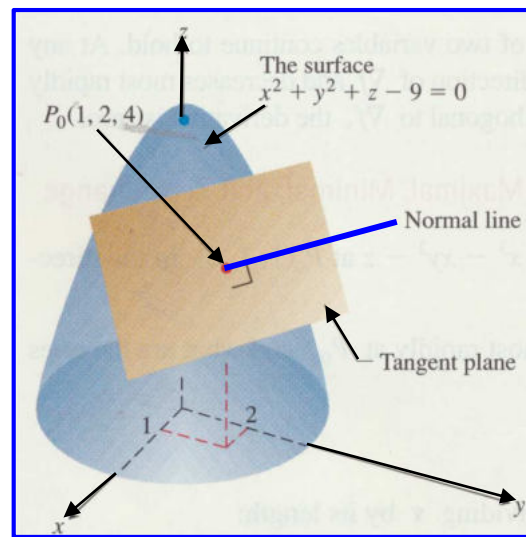
และ สมการของเส้นปกติของพื้นผิว f ที่จุด $P_0(1, 2, 4)$ คือ

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + at = 1 + 2t \\ y &= y_0 + bt = 2 + 4t \\ z &= z_0 + ct = 4 + t \end{aligned} \right\}$$



ก.

รูป 4.79

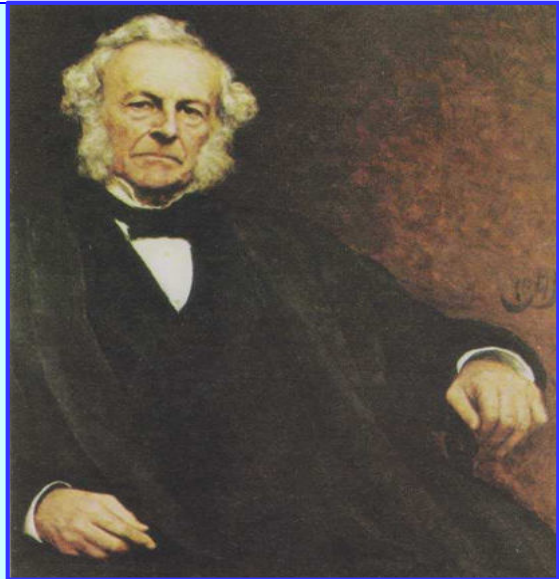


ข.

บทที่ 5

อินทิกรัลเชิงผิวโค้ง

SURFACE INTEGRALS



ยอร์ช กาเบรียล สโตกส์

(George Gabriel Stokes)

ค.ศ. 1819 - 1903

ประเทศ อังกฤษ

ประวัติการศึกษาและการทำงาน

George Stokes เกิดที่ประเทศอังกฤษท่านเป็นนักฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Physicist) ทำงานในตำแหน่ง ศาสตราจารย์ด้านคณิตศาสตร์ แห่งมหาวิทยาลัย Cambridge ตั้งแต่ ค.ศ. 1849 และเสียชีวิตเมื่อ 1903 เขาได้ถ่ายทอดความรู้ต่าง ๆ ทางด้านไฟฟ้า และแม่เหล็กไฟฟ้าต่อเพื่อนของเขาชื่อ William Thomson ซึ่งรู้จักกันในนามของ Lord Kelvin

มีเรื่องแปลกเกิดขึ้นกับเขาเกี่ยวเรื่องผลงานของเขาคือ ทฤษฎีที่ชื่อว่า Stoke's Theorem ไม่ได้เป็นทฤษฎีที่เกิดจากความคิดของเขาทั้งหมดเขาได้รับแนวคิดในเรื่องนี้มาจากเพื่อนของเขาชื่อ William Thompson ซึ่งคิดขึ้นเป็นคนแรกใน ปีค.ศ. 1850 แต่ใน 2-3 ปี ต่อมาเขาได้เขียนทฤษฎีนี้เป็นคำถามในการสอบครั้งหนึ่งสำหรับ Smith Prize ทฤษฎีนี้ก็เลยรู้จักในนามของ Stoke's Theorem ตั้งแต่นั้นมา ในทางกลับกันหลักการวิเคราะห์สเปกตรัม (Principle of Spectrum Analysis) ซึ่งเขาเองเป็นคนค้นคิดกลับถูกลืม และในปัจจุบันผู้คนกลับไปยกย่อง และให้เครดิตกับ

Bunsen และ Kirchhoff แทน

ผลงาน

1. Stoke's Theorem เป็นการขยายแนวคิดทฤษฎีของ Green จากใน 2 มิติเป็น 3 มิติ
2. เป็นผู้ทำให้วงการทางวิทยาศาสตร์ในยุคนั้นเปลี่ยนโฉมในการพัฒนาไปอย่างมาก
3. เป็นผู้พัฒนาทฤษฎีที่เกี่ยวกับ Hydrodynamics Elasticity , Gravity , Sound , Heat , Meteorology และ Salar Physics
4. ได้วางพื้นฐานเกี่ยวกับทฤษฎีทางไฟฟ้า และทฤษฎีแม่เหล็กไฟฟ้าโดยเฉพาะอย่างยิ่งต่อเพื่อนของเขาชื่อ William Thomson
5. เป็นผู้ให้หลักการวิเคราะห์ สเปกตรัม (Principle of Spectrum Analysis)

ตัวอย่าง 5.27

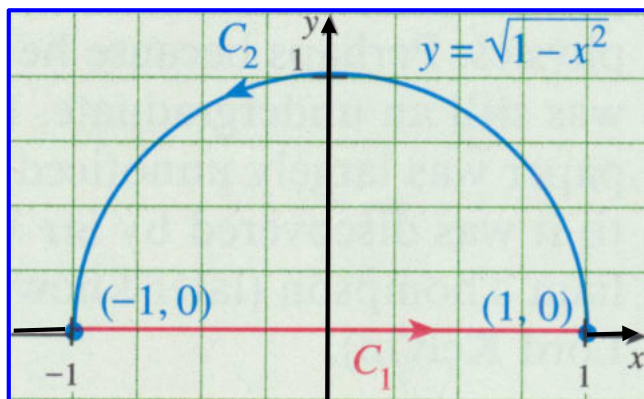
จงหางานที่เกิดจากแรง $\vec{F}(x, y) = (x + xy^2)\vec{i} + 2(x^2y - y^2 \sin y)\vec{j}$ เคลื่อนวัตถุไปตามเส้นโค้ง C ซึ่งกำหนดโดยรูป 5.27

วิธีทำ ให้ W แทน งานที่ได้จากการเคลื่อนที่วัตถุด้วยแรง $\vec{F}$ ไปตามเส้นโค้ง C ซึ่งเป็นวิถีปิด (Close Path)

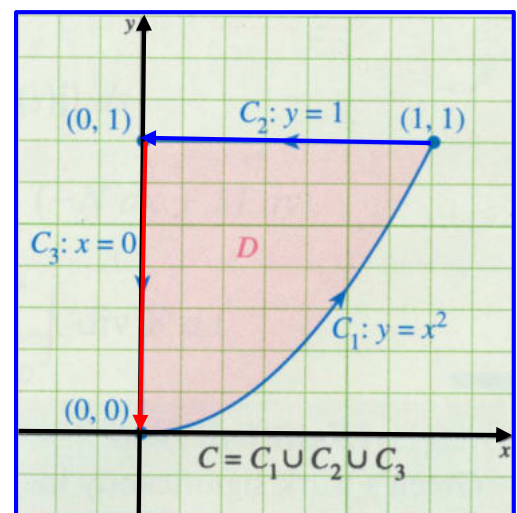
$$\text{กำหนดโดย } W = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$$

โดยที่ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่หาอนุพันธ์ย่อยได้บน D และ D เป็นบริเวณปิดอย่างง่าย ดังนั้น เราสามารถประยุกต์ ทฤษฎีของกรีน หาอินทิกรัลเชิงเส้นได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} W &= \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(2x^2y - 2y^2 \sin y) - \frac{\partial}{\partial y}(x + xy^2) \right] dA \\ &= \iint_R (4xy - 2xy) dA = 2 \int_0^1 \int_{x^2}^1 xy \, dy \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} xy^2 \Big|_{y=x^2}^{y=1} dx = \int_0^1 (x - x^5) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^6 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



รูป 5.26



รูป 5.27

ตัวอย่าง 5.40

จงหาค่าของ $\iint_R \vec{F} \cdot \hat{N} \, ds$ เมื่อ

$$\vec{F} = x\hat{i} - 5y\hat{j} + 4z\hat{k} \text{ และ } S \text{ ประกอบด้วย}$$

$$S_1 : x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$$

$$S_2 : z = 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

ดังรูป 5.44 ข.

วิธีทำ บน S_1 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยพุ่งออก $\hat{N}_1 = -\hat{i}$ และ

$$\hat{N}_1 = (x\hat{i} - 5y\hat{j} + 4z\hat{k}) \cdot (-\hat{i})$$

$$= -x$$

$$= 0 \quad (x = 0 \text{ บน } S_1)$$

ดังนั้น $\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{N}_1 \, ds_1 = 0$

บน S_2 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยพุ่งออก $\hat{N}_2 = \hat{k}$

$$\vec{F} \cdot \hat{N}_2 = \vec{F} \cdot \hat{k}$$

$$= 4z$$

$$= 4 \quad (z = 1 \text{ บน } S_2)$$

ดังนั้น $\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{N}_2 \, ds_2 = \iint_{S_2} 4 \, ds_2$

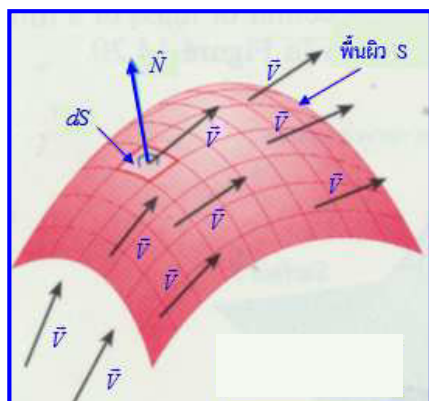
$$= 4 \text{ (พื้นที่ของ } S_2)$$

$$= 4 \text{ ตารางหน่วย}$$

ในที่สุด

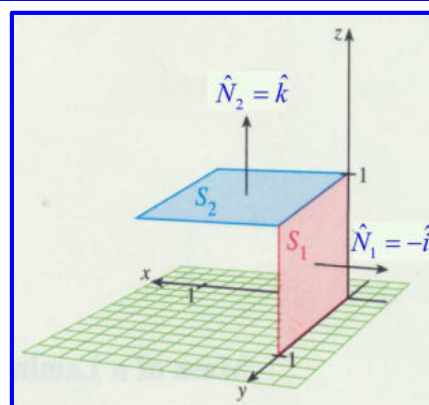
$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, ds = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{N}_1 \, ds_1 + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \hat{N}_2 \, ds_2$$

$$= 0 + 4 = 4$$



ก.

รูป 5.44



ข.

ตัวอย่าง 5.48

จงหา พื้นที่ส่วนที่เป็นหมวกแคปซึ่งตัดจากครึ่งทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $z \geq 0$ โดยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$ ดูรูป 5.52

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูป $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0$

ให้ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2$

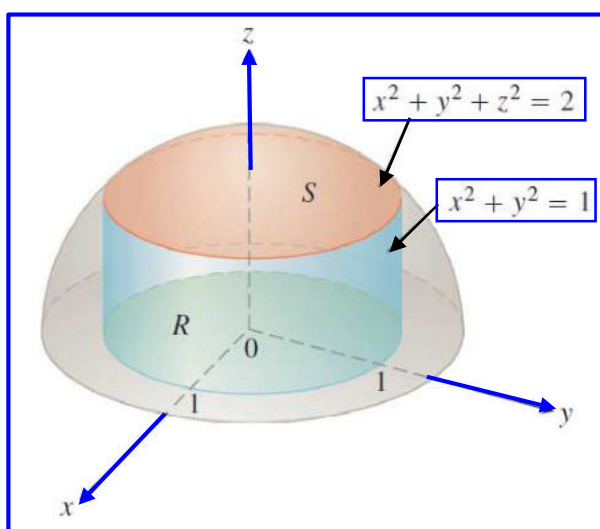
$$\nabla f = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} = 2x\hat{i} + 2y\hat{j} + 2z\hat{k}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } \|\nabla f\| &= \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2} \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} \\ &= 2\sqrt{2} \quad (\because x^2 + y^2 + z^2 = 2) \end{aligned}$$

เลือกฉายผิวโค้งครึ่งทรงกลมลงบนระนาบ xy จึงให้ $\hat{P} = \hat{k}$

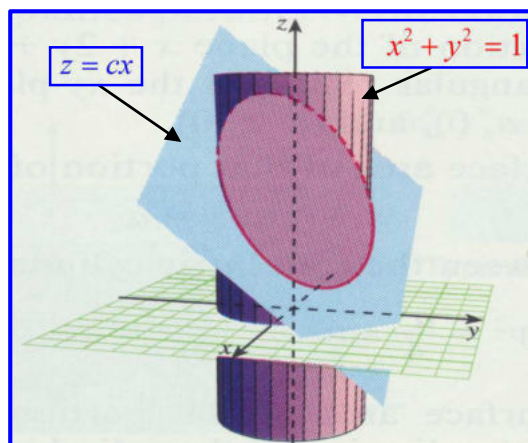
$$|\nabla f \cdot \hat{P}| = |\nabla f \cdot \hat{k}| = |2z| = 2z \quad (\because z \geq 0 \text{ จะได้ว่า } |z| = z)$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } S &= \iint_S ds = \iint_R \frac{\|\nabla f\|}{|\nabla f \cdot \hat{P}|} dA \\ &= \iint_S \frac{2\sqrt{2}}{2z} dA = \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z} \\ &= \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{\sqrt{2-x^2-y^2}} = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{\sqrt{2-r^2}} \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[-(2-r^2)^{1/2} \right]_0^1 d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}-1) d\theta = 2\pi(2-\sqrt{2}) \text{ ตารางหน่วย} \quad \square \end{aligned}$$



รูป 5.52

ตัวอย่าง 5.50	จงหา พื้นที่ของวงรีที่ตัดจากระนาบ $z = cx$ โดยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 1$
อินทิกรัลในระบบพิกัดเชิงขั้ว	วิธีทำ ให้ $f(x, y, z) = z - cx$ $\nabla f = f_x \hat{i} + f_y \hat{j} + f_z \hat{k} = -c \hat{i} + \hat{k}$ $\ \nabla f\ = \sqrt{c^2 + 1}, \quad \text{เลือก } \hat{P} = \hat{k} \Rightarrow \nabla f \cdot \hat{P} = 1$ $S = \iint_S \frac{\ \nabla f\ }{ \nabla f \cdot \hat{P} } dA$ $= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sqrt{c^2 + 1} dA$ $= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{c^2 + 1} r dr d\theta$ $= \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{c^2 + 1}}{2} d\theta$ $= \pi \sqrt{c^2 + 1}$ ดังรูป 5.54 □



รูป 5.54

ตัวอย่าง 5.51	จงหา พื้นที่ผิวของบริเวณที่ตัดจากระนาบ $x + 2y + 2z = 5$ โดยมีทรงกระบอกพาราโบลา (Parabolic Cylinder) $x = y^2$ ล้อมด้านข้าง ดังรูป 5.55
	วิธีทำ ให้ $f(x, y, z) = x + 2y + 2z$ เพราะว่า $ds = \frac{\ \nabla f\ }{ \nabla f \cdot \hat{P} } dA$ โดยที่ $\hat{P} = \hat{k}, \quad \nabla f = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} \Rightarrow \ \nabla f\ = 3, \quad \nabla f \cdot \hat{P} = 2$

ตัวอย่าง 5.65

ถ้าให้ $\hat{N}$ เป็นเวกเตอร์ตั้งฉากหนึ่งหน่วยที่พุ่งออกจากผิวโค้งทรงรี

$$S : 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, \quad z \geq 0$$

ให้ $\vec{F} = y\hat{i} + x^2\hat{j} + ((x^2 + y^4)^{3/2} \sin e^{\sqrt{xyz}})\hat{k}$

จงหา ค่าอินทิกรัล $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} \, ds$ (Flux ของ Curl) ดูรูป 5.67

วิธีทำ เนื่องจาก $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} \, ds = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$

ในที่นี้อาจจะคำนวณในรูปของ $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ จะง่ายกว่า เนื่องจากภาพฉายของ S บน

ระนาบ xy เป็นรูปวงรี ดังรูป 5.67

$$R_{xy} : 4x^2 + 9y^2 = 36, \quad z = 0$$

ซึ่งมีสมการแบบพารามेटริกเป็น

$$x = 3\cos t \text{ และ } y = 2\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad z = 0 \quad \text{จะได้}$$

$$\vec{F}(t) = 2\sin t \hat{i} + 9\cos^2 t \hat{j} + (9\cos^2 t + 16\sin^4 t) \sin e^{\sqrt{(3\cos t)(2\sin t)(0)}} \hat{k}$$

$$C : \vec{R}(t) = (3\cos t)\hat{i} + (2\sin t)\hat{j}$$

จะได้ $d\vec{R} = -3\sin t \, dt \hat{i} + 2\cos t \, dt \hat{j}$

และ $\vec{F}(t) \cdot d\vec{R} = -6\sin^2 t \, dt + 18\cos^3 t \, dt$

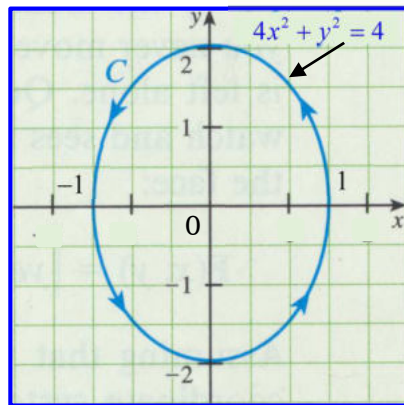
ดังนั้น $\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} \, ds = \int_0^{2\pi} (-6\sin^2 t + 18\cos^3 t) \, dt$

$$= -6 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 2t}{2} \right) dt + 18 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, d(\sin t)$$

$$= -3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt + 18 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d(\sin t)$$

$$= \left[-3t + \frac{3}{2} \sin 2t + 18 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \right]_0^{2\pi} = -6\pi$$





รูป 5.68

ตัวอย่าง 5.67

ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดอย่างง่าย และราบเรียบในระนาบ $2x + 2y + z = 2$

จงแสดงว่า $\oint_C 2x \, dx + 3z \, dy - x \, dz$ จะมีค่าเท่ากับ สำหรับเส้นโค้ง C

ซึ่งล้อมรอบพื้นที่ที่มีค่าเท่ากับ

รูป 5.69

วิธีทำ $\oint_C 2x \, dx + 3z \, dy - x \, dz = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{R}$ เมื่อ

$$\vec{F} = 2y\hat{i} + 3z\hat{j} - x\hat{k} \quad \text{และ} \quad C: \vec{R} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

จาก ทฤษฎีของสโตกส์ ที่ว่า $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} \, ds$

$$\text{เพราะว่า} \quad \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 3z & -x \end{vmatrix} = -3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\text{และ} \quad \hat{N} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{1}{3}\hat{k}$$

$$\text{จะได้} \quad (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{N} = (-3)\left(\frac{2}{3}\right) + (1)\left(\frac{2}{3}\right) + (-2)\left(\frac{1}{3}\right) = -2$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \oint_C 2y \, dx + 3z \, dy - x \, dz = \iint_R (-2) \, dA = -2 \iint_R dA$$

$$= 2 \text{ (พื้นที่ของ } R \text{ ซึ่งล้อมด้วยเส้นโค้ง)}$$



ตัวอย่าง 5.70

จงหาค่า $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{N} \, ds$ (Flux Integral)

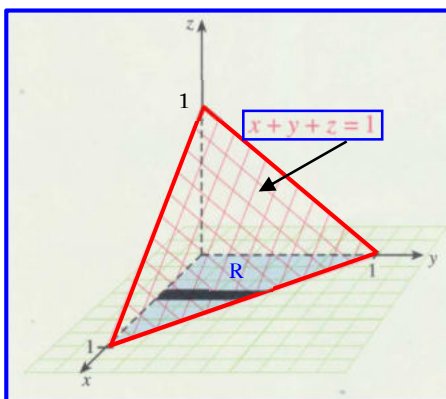
เมื่อ $\vec{F} = x^2\hat{i} + xy\hat{j} + x^3y\hat{k}$ และ S เป็นพื้นที่ผิวของรูปทรงสี่ด้านที่ล้อมด้วยระนาบ $x + y + z = 1$ และระนาบพิกัดจากทั้งสาม (ระนาบ xy , yz และ xz)
เมื่อ $\hat{N}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตั้งฉากที่พุ่งออกจาก S ดังรูป 5.72

วิธีทำ เนื่องจาก S เป็นผิวโค้งปิด โดยใช้ ทฤษฎีไดเวอร์เจนซ์ ที่ว่า

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} \, ds = \iiint_D \text{div } \vec{F} \, dv \quad \dots\dots\dots(1)$$

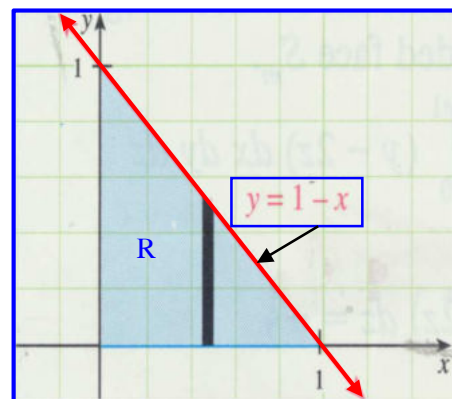
เพราะว่า $\text{div } \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) + \frac{\partial}{\partial z}(x^3y) = 2x + x + 0 = 3x$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \iiint_D \text{div } \vec{F} \, dv &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 3x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 3x(1-x-y) \, dy \, dx \\ &= 3 \int_0^1 \left[x(1-x)y - \frac{1}{2}xy^2 \right]_0^{1-x} dx \\ &= 3 \int_0^1 x(1-x)^2 - \frac{1}{2}x(1-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$



ก.

รูป 5.72



ข.

ตัวอย่าง 5.73

จงหา Flux ที่พุ่งออก (Out ward Flux) ของ

$$\vec{F} = (5x^3 + 12xy^2)\hat{i} + (y^3 + e^y \sin z)\hat{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\hat{k}$$

เมื่อ D เป็นบริเวณพื้นผิวของรูปทรงตันที่อยู่ระหว่างทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ และ

$$\text{ทรงกลม } x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

ดังรูป 5.75

วิธีทำ จากนิยาม $Flux = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{N} ds = \iiint_D \text{div } \vec{F} dv$

เพราะว่า $\frac{\partial}{\partial x}(5x^3 + 12xy^2) = 15x^2 + 12y^2$, $\frac{\partial}{\partial y}(y^3 + e^y \sin z) = 3y^2 + e^y \sin z$

และ $\frac{\partial}{\partial z}(5z^3 + e^y \cos z) = 15z^2 - e^y \sin z$

จะได้ $\text{div } \vec{F} = (15x^2 + 12y^2) + (3y^2 + e^y \sin z) + (15z^2 - e^y \sin z)$

$$= 15(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{ดังนั้น}$$

$$\iiint_D \text{div } \vec{F} dv = \iiint_D 15(x^2 + y^2 + z^2) dv$$

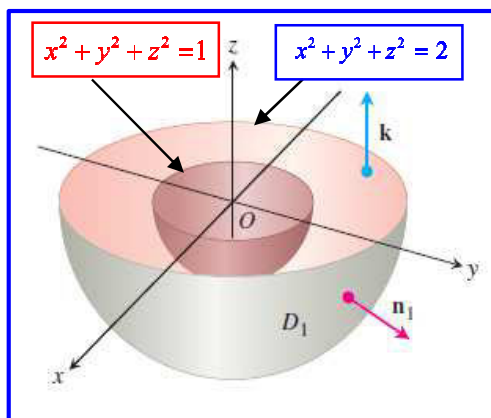
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{2}} 15(\rho^2) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (12\sqrt{2} - 3) \sin \phi d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (24\sqrt{2} - 6) d\theta = (48\sqrt{2} - 12)\pi$$

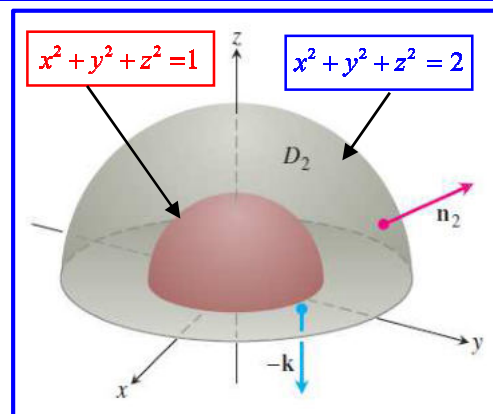


อินทิกรัลในระบบ
พิกัดทรงกลม



ก.

รูป 5.75



ข.

บรรณานุกรม

- Anderson, Salas Hille. **Calculus 5th Edition**. John Wiley, U.S.A , 1986.
- Adam, Robert A. **Calculus 4th Edition**. Addison Wesley, U.S.A , 1991.
- Anton, Howard. **Calculus 4th Edition**. John Wiley, U.S.A, 1992.
- Bahder, Thomas B. **Mathematica For Scientists and Engineers**. Addison Wesley, U.S.A, 1995.
- Baipai, Mustoe Walker. **Engineering Mathematics 2nd Edition**. John Wiley, U.S.A, 1990.
- Boyce, William E. **Calculus**. John Wiley, U.S.A, 1988.
- Burgmeier, James. W. **Calculus With Applications**. McGraw-Hill, U.S.A, 1990.
- Cramdall, Richard. **Mathematica for the Sciences**. Addison Wesley, U.S.A, 1990.
- Dale Varberg and Purcell, Edwin J. **Calculus 7th Edition**. Prentice-Hall International, U.S.A, 1997.
- Donnelly, Dinnis. **Mathcad for Introductory Physics**. Addison Wesley, U.S.A, 1992.
- Evans. **Engineering Mathematics 2nd Edition**. Chapman & Hall, 1993.
- Gerald L. Bardley & Karl J. Smith . **Multivariables Calculus**, Prentice-Hall International, U.S.A, 1995.
- Grove, Margaret. **Studymate HSC3 UNIT and HSC4 UNIT Mathematics**. McGraw-Hill, 1992.
- Holder, Derfranza, Pasachaff. **Calculus**. Brooks/Cole, 1995
- Jeffrey, Alam. **Essentials of Engineering Mathematics**. Chapman & Hall, 1995.
- James, Glyn. **Engineering Mathematics 2nd Edition**. Addison Wesley, U.S.A, 1996.
- Kaufmann, Jerome E. **Precalculus 3rd Edition**. PWS Publishing Company, 1995.
- Komaromi. **Sketching Curves**. Australia, 1990
- Mizrahi/Sullivan. **Calculus & Analytic Geometry 3rd Edition**. Wadsworth, 1990.
- Ostebee , Arnold. And Zoen , Porn. **Calculus**. Saunders College Publishing, New York, 1997.
- Repka, Joe. **Calculus & Analytic Geometry**. Wm.C.Brown Publishers, U.S.A, 1994.
- Smith, Cameron. **The Mathematica Graphics Guidebook**. Addison Wesley.
- Taylor, Gilligam. **Applied Calculus 3rd Edition**. Brooks/cole, 1993.
- Thomas/Finney. **Calculus 9th Edition**. Addison Wesley, 1996